55.

SUR LES NOMBRES PARFAITS.

[*Comptes Rendus*, CVI. (1888), pp. 403—405.]*

EXISTE-T-IL des nombres parfaits impairs ? C'est une question qui reste indécise.

Dans un article intéressant de M. Servais, paru dans le journal *Mathesis* en octobre 1887, on trouve cette proposition qu'*un nombre parfait* (*s'il y en a*) *qui ne contient que trois facteurs premiers distincts est nécessairement divisible par* 3 *et* 5. Je vais démontrer ici qu'un tel nombre n'existe pas, au moyen d'un genre de raisonnement qui m'a fourni aussi une démonstration de ce théorème qu'*il n'existe pas de nombre parfait qui contienne moins de six facteurs premiers distincts.*

On voit facilement que la somme de la série géométrique

$$1 + c + c^2 + \ldots + c^i,$$

où c est impair, sera elle-même paire quand i est impair; de plus, quand i est pair, cette somme sera toujours paire, mais impairement paire seulement dans le cas où $c \equiv i \equiv 1 \pmod 4$.

Donc, si un nombre parfait impair est de la forme $p^i q^j r^k \ldots$, ($p, q, r, \ldots$ étant des nombres premiers distincts), tous les indices $i, j, k, \ldots$ doivent être pairs à l'exception d'un seul, soit i, lequel, de même que sa base p, sera congru à 1 par rapport au module 4; car on doit avoir

$$\int p^i \int q^j \int r^k \ldots = 2p^i q^j r^k \ldots,$$

$\int x^i$ représentant $1 + x + \ldots + x^i$, c'est-à-dire $\dfrac{x^{i+1} - 1}{x - 1}$.

Ainsi, on voit qu'un nombre parfait impair (si un tel nombre existe) sera de la forme

$$M^2 (4q + 1)^{4k+1},$$

$4q + 1$ étant un nombre premier qui ne divise pas M.

[* See also below, p. 615.]

Comme corollaire, on peut déduire qu'aucun nombre parfait impair ne peut être divisible par 105; en effet, soit un tel nombre

$$3^{2i}5^x7^{2k}\ldots,$$

on aura $$\frac{\int 3^{2i}\int 5^x\int 7^{2k}}{3^{2i}5^x7^{2k}} \gtreqless \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}\right);$$

c'est-à-dire $\gtreqless \dfrac{2\,.\,13\,.\,19}{5\,.\,49}$, c'est-à-dire $\dfrac{494}{245}$; qui est plus grand que 2.

Remarquons qu'en général, si $p^i q^j r^k\ldots$ est un nombre parfait, il fait que $\dfrac{p^{i+1}}{p^i(p-1)}\dfrac{q^{j+1}}{q^j(q-1)}\ldots$, c'est-à-dire $\dfrac{p}{p-1}\dfrac{q}{q-1}\dfrac{r}{r-1}\ldots$, soit plus grand que 2.

Ainsi, à moins que le plus petit des éléments $p, q, r, \ldots$ ne soit plus grand que 3, on doit avoir

$$\frac{5}{4}\frac{7}{6}\frac{11}{10}\frac{13}{12}\frac{17}{16}\frac{19}{18}\ldots > 2;$$

mais en ne dépassant pas 19, ce produit est moindre que 1,94963. Conséquemment le nombre des éléments, dans ce cas, doit être 7, au moins. Puisque $1{,}95\times\left(1+\dfrac{1}{40}\right)<2$, on voit immédiatement que, si un nombre parfait à 7 éléments parmi lesquels 3 ne figurent pas existe, le septième élément ne pourrait pas dépasser 37.

Passons au cas de 3 éléments 3, q, r d'un nombre parfait impair. Puisque $\dfrac{3}{2}\dfrac{7}{6}\dfrac{11}{10}=\dfrac{231}{120}<2$, on voit que $3^i7^j11^k$, et à plus forte raison $3^ip^jq^k$, où p, q sont des nombres quelconques autres que 3 ou 5, ne peut être un nombre parfait.

Supposons donc que 3, 5, q sont les éléments d'un nombre parfait: puisque $\dfrac{3}{2}\dfrac{5}{4}\dfrac{17}{16}=\dfrac{255}{128}<2$, on voit que q ne peut être ni 17, ni un nombre quelconque plus grand que 17. Donc $q=11$ ou $q=13$; car nous avons vu que 3, 5, 7 ne peuvent jamais se trouver réunis comme éléments d'un nombre parfait quelconque.

(1) Soient 3, 5, 13 les éléments. L'indice de 13 ne peut pas être impair, car alors le nombre $\int 13^{2i+1}=\dfrac{13^{2i+2}-1}{13-1}$ contiendrait le facteur 7, et 7 devrait être un des éléments. Il s'ensuit que $(3^{2i+1}-1)(13^{2j+1}-1)$ devrait contenir 5; mais, par rapport au module 5, une puissance impaire quelconque de 3 ou 13 est congrue à 3 ou à 2. Donc la combinaison 3, 5, 13 est inadmissible.

(2) Soient 3, 5, 11 les éléments.

L'indice de 5 doit être de la forme $4j+1$; mais, si $j>0$,

$$\int 5^{4j+1} = \frac{5^{4j+2}-1}{5-1}$$

contiendra les trois nombres impairs premiers entre eux*

$$\frac{5^{2j+1}-1}{5-1}, \quad \frac{5^{2j+1}+1}{5+1}, \quad \frac{5+1}{2}.$$

Conséquemment, il y aura au moins trois autres éléments en plus de 5, ce qui est inadmissible : donc le nombre sera de la forme $3^{2i}5\ 11^{2k}$.

Donc $(1+5)(11^{2k+1}-1)$ doit contenir 9, ce qui est impossible ; car $11^{2k+1} \equiv 2 \pmod 3$.

Ainsi, on voit qu'un nombre impair avec 3 éléments seulement ne peut exister.

Quant aux nombres parfaits pairs, Euclide a démontré que $2^n \int 2^n$, c'est-à-dire $2^n(2^{n+1}-1)$, est un nombre parfait pourvu que $2^{n+1}-1$ soit un nombre premier. Mais on doit à Euler la seule preuve que je connaisse de la proposition réciproque qu'*il n'existe pas de nombres pairs parfaits autres que ceux d'Euclide.*

[* See below, p. 615.]