137.

RECHERCHES ULTÉRIEURES SUR LES DÉTERMINANTS GAUCHES.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. L. (1855), pp. 299—313: Continuation of the Memoir t. XXXII. (1846) and t. XXXVIII. (1849); **52** and **69.**]

J'AI déjà donné une formule pour le développement d'un *déterminant gauche.* En prenant, pour fixer les idées, un cas particulier, soit

$$\overline{12345 \mid 12345} = \left|\begin{array}{ccccc} 11, & 12, & 13, & 14, & 15 \\ 21, & 22, & 23, & 24, & 25 \\ 31, & 32, & 33, & 34, & 35 \\ 41, & 42, & 43, & 44, & 45 \\ 51, & 52, & 53, & 54, & 55 \end{array}\right|,$$

(où $12 = -21$, &c., tandis que les quantités 11, 22, &c. ne s'évanouissent pas). Cette formule peut être écrite comme suit:

$$\begin{aligned} \overline{12345 \mid 12345} = {} & 11 \,.\, 22 \,.\, 33 \,.\, 44 \,.\, 55 \\ & + 11 \,.\, 22 \,.\, 33 \,.\, (45)^2 \\ & + 11 \,.\, 22 \,.\, 44 \,.\, (35)^2 \\ & + 11 \,.\, 22 \,.\, 55 \,.\, (34)^2 \\ & + 11 \,.\, 33 \,.\, 44 \,.\, (25)^2 \\ & + 11 \,.\, 33 \,.\, 55 \,.\, (24)^2 \\ & + 11 \,.\, 44 \,.\, 55 \,.\, (23)^2 \\ & + 22 \,.\, 33 \,.\, 44 \,.\, (15)^2 \\ & + 22 \,.\, 33 \,.\, 55 \,.\, (14)^2 \\ & + 22 \,.\, 44 \,.\, 55 \,.\, (13)^2 \\ & + 33 \,.\, 44 \,.\, 55 \,.\, (12)^2 \\ & + 11 \,.\, (2345)^2 \\ & + 22 \,.\, (1345)^2 \\ & + 33 \,.\, (1245)^2 \\ & + 44 \,.\, (1235)^2 \\ & + 55 \,.\, (1234)^2. \end{aligned}$$

Les expressions 12, 1234, &c. à droite sont ici des *Pfaffians*. On a

$$12 = 12,$$

$$1234 = 12.34 + 13.42 + 14.23$$

et en écrivant encore un terme, pour mieux présenter la loi:

$$\begin{aligned}123456 = \;& 12.34.56 + 13.45.62 + 14.56.23 + 15.62.34 + 16.23.45\\ & + 12.35.64 + 13.46.25 + 14.52.36 + 15.63.42 + 16.24.53\\ & + 12.36.45 + 13.42.56 + 14.53.62 + 15.64.23 + 16.25.34.\end{aligned}$$

J'ai trouvé récemment une formule analogue pour le développement d'un *déterminant gauche* bordé, tel que

$$\overline{\alpha 1234 \mid \beta 1234} = \left|\begin{array}{ccccc} \alpha\beta, & \alpha 1, & \alpha 2, & \alpha 3, & \alpha 4 \\ 1\beta, & 11, & 12, & 13, & 14 \\ 2\beta, & 21, & 22, & 23, & 24 \\ 3\beta, & 31, & 32, & 33, & 34 \\ 4\beta, & 41, & 42, & 43, & 44 \end{array}\right|;$$

cette formule est:

$$\begin{aligned}\overline{\alpha 1234 \mid \beta 1234} = \;& \alpha\beta \,.\, 11 \,.\, 22 \,.\, 33 \,.\, 44\\ & + \alpha\beta \,.\, 12 \,.\, 12 \,.\, 33 \,.\, 44\\ & + \alpha\beta \,.\, 13 \,.\, 13 \,.\, 22 \,.\, 44\\ & + \alpha\beta \,.\, 14 \,.\, 14 \,.\, 22 \,.\, 33\\ & + \alpha\beta \,.\, 23 \,.\, 23 \,.\, 11 \,.\, 44\\ & + \alpha\beta \,.\, 24 \,.\, 24 \,.\, 11 \,.\, 33\\ & + \alpha\beta \,.\, 34 \,.\, 34 \,.\, 11 \,.\, 22\\ & + \alpha\beta \,.\, 1234 \,.\, 1234\\ & + \alpha 1 \,.\, \beta 1 \,.\, 22 \,.\, 33 \,.\, 44\\ & + \alpha 2 \,.\, \beta 2 \,.\, 11 \,.\, 33 \,.\, 44\\ & + \alpha 3 \,.\, \beta 3 \,.\, 11 \,.\, 22 \,.\, 44\\ & + \alpha 4 \,.\, \beta 4 \,.\, 11 \,.\, 22 \,.\, 33\\ & + \alpha 123 \,.\, \beta 123 \,.\, 44\\ & + \alpha 124 \,.\, \beta 124 \,.\, 33\\ & + \alpha 134 \,.\, \beta 134 \,.\, 22\\ & + \alpha 234 \,.\, \beta 234 \,.\, 11.\end{aligned}$$

Il est à peine nécessaire de remarquer que dans les *Pfaffians* à droite, où entrent des symboles tels que 1α, $\beta 1$, &c., qui ne se trouvent pas dans le déterminant dont il s'agit, il faut écrire $1\alpha = -\alpha 1$, $\beta 1 = -1\beta$, &c. Le symbole $\beta\alpha$ ne se trouve ni dans le déterminant, ni au côté droit. Cependant il convient de poser $\beta\alpha = -\alpha\beta$; car cela étant, il serait permis de transformer les *Pfaffians*, en écrivant par exemple $\alpha\beta 12 = -\beta\alpha 12$.

