229.

NOTE SUR UNE FORMULE POUR LA RÉVERSION DES SÉRIES.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. LII. (1856), pp. 276—284.]

Je me propose de développer dans cette note, pour le cas de trois variables (ce qui suffit pour faire voir la loi dans le cas d'un nombre quelconque de variables) une formule qui se trouve dans le mémoire remarquable de Jacobi, "de resolutione aequationum per series infinitas," *Crelle*, t. VI. [1830] p. 257. Voici la formule dont il s'agit. Soit $f(x, y, z)$ une fonction rationnelle et entière des variables x, y, z, et mettons $u = X$, $v = Y$, $w = Z$, où X, Y, Z sont des fonctions rationnelles et entières des variables x, y, z, telles que $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ ne contiennent que les puissances et les produits du deuxième ordre et des ordres supérieurs des variables. Cela étant, on aura

$$f(x, y, z) = \left[f(x, y, z) \frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(x, y, z)} \cdot \frac{1}{(X-u)(Y-v)(Z-w)} \right]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}},$$

où la notation $\dfrac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(x, y, z)}$ dénote le déterminant fonctionnel ou "Jacobian" de X, Y, Z par rapport à x, y, z et la notation $[\ ]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}}$ signifie le coefficient de $x^{-1}y^{-1}z^{-1}$ dans le développement de la fonction en dedans des $[\ ]$; ce développement doit s'effectuer d'une manière déterminée, savoir il faut d'abord développer les facteurs $\dfrac{1}{X-u}$ selon les puissances descendantes de x, c'est-à-dire dans la forme $\dfrac{1}{X} + \dfrac{u}{X^2} + \dfrac{u^2}{X^3} + \text{etc.}$, et puis écrivant $X = x + P$ (où P est fonction des trois variables) il faut développer les puissances de X selon les puissances descendantes du monôme x, c'est-à-dire dans la forme $X^{-m} = x^{-m} - mx^{-m-1}P + \frac{1}{2}m(m+1)x^{-m-2}P^2 - \text{etc.}$, ce qui est en effet un développement selon les puissances *ascendantes* des variables.

La formule donne

$$\text{Coeff. } u^{\mathrm{a}}v^{\mathrm{b}}w^{\mathrm{c}} \text{ dans } f(x, y, z) = \left[f(x, y, z) \frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(x, y, z)} \cdot \frac{1}{X^{\mathrm{a}+1}\, Y^{\mathrm{b}+1}\, Z^{\mathrm{c}+1}} \right]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}},$$

ou ce qui est la même chose

$$\text{Coeff. } u^{\mathrm{a}}v^{\mathrm{b}}w^{\mathrm{c}} \text{ dans } f(x, y, z) = \left[f(x, y, z) \frac{\partial\left(-\frac{1}{\mathrm{a}} X^{-\mathrm{a}},\, -\frac{1}{\mathrm{b}} Y^{-\mathrm{b}},\, -\frac{1}{\mathrm{c}} Z^{-\mathrm{c}}\right)}{\partial(x, y, z)} \right]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}}.$$

Soit à présent

$$\begin{aligned} X &= x \,.\,. + A_{f, g, h}\, x^f y^g z^h + \text{etc.}, \\ Y &= y \,.\,. + B_{i, j, k}\, x^i y^j z^k + \text{etc.}, \\ Z &= z \,.\,. + C_{l, m, n}\, x^l y^m z^n + \text{etc.}, \\ f(x, y, z) &= \ldots \quad \Theta_{P, Q, R}\, x^P y^Q z^R + \text{etc.}; \end{aligned}$$

dans ces expressions et partout dans ce qui suit, les etc.'s se rapportent à des termes que l'on obtient en affixant des accents en nombre quelconque aux symboles indéterminés.

