70.

SUR LE RAPPORT DE LA CIRCONFÉRENCE AU DIAMÈTRE.

[*Comptes Rendus*, CXI. (1890), pp. 778—780.]

[See p. 682, below ; footnote.]

En étudiant la preuve de Lambert, du théorème que π ne peut pas être la racine carrée d'un nombre entier, je crois avoir trouvé le moyen d'en faire l'extension au théorème de Lindemann, c'est-à-dire que π ne peut pas être la racine d'une équation rationnelle. Par exemple, supposons que π soit une racine de l'équation

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

ou en mettant $Ax = \rho$, que $A\pi$ soit une racine de

$$\rho^2 + B\rho + AC = 0\,;$$

prenons un nombre entier K, tel que $K(B - A\pi)$ soit de la forme

$$2m\pi + (1-\theta)\frac{\pi}{2},$$

θ étant < 1 ; en mettant $K\rho = R$, nous aurons l'équation

$$R^2 + DR + E = 0, \qquad (1)$$

dont $KA\pi$ sera une racine et l'autre une quantité dont la tangente sera positive, η.

Considérons la fraction continue

$$S = 3 - \frac{R^2}{5-}\,\frac{R^2}{7-}\cdots,$$

en mettant $R = KA\pi$, on aura

$$S = 0\,;$$

en mettant $R = \eta$, on aura

$$S' = \eta.$$

Or, prenons un nombre ν tel que $2\nu > R^2$ et considérons les deux fractions continues

$$S_\nu = \frac{R^2}{2\nu+1-}\,\frac{R^2}{2\nu+3-}\,\frac{R^2}{2\nu+5}\cdots,$$

$$S'_\nu = \frac{R'^2}{2\nu+1-}\,\frac{R'^2}{2\nu+3-}\,\frac{R'^2}{2\nu+5}\cdots,$$

R, R' étant les deux racines de l'équation quadratique (1)

$$S_\nu = \frac{B}{A}, \qquad S_{\nu+1} = \frac{C}{B}, \qquad S_{\nu+2} = \frac{D}{C}, \qquad \ldots,$$

A, B, C, D, ... étant des fonctions linéaires avec des coefficients entiers de R, et l'on aura

$$S'_\nu = \frac{B' - B'_1\eta}{A' - A'_1\eta}, \qquad S'_{\nu+1} = \frac{C' - C'_1\eta}{B' - B'_1\eta}, \qquad \ldots,$$

A', B', C' étant les mêmes fonctions de R' que le sont A, B, C de R.

Or, on peut démontrer que A', B', C', ... seront des nombres positifs, et $\frac{A'}{A'_1}, \frac{B'}{B'_1}, \frac{C'}{C'_1} \ldots$ chacune $> \eta$.

De plus, toutes les fractions $\frac{B' - B'_1\eta}{A' - A'_1\eta}$ seront des quantités positives et moindres que l'unité.

Mais $\frac{B'}{A'} - \frac{B' - B'_1\eta}{A' - A'_1\eta} = \frac{R'^2\eta}{A'^2\left(1 - \frac{A'_1}{A'}\eta\right)}$, dont le dénominateur sera nécessairement positif.

Donc la quantité positive $\frac{B'}{A'}$, égale une fraction positive diminuée d'une autre fraction positive.

Donc $\frac{B'}{A'}$, et les quantités semblables, $\frac{C'}{B'}, \frac{D'}{C'}, \ldots$, seront toutes des fractions positives et moindres que l'unité.

Donc $\frac{BB'}{AA'}, \frac{CC'}{BB'}, \frac{DD'}{CC'}, \ldots$ seront des fractions possédant ce même caractère.

Mais tous ces *produits* AA', BB', CC' seront des *nombres entiers*, ce qui est impossible.

Je crois pouvoir faire une démonstration tout à fait semblable pour établir que π ne peut pas être la racine d'une équation d'un degré quelconque dont toutes les racines sont réelles. Pour le cas d'équations avec des racines imaginaires, il y aura quelque chose de plus à faire pour achever la démonstration ; mais j'ai lieu de croire qu'avec l'aide de la théorie des modules de quantités imaginaires il n'y aura pas de grosses difficultés à vaincre. Enfin j'ajoute que deux quantités réelles ou imaginaires, dont l'une est la tangente ou le logarithme népérien de l'autre, ne peuvent être toutes les deux fonctions algébriques des racines de la même équation irréductible, à coefficients entiers.