Je remarque en passant que, si avant de poser l'équation $\beta\alpha = -\alpha\beta$, on suppose que les deux symboles α, β deviennent identiques (si par exemple on écrit $\alpha = \beta = 5$), on aurait par exemple

$$\alpha\beta\,.\,12 = \alpha\beta\,.\,12 + \alpha 1\,.\,2\beta + \alpha 2\,.\,\beta 1 = 55\,.\,12 + 51\,.\,25 + 52\,.\,51 = 55\,.\,12, \text{ \&c.,}$$

et on retrouverait ainsi la formule pour le développement de $\overline{12345 \mid 12345}$.

La nouvelle formule peut être appliquée immédiatement au développement des *déterminants mineurs*. En effet, en se servant de la notation des *matrices*, on aura

$$\left|\begin{array}{ccc} 11, & 12, & 13 \\ 21, & 22, & 23 \\ 31, & 32, & 33 \end{array}\right|^{-1} = \frac{1}{\overline{123 \mid 123}} \left|\begin{array}{ccc} +\overline{23 \mid 23}, & -\overline{13 \mid 23}, & -\overline{12 \mid 32} \\ -\overline{23 \mid 13}, & +\overline{13 \mid 13}, & -\overline{21 \mid 31} \\ -\overline{32 \mid 12}, & -\overline{31 \mid 21}, & +\overline{12 \mid 12} \end{array}\right|,$$

$$\left|\begin{array}{cccc} 11, & 12, & 13, & 14 \\ 21, & 22, & 23, & 24 \\ 31, & 32, & 33, & 34 \\ 41, & 42, & 43, & 44 \end{array}\right|^{-1} = \frac{1}{\overline{1234 \mid 1234}} \left|\begin{array}{cccc} +\overline{234 \mid 234}, & -\overline{134 \mid 234}, & -\overline{124 \mid 324}, & -\overline{123 \mid 423} \\ -\overline{234 \mid 134}, & +\overline{134 \mid 134}, & -\overline{214 \mid 314}, & -\overline{213 \mid 413} \\ -\overline{324 \mid 124}, & -\overline{314 \mid 214}, & +\overline{214 \mid 214}, & -\overline{312 \mid 412} \\ -\overline{423 \mid 123}, & -\overline{413 \mid 213}, & -\overline{412 \mid 312}, & +\overline{123 \mid 123} \end{array}\right|,$$

et ainsi de suite. On suppose toujours que chaque terme de la matrice à droite soit divisé par le dénominateur commun. On voit que les déterminants *mineurs* qui correspondent à des termes tels que $\alpha\alpha$, sont des déterminants *gauches ordinaires*, avec le signe $+$, tandis que les déterminants mineurs qui correspondent à des termes tels que $\alpha\beta$, sont des déterminants *gauches bordés* tels que $\overline{\beta \ldots \mid \alpha \ldots}$, avec le signe $-$.

Pour donner des exemples de la vérification de ces formules, je remarque que l'on doit avoir

$$\begin{aligned} \overline{123 \mid 123} = {} & 11\,.\,\overline{23 \mid 23} \\ & -12\,.\,\overline{23 \mid 13} \\ & -13\,.\,\overline{32 \mid 12}: \end{aligned}$$

équation qui peut aussi être écrite sous la forme

$$\begin{aligned} \overline{123 \mid 123} = {} & 11\,.\,\overline{23 \mid 23} \\ & +21\,.\,\overline{23 \mid 13} \\ & +31\,.\,\overline{32 \mid 12}. \end{aligned}$$

En effet, en développant les deux côtés, on obtient:

$$\begin{aligned}11.22.33 + 11.(23)^2 + 22.(13)^2 + 33.(12)^2 = 11.(22.33 &+ (23)^2)\\ +21.(21.33 &+ 23.13\dagger)\\ +31.(31.22 &+ 32.12\dagger).\end{aligned}$$

On voit que les deux termes marqués par un † se détruisent et que l'équation est *identique*. On doit avoir de même,

$$\begin{aligned}\overline{1234 \mid 1234} = 11 &. \overline{234 \mid 234}\\ -12 &. \overline{234 \mid 134}\\ -13 &. \overline{324 \mid 124}\\ -14 &. \overline{423 \mid 123},\end{aligned}$$

ou, ce qui est la même chose:

$$\begin{aligned}\overline{1234 \mid 1234} = 11 &. \overline{234 \mid 234}\\ +21 &. \overline{234 \mid 134}\\ +31 &. \overline{324 \mid 124}\\ +41 &. \overline{423 \mid 123};\end{aligned}$$

c'est-à-dire, en développant des deux côtés:

$$\begin{aligned}&11.22.33.44 + 11.22.(34)^2 + 11.33.(24)^2 + 11.44.(23)^2\\ &\qquad + 22.33.(14)^2 + 22.44.(13)^2 + 33.44.(12)^2 + (1234)^2 =\\ &11\,[22.33.44 + 22\,(34)^2 + 33\,(42)^2 + 44\,(23)^2]\\ &+21\,[21.33.44 + 2134.34^* + 23.13.44\dagger + 24.14.33\dagger]\\ &+31\,[31.22.44 + 3124.24^* + 32.12.44\dagger + 34.14.22\dagger]\\ &+41\,[41.22.33 + 4123.23^* + 42.12.33\dagger + 43.13.22\dagger].\end{aligned}$$

Cette expression est en effet identique, comme on le voit en observant que les six termes marqués par un † se détruisent deux à deux, et que les trois termes marqués par un (*) sont ensemble équivalents à $(1234)^2$.