En employant la notation de Gauss $\Pi\alpha = 1 . 2 . 3 \ldots \alpha$, on obtient pour la terme général de $-\frac{1}{\mathrm{a}} X^{-\mathrm{a}}$,

$$(-)^{r-1} \frac{\Pi(\mathrm{a} + r - 1)}{\Pi\mathrm{a}\, \Pi\alpha \text{ etc.}} A^{\alpha}{}_{f, g, h} \text{ etc. } x^{-\mathrm{a}-r+F} y^G z^H,$$

où

$$\alpha + \text{etc.} = r, \quad f\alpha + \text{etc.} = F, \quad g\alpha + \text{etc.} = G, \quad h\alpha + \text{etc.} = H.$$

De même le terme général de $-\frac{1}{\mathrm{b}} Y^{-\mathrm{b}}$ est

$$(-)^{s-1} \frac{\Pi(\mathrm{b} + s - 1)}{\Pi\mathrm{b}\, \Pi\beta \text{ etc.}} B^{\beta}{}_{i, j, k} \text{ etc. } x^I y^{-\mathrm{b}-s+J} z^K,$$

où

$$\beta + \text{etc.} = s, \quad i\beta + \text{etc.} = I, \quad j\beta + \text{etc.} = J, \quad k\beta + \text{etc.} = K,$$

et le terme général de $-\frac{1}{\mathrm{c}} Z^{-\mathrm{c}}$ est

$$(-)^{t-1} \frac{\Pi(\mathrm{c} + t - 1)}{\Pi\mathrm{c}\, \Pi\gamma \text{ etc.}} C^{\gamma}{}_{l, m, n,} \text{ etc. } x^L y^M z^{-\mathrm{c}-t+N},$$

où

$$\gamma + \text{etc.} = t, \quad l\gamma + \text{etc.} = L, \quad m\gamma + \text{etc.} = M, \quad n\gamma + \text{etc.} = N.$$

En formant de là le terme général du Jacobian et en multipliant par le terme général de $f(x, y, z)$ on obtient pour le terme général de l'expression en dedans des [ ], la valeur que voici,

$$(-)^{r+s+t} \frac{\Pi(\mathrm{a} + r - 1)\, \Pi(\mathrm{b} + s - 1)\, \Pi(\mathrm{c} + t - 1)}{\Pi\mathrm{a}\, \Pi\mathrm{b}\, \Pi\mathrm{c}\, \Pi\alpha \text{ etc. } \Pi\beta \text{ etc. } \Pi\gamma \text{ etc.}} \times$$

$$A^{\alpha}{}_{f, g, h} \text{ etc. } B^{\beta}{}_{i, j, k} \text{ etc. } C^{\gamma}{}_{l, m, n} \text{ etc. } \Theta_{P, Q, R} \begin{vmatrix} \mathrm{a} + r - F, & -G, & -H \\ -I, & \mathrm{b} + s - J, & -K \\ -L, & -M, & \mathrm{c} + t - N \end{vmatrix} \times$$

$$x^{-\mathrm{a}-r+F+I+L+P-1} \,.\, y^{-\mathrm{b}-s+G+J+M+Q-1} \,.\, z^{-\mathrm{c}-t+H+K+N+R-1},$$

et pour trouver le terme qui contient $x^{-1}y^{-1}z^{-1}$ on n'a qu'à écrire dans cette expression

$$F+I+L+P=\mathrm{a}+r,\quad G+J+M+Q=\mathrm{b}+s,\quad H+K+N+R=\mathrm{c}+t,$$

le coefficient de $x^{-1}y^{-1}z^{-1}$ sera alors la valeur de l'expression $[\ ]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}}$ qu'il s'agissait de trouver. En effectuant cela et en recapitulant les formules on obtient le théorème suivant: en posant

$$\begin{aligned} X &= x \ldots + A_{f,\,g,\,h}\ x^f y^g z^h + \text{etc.} = u, \\ Y &= y \ldots + B_{i,\,j,\,k}\ x^i y^j z^k + \text{etc.} = v, \\ Z &= z\ \ldots + C_{l,\,m,\,n,}\ x^l y^m z^n + \text{etc.} = w, \\ f(x,\ y,\ z) &= \ \ \ldots + \Theta_{P,\,Q,\,R}\ x^P y^Q z^R + \text{etc.} \end{aligned}$$

