63.

SUR LA CORRESPONDANCE COMPLÈTE ENTRE LES FRACTIONS CONTINUES QUI EXPRIMENT LES DEUX RACINES D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE DONT LES COEFFICIENTS SONT DES NOMBRES RATIONNELS.

[*Comptes Rendus*, CVIII. (1889), pp. 1037—1041.]

SI $u_i = \lambda_i u_{i-1} + u_{i-2}$ et $u_{-1} = 0$, $u_0 = 1$, on peut appeler u_i un cumulant dont la succession $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_i$ est le type; désignons-le par t.

Alors on peut représenter

Par $`t$ la succession............ $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_i$
Par t' „ ....$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{i-1}$
Par $`t'$ „ .... $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{i-1}$.

De plus, on peut représenter par θt la réunion du type θ suivi par le type t; par $\theta 0 t$ ce que devient θt quand on intercale un zéro entre la succession θ et la succession t; par $\theta(0t)^i$ la succession θ suivie par la succession $0t$ répétée i fois; et par $t(0\theta)^i \tau$ ce que devient $t\tau$ quand on intercale 0θ i fois entre le t et le τ.

T étant un type quelconque, on peut désigner par $[T]$ le cumulant dont T est le type.

Ainsi, si les éléments en T sont regardés comme les quotients partiels d'une fraction continue, et que, suivant la notation de l'immortel Lejeune-Dirichlet, on représente par (T) la dernière convergente à cette fraction, on aura

$$(T) = [T] \div [`T].$$

Désignons par $\underline{\theta}$ ce que devient θ quand on renverse l'ordre, et par $\overline{\theta}$ ce qu'il devient quand on change le signe de chacun de ses éléments. Posons

$$T_i = \underline{\theta} t (0t)^i \overline{\theta};$$

j'ai trouvé et démontré le lemme suivant*:

* Pour établir cette proposition, on n'a besoin que de se servir des *deux* identités suivantes. Si $T = t\theta$,

$$[T] = [t][\theta] + [t'][`\theta].$$

Les rapports des trois quantités $[T_i] : [`T_i] - [T_i'] : [`T_i']$ *sont indépendants de* $\underline{i}$ *; c'est-à-dire sont les mêmes que les rapports de*

$$[\underline{\theta}t\bar{\theta}] : [`\underline{\theta}t\bar{\theta}] - [\underline{\theta}t\bar{\theta}'] : [`\underline{\theta}t\bar{\theta}'].$$

Avec l'aide de ce théorème et de l'équation qui exprime une propriété bien connue des convergentes successives de fractions continues, savoir

$$[T]\,[`T'] - [`T]\,[T'] = \pm 1,$$

on établit facilement le théorème suivant :

On peut écrire et d'une seule manière les deux racines d'une équation quadratique simultanément sous les formes

$$(\theta t\,(0t)^{\infty}), \quad -(\bar{\theta}\underline{t}\,(0\underline{t})^{\infty}),$$

où tous les éléments de θ, *sauf le dernier* (*qui peut être zéro*), *et tous les éléments de* t *sont positifs.*

Comme un simple corollaire de ce théorème de correspondance, en appliquant à la seconde forme la méthode donnée par Dirichlet pour *régulariser* une succession de quotients partiels dont quelques-uns au commencement sont négatifs, on voit que les périodes des deux fractions convergentes contiendront les mêmes éléments, mais en ordre inverse.

Un exemple fera mieux comprendre la portée du théorème.

Prenons l'équation

$$23x^2 - 68x + 50 = 0,$$

dont les racines sont

$$\frac{34+\sqrt{6}}{23}, \quad \frac{34-\sqrt{6}}{23}.$$

On trouve, pour le développement de ces deux quantités, les fractions périodiques en fractions continues

$$(1, 2, 1, 2\,; 4, 2\,; 4, 2\,; 4, 2\,; \ldots)$$

et

$$(1, 1, 1, 2\,; 2, 4\,; 2, 4\,; 2, 4\,; \ldots)$$

respectivement.

Si $T = t\theta\tau$, $\quad [T] = [t][\theta][\tau] + [t'][`\theta][\tau] + [t][\theta'][`\tau] + [t'][`\theta'][`\tau]$.