Je remarque que le nombre des termes du développement du déterminant gauche est toujours une *puissance de* 2, et que de plus, ce nombre se réduit à la moitié, en réduisant à zéro un terme quelconque $\alpha\alpha$. Mais outre cela, le déterminant prend dans cette supposition la forme de déterminant d'un ordre inférieur de l'unité. Je considère par exemple le déterminant gauche $\overline{123 \mid 123}$. En y faisant $33=0$ et en accentuant, pour y mettre plus de clarté, tous les symboles, on trouve

$$\overline{123 \mid 123'} = 11'.(23')^2 + 22'.(13')^2.$$

De là, en écrivant

$$11 = 13'.11',\quad 12 = 11'.23',$$
$$22 = 13'.22',$$

on obtient

$$\overline{12 \mid 12} = 11 . 22 + (12)^2$$
$$= 11'.\{22'.(13')^2 + 11'.(23')^2\},$$

c'est-à-dire

$$\overline{12 \mid 12} = 11' . \overline{123 \mid 123'}.$$

On a de même

$$\overline{1234 \mid 1234'} = 11' . 22' . (34')^2 + 11' . 33' . (24')^2 + 22'33' (14')^2 + (1234')^2$$

et de là, en écrivant

$$11 = 14'.11',\quad 12 = 11'.24',\quad 23 = 1234',$$
$$22 = 14'.22',\quad 13 = 11'.34',$$
$$33 = 14'.33',$$

on obtient

$$\overline{123 \mid 123} = 11 . 22 . 33 + 11 . (23)^2 + 22 . (31)^2 + 33\,(12)^2$$
$$= 11' . 14' \{22' . 33' . (14')^2 + (1234')^2 + 11' . 22' . (34')^2 + 11' . 33' . (24')^2\},$$

c'est-à-dire,

$$\overline{123 \mid 123} = 11' . 14' . \overline{1234 \mid 1234'}.$$

De même

$$\begin{aligned}\overline{12345 \mid 12345'} = {} & 11' . 22' . 33' . (45')^2 \\ & + 11' . 22' . 44' . (35')^2 \\ & + 11' . 33' . 44' . (25')^2 \\ & + 22' . 33' . 44' . (15')^2 \\ & + 11' . (2345')^2 \\ & + 22' . (1345')^2 \\ & + 33' . (1245')^2 \\ & + 44' . (1235')^2\end{aligned}$$

Or il est permis d'écrire

$$\begin{aligned} & 11 = 15'.11', && 12 = 11'.25', && 23 = 1235', && 1234 = 2345'.11'.15', \\ & 22 = 15'.22', && 13 = 11'.35', && 24 = 1245', \\ & 33 = 15'.33', && 14 = 11'.45', && 34 = 1345', \\ & 44 = 15'.44'. \end{aligned}$$

En effet, les quantités à gauche ne sont liées entre elles que par la seule équation $1234 = 12 . 34 + 13 . 42 + 14 . 23$ qui est satisfaite identiquement par les valeurs à substituer pour les quantités qui y entrent. Cela étant, on trouve d'abord:

$$\overline{1234 \mid 1234} = 11' (15')^2\, \overline{12345 \mid 12345'}.$$

Je prends encore un exemple. On a

$$
\begin{aligned}
\overline{123456 \mid 123456'} = {} & 11' \,.\, 22' \,.\, 33' \,.\, 44' \,.\, (56')^2 \\
& + 11' \,.\, 22' \,.\, 33' \,.\, 55' \,.\, (46')^2 \\
& + 11' \,.\, 22' \,.\, 44' \,.\, 55' \,.\, (36')^2 \\
& + 11' \,.\, 33' \,.\, 44' \,.\, 55' \,.\, (26')^2 \\
& + 22' \,.\, 33' \,.\, 44' \,.\, 55' \,.\, (16')^2 \\
& + 11' \,.\, 22' \,.\, (3456')^2 \\
& + 11' \,.\, 33' \,.\, (2456')^2 \\
& + 11' \,.\, 44' \,.\, (2356')^2 \\
& + 11' \,.\, 55' \,.\, (2346')^2 \\
& + 22' \,.\, 33' \,.\, (1456')^2 \\
& + 22' \,.\, 44' \,.\, (1356')^2 \\
& + 22' \,.\, 55' \,.\, (1346')^2 \\
& + 33' \,.\, 44' \,.\, (1256')^2 \\
& + 33' \,.\, 55' \,.\, (1246')^2 \\
& + 44' \,.\, 55' \,.\, (1236')^2 \\
& + (123456')^2.
\end{aligned}
$$

Ici, il est permis d'écrire:

$$
\begin{aligned}
& 11 = 16'.11', \quad 12 = 11'.26', \quad 23 = 1236', \quad 34 = 1346', \quad 45 = 1456', \\
& 22 = 16'.22', \quad 13 = 11'.36', \quad 24 = 1246', \quad 35 = 1356', \\
& 33 = 16'.33', \quad 14 = 11'.46', \quad 25 = 1256', \\
& 44 = 16'.44', \quad 15 = 11'.56', \\
& 55 = 16'.55', \\
& 1234 = 2346'.11'.16', \quad 2345 = 123456'.16', \\
& 1235 = 2356'.11'16', \\
& 1245 = 2456'.11'16', \\
& 1345 = 3456'.11'.16\,;
\end{aligned}
$$

car les valeurs des quantités à gauche satisfont identiquement aux équations qui ont lieu entre ces mêmes quantités. Par exemple l'équation $1234 = 12\,.\,34 + 13\,.\,42 + 14\,.\,23$ devient $2346'.16' = 26'.1346' + 63'.1246' + 46'.1236'$.

Or l'expression à droite devient, en développant:

$$
\begin{aligned}
& 26'(13'.46' + 14'.63' + 16'.34') \\
& + 63'(12'.46' + 14'.62' + 16'.24') \\
& + 46'(12'.36' + 13'.62' + 16'.23'),
\end{aligned}
$$

et les termes qui contiennent le facteur 16′, donnent ensemble 16′.2346′, les autres termes se détruisent deux à deux. On obtient enfin, en effectuant la substitution:

$$\overline{12345 \mid 12345} = 11' \,.\, (16')^3\, \overline{123456 \mid 123456'}\,;$$

et ainsi de suite.

