

SUR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE D'UNE COURBE
D'ORDRE QUELCONQUE.

[Comptes Rendus, CIII. (1886), pp. 408—411.]

[Also, above, p. 492.]

ON peut obtenir une solution directe et universelle de ce problème :
Trouver l'équation différentielle d'une courbe de l'ordre n , en représentant la fonction de l'équation (avec l'unité pour terme constant), soit U ou $(x, y, 1)^n$, sous la forme symbolique u^n , où $u = a + bx + y$. Alors, en mettant $\left(\frac{d}{dx}\right)^n y = y_r$,

$$\text{on aura} \quad \frac{du}{dx} = b + y_1, \quad \frac{d^{i+1}u}{dx^{i+1}} = y_{i+1}^*.$$

Égalons à zéro les dérivées de u^n des degrés $n + 1, n + 2, \dots, \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$;
il en résultera $\frac{n^2 + n}{2}$ équations entre lesquelles on peut éliminer le même nombre de coefficients, c'est-à-dire tous les coefficients en U , sauf ceux qui ne contiennent nulle puissance de y , lesquels ne paraîtraient pas dans les équations dont nous parlons.

Pour obtenir le déterminant qui correspond à ce système d'équations, remarquons que le théorème de Taylor donne immédiatement†

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Pi r} \partial_x^r u^n &= \text{co}_r \left(u + u'h + u'' \frac{h^2}{1 \cdot 2} + u''' \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \right)^n \\ &= \text{co}_r \left((u + u'h)^n + n \cdot (u + u'h)^{n-1} V + n \cdot \frac{n-1}{2} (u + u'h)^{n-2} V^2 + \dots \right), \end{aligned}$$

où l'on peut prendre

$$V = y_2 \frac{h^2}{1 \cdot 2} + y_3 \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + y_4 \frac{h^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots,$$

ce qui suffit à résoudre le problème.

* On remarquera qu'avec cette notation toute fonction entière de u et $\partial_x u$ représentera sans ambiguïté une quantité algébrique ordinaire, pourvu que l'on sache *a priori* qu'elle doit être linéaire dans les coefficients de u^n . C'est pourquoi dans le texte on est libre d'exprimer toute dérivée différentielle de U comme fonction de u et u' .

† Par co_r , on sous-entend les mots "le coefficient de h^r dans."

Pour cela, on considère toutes les dérivées de U comme fonctions linéaires des termes qui paraissent dans le développement de $(u, u', 1)^{n-1}$ *

Alors, en représentant par $m \cdot \mu$ le coefficient de h^m dans

$$\left(\frac{y^2}{1 \cdot 2} h^2 + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} h^3 + \dots \right)^\mu,$$

on trouvera, sans calcul algébrique aucun, que la $q^{\text{ième}}$ ligne du déterminant cherché peut être prise sous la forme

$$(1+q) \cdot 1 \ (2+q) \cdot 1 \ (2+q) \cdot 2 \ (3+q) \cdot 1 \ (3+q) \cdot 2 \ (3+q) \cdot 3 \dots \\ (n+q) \cdot 1 \ (n+q) \cdot 2 \dots \ (n+q) \cdot n.$$

Par exemple, prenons le cas de $n = 4$; le déterminant

2.1	3.1	3.2	4.1	4.2	4.3	5.1	5.2	5.3	5.4
3.1	4.1	4.2	5.1	5.2	5.3	6.1	6.2	6.3	6.4
4.1	5.1	5.2	6.1	6.2	6.3	7.1	7.2	7.3	7.4
5.1	6.1	6.2	7.1	7.2	7.3	8.1	8.2	8.3	8.4
6.1	7.1	7.2	8.1	8.2	8.3	9.1	9.2	9.3	9.4
7.1	8.1	8.2	9.1	9.2	9.3	10.1	10.2	10.3	10.4
8.1	9.1	9.2	10.1	10.2	10.3	11.1	11.2	11.3	11.4
9.1	10.1	10.2	11.1	11.2	11.3	12.1	12.2	12.3	12.4
10.1	11.1	11.2	12.1	12.2	12.3	13.1	13.2	13.3	13.4
11.1	12.1	12.2	13.1	13.2	13.3	14.1	14.2	14.3	14.4

sera le premier membre de l'équation différentielle (disons le critérium différentiel) d'une courbe du quatrième degré.

