234.

DEUXIÈME NOTE SUR UNE FORMULE POUR LA RÉVERSION DES SÉRIES.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, (Crelle), tom. LIV. (1857), pp. 156—161: Sequel to Note t. LII. (1856), **229**.]

Je me propose de montrer, dans cette deuxième note, de quelle manière le théorème de Jacobi conduit à une formule donnée sans démonstration par M. Sylvester dans son mémoire intitulé "On the Change of Systems of Independent Variables," *Quarterly Math. Journal*, tom. I. [1857], p. 42 à 56 et 126 à 134. Pour fixer les idées je prends le cas de trois variables, et je suppose que $f(x, y, z)$ soit une fonction rationnelle et entière de x, y, z, et que ces variables soient données en fonction de u, v, w au moyen des équations $u = X$, $v = Y$, $w = Z$, où X, Y, Z sont des fonctions rationnelles et entières de x, y, z. Mais ces fonctions ne sont plus assujetties à la condition (admise dans ma première note) d'être telles que $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ ne contiennent que les puissances et les produits du deuxième ordre et des ordres supérieurs des variables, et il s'agit de déterminer dans le cas général le développement de $f(x, y, z)$ en termes de u, v, w.

Pour résoudre ce problème j'écris

$$\begin{aligned}
X &= A_{100}\, x + A_{010}\, y + A_{001}\, z + \ldots + A_{f,g,h}\, x^f y^g z^h + \text{etc.},\\
Y &= B_{100}\, x + B_{010}\, y + B_{001}\, z + \ldots + B_{i,j,k}\, x^i y^j z^k + \text{etc.},\\
Z &= C_{100}\, x + C_{010}\, y + C_{001}\, z + \ldots + C_{l,m,n}\, x^l y^m z^n + \text{etc.},\\
f(x, y, z) &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \ldots + \Theta_{P,Q,R}\, x^P y^Q z^R + \text{etc.};
\end{aligned}$$

dans ces expressions et partout dans la suite les etc. représentent des termes qu'on obtient en donnant des accents en nombre quelconque aux symboles indéterminés. Je dois faire observer relativement au coefficient $A_{f,g,h}$ et aux coefficients semblables, que les termes qui correspondent à $f + g + h = 1$ sont écrits à part; on doit donc prendre pour les nombres f, g, h seulement les valeurs qui rendent $f + g + h > 1$.

Je pose

$$x' = A_{100}x + A_{010}y + A_{001}z,$$
$$y' = B_{100}x + B_{010}y + B_{001}z,$$
$$z' = C_{100}x + C_{010}y + C_{001}z,$$

et en représentant par

$$\begin{vmatrix} a_{100}, & b_{100}, & c_{100} \\ a_{010}, & b_{010}, & c_{010} \\ a_{001}, & b_{001}, & c_{001} \end{vmatrix}$$

la *matrice inverse* de

$$\begin{vmatrix} A_{100}, & A_{010}, & A_{001}, \\ B_{100}, & B_{010}, & B_{001} \\ C_{100}, & C_{010}, & C_{001} \end{vmatrix}$$

on obtient les équations

$$x = a_{100}x' + b_{100}y' + c_{100}z',$$
$$y = a_{010}x' + b_{010}y' + c_{010}z',$$
$$z = a_{001}x' + b_{001}y' + c_{001}z'.$$

Il est presque superflu de faire observer qu'en représentant par ∇ le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_{100}, & A_{010}, & A_{001} \\ B_{100}, & B_{010}, & B_{001} \\ C_{100}, & C_{010}, & C_{001} \end{vmatrix}$$

on a

$$a_{100} = \frac{1}{\nabla}\frac{d\nabla}{dA_{100}}, \quad a_{010} = \frac{1}{\nabla}\frac{d\nabla}{dA_{010}}, \text{ etc.}$$

