50.

SUR UNE DÉCOUVERTE DE M. JAMES HAMMOND RELATIVE À UNE CERTAINE SÉRIE DE NOMBRES QUI FIGURENT DANS LA THÉORIE DE LA TRANSFORMATION TSCHIRNHAUSEN.

[*Comptes Rendus*, CIV. (1887), pp. 1228—1231.]

On peut se proposer le problème suivant:

Étant donné un quantic, le faire disparaître en exprimant chaque variable comme une fonction linéaire et homogène de deux variables.

Si le nombre des variables dans le quantic est suffisamment grand, quel que soit son degré n, ce problème peut s'effectuer au moyen d'un système auxiliaire d'équations, tel que pour résoudre le système on n'aura jamais occasion de résoudre une équation d'un degré supérieur à n.

En nommant N le nombre minimum des variables nécessaire pour que cela soit possible, cette question se présente: *trouver la valeur de N pour une valeur donnée de n.*

Par exemple, pour $n = 2$, on voit bien que N est 4.

Pour $n = 3$, on peut démontrer que N est 6; pour $n = 4$, $N = 11$, etc.

Mais on peut imposer une condition plus rigoureuse sur le caractère du système auxiliaire d'équations qui aura l'effet d'augmenter la valeur minimum N. On peut exiger que le type du système auxiliaire d'équations sera *le plus simple possible* ou, comme je préfère le dire, sera d'*un poids minimum*. Le poids d'une équation dépend seulement de son degré i et peut être pris égal à ρ^i, où ρ est une constante indéfiniment grande. De plus, le poids d'un système d'équations peut être défini comme étant la somme des poids des équations individuelles qu'il contient.

On a ainsi un criterium exact pour déterminer lequel des deux systèmes a son poids inférieur à celui d'un autre; le terme *poids minimum* devient exempt de toute ambiguïté, et l'on comprend ce que veut dire le système d'équations le plus simple d'un nombre quelconque de tels systèmes.

Avec la première définition de N, ses valeurs successives seront

$$3, \ 4, \ 6, \ 11, \ 45, \ 906, \ 409182, \ 83762797735, \ \ldots.$$

En imposant la condition la plus rigoureuse, on obtient la série moins transcendante

$$3, \ 4, \ 6, \ 12, \ 48, \ 924, \ 409620, \ 83763206256, \ \ldots$$

que je nommerai E_0, E_1, E_2, E_3, ...

En diminuant ces derniers chiffres de l'unité, on trouve la série de nombres

$$2, \ 3, \ 5, \ 11, \ 47, \ 923, \ 409619, \ 83763206255, \ \ldots,$$

dont les six premiers ont été calculés par Hamilton (voir *Report of 6th Meeting of British Association*, pp. 346—7, 1837).

Hamilton a, en effet, montré que le degré d'une équation algébrique, étant pris successivement égal à 2, 3, 5, 11, 47, ..., on peut, par la méthode dite *de Tschirnhausen*, la transformer dans une autre où 1, 2, 3, 4, 5, ... termes consécutifs, après le premier, manquent, sans avoir occasion de résoudre aucune équation au-dessus des degrés 1, 2, 3, 4, 5, ... respectivement.

J'ajoute que le système d'équations auxiliaires, auquel on parvient par la méthode qu'il emploie, sera *du type le plus simple possible.* Si, pour ôter i termes consécutifs, on voulait se borner à la seule condition de n'avoir pas à résoudre une équation au-dessus du degré i, alors, au lieu des nombres 2, 3, 5, 11, 47, ..., on aurait les nombres plus transcendants 2, 3, 5, 10, 44, ... C'est la série 2, 3, 5, 11, 47, ... que je nomme les *nombres de Hamilton*, et que je désigne par H_0, H_1, H_2, H_3, H_4, ... Pour les obtenir (ou plutôt leurs différences) par la méthode de Hamilton, on a besoin de construire un triangle de chiffres (*voir* mon Mémoire dans le *Journal de Kronecker*, t. C. p. 477 [above, p. 541]).

Mon collaborateur, M. James Hammond, a trouvé un très beau théorème pour déduire les N immédiatement et successivement les uns des autres, sans introduire de nombres étrangers.

En se servant de $\beta_r(q)$ pour représenter $\dfrac{q(q-1)\ldots(q-r+1)}{1.2\ldots r}$, il a trouvé la formule vraiment remarquable

$$H_i = 2 + \beta_2(H_{i-1}) - \beta_3(H_{i-2}) + \beta_4(H_{i-3}) - \ldots.$$

A ce théorème, j'ajoute comme corollaire une formule qui se rapporte à la série de nombres E (qui ne sont autre chose que les nombres H, augmentés chacun de l'unité), qui est bonne pour toutes les valeurs de r supérieures à l'unité,

$$\beta_0(E_r) - \beta_1(E_{r-1}) + \beta_2(E_{r-2}) - \ldots + (-)^r\beta_r(E_0) = 0,$$

c'est-à-dire $\quad E_{r-1} = 1 + \beta_2(E_{r-2}) - \beta_3(E_{r-3}) + \ldots + (-)^r\beta_r(E_0).$

Par exemple, $1-\frac{4}{1}+\frac{3.2}{1.2}=0,$

$$1-\frac{6}{1}+\frac{4.3}{1.2}-\frac{3.2.1}{1.2.3}=0,$$

$$1-\frac{12}{1}+\frac{6.5}{1.2}-\frac{4.3.2}{1.2.3}=0,$$

$$1-\frac{48}{1}+\frac{12.11}{1.2}-\frac{6.5.4}{1.2.3}+\frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}=0,$$

$$1-\frac{924}{1}+\frac{48.47}{1.2}-\frac{12.11.10}{1.2.3}+\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}=0.$$

C'est par la méthode de fonctions génératrices que M. Hammond a réussi à établir cette échelle de relation entre les nombres de Hamilton, lequel évidemment n'avait pas le moindre soupçon de l'existence d'une échelle pareille.

Si l'on prend les différences des nombres de Hamilton, on obtient la série 1, 2, 6, 36, 876, ..., qu'on peut nommer $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, \ldots$. On savait déjà par démonstration que $h_{i+1} \div h_i^2$ est plus grand que $\frac{1}{2}$ pour toute valeur finie de i et avec certitude morale que ce rapport devient $\frac{1}{2}$ quand i est infini. Avec la formule de M. Hammond, on peut donner une démonstration rigoureuse de ce dernier fait et en même temps établir ce nouveau théorème: *$H_{i+1} \div H_i^2$ est plus petit que $\frac{1}{2}$ pour toute valeur de i finie et plus grande que l'unité, et égal à $\frac{1}{2}$ quand i est infini.*