Je fais les mêmes substitutions dans les *matrices inverses*, en supprimant cependant la dernière ligne et la dernière colonne de chaque matrice. On trouve ainsi, en y ajoutant les équations ci-dessus trouvées par rapport aux déterminants:

$$11' \,.\, \overline{123 \mid 123'} = \overline{12 \mid 12},$$

$$\frac{1}{13' \,.\, \overline{123 \mid 123'}} \begin{vmatrix} +\overline{23 \mid 23'}, & -\overline{13 \mid 23'} \\ -\overline{23 \mid 13'}, & +\overline{13 \mid 13'} \end{vmatrix} = \frac{1}{\overline{12 \mid 12}} \begin{vmatrix} -\overline{2 \mid 2} + \dfrac{\overline{12 \mid 12}}{11}, & -\overline{1 \mid 2} \\ +\overline{2 \mid 1}, & +\overline{1 \mid 1} \end{vmatrix}$$

$$11' \,.\, 14' \,.\, \overline{1234 \mid 1234'} = \overline{123 \mid 123},$$

$$\frac{1}{14' \,.\, \overline{1234 \mid 1234'}} \begin{vmatrix} +\overline{234 \mid 234}, & -\overline{134 \mid 234}, & -\overline{124 \mid 324} \\ -\overline{234 \mid 124}, & +\overline{134 \mid 134}, & -\overline{214 \mid 314} \\ -\overline{324 \mid 124}, & -\overline{314 \mid 214}, & +\overline{124 \mid 124} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{\overline{123 \mid 123}} \begin{vmatrix} -\overline{23 \mid 23} + \dfrac{\overline{123 \mid 123}}{11}, & -\overline{13 \mid 23}, & -\overline{12 \mid 32} \\ +\overline{23 \mid 13}, & +\overline{13 \mid 13}, & -\overline{21 \mid 31} \\ +\overline{32 \mid 12}, & -\overline{31 \mid 21}, & +\overline{12 \mid 12} \end{vmatrix},$$

$$11' \,.\, (15')^2 \,.\, \overline{12345 \mid 12345} = \overline{1234 \mid 1234},$$

$$\frac{1}{15' \,.\, \overline{12345 \mid 12345'}} \begin{vmatrix} +\overline{2345 \mid 2345'}, & -\overline{1345 \mid 2345'}, & -\overline{1245 \mid 3245'}, & -\overline{1235 \mid 4235'} \\ -\overline{2345 \mid 1345'}, & +\overline{1345 \mid 1345'}, & -\overline{2145 \mid 3145'}, & -\overline{2135 \mid 4135'} \\ -\overline{3245 \mid 1245'}, & -\overline{3145 \mid 2145'}, & +\overline{1245 \mid 1245'}, & -\overline{3125 \mid 4125'} \\ -\overline{4235 \mid 1235'}, & -\overline{4135 \mid 2135'}, & -\overline{4125 \mid 3125'}, & +\overline{1235 \mid 1235'} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{\overline{1234 \mid 1234}} \begin{vmatrix} -\overline{234 \mid 234} + \dfrac{\overline{1234 \mid 1234}}{11}, & -\overline{134 \mid 234}, & -\overline{124 \mid 324}, & -\overline{123 \mid 423} \\ +\overline{234 \mid 134}, & +\overline{134 \mid 134}, & -\overline{214 \mid 314}, & -\overline{213 \mid 413} \\ +\overline{324 \mid 124}, & -\overline{314 \mid 214}, & +\overline{124 \mid 124}, & -\overline{312 \mid 423} \\ +\overline{423 \mid 123}, & -\overline{413 \mid 213}, & -\overline{412 \mid 312}, & +\overline{123 \mid 123} \end{vmatrix},$$

et ainsi de suite.

Il est bon de changer un peu la forme de ces équations. On en déduit sans peine:

$$\frac{1}{13'\,.\,\overline{123\,|\,123'}}\left|\begin{array}{ll} 2\,.\,\overline{23\,|\,23'}-\dfrac{\overline{123\,|\,123'}}{11}, & -2\,.\,\overline{13\,|\,23'} \\ -2\,.\,\overline{23\,|\,13'}, & +2\,.\,\overline{13\,|\,13'}-\dfrac{\overline{123\,|\,123'}}{22} \end{array}\right|$$

$$=\frac{1}{\overline{12\,|\,12}}\left|\begin{array}{ll} -2\,.\,\overline{2\,|\,2}+\dfrac{\overline{12\,|\,12}}{11}, & -2\,\overline{1\,|\,2} \\ +2\,.\,\overline{2\,|\,1}, & +2\,\overline{1\,|\,1}-\dfrac{\overline{12\,|\,12}}{22} \end{array}\right|,$$

$$\frac{1}{'\,.\,\overline{1234\,|\,1234'}}\left|\begin{array}{lll} 2\,.\,\overline{234\,|\,234'}-\dfrac{\overline{1234\,|\,1234'}}{11'}, & -2\,.\,\overline{134\,|\,234'}, & -2\,.\,\overline{124\,|\,324'} \\ -2\,.\,\overline{234\,|\,134'}, & 2\,.\,\overline{134\,|\,134'}-\dfrac{\overline{1234\,|\,1234'}}{22'}, & -2\,.\,\overline{214\,|\,314'} \\ -2\,.\,\overline{324\,|\,124'}, & -2\,.\,\overline{314\,|\,214'}, & 2\,.\,\overline{124\,|\,124'}-\dfrac{\overline{1234\,|\,1234'}}{33} \end{array}\right|$$

$$=\frac{1}{\overline{123\,|\,123}}\left|\begin{array}{lll} -2\,.\,\overline{23\,|\,23}-\dfrac{\overline{123\,|\,123}}{11}, & -2\,.\,\overline{13\,|\,23}, & -2\,\overline{12\,|\,32} \\ +2\,\overline{23\,|\,13}, & +2\,\overline{13\,|\,13}-\dfrac{\overline{123\,|\,123}}{22}, & -2\,.\,\overline{21\,|\,31} \\ +2\,.\,\overline{32\,|\,12}, & -2\,.\,\overline{31\,|\,21}, & +2\,.\,\overline{12\,|\,12}-\dfrac{\overline{123\,|\,123}}{33} \end{array}\right|,$$

et ainsi de suite.