A présent, en supposant chacune des quantités u', v', w' égale à zéro, on a le système d'équations

$$u - X = 0, \quad v - Y = 0, \quad w - Z = 0$$
$$u' - X' = 0, \quad v' - Y' = 0, \quad w' - Z' = 0$$

où

$$X = x' \quad \ldots + A_{f,g,h}\, x^f y^g z^h + \text{etc.},$$
$$Y = y' \quad \ldots + B_{i,j,k}\, x^i y^j z^k + \text{etc.},$$
$$Z = z' \quad \ldots + C_{l,m,n}\, x^l y^m z^n + \text{etc.},$$

$$X' = x - a_{100}x' - b_{100}y' - c_{100}z',$$
$$Y' = y - a_{010}x' - b_{010}y' - c_{010}z',$$
$$Z' = z - a_{001}x' - b_{001}y' - c_{001}z',$$

et comme auparavant

$$f(x,\ y,\ z) = \ldots + \Theta_{P,\,Q,\,R}\, x^P y^Q z^R + \text{etc.}$$

Or, en appliquant à ce nouveau système la formule de Jacobi, et en remarquant qu'il est permis de poser tout de suite $u'=0$, $v'=0$, $w'=0$, cette formule donne

$$f(x,\ y,\ z) =$$

$$\left[f(x,\ y,\ z)\,\frac{\partial(X,\ Y,\ Z,\ X',\ Y',\ Z')}{\partial(x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z')}\,\frac{1}{(X-u)(Y-v)(Z-w)\,X'Y'Z'}\right]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}x'^{-1}y'^{-1}z'^{-1}}$$

équation dans laquelle on doit d'abord développer le dernier facteur de l'expression renfermée entre crochets suivant les puissances ascendantes de u, v, w, et ensuite développer les puissances de X, Y, Z, X', Y', Z' suivant les puissances descendantes de x', y', z', x, y, z respectivement. On obtient ainsi

$$\text{coeff. de } u^{\mathrm{a}}v^{\mathrm{b}}w^{\mathrm{c}} \text{ dans le développement de } f(x,\ y,\ z) =$$

$$\left[f(x,\ y,\ z)\,\frac{\partial(X,\ Y,\ Z,\ X',\ Y',\ Z')}{\partial(x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z')}\,\frac{1}{X^{\mathrm{a}+1}Y^{\mathrm{b}+1}Z^{\mathrm{c}+1}X'Y'Z'}\right]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}x'^{-1}y'^{-1}z'^{-1}}$$

ou ce qui est la même chose

$$\text{coeff. de } u^{\mathrm{a}}v^{\mathrm{b}}w^{\mathrm{c}} \text{ dans le développement de } f(x,\ y,\ z) =$$

$$\left[f(x,\ y,\ z)\,\frac{\partial\left(-\frac{1}{\mathrm{a}}X^{-\mathrm{a}},\ -\frac{1}{\mathrm{b}}Y^{-\mathrm{b}},\ -\frac{1}{\mathrm{c}}Z^{-\mathrm{c}},\ \log X',\ \log Y',\ \log Z'\right)}{\partial(x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z')}\right]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}x'^{-1}y'^{-1}z'^{-1}}$$

Or, en posant $\Pi\mathrm{a} = 1\,.\,2\,.\,3\ldots\mathrm{a}$, etc., le terme général de $-\frac{1}{\mathrm{a}}X^{-\mathrm{a}}$ est

$$(-1)^{r-1}\,\frac{\Pi(\mathrm{a}+r-1)}{\Pi\mathrm{a}\,\Pi\alpha\text{ etc.}}\,A^{\alpha}{}_{f,g,h}\text{ etc. } x'^{-\mathrm{a}-r}\,x^F y^G z^H,$$

où

$$\alpha + \text{etc.} = r,\quad f\alpha + \text{etc.} = F,\quad g\alpha + \text{etc.} = G,\quad h\alpha + \text{etc.} = H,$$

de même le terme général de $-\frac{1}{\mathrm{b}}Y^{-\mathrm{b}}$ est

$$(-1)^{s-1}\,\frac{\Pi(\mathrm{b}+s-1)}{\Pi\mathrm{b}\,\Pi\beta\text{ etc.}}\,B^{\beta}{}_{i,j,k}\text{ etc. } y'^{-\mathrm{b}-s}x^I y^J z^K,$$