on aura pour le terme général du coeff. $u^{\mathrm{a}}v^{\mathrm{b}}w^{\mathrm{c}}$ dans $f(x,\ y,\ z)$ la valeur que voici,

$$(-)^{r+s+t}\frac{\Pi\,(\mathrm{a}+r-1)\,\Pi\,(\mathrm{b}+s-1)\,\Pi\,(\mathrm{c}+t-1)}{\Pi\mathrm{a}\,\Pi\mathrm{b}\,\Pi\mathrm{c}\,\Pi\alpha\ \text{etc.}\ \Pi\beta\ \text{etc.}\ \Pi\gamma\ \text{etc.}}\times$$

$$A^{\alpha}{}_{f,\,g,\,h}\ \text{etc.}\ B^{\beta}{}_{i,\,j,\,k}\ \text{etc.}\ C^{\gamma}{}_{l,\,m,\,n}\ \text{etc.}\ \Theta_{P,\,Q,\,R}\left|\begin{matrix} P+I+L, & -G, & -H \\ -I, & Q+G+M, & -K \\ -L, & -M, & R+H+K \end{matrix}\right|$$

dans laquelle

$$\begin{array}{lll} \alpha\ + \text{etc.} = r, & \beta\ + \text{etc.} = s, & \gamma\ + \text{etc.} = t, \\ f\alpha + \text{etc.} = F, & g\alpha\ + \text{etc.} = G, & h\alpha\ + \text{etc.} = H, \\ i\beta + \text{etc.} = I, & j\beta + \text{etc.} = J, & k\beta + \text{etc.} = K, \\ l\gamma + \text{etc.} = L, & m\gamma + \text{etc.} = M, & n\gamma\ + \text{etc.} = N, \end{array}$$

$$P+F+I+L=\mathrm{a}+r,\qquad Q+G+J+M=\mathrm{b}+s,\qquad R+H+K+N=\mathrm{c}+t.$$

Les dernières équations peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} &P+(f-1)\,\alpha+\text{etc.}+\qquad i\beta+\text{etc.}+\qquad l\gamma+\text{etc.}=\mathrm{a}, \\ &Q+\qquad g\alpha+\text{etc.}+(j-1)\,\beta+\text{etc.}+\qquad m\gamma+\text{etc.}=\mathrm{b}, \\ &R+\qquad h\alpha+\text{etc.}+\qquad k\beta+\text{etc.}+(n-1)\,\gamma+\text{etc.}=\mathrm{c}, \end{aligned}$$

qui sont les conditions auxquelles doivent satisfaire les valeurs de P, Q, R, α, etc., β, etc., γ, etc., f, g, h, etc., i, j, k, etc., l, m, n, etc.; en ajoutant ces équations on obtient

$$\begin{gathered} P+Q+R+(f+g+h-1)\,\alpha+\text{etc.}+(i+j+k-1)\,\beta+\text{etc.}+(l+m+n-1)\,\gamma+\text{etc.} \\ =\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}, \end{gathered}$$

où les nombres $f+g+h-1$, etc. $i+j+k-1$, etc. $l+m+n-1$, etc. sont positifs, il n'y a donc qu'un nombre fini (comme cela doit être) de solutions des équations indéterminées.

