852.

NOTE SUR LE MÉMOIRE DE M. PICARD "SUR LES INTÉGRALES DE DIFFÉRENTIELLES TOTALES ALGÉBRIQUES DE PREMIÈRE ESPÈCE."

[From the *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2me Sér., t. x. (1886), pp. 75—78.]

On peut présenter l'analyse