où

$$\beta + \text{etc.} = s,\quad i\beta + \text{etc.} = I,\quad j\beta + \text{etc.} = J,\quad k\beta + \text{etc.} = K$$

et le terme général de $-\frac{1}{\mathrm{c}}Z^{-\mathrm{c}}$ est

$$(-1)^{t-1}\,\frac{\Pi(\mathrm{c}+t-1)}{\Pi\mathrm{c}\,\Pi\gamma\text{ etc.}}\,C^{\gamma}{}_{l,m,n}\text{ etc. } z'^{-\mathrm{c}-t}\,x^L y^M z^N,$$

où

$$\gamma + \text{etc.} = t, \qquad l\gamma + \text{etc.} = L, \qquad m\gamma + \text{etc.} = M, \qquad n\gamma + \text{etc.} = N.$$

Le terme général du développement de log X' est

$$-\frac{\Pi\,(r'-1)}{\Pi\alpha'\,\Pi\delta'\,\Pi\iota'}\,a_{100}^{\alpha'}\,b_{100}^{\delta'}\,c_{100}^{\iota'}\,x^{-r'}\,x'^{\alpha'}\,y'^{\delta'}\,z'^{\iota'}$$

où

$$r' = \alpha' + \delta' + \iota',$$

et je fais observer que pour tenir compte du terme $\log x$ que contient $\log X'$, il suffit d'attribuer à α', δ', ι', r' les valeurs $\alpha' = \delta' = \iota' = r' = 0$. En effet on n'a besoin que des coefficients différentiels de $\log X'$, et, en gardant pour le moment r' au lieu de zéro, le terme dont il s'agit sera $-\Pi\,(r'-1)\,x^{-r'}$, ce qui différentié par rapport à x donne $\Pi r' \,.\, x^{-r'-1}$. En faisant $r'=0$ cela devient $\dfrac{1}{x}$, ce qui est en effet la valeur du coefficient différentiel de $\log x$ par rapport à x.

De même le terme général de log Y' est

$$-\frac{\Pi\,(s'-1)}{\Pi\beta'\,\Pi\epsilon'\,\Pi\kappa'}\,a_{010}^{\beta'}\,b_{010}^{\epsilon'}\,c_{010}^{\kappa'}\,y^{-s'}\,x'^{\beta'}\,y'^{\epsilon'}\,z'^{\kappa'}$$

où

$$s' = \beta' + \epsilon' + \kappa',$$

et le terme général de log Z' est

$$-\frac{\Pi\,(t'-1)}{\Pi\gamma'\,\Pi\zeta'\,\Pi\lambda'}\,a_{001}^{\gamma'}\,b_{001}^{\zeta'}\,c_{001}^{\lambda'}\,z^{-t'}\,x'^{\gamma'}\,y'^{\zeta}\,z'^{\lambda'}$$

où

$$t' = \gamma' + \zeta' + \lambda'.$$

Donc, en formant le terme général du Jacobien et en multipliant par le terme général de $f(x, y, z)$, on obtient pour le terme général de l'expression placée entre crochets la valeur suivante

$$(-1)^{r+s+t}\,\frac{\Pi\,(\mathrm{a}+r-1)\,\Pi\,(\mathrm{b}+s-1)\,\Pi\,(\mathrm{c}+t-1)}{\Pi\mathrm{a}\,\Pi\mathrm{b}\,\Pi\mathrm{c}\,\Pi\alpha\ \text{etc.}\ \Pi\beta\ \text{etc.}\ \Pi\gamma\ \text{etc.}}\;\frac{\Pi\,(r'-1)\,\Pi\,(s'-1)\,\Pi\,(t'-1)}{\Pi\alpha'\,\Pi\delta'\,\Pi\iota'\,\Pi\beta'\,\Pi\epsilon'\,\Pi\kappa'\,\Pi\gamma'\,\Pi\zeta'\,\Pi\lambda'}$$

$$\times\, A^{\alpha}{}_{f,g,h}\ \text{etc.}\ B^{\beta}{}_{i,j,k}\ \text{etc.}\ C^{\gamma}{}_{l,m,n}\ \text{etc.}\ a_{100}^{\alpha'}\,b_{100}^{\delta'}\,c_{100}^{\iota'}\,a_{010}^{\beta'}\,b_{010}^{\epsilon'}\,c_{010}^{\kappa'}\,a_{001}^{\gamma'}\,b_{001}^{\zeta}\,c_{001}^{\lambda'}$$