Il y a une manière assez simple pour calculer le déterminant qui entre dans la formule, pour cela je représente les termes P, I, etc. par les notations symboliques $X\vartheta$, Xy, etc. de manière que le déterminant devient

$$\left| \begin{array}{ccc} X\vartheta + Xy + Xz, & -Yx, & -Zx \\ -Xy, & Y\vartheta + Yx + Yz, & -Zy \\ -Xz, & -Yz, & Z\vartheta + Zx + Zy \end{array} \right|,$$

or ce déterminant est ce que devient le produit

$$(X\vartheta + Xy + Xz)\,(Y\vartheta + Yz + Yx)\,(Z\vartheta + Zx + Zy),$$

en omettant du développement tous les termes qui contiennent un cycle tel que $Xy\,.\,Yx$, ou $Xy\,.\,Yz\,.\,Zx$. Cela donne pour le déterminant la somme des seize termes

$$\begin{aligned} X\vartheta\,.\,Y\vartheta\,.\,Z\vartheta &+ Y\vartheta\,.\,Z\vartheta\,(Xy + Xz) + Z\vartheta\,.\,X\vartheta\,(Yz + Yx) + X\vartheta\,.\,Y\vartheta\,(Zx + Zy) \\ &+ X\vartheta\,(Yx\,.\,Zx + Yx\,.\,Zy + Yz\,.\,Zx) + Y\vartheta\,(Zy\,.\,Xy + Zy\,.\,Xz + Zx\,.\,Xy) \\ &+ Z\vartheta\,(Xz\,.\,Yz + Xz\,.\,Yx + Xy\,.\,Yz); \end{aligned}$$

et la même chose est vraie quel que soit l'ordre du déterminant. C'est M. Sylvester qui m'a fait cette remarque.

Les formules de Jacobi s'appliquent aussi au cas où u, v, w, etc. sont données en termes de x, y, z, etc. au moyen d'équations et non pas explicitement comme auparavant; mais je ne chercherai pas à présent ce que deviennent les formules pour ce cas plus général.

On peut appliquer la formule au problème de la transformation des variables indépendantes dans le calcul différentiel. En effet, soient u, v, w des fonctions quelconques de x, y, z, et prenons ξ, η, ζ pour les incréments de x, y, z respectivement et υ, ν, ω pour les incréments de u, v, w respectivement; on aura

$$\xi = \left\{\left(\upsilon\frac{d}{du} + \nu\frac{d}{dv} + \omega\frac{d}{dw}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\upsilon\frac{d}{du} + \nu\frac{d}{dv} + \omega\frac{d}{dw}\right)^2 + \text{etc.}\right\} x,$$

$$\eta = \left\{\left(\upsilon\frac{d}{du} + \nu\frac{d}{dv} + \omega\frac{d}{dw}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\upsilon\frac{d}{du} + \nu\frac{d}{dv} + \omega\frac{d}{dw}\right)^2 + \text{etc.}\right\} y,$$

$$\zeta = \left\{\left(\upsilon\frac{d}{du} + \nu\frac{d}{dv} + \omega\frac{d}{dw}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\upsilon\frac{d}{du} + \nu\frac{d}{dv} + \omega\frac{d}{dw}\right)^2 + \text{etc.}\right\} z.$$

Soit

$$\nabla = \frac{\partial\,(x,\ y,\ z)}{\partial\,(u,\ v,\ w)}$$

le Jacobian de x, y, z par rapport à u, v, w; et mettons

$$\left(\upsilon \frac{d}{du} + \nu \frac{d}{dv} + \omega \frac{d}{dw}\right) x = p,$$

$$\left(\upsilon \frac{d}{du} + \nu \frac{d}{dv} + \omega \frac{d}{dw}\right) y = q,$$

$$\left(\upsilon \frac{d}{du} + \nu \frac{d}{dv} + \omega \frac{d}{dw}\right) z = r,$$

υ, ν, ω seront des fonctions linéaires de p, q, r, et, en formant avec ces valeurs l'expression de $\upsilon \frac{d}{du} + \nu \frac{d}{dv} + \omega \frac{d}{dw}$, on trouve

$$\upsilon \frac{d}{du} + \nu \frac{d}{dv} + \omega \frac{d}{dw} = p\bar{x} + q\bar{y} + r\bar{z},$$

où $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ sont des opérations de la forme $L \frac{d}{du} + M \frac{d}{dv} + N \frac{d}{dw}$, qui peuvent être représentées symboliquement de cette manière,