On peut cependant ajouter que, de même, si $T = t\theta\tau\omega$,

$$\begin{aligned}[T] = {} & [t][\theta][\tau][\omega] + [t'][`\theta][\tau][\omega] + [t][\theta'][`\tau][\omega] + [t][\theta][\tau'][`\omega] \\ & + [t'][`\theta'][`\tau][\omega] + [t'][`\theta][\tau'][`\omega] + [t][\theta'][`\tau'][`\omega] + [t'][`\theta'][`\tau'][`\omega],\end{aligned}$$

où l'on remarquera que les trois premiers produits de la deuxième ligne sont composés de deux (le premier et le dernier) de formes analogues, et d'un troisième d'une forme différente, et ainsi, en général, si le nombre des types partiels t, θ, τ, ... est $\underline{i}$, on aura 2^{i-1} produits de cumulants partiels et de leurs dérivés simples et doubles ; car il y aura $(i-1)$ intervalles entre les i types sur lesquels on doit faire tomber dans chaque manière possible 1, 2, 3, ... $(i-1)$ paires d'accents. Quand les types partiels deviennent monomiaux, les termes avec les accents doubles dans la somme des produits deviennent zéros, et l'on retrouve la règle connue pour exprimer un cumulant comme somme des produits des agrégats de ses éléments, en élisant ou en traitant comme unités des paires et combinaisons de paires d'éléments consécutifs.

Or, en écrivant

$$\theta = 1, 2, \quad t = 1, 2, 3,$$

on aura

$$(\theta t\,(0t)^\infty) = (1, 2, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, \ldots)$$
$$= (1, 2, 1, 2; \quad 4, 2; \quad 4, 2; \quad 4, 2; \ldots),$$

ce qui répond à la première racine.

On aura aussi

$$(\bar{\theta}\underline{t}\,(0\underline{t})^\infty) = (-1, -2, 3, \ 2, 1, 0, 3, \ 2, 1, 0, 3, \ldots)$$
$$= (-1, -2, 3; 2, \quad 4; 2, \quad 4; \ldots),$$

laquelle convergente, *régularisée* selon les règles de Dirichlet*, peut être remplacée par

$$(-2, 1, 0, 1, 2; 2, 4; 2, 4; \ldots),$$

c'est-à-dire

$$(-2, 2, 2; 2, 4; 2, 4; \ldots),$$

ce qui, selon les mêmes règles, équivaut à

$$-(1, 1, 1, 2; 2, 4; 2, 4; \ldots),$$

laquelle est la valeur prise négativement de la seconde racine.

Terminons par l'exemple très simple

$$x^2 - 10x - 1 = 0,$$

dont les deux racines sont $5 + \sqrt{26}$, $5 - \sqrt{26}$, qui équivalent aux fractions continues

$$(10, 10, 10, \ldots), \quad -(0, 10, 10, 10, \ldots).$$

Faisons $\qquad \theta = 9, 0, \quad t = 1, 9.$

Alors $(\theta t\,(0t)^\infty)$ devient

$$(9, 0; 1, 9; 0, 1, 9; 0, 1, 9; \ldots),$$

c'est-à-dire

$$(10; 10; 10; \ldots),$$

la première racine; et $(\bar{\theta}\underline{t}\,(0\underline{t})^\infty)$ devient

$$(-9, 0; 9, 1; 0, 9, 1; 0, 9, 1; \ldots),$$

ce qui équivaut à

$$(0, 10, 10, \ldots),$$

laquelle est la valeur prise négativement de la seconde racine.

On comprendra que dans les formules pour une racine et la négative de l'autre, rien n'empêche que le θ disparaisse et qu'ainsi les formules deviennent

$$(t\,(0t)^\infty), \quad (\underline{t}\,(0\underline{t})^\infty)$$

respectivement.

* *Vorlesungen über Zahlentheorie*, § 80; 1871.

Dans le cas où les deux racines sont égales, mais de signes contraires, non seulement le $\underline{\theta}$ disparaît, mais aussi le $\underline{t}$ devient symétrique : ainsi l'on retrouve la forme applicable à l'équation $Ax^2 - \beta = 0$, pour lequel cas la racine positive peut être mise sous la forme

$$(abc, \ldots, cba, 0, abc, \ldots, cba, 0, abc),$$

c'est-à-dire

$$(a_j bc, \ldots, cb, 2a_j bc, cb, 2a_j).$$

On peut encore simplifier un peu les expressions pour x et x' (où x et x' sont les racines de la même équation quadratique) en écrivant

$$x = (\theta\,(t, 0)^\infty), \quad x' = -(\overline{\theta}\,(\underline{t}, 0)^\infty),$$

formule vraiment surprenante par sa simplicité et sa symétrie.