65.

SUR LA VALEUR D'UNE FRACTION CONTINUE FINIE ET PUREMENT PÉRIODIQUE.

[*Comptes Rendus*, CVIII. (1889), pp. 1195—1198.]

On sait que la valeur de la fraction purement périodique infinie (t^∞), où t est un type (c'est-à-dire une succession) d'éléments quelconques, est la racine positive de l'équation

$$[{}^\backprime t]\, x^2 - ([t] - [{}^\backprime t'])\, x - [t'] = 0. \tag{1}$$

Cela conduit naturellement à la question de trouver la valeur de la fraction continue analogue périodique mais finie (t^n).

Avec l'aide de notre formule donnée dans une Note précédente, qui sert à exprimer un cumulant à un type composé de i types partiels comme une somme de 2^{i-1} produits des i cumulants partiels et leurs dérivées simples et doubles, on peut résoudre cette question sans aucune difficulté.

On a
$$(t^n) = \frac{[t^n]}{[{}^\backprime t^n]} = \frac{[t^n]}{[{}^\backprime t t^{n-1}]}.$$

Soient
$$[t^n] = u_n, \quad [{}^\backprime t t^{n-1}] = {}^\backprime t v_n,$$

on trouve que v_n sera une fonction entière et l'on établit, au moyen de la formule citée, entre u_n et v_n les équations aux différences

$$u_n - a u_{n-1} - B u_{n-2} = c B v_{n-2}, \quad v_{n-1} - c v_{n-2} = u_{n-2},$$

où
$$a = [t], \quad B = [{}^\backprime t][t'], \quad c = [{}^\backprime t'].$$

Donc
$$B v_{n-1} = u_n - a u_{n-1},$$

$$a v_n + (B - ac)\, v_{n-1} = u_n = v_{n+1} - c v_n,$$

$$v_{n+1} - (a + c)\, v_n + (-)^{\mu-1} v_{n-1} = 0$$

[car $B - ac = (-)^{\mu-1}$, μ étant le nombre d'éléments en t].

Conséquemment, par un principe bien connu, v_n et u_n seront les coefficients de k^n dans le développement d'une fraction de la forme

$$\frac{A + Bk}{1 - (a + c)\, k - \epsilon k^2},$$

où $\epsilon=(-)^\mu$, A et B étant convenablement déterminés pour l'un et pour l'autre cas.

Or
$$u_0=1, \quad u_1=a,$$
$$v_0=0, \quad v_1=1.$$

Donc u_n est le coefficient de k^n en $\dfrac{1-ck}{1-(a+c)k-\epsilon k^2}$ et v_n le coefficient de k^n en $\dfrac{k}{1-(a+c)k-\epsilon k^2}$, de sorte que, si l'on écrit

$$\Phi_n(x)=x^n+(n-1)\epsilon x^{n-2}+\frac{(n-2)(n-3)}{2}\epsilon^2 x^{n-4}+\ldots$$

jusqu'au premier terme qui devient zéro, on aura

$$v_n=\Phi_{n-1}(a+c)$$

et
$$u_n=\Phi_n(a+c)-c\Phi_{n-1}(a+c).$$

Ainsi l'on voit que

$$(t^n)=\frac{(\Phi_n-[`t']\Phi_{n-1})(a+c)}{[`t]\Phi_{n-1}(a+c)}.$$

On peut aussi exprimer u_n et v_n au moyen des racines de l'équation

$$m^2-([t]+[`t'])m-\epsilon=0,$$

dont on remarquera que le déterminant $\frac{1}{4}([t]+[`t'])^2+\epsilon$ est le même que celui de l'équation (1), puisque

$$\tfrac{1}{4}([t]-[`t'])^2+[`t][t']=\tfrac{1}{4}([t]+[`t'])^2+\epsilon;$$

car, en supposant que ρ et σ sont les deux racines, on aura

$$\frac{u_n}{v_n}=\frac{A\rho^n-B\sigma^n}{\rho^n-\sigma^n},$$

où A, B sont des quantités connues; et, en supposant que $\rho^2=>\sigma^2$, on aura $\dfrac{u_\infty}{v_\infty}=A$ et $(t^\infty)=\dfrac{A}{`t}$, laquelle valeur on identifiera facilement avec la racine positive de l'équation

$$[`t]x^2-([t]-[`t'])x-[t']=0.$$

Si l'on suppose que les éléments de t sont m en nombre et tous identiques avec l'unité, on aura

$$[`t]=[1^{m-1}], \quad [`t^n]=[1^{mn-1}],$$

et l'on obtient la formule peut-être nouvelle

$$\frac{\Phi_{mn-1}(1)}{\Phi_{m-1}(1)}=\Phi_{n-1}(\Psi_m),$$

où $\Psi_m=\Phi_m(1)+\Phi_{m-2}(1)$.

Si l'on suppose que m est impair, ϵ sera positif et Ψ_m prendra la forme

$$1 + m + m\frac{m-3}{2} + m\frac{(m-4)(m-5)}{2.3} + \dots,$$

en s'arrêtant au premier terme qui devient zéro.

Cette formule donne naissance à un corollaire intéressant. Supposons que la somme de deux termes séparés par un seul dans la série *phyllotactique* 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,... est un nombre premier p. Soit $m, m-2$ l'ordre de ces deux termes; alors je dis que le quotient du nombre de l'ordre $mi-1$ par celui de l'ordre $m-1$ (nombre toujours entier) par rapport au module p sera congru à l'unité si i est impair et à zéro si i est pair; de plus, dans ce dernier cas où $i=2j$, le quotient de ce quotient divisé par p sera congru à $(-)^j(j+1)$ par rapport au même module p.

On pourrait tirer sans doute d'autres théorèmes analogues, mais apparemment moins simples, au moyen de l'équation

$$[t^n] = \Phi_n[t] - [t'] \Phi_{n-1}[t].$$

C'est une chose qu'on n'avait nul droit (*a priori*) d'attendre que le quotient $[`t^n] \div [`t]$, au lieu d'être une fonction rationnelle et entière de quatre quantités $[t]$, $[`t]$, $[t']$, $[`t']$ ou (ce qui est équivalent) rationnelle et fractionnelle de $[t]$, $[`t]$, $[t']$, est en effet une fonction rationnelle et entière d'une seule quantité, savoir de $[t] + [`t']$, c'est-à-dire est un nombre *phyllotactique* affecté ou paramétrique, nom qu'on peut convenablement donner à la valeur de $[x^n]$, où x est monomial et entier, $[1^n]$ prenant alors le nom de *nombre phyllotactique simple* ou *unitaire*.