$$\bar{x} = \frac{1}{\nabla} \left| \begin{array}{ccc} \dfrac{d}{du}, & \dfrac{d}{dv}, & \dfrac{d}{dw} \\ \dfrac{dy}{du}, & \dfrac{dy}{dv}, & \dfrac{dy}{dw} \\ \dfrac{dz}{du}, & \dfrac{dz}{dv}, & \dfrac{dz}{dw} \end{array} \right|$$

et de même pour $\bar{y}$ et $\bar{z}$; il faut faire attention, qu'en opérant avec ces symboles, il faut traiter comme des constantes les fonctions de u, v, w qui entrent dans ces mêmes symboles.

Nous avons évidemment $\bar{x}x = 1$, $\bar{y}x = 0$, $\bar{z}x = 0$, et de même $\bar{x}y = 0$, etc.; on obtient de là

$$\xi = p + \tfrac{1}{2}(p\bar{x} + q\bar{y} + r\bar{z})^2 x + \text{etc.},$$
$$\eta = q + \tfrac{1}{2}(p\bar{x} + q\bar{y} + r\bar{z})^2 y + \text{etc.},$$
$$\zeta = r + \tfrac{1}{2}(p\bar{x} + q\bar{y} + r\bar{z})^2 z + \text{etc.}$$

Soit à présent ϑ une fonction quelconque de x, y, z, ou de u, v, w; en envisageant ϑ comme fonction de x, y, z, on trouve l'incrément de cette fonction en opérant sur ϑ avec le symbole

$$\left(\xi \frac{d}{dx} + \eta \frac{d}{dy} + \zeta \frac{d}{dz}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\xi \frac{d}{dx} + \eta \frac{d}{dy} + \zeta \frac{d}{dz}\right)^2 + \text{etc.},$$

mais en envisageant ϑ comme fonction de u, v, w et en faisant attention à l'équation $\upsilon \frac{d}{du} + \nu \frac{d}{dv} + \omega \frac{d}{dw} = p\bar{x} + q\bar{y} + r\bar{z}$, on trouve ce même incrément en opérant sur ϑ avec le symbole

$$(p\bar{x} + q\bar{y} + r\bar{z}) + \tfrac{1}{2}(p\bar{x} + q\bar{y} + r\bar{z})^2 + \text{etc.},$$

et les deux résultats deviendront identiques en substituant pour p, q, r les valeurs de ces quantités en termes de ξ, η, ζ, valeurs qui se trouvent par la réversion des séries qui donnent ξ, η, ζ en termes de p, q, r. C'est-à-dire nous aurons

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\mathrm{a}}\left(\frac{d}{dy}\right)^{\mathrm{b}}\left(\frac{d}{dz}\right)^{\mathrm{c}} = \Pi\mathrm{a}\,\Pi\mathrm{b}\,\Pi\mathrm{c}.\ \text{coeff.}\ \xi^{\mathrm{a}}\eta^{\mathrm{b}}\zeta^{\mathrm{c}}\ \text{dans}$$

$$\{(p\bar{x}+q\bar{y}+r\bar{z})+\tfrac{1}{2}(p\bar{x}+q\bar{y}+r\bar{z})^2+\text{etc.}\},$$

où

$$\xi = p+\tfrac{1}{2}(p\bar{x}+q\bar{y}+r\bar{z})^2 x+\text{etc.},$$

$$\eta = q+\tfrac{1}{2}(p\bar{x}+q\bar{y}+r\bar{z})^2 y+\text{etc.},$$

$$\zeta = r+\tfrac{1}{2}(p\bar{x}+q\bar{y}+r\bar{z})^2 z+\text{etc.}$$

C'est là le problème de la réversion des séries qui vient d'être traité; et en substituant

$$\frac{1}{\Pi f\,\Pi g\,\Pi h}x^{-f}y^{-g}z^{-h}x,\quad \frac{1}{\Pi i\,\Pi j\,\Pi k}x^{-i}y^{-j}z^{-k}y,\quad \frac{1}{\Pi l\,\Pi m\,\Pi n}x^{-l}y^{-m}z^{-n}z,\quad \frac{1}{\Pi P\,\Pi Q\,\Pi R}x^{-P}y^{-Q}z^{-R}$$

au lieu de

$$A_{f,\,g,\,h},\qquad B_{i,\,j,\,k},\qquad C_{l,\,m,\,n},\qquad \Theta_{P,\,Q,\,R},$$

on trouve le théorème suivant:

