135.

NOTE SUR LES COVARIANTS D'UNE FONCTION QUADRATIQUE, CUBIQUE, OU BIQUADRATIQUE À DEUX INDÉTERMINÉES.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. L. (1855), pp. 285—287.]

La théorie d'une fonction à deux indéterminées d'un degré quelconque, par exemple

$$(\lozenge)(x,\ y)^m,$$

dépend du système des *covariants* de la fonction, lequel est censé contenir la fonction elle-même.

Pour une fonction *quadratique* le système de covariants est

$$(a,\ b,\ c)(x,\ y)^2,$$
$$ac - b^2.$$

Pour la fonction *cubique*, le système est

$$(a,\ b,\ c,\ d)(x,\ y)^3,$$
$$(ac - b^2,\ ad - bc,\ bd - c^2)(x,\ y)^2,$$
$$(-a^2d + 3abc - 2b^3,\ -abd + 2ac^2 - b^2c,\ acd - 2b^2d + bc^2,\ ad^2 - 3bcd + 2c^3)(x,\ y)^3,$$
$$-a^2d^2 + 6abcd - 4ac^3 - 4b^3d + 3b^2c^2,$$

fonctions lesquelles, en supposant qu'on les représente par U, H, Φ, $\square$, satisfont identiquement à l'équation

$$\Phi^2 + \square U^2 = -4H^3.$$

Pour la fonction *biquadratique,* le système est

$$(a,\ b,\ c,\ d,\ e)(x,\ y)^4,$$

$$ae - 4bd + 3c^2,$$

$$(ac - b^2,\ 2ad - 2bc,\ ae + 2bd - 3c^2,\ 2be - 2cd,\ ce - d^2)(x,\ y)^4,$$

$$ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3,$$

$$\left.\left\{\begin{array}{llll} -a^2d & +3abc & -2b^3, & \\ -a^2e & -2abd & +9ac^2 & -6b^2c, \\ -5abe & +15acd & -10b^2d, & \\ +10a^2d & -10b^2e, & & \\ +5ade & +10bd^2 & -15bce, & \\ +ae^2 & +2bde & -9c^2e & +6cd^2, \\ +be^2 & -3cde & +2d^3, & \end{array}\right\}\right.(x,\ y)^6,$$

et ces fonctions, en supposant qu'on les représente par U, I, H, J, Φ, satisfont identiquement à l'équation

$$JU^3 - IU^2H + 4H^3 = -\Phi^2.$$

J'ajoute à ce système la fonction

$$\begin{aligned} I^3 - 27J^2 = \ & a^3e^3 - 12a^2bde^2 - 18a^2c^2e^2 + 54a^2cd^2e - 27a^2d \\ & + 54ab^2ce^2 - 6ab^2d^2e - 180abc^2de + 108abcd^3 + 81ac^4e \\ & - 54ac^3d^2 - 27b^4e^2 - 64b^3d^3 + 108b^3cde - 54b^2c^3e \\ & + 36b^2c^2d^2, \end{aligned}$$

qui est le *discriminant* de la fonction biquadratique.

Pour donner une application de ces formules, soit proposé de résoudre une équation quadratique, cubique ou biquadratique, ou autrement dit: de trouver un *facteur linéaire* de la fonction quadratique, cubique, ou biquadratique.

Il est assez singulier que pour la fonction quadratique la solution est en quelque sorte plus compliquée que pour les deux autres. En effet, il n'existe pas de solution symétrique, à moins qu'on n'introduise des quantités arbitraires et superflues; savoir, on trouve pour facteur linéaire de $(a,\ b,\ c)(x,\ y)^2$ l'expression

$$(a,\ b,\ c)(\alpha,\ \beta)(x,\ y) + \sqrt{-\square}\,.\,(\beta x - \alpha y),$$

où $(a,\ b,\ c)(\alpha,\ \beta)(x,\ y)$ dénote $a\alpha x + b\,(\alpha y + \beta x) + c\beta y$.

Pour la fonction *cubique,* l'équation $\Phi^2 + \square U^2 = -4H^3$ fait voir que les deux fonctions $\Phi + U\sqrt{-\square}$, $\Phi - U\sqrt{-\square}$ sont l'une et l'autre des cubes parfaits. L'expression

$$\sqrt[3]{\{\tfrac{1}{2}(\Phi + U\sqrt{-\square})\}} - \sqrt[3]{\{\tfrac{1}{2}(\Phi - U\sqrt{-\square})\}}$$

sera donc une fonction linéaire de x, y; et puisque cette fonction s'évanouit pour $U=0$, elle ne sera autre chose que l'un des facteurs linéaires de $(a, b, c, d)(x, y)^3$.

Pour la fonction *biquadratique*, en partant de l'équation

$$JU^3 - IU^2H + 4H^3 = -\Phi^2,$$

j'écris

$$M = \frac{I^3}{4J^2},$$

et je mets l'équation sous la forme

$$(1,\ 0, -M,\ M)(IH,\ JU)^3 = -\tfrac{1}{4} I^3 \Phi^2.$$

Donc, en supposant que ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 soient les racines de l'équation

$$(1,\ 0, -M,\ M)(\varpi,\ 1)^3 = 0,$$

ou plus simplement de l'équation

$$\varpi^3 - M(\varpi - 1) = 0,$$

ces expressions $IH - \varpi_1 JU$, $IH - \varpi_2 JU$, $IH - \varpi_3 JU$ seront toutes trois des carrés de fonctions quadratiques. L'expression

$$(\varpi_2 - \varpi_3)\sqrt{(IH - \varpi_1 JU)} + (\varpi_3 - \varpi_1)\sqrt{(IH - \varpi_2 JU)} + (\varpi_1 - \varpi_2)\sqrt{(IH - \varpi_3 JU)}$$

sera donc une fonction quadratique, et on voit sans peine qu'elle sera le carré d'une fonction *linéaire*. Or cette expression s'évanouit pour $U=0$; donc ce sera précisément le carré de l'un quelconque des facteurs linéaires de $(a, b, c, d, e)(x, y)^4$.

L'équation identique pour les covariants d'une fonction biquadratique donne lieu aussi (remarque que je dois à M. Hermite) à une transformation très élégante de *l'intégrale elliptique* $\int dx \div \sqrt{(a, b, c, d, e)(x, 1)^4}$.