$$\times\,\Omega$$

$$\times\, x^{F+I+L+P-r'-1}\,y^{G+J+M+Q-s'-1}\,z^{H+K+N+R-t'-1}\,x'^{-\mathrm{a}-r+\alpha'+\beta'+\gamma'-1}\,y'^{-\mathrm{b}-s+\delta'+\epsilon'+\zeta-1}\,z'^{-\mathrm{c}-t+\iota'+\kappa+\lambda'-1}$$

où le facteur Ω représente le déterminant numérique suivant

$$\Omega = \begin{vmatrix} F, & G, & H, & -\mathrm{a}-r, & 0, & 0 \\ I, & J, & K, & 0, & -\mathrm{b}-s, & 0 \\ L, & M, & N, & 0, & 0, & -\mathrm{c}-t \\ -r', & 0, & 0, & \alpha', & \delta', & \iota' \\ 0, & -s', & 0, & \beta', & \epsilon', & \kappa' \\ 0, & 0, & -t', & \gamma', & \zeta', & \lambda' \end{vmatrix}.$$

Pour trouver le terme qui contient $x^{-1}y^{-1}z^{-1}x'^{-1}y'^{-1}z'^{-1}$ on n'a qu'à poser

$$F+I+L+P-r'=0, \quad G+J+M+Q-s'=0, \quad H+K+N+R-t'=0,$$
$$-\mathrm{a}-r+\alpha'+\beta'+\gamma'=0, \quad -\mathrm{b}-s+\delta'+\epsilon'+\zeta'=0, \quad -\mathrm{c}-t+\iota'+\kappa'+\lambda'=0.$$

En faisant cela, et en tenant compte des formules précédentes on obtient le théorème suivant: savoir en posant

$$\begin{aligned}
X &= A_{100}\,x + A_{010}\,y + A_{001}\,z \ldots + A_{f,g,h}\quad x^f\,y^g\,z^h + \text{etc.} = u,\\
Y &= B_{100}\,x + B_{010}\,y + B_{001}\,z \ldots + B_{i,j,k}\quad x^i\,y^j\,z^k + \text{etc.} = v,\\
Z &= C_{100}\,x + C_{010}\,y + C_{001}\,z \ldots + C_{l,m,n}\quad x^l\,y^m\,z^n + \text{etc.} = w,\\
f(x,y,z) &= \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots + \Theta^{P,Q,R}\quad x^P\,y^Q\,z^R + \text{etc.}
\end{aligned}$$

on trouve pour le terme général du coeff. de $u^{\mathrm{a}}v^{\mathrm{b}}w^{\mathrm{c}}$ dans le développement de $f(x,y,z)$ l'expression

$$(-1)^{r+s+t}\,\frac{\Pi(\mathrm{a}+r-1)\,\Pi(\mathrm{b}+s-1)\,\Pi(\mathrm{c}+t-1)}{\Pi\mathrm{a}\;\Pi\mathrm{b}\;\Pi\mathrm{c}\;\;\Pi\alpha\text{ etc. }\Pi\beta\text{ etc. }\Pi\gamma\text{ etc.}}\;\frac{\Pi(r'-1)}{\Pi\alpha'\,\Pi\delta'\,\Pi\iota'}\;\frac{\Pi(s'-1)}{\Pi\beta'\,\Pi\epsilon'\,\Pi\kappa'}\;\frac{\Pi(t'-1)}{\Pi\gamma'\,\Pi\zeta'\,\Pi\lambda'}$$
$$\times A^{\alpha}{}_{f,g,h}\text{ etc. } B^{\beta}{}_{i,j,k}\text{ etc. } C^{\gamma}{}_{l,m,n}\text{ etc. } a_{100}^{\alpha'}\,b_{100}^{\delta'}\,c_{100}^{\iota'}\,a_{010}^{\beta'}\,b_{010}^{\epsilon'}\,c_{010}^{\kappa'}\,a_{001}^{\gamma'}\,b_{001}^{\zeta'}\,c_{001}^{\lambda'}$$
$$\times\,\Omega,$$