THÉORÈME. Le terme général de $\left(\frac{d}{dx}\right)^{\mathrm{a}}\left(\frac{d}{dy}\right)^{\mathrm{b}}\left(\frac{d}{dz}\right)^{\mathrm{c}}$ est

$$K\Omega\,(x^{-f}y^{-g}z^{-h}x)^{\alpha}\ \text{etc.}\ (x^{-i}y^{-j}z^{-k}y)^{\beta}\ \text{etc.}\ (x^{-l}y^{-m}z^{-n}z)^{\gamma}\ \text{etc.}\ x^{-P}y^{-Q}z^{-R},$$

expression dans laquelle

$$\begin{array}{lll} \alpha+\text{etc.}=r, & \beta+\text{etc.}=s, & \gamma+\text{etc.}=t, \\ f\alpha+\text{etc.}=F, & g\alpha+\text{etc.}=G, & h\alpha+\text{etc.}=H, \\ i\beta+\text{etc.}=I, & j\beta+\text{etc.}=J, & k\beta+\text{etc.}=K, \\ l\gamma+\text{etc.}=L, & m\gamma+\text{etc.}=M, & n\gamma+\text{etc.}=N, \end{array}$$

$$F+I+L+P=\mathrm{a}+r,\qquad G+J+M+Q=\mathrm{b}+s,\qquad H+K+N+R=\mathrm{c}+t;$$

$$K=(-)^{r+s+t}\times$$

$$\frac{\Pi(\mathrm{a}+r-1)\,\Pi(\mathrm{b}+s-1)\,\Pi(\mathrm{c}+t-1)}{\Pi\alpha\ \text{etc.}\ \Pi\beta\ \text{etc.}\ \Pi\gamma\ \text{etc.}\ (\Pi f\,\Pi g\,\Pi h)^{\alpha}\ \text{etc.}\ (\Pi i\,\Pi j\,\Pi k)^{\beta}\ \text{etc.}\ (\Pi l\,\Pi m\,\Pi n)^{\gamma}\ \text{etc.}\ \Pi P\,\Pi Q\,\Pi R};$$

et de là

$$\Omega = \begin{vmatrix} P+I+L, & -G, & -H \\ -I, & Q+G+M, & -K \\ -L, & -M, & R+H+K \end{vmatrix},$$

et où les nombres $f+g+h-1$, etc., $i+j+k-1$, etc., $l+m+n-1$, etc. sont tous positifs comme auparavant.

La formule contient les symboles $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ qui sont chacun une fonction linéaire de $\frac{d}{du}$, $\frac{d}{dv}$, $\frac{d}{dw}$, on pourrait donc se proposer la question de trouver le terme général en développant la formule de manière à ne contenir que des puissances et des produits de ces symboles $\frac{d}{du}$, $\frac{d}{dv}$, $\frac{d}{dw}$; c'est à quoi se rapportent les recherches très étendues que vient de faire M. Sylvester sur ce sujet, et qui embrassent aussi bien le cas où les nouvelles variables sont données explicitement que celui où les deux systèmes de variables sont liés par des équations données.