Les formules que je viens de présenter, peuvent être appliquées aussitôt à la solution de la question suivante: "Trouver x_1, x_2, x_3, &c., fonctions linéaires de x_1, x_2, x_3, &c. telles que

$$11\,\mathrm{x}_1{}^2+22\,\mathrm{x}_2{}^2+33\,\mathrm{x}_3{}^2+\&\mathrm{c.}=11\,x_1{}^2+22\,x_2{}^2+33\,x_3{}^2+\&\mathrm{c.}"$$

c'est-à-dire: transformer une fonction quadratique $11x_1{}^2+22x_2{}^2+33x_3{}^2+\&\mathrm{c.}$ *en elle-même* par des substitutions linéaires. Il suffira d'écrire la solution pour le cas de trois indéterminées: on satisfait identiquement à l'équation

$$11\,\mathrm{x}_1{}^2+22\,\mathrm{x}_2{}^2+33\,\mathrm{x}_3{}^2=11\,x_1{}^2+22\,x_2{}^2+33\,x_3{}^2$$

en écrivant

$$(\mathrm{x}_1,\ \ \mathrm{x}_2,\ \ \mathrm{x}_3)=\frac{1}{\overline{123\,|\,123}}\times$$

$$\left|\begin{array}{lll} +2\,.\,\overline{23\,|\,23}-\dfrac{\overline{123\,|\,123}}{11}, & -2\,\overline{13\,|\,23}, & -2\,.\,\overline{12\,|\,32} \\ -2\,.\,\overline{23\,|\,13}, & +2\,.\,\overline{13\,|\,13}-\dfrac{\overline{123\,|\,123}}{22}, & -2\,.\,\overline{21\,|\,31} \\ -2\,.\,\overline{32\,|\,12}, & -2\,.\,\overline{31\,|\,21}, & +2\,.\,\overline{12\,|\,12}-\dfrac{\overline{123\,|\,123}}{33} \end{array}\right|(11x_1,\ 22x_2,\ 33x_3).$$

Voilà la transformation *propre*. On en tire la transformation *impropre* de $11x_1^2+22x_2^2$ *en elle-même* en écrivant $33=0$; car, cela posé, les valeurs de x_1, x_2 ne contiennent pas x_3, et l'on n'a plus besoin de la valeur de x_3. On obtient ainsi la solution suivante; savoir, on satisfait identiquement à l'équation

$$11'\,\mathrm{x}_1^2+22'\,\mathrm{x}_2^2=11'\,x_1^2+22'\,x_2^2$$

en écrivant

$$(\mathrm{x}_1,\ \mathrm{x}_2)=\frac{1}{\overline{\overline{123\mid 123'}}}\left|\begin{array}{ll} 2\,.\,\overline{23\mid 23'}-\dfrac{\overline{123\mid 123'}}{11'}, & -2\,.\,\overline{13\mid 23'} \\ -2\,.\,\overline{23\mid 13'}, & 2\,.\,\overline{13\mid 13'}-\dfrac{\overline{123\mid 123'}}{22} \end{array}\right|(11'x_1,\ 22'x_2),$$

ce qui est une transformation *impropre*. Mais en y faisant la substitution $11=13'.11'$, $22=13'.22'$, $12=11'.23'$, on réduit la solution à celle-ci, savoir on satisfait identiquement à l'équation $11\mathrm{x}_1^2+22\mathrm{x}_2^2=11x_1^2+22x_2^2$ en écrivant

$$(\mathrm{x}_1,\ \mathrm{x}_2)=\frac{1}{\overline{\overline{12\mid 12}}}\left|\begin{array}{ll} -2\,.\,\overline{2\mid 2}+\dfrac{\overline{12\mid 12}}{11}, & -2\,.\,\overline{1\mid 2} \\ +2\,.\,\overline{2\mid 1}, & +2\,.\,\overline{1\mid 1}-\dfrac{\overline{12\mid 12}}{22} \end{array}\right|(11x_1,\ 22x_2),$$

ce qui est encore une transformation *impropre*, qui correspond de plus près à la formule pour la transformation *propre;* la seule différence est que les signes des termes de la première colonne de la matrice en sont changés.

En introduisant des lettres simples a, b, &c. à la place des symboles 11, 22, &c., je considère d'abord la transformation *propre*

$$a\mathrm{x}^2+b\mathrm{y}^2=ax^2+by^2.$$

Ici, en écrivant

$$\left|\begin{array}{ll} 11, & 12 \\ 21, & 22 \end{array}\right|=\left|\begin{array}{ll} a, & \nu \\ -\nu, & b \end{array}\right|,$$

la formule donne

$$(\mathrm{x},\ \mathrm{y})=\frac{1}{ab+\nu^2}\left|\begin{array}{ll} ab-\nu^2, & -2\nu b \\ 2\nu a\quad, & ab-\nu^2 \end{array}\right|(x,\ y).$$

La transformation *impropre*

$$a\mathrm{x}^2+b\mathrm{y}^2=ax^2+by^2$$

s'obtient au moyen de la formule donnée plus bas pour la transformation *propre* de la fonction $ax^2+by^2+cz^2$ *en elle-même*. En y écrivant $c=0$, on obtient

$$(\mathrm{x},\ \mathrm{y})=\frac{1}{a\lambda^2+b\mu^2}\left|\begin{array}{ll} a\lambda^2-b\mu^2, & 2\lambda\mu b \\ 2\lambda\mu a\quad, & -a\lambda^2+b\mu^2 \end{array}\right|(x,\ y).$$

J'ai déjà fait voir de quelle manière cette formule se rattache à la formule pour la transformation *propre;* la différence entre les formes de ces transformations dans ce cas simple est assez frappante.