Si l'on se borne aux termes contenus dans les six premières lignes et colonnes, on aura le critérium pour la cubique, et, en se bornant aux termes contenus dans les trois premières lignes et colonnes, celui pour la conique, ou plutôt ce critérium multiplié par 2. 1, ce qui constitue un cas exceptionnel.

2. 1 lui-même, c'est-à-dire $\frac{\partial_x^2 y}{2}$, est naturellement le critérium pour la ligne droite. On remarquera que 3. 2, 4. 3, 5. 3, 5. 4, 6. 4, 7. 4 sont des combinaisons pour ainsi dire fictives, qui ont pour valeur zéro†. De même, en général, il y aura toujours des termes nuls dans les $(n - 1)$ premières lignes du critérium de la courbe de degré n ; au-dessous de la $(n - 1)^{\text{ième}}$ ligne, toutes les places seront remplies par des combinaisons qui correspondent à des non-zéros.

Quand $n = 3$, en substituant pour $\frac{y''}{1 \cdot 2}$, $\frac{y'''}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, $\frac{y^{IV}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, ... les lettres a, b, c, \dots , on retombe sur la formule trouvée pour la cubique par M. Samuel

* Ou plutôt les termes avec leurs coefficients numériques de $(u, u', 1)^n$, en omettant les $(n + 1)$ termes du degré n .

† Évidemment $m \cdot \mu$ est zéro quand $m < 2\mu$.

Roberts (voir *Mathematical Questions from the Educational Times*, t. x, p. 47)*, c'est-à-dire la même matrice que celle donnée par M. Roberts, mais avec ses colonnes autrement présentées.

On voit immédiatement que le degré du critérium pour une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre sera $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ et, par un calcul facile, que son poids sera $\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{8} + \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ †. Ce dernier nombre suppose que le poids de $d_x^i y$ est compté comme i . Dans le calcul des réciproquants, on le compte toujours comme étant $i-2$ et, en faisant cette réduction, le poids devient tout simplement $\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{8}$.

M. Halphen nous a appris que les formules qu'il a données dans son Mémoire intitulé: *Recherches des points d'une courbe algébrique plane*, etc. (*Journal de Mathématiques*, 3^e série, t. II, pp. 373, 374 et 400; 1876) fournissent un moyen pour calculer le degré et le poids du critérium $n^{\text{ième}}$ et conduisent aux mêmes résultats que ceux donnés ci-dessus. Dans le cas de la conique, le déterminant, comme nous l'avons dit, se divise par y'' , de sorte que son poids-degré s'abaisse et, au lieu d'être 3.4, devient 3.3; en effet, c'est la forme bien connue $a^2d - 3abc + 2b^3$, trouvée par Monge.

* Ce travail a été cité et reproduit dans le *Philosophical Magazine* de février 1886, par M. Muir, qui y construit pour ainsi dire le tableau du calcul dont M. Roberts avait déjà fait le procès-verbal.

† Car le degré sera la somme de n termes de la série $1+3+6+\dots$, c'est-à-dire $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, et le poids, moins deux fois le degré, la somme de n termes de la série

$$0 + (2+1) + (5+4+3) + (9+8+7+6) + \dots$$

ou bien de $\frac{n^2+n-2}{2}$ termes de la progression naturelle $1+2+3+4+5+\dots$, c'est-à-dire

$$\frac{n^2+n-2}{2} - \frac{n^2+n}{4}.$$