Il y a une autre manière de traiter cette question de la transformation des variables indépendantes, savoir en écrivant

$$R = \xi \frac{d}{dx} + \eta \frac{d}{dy} + \zeta \frac{d}{dz},$$

$$\rho = \xi \ \bar{x} + \eta \ \bar{y} + \zeta \ \bar{z},$$

on peut exprimer les puissances de R au moyen de ρ et de cette autre quantite symbolique

$$\Lambda = x \ \ \bar{x} + y \ \ \bar{y} + z \ \ \bar{z}.$$

En effet, en mettant $\chi = p\bar{x} + q\bar{y} + r\bar{z}$, on a

$$R + \tfrac{1}{2} R^2 + \tfrac{1}{6} R^3 + \text{etc.} = \chi + \tfrac{1}{2}\chi^2 + \tfrac{1}{6}\chi^3 + \text{etc.},$$

où

$$\xi = p + \tfrac{1}{2}\chi^2 x + \tfrac{1}{6}\chi^3 x + \text{etc.},$$

$$\eta = q + \tfrac{1}{2}\chi^2 y + \tfrac{1}{6}\chi^3 y + \text{etc.},$$

$$\zeta = r + \tfrac{1}{2}\chi^2 z + \tfrac{1}{6}\chi^3 z + \text{etc.}$$

En se servant de la méthode des approximations successives, on trouve comme première approximation

$$p = \xi, \quad q = \eta, \quad r = \zeta,$$

et de là

$$\chi = \rho;$$

comme seconde approximation

$$p = \xi - \tfrac{1}{2}\rho^2 x, \quad q = \eta - \tfrac{1}{2}\rho^2 y, \quad r = \zeta - \tfrac{1}{2}\rho^2 z,$$

et de là

$$\chi = \rho - \tfrac{1}{2}\rho^2 \Lambda;$$

comme troisième approximation

$$p = \xi - \tfrac{1}{2}(\rho^2 - \rho^2 \Lambda\rho)\, x - \tfrac{1}{6}\rho^3 x,$$

$$q = \eta - \tfrac{1}{2}(\rho^2 - \rho^2 \Lambda\rho)\, y - \tfrac{1}{6}\rho^3 y,$$

$$r = \zeta - \tfrac{1}{2}(\rho^2 - \rho^2 \Lambda\rho)\, z - \tfrac{1}{6}\rho^3 z,$$

et de là

$$\chi = \rho - \tfrac{1}{2}\rho^2\Lambda + \tfrac{1}{2}\rho^2\Lambda\rho\Lambda - \tfrac{1}{6}\rho^3\Lambda, \quad \chi^2 = \rho^2 - \rho^2\Lambda\rho, \quad \chi^3 = \rho^3$$

et ainsi de suite ; donc, en substituant,

$$\begin{aligned} R + \tfrac{1}{2}R^2 + \tfrac{1}{6}R^3 + \text{etc.} = \rho &- \tfrac{1}{2}\rho^2\Lambda + \tfrac{1}{2}\rho^2\Lambda\rho\Lambda - \tfrac{1}{6}\rho^3\Lambda \\ &+ \tfrac{1}{2}\rho^2 \quad - \tfrac{1}{2}\rho^2\Lambda\rho \\ &\qquad\qquad\qquad + \tfrac{1}{6}\rho^3 \quad + \text{etc. etc.} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} R &= \rho, \\ R^2 &= \rho^2 - \rho^2\Lambda, \\ R^3 &= \rho^3 - 3\rho^2\Lambda\rho - (\rho^3 - 3\rho^2\Lambda\rho)\,\Lambda, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

formules dans lesquelles un terme tel que $\rho^2\Lambda$ signifie $\rho^2 x \,.\, \overline{x} + \rho^2 y \,.\, \overline{y} + \rho^2 z \,.\, z$, c'est-à-dire l'opération du symbole ρ^2 s'arrête aux quantités x, y, z faisant partie du symbole Λ qui vient immédiatement après le ρ^2; la même chose a lieu dans tous les cas semblables. L'équation générale est

$$R^n = \Pi - \Pi\Lambda,$$

mais pour expliquer la forme de la fonction Π il faudrait faire des développements assez longs, dans lesquels je n'entrerai pas à cette occasion ; la découverte de cette équation générale est due à M. Sylvester, qui l'a établie d'une autre manière.

Londres, 2, *Stone Buildings*, 16 *Avril*, 1855.