Pour obtenir la transformation propre

$$\mathrm{a}\mathrm{x}^2+b\mathrm{y}^2+c\mathrm{z}^2=ax^2+by^2+cz^2,$$

j'écris

$$\begin{vmatrix} 11, & 12, & 13 \\ 21, & 22, & 23 \\ 31, & 32, & 33 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & \nu, & -\mu \\ -\nu, & b, & \lambda \\ \mu, & -\lambda, & c \end{vmatrix};$$

cette formule donne

$$(\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z})=\frac{1}{abc+a\lambda^2+b\mu^2+c\nu^2}\times$$

$$\begin{vmatrix} abc+a\lambda^2-b\mu^2-c\nu^2, & 2(\lambda\mu-c\nu)\,b\ , & 2(\nu\lambda+b\mu)\,c \\ 2(\lambda\mu+c\nu)\,a\ , & abc-a\lambda^2+b\mu^2-c\nu^2, & 2(\mu\nu-a\lambda)\,c \\ 2(\nu\lambda-b\mu)\,a\ , & 2(\mu\nu+a\lambda)\,b\ , & abc-a\lambda^2-b\mu^2-c\nu^2 \end{vmatrix}(x,\ y,\ z).$$

La transformation *impropre en elle-même*

$$a\mathrm{x}^2+b\mathrm{y}^2+c\mathrm{z}^2=ax^2+by^2+cz^2$$

peut être tirée de la transformation *propre en elle-même* de la fonction donnée ci-après $ax^2+by^2+cz^2+dw^2$; en y écrivant $d=0$, on obtient

$$(\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z})=\frac{1}{bc\rho^2+ca\sigma^2+ab\tau^2+\phi^2}\times$$

$$\begin{vmatrix} -bc\rho^2+ca\sigma^2+ab\tau^2-\phi^2, & -2b\tau\phi-2bc\rho\sigma\ , & 2c\sigma\phi-2bc\tau\rho \\ 2a\tau\phi-2ac\rho\sigma\ , & bc\rho^2-ca\sigma^2+ab\tau^2-\phi^2, & -2c\rho\phi-2ca\sigma\tau \\ -\ 2a\sigma\phi-2ab\rho\tau\ , & 2b\rho\phi-2ab\sigma\tau\ , & bc\rho^2+ca\sigma^2-ab\tau^2-\phi^2 \end{vmatrix}(x,\ y,\ z).$$

Pour vérifier que cette expression n'est en effet autre chose que la formule pour la transformation *propre,* en y changeant les signes de tous les termes, j'écris dans la formule pour la transformation propre, $a=b=c=\omega$. On a ainsi pour la transformation propre

$$\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2=x^2+y^2+z^2,$$

l'équation

$$(\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z})=\frac{1}{\omega^2+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}\begin{vmatrix} \omega^2+\lambda^2-\mu^2-\nu^2, & 2\lambda\mu-2\nu\omega\ , & 2\nu\lambda+2\mu\omega \\ 2\lambda\mu+2\nu\omega\ , & \omega^2-\lambda^2+\mu^2-\nu^2, & 2\mu\nu-2\lambda\omega \\ 2\nu\lambda-2\mu\omega\ , & 2\mu\nu+2\lambda\omega\ , & \omega^2-\lambda^2+\mu^2-\nu^2 \end{vmatrix}(x,\ y,\ z),$$

et en écrivant dans la formule pour la transformation impropre, $a=b=c=1$, $d=0$, et λ, μ, ν, $-\omega$ au lieu de ρ, σ, τ, ϕ, on obtient pour la transformation impropre

$$\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2=x^2+y^2+z^2,$$

l'équation

$$(\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z})=\frac{1}{\omega^2+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}\times$$

$$\begin{vmatrix} -\omega^2-\lambda^2+\mu^2+\nu^2, & -2\lambda\mu+2\nu\omega\ , & -2\nu\lambda-2\mu\omega \\ -2\lambda\mu-2\nu\omega\ , & -\omega^2+\lambda^2-\mu^2+\nu^2, & 2\mu\nu-2\lambda\omega \\ -2\nu\lambda+2\mu\omega\ , & -2\mu\nu-2\lambda\omega\ , & -\omega^2+\lambda^2-\mu^2-\nu^2 \end{vmatrix}(x,\ y,\ z).$$

Pour obtenir la transformation propre

$$a\mathrm{x}^2-b\mathrm{y}^2+c\mathrm{z}^2+d\mathrm{w}^2=ax^2+by^2+cz^2+dw^2,$$

j'écris

$$\begin{vmatrix} 11, & 12, & 13, & 14 \\ 21, & 22, & 23, & 24 \\ 31, & 32, & 33, & 34 \\ 41, & 42, & 43, & 44 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & \nu, & -\mu, & \rho \\ -\nu, & b, & \lambda, & \sigma \\ \mu, & -\lambda, & c, & \tau \\ -\rho, & -\sigma, & -\tau, & d \end{vmatrix};$$

cela donne d'abord, en mettant pour abréger,

$$\phi=\lambda\rho+\mu\sigma+\nu\tau,$$

la valeur du déterminant

$$\overline{1234\mid 1234}=abcd+bc\rho^2+ca\sigma^2+ab\tau^2+ad\lambda^2+bd\mu^2+cd\nu^2+\phi^2$$

(ce que je représente par k).