formule dans laquelle les a_{100} etc. sont les coefficients inverses des A_{100} etc. c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} a_{100}, & b_{100}, & c_{100} \\ a_{010}, & b_{010}, & c_{010} \\ a_{001}, & b_{001}, & c_{001}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{100}, & A_{010}, & A_{001} \\ B_{100}, & B_{010}, & B_{001} \\ C_{100}, & C_{010}, & C_{001}\end{vmatrix}^{-1};$$

le déterminant numérique Ω a la valeur qui vient d'être donnée, en supposant seulement que les nombres α, β, etc. qui y entrent, satisfassent aux conditions suivantes

$$\begin{array}{lll}
\alpha+\text{etc.}=r, & \beta+\text{etc.}=s, & \gamma+\text{etc.}=t,\\
f\alpha+\text{etc.}=F, & g\alpha+\text{etc.}=G, & h\alpha+\text{etc.}=H,\\
i\beta+\text{etc.}=I, & j\beta+\text{etc.}=J, & k\beta+\text{etc.}=K,\\
l\gamma+\text{etc.}=L, & m\gamma+\text{etc.}=M, & n\gamma+\text{etc.}=N,\\
\alpha'+\delta'+\iota'=r', & \beta'+\epsilon'+\kappa'=s', & \gamma'+\zeta'+\lambda'=t',\\
P+F+I+L=r', & Q+G+J+M=s', & R+H+K+N=t',\\
\alpha'+\beta'+\gamma'=\mathrm{a}+r, & \delta'+\epsilon'+\zeta'=\mathrm{b}+s, & \iota'+\kappa'+\lambda'=\mathrm{c}+t.
\end{array}$$

De ces équations on tire

$$P+Q+R+F+G+H+I+J+K+L+M+N=\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}+r+s+t,$$

ou, en substituant pour F, etc. leurs valeurs,

$$(f+g+h-1)\,\alpha+\text{etc.}+(i+j+k-1)\,\beta+\text{etc.}+(l+m+n-1)\,\gamma+\text{etc.}$$
$$=\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}-P-Q-R,$$

les nombres $f+g+h-1$, $i+j+k-1$, $l+m+n-1$, etc. étant positifs. Il n'y a donc qu'un nombre fini de solutions des équations indéterminées, comme cela doit être.

On peut encore modifier un peu la forme du déterminant Ω; on voit d'abord que l'on peut changer les signes des quantités $-\mathrm{a}-r$, $-\mathrm{b}-s$, $-\mathrm{c}-t$, $-r'$, $-s'$, $-t'$; en faisant cela et en substituant pour ces quantités et aussi pour F, G, etc. les valeurs ci-dessus données, on obtient

$$\Omega=\begin{vmatrix} f\alpha+\text{etc.}\;, & g\alpha+\text{etc.}\;, & h\alpha+\text{etc.}, & \alpha'+\beta'+\gamma', & 0\;, & 0 \\ i\beta+\text{etc.}\;, & j\beta+\text{etc.}\;, & k\beta+\text{etc.}, & 0\;, & \delta'+\epsilon'+\zeta', & 0 \\ l\gamma+\text{etc.}\;, & m\gamma+\text{etc.}\;, & n\gamma+\text{etc.}, & 0\;, & 0\;, & \iota'+\kappa'+\lambda' \\ \alpha'+\delta'+\iota', & 0\;, & 0\;, & \alpha'\;, & \delta'\;, & \iota' \\ 0\;, & \beta'+\epsilon'+\kappa', & 0\;, & \beta'\;, & \epsilon'\;, & \kappa' \\ 0\;, & 0\;, & \gamma+\zeta'+\lambda', & \gamma'\;, & \zeta'\;, & \lambda' \end{vmatrix}.$$

Ainsi se trouve démontré le théorème général de M. Sylvester relatif à la réversion des séries, car il est évident que les formules s'appliquent sans difficulté à un nombre quelconque de variables.

Londres, le 30 *Septembre*, 1856.