J'ajoute aussi la valeur de la *matrice* inverse

$$\begin{vmatrix} 11, & 12, & 13, & 14 \\ 21, & 22, & 23, & 24 \\ 31, & 32, & 33, & 34 \\ 41, & 42, & 43, & 44 \end{vmatrix}^{-1},$$

savoir:

$$\frac{1}{k}\begin{vmatrix} bcd+b\tau^2+c\sigma^2+d\lambda^2, & -cd\nu-\tau\phi+d\lambda\mu-c\rho\sigma, & bd\mu+\sigma\phi+d\lambda\nu-b\rho\tau, & -bc\rho-\lambda\phi+c\nu\sigma-b\mu\tau \\ cd\nu+\tau\phi+d\lambda\mu-c\rho\sigma, & acd+b\tau^2+c\rho^2+d\mu^2, & -ad\lambda-\rho\phi+d\mu\nu-a\sigma\tau, & -ac\sigma-\mu\phi-c\nu\rho+a\lambda\tau \\ -bd\mu-\sigma\phi+d\lambda\nu-b\rho\tau, & ad\lambda+\rho\phi+d\mu\nu-a\sigma\tau, & abd+a\sigma^2+b\rho^2+d\nu^2, & -ab\tau-\nu\phi+b\mu\rho-a\lambda\sigma \\ bc\rho+\lambda\phi+c\nu\sigma-b\mu\tau, & ac\sigma+\mu\phi-c\nu\rho+a\lambda\tau, & ab\tau+\nu\phi+b\mu\rho-a\lambda\sigma, & abc+a\lambda^2+b\mu^2+c\nu^2 \end{vmatrix}$$

On a pour la transformation, l'équation (x, y, z, w) =

$$\frac{1}{k}\left|\begin{array}{llll} abcd - bc\rho^2 + ca\sigma^2 + ab\tau^2 + ad\lambda^2 - bd\mu^2 - cd\nu^2 - \phi^2, & 2b(-cd\nu - \tau\phi + d\lambda\mu - c\rho\sigma), & 2c(bd\mu + \sigma\phi + d\lambda\nu - b\rho\tau), & 2d(-bc\rho - \lambda\phi + c\nu\sigma - b\mu\tau) \\ 2a(cd\nu + \tau\phi + d\lambda\mu - c\rho\sigma), & abcd + bc\rho^2 - ca\sigma^2 + ab\tau^2 - ad\lambda^2 + bd\mu^2 - cd\nu^2 - \phi^2, & 2c(-ad\lambda - \rho\phi + d\mu\nu - a\sigma\tau), & 2d(-ac\sigma - \mu\phi - c\nu\rho + a\lambda\tau) \\ 2a(-bd\mu - \sigma\phi + d\lambda\nu - b\rho\tau), & 2b(ad\lambda + \rho\phi + d\mu\nu - a\sigma\tau), & abcd + bc\rho^2 + ca\sigma^2 - ab\tau^2 - ad\lambda^2 - bd\mu^2 + cd\nu^2 - \phi^2, & 2d(-ab\tau - \nu\phi + b\mu\rho - a\lambda\sigma) \\ 2a(bc\rho + \lambda\phi + c\nu\sigma - b\mu\tau), & 2b(ac\sigma + \mu\phi - c\nu\rho + a\lambda\tau), & 2c(ab\tau + \nu\phi + b\mu\rho - a\lambda\sigma), & abcd - bc\rho^2 - ca\sigma^2 - ab\tau^2 + ad\lambda^2 + b\delta\mu^2 + cd\iota^2 - \phi^2 \end{array}\right|(x,\ y,\ z,\ w).$$

Je suppose que l'on ait $a = b = c = d = \omega$, et j'écris $\psi = -\dfrac{\phi}{\omega}$, c'est-à-dire $\psi = -\dfrac{\lambda\rho + \mu\sigma + \nu\tau}{\omega}$ ou $\lambda\rho + \mu\sigma + \nu\tau + \psi\omega = 0$. En faisant cette substitution, on trouve d'abord $k = \omega^2 R$, où

$$R = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \psi^2 + \rho^2 + \sigma^2 + \tau^2 + \omega^2,$$

et puis pour la transformation propre

$$\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2 + \mathrm{w}^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2,$$

l'équation (x, y, z, w) =

$$\frac{1}{R}\left|\begin{array}{llll} -\rho^2 + \sigma^2 + \tau^2 + \omega^2 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 - \psi^2, & -2\omega\nu + 2\tau\psi + 2\lambda\mu - 2\rho\sigma, & 2\omega\mu - 2\sigma\psi + 2\lambda\nu - 2\rho\tau, & -2\omega\rho + 2\lambda\psi + 2\nu\sigma - 2\mu\tau \\ 2\omega\nu - 2\tau\psi + 2\lambda\mu - 2\rho\sigma, & \rho^2 - \sigma^2 + \tau^2 + \omega^2 - \lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 - \psi^2, & -2\omega\lambda + 2\rho\psi + 2\mu\nu - 2\sigma\tau, & -2\omega\sigma + 2\mu\psi - 2\nu\rho + 2\lambda\tau \\ -2\omega\mu + 2\sigma\psi + 2\lambda\nu - 2\rho\tau, & 2\omega\lambda - 2\rho\psi + 2\mu\nu - 2\sigma\tau, & \rho^2 + \sigma^2 - \tau^2 + \omega^2 - \lambda^2 - \mu^2 + \nu^2 - \psi^2, & -2\omega\tau + 2\nu\psi + 2\mu\rho - 2\lambda\sigma \\ 2\omega\rho - 2\lambda\psi + 2\nu\sigma - 2\mu\tau, & 2\omega\sigma - 2\mu\psi - 2\nu\rho + 2\lambda\tau, & 2\omega\tau - 2\nu\psi + 2\mu\rho - 2\lambda\sigma, & -\rho^2 - \sigma^2 - \tau^2 + \omega^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - \psi^2 \end{array}\right|(x,\ y,\ z,\ w).$$

On peut changer la forme de cette expression, en y écrivant

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(\alpha - \alpha'),\quad \mu = \tfrac{1}{2}(\beta - \beta'),\quad \nu = \tfrac{1}{2}(\gamma - \gamma'),\quad \psi = \tfrac{1}{2}(\delta - \delta'),$$

$$\rho = \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha'),\quad \sigma = \tfrac{1}{2}(\beta + \beta'),\quad \tau = \tfrac{1}{2}(\gamma + \gamma'),\quad \omega = \tfrac{1}{2}(\delta + \delta');$$

cela donne

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2-\alpha'^2-\beta'^2-\gamma'^2-\delta'^2=0,$$

$$R=\tfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+\delta'^2),$$

de manière qu'en écrivant

$$M=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2,$$

$$M'=\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+\delta'^2,$$

on obtient

$$R=\tfrac{1}{2}(M+M')=\sqrt{(MM')},$$

et la formule pour la transformation devient

$$(\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z},\ \mathrm{w})=\frac{1}{\sqrt{(MM')}}\left|\begin{array}{ll} -\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'+\delta\delta', & -\alpha\beta'-\beta\alpha'-\gamma\delta'+\delta\gamma', \\ -\alpha\beta'-\beta\alpha'+\gamma\delta'+\delta\gamma', & \alpha\alpha'-\beta\beta'+\gamma\gamma'+\delta\delta', \\ -\alpha\gamma'-\beta\delta'-\gamma\alpha'+\delta\beta', & \alpha\delta'-\beta\gamma'-\gamma\beta'-\delta\alpha', \\ -\alpha\delta'+\beta\gamma'-\gamma\beta'-\delta\alpha', & -\alpha\gamma'-\beta\delta'+\gamma\alpha'-\delta\beta', \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ll} -\alpha\gamma'+\beta\delta'-\gamma\alpha'-\delta\beta', & \alpha\delta'+\beta\gamma'-\gamma\beta'+\delta\alpha' \\ -\alpha\delta'-\beta\gamma'-\gamma\beta'+\delta\alpha', & -\alpha\gamma'+\beta\delta'+\gamma\alpha'+\delta\beta' \\ \alpha\alpha'+\beta\beta'-\gamma\gamma'+\delta\delta', & \alpha\beta'-\beta\alpha'+\gamma\delta'+\delta\gamma' \\ \alpha\beta'-\beta\alpha'-\gamma\delta'-\delta\gamma', & -\alpha\alpha'-\beta\beta'-\gamma\gamma'+\delta\delta' \end{array}\right|(x,\ y,\ z,\ w).$$

On voit donc que même sans supposer l'équation $M=M'$, cette formule donne la transformation propre

$$\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2+\mathrm{w}^2=x^2+y^2+z^2+w^2.$$

Cette solution est à peu près de la même forme que la solution *impropre* donnée par Euler dans son mémoire "Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile" Nov. Comm. Petrop., t. XV. 1770, p. 75, et Comm. Arith. collectae, [4to. Petrop. 1849], t. I. p. 427. Je remarque aussi que cette même solution peut être déduite de la théorie des *Quaternions.* En effet, i, j, k étant des quantités imaginaires telles que $i^2=j^2=k^2=-1$, $jk=-kj=i$, $ki=-ik=j$, $ij=-ji=k$, on obtient, en effectuant la multiplication:

$$(\mathrm{x}i+\mathrm{y}j+\mathrm{z}k+\mathrm{w})=-\frac{1}{\sqrt{(MM')}}(\alpha i+\beta j+\gamma k+\delta)(xi+yj+zk+w)(\alpha' i+\beta' j+\gamma' k+\delta'),$$

x, y, z, w ayant les mêmes valeurs que dans la dernière formule de transformation.

En changeant les signes des termes de la quatrième colonne, on en tire pour la transformation impropre

$$\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2+\mathrm{w}^2=x^2+y^2+z^2+w^2,$$

la formule suivante plus symétrique :

$$(x, y, z, w) = \frac{1}{\sqrt{(MM')}} \left|\begin{array}{ll} -\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta', & -\alpha\beta' - \beta\alpha' - \gamma\delta' + \delta\gamma', \\ \alpha\beta' - \beta\alpha' + \gamma\delta' - \delta\gamma', & \alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta', \\ -\alpha\gamma' - \beta\delta' - \gamma\alpha' + \delta\beta', & \alpha\delta' - \beta\gamma' - \gamma\beta' - \delta\alpha', \\ -\alpha\delta' + \beta\gamma' - \gamma\beta' - \delta\alpha', & -\alpha\gamma' - \beta\delta' + \gamma\alpha' - \delta\beta', \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ll} -\alpha\gamma' + \beta\delta' - \gamma\alpha' - \delta\beta', & -\alpha\delta' - \beta\gamma' + \gamma\beta' - \delta\alpha' \\ -\alpha\delta' - \beta\gamma' - \gamma\beta' + \delta\alpha', & \alpha\gamma' - \beta\delta' - \gamma\alpha' - \delta\beta' \\ \alpha\alpha' + \beta\beta' - \gamma\gamma' + \delta\delta', & -\alpha\beta' + \beta\alpha' - \gamma\delta' - \delta\gamma' \\ \alpha\beta' - \beta\alpha' - \gamma\delta' - \delta\gamma', & \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' - \delta\delta' \end{array}\right| (x, y, z, w).$$

Ces formules pour la transformation, tant propre qu'impropre, de la fonction $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ *en elle-même,* sont utiles dans la théorie des polygones inscrits dans une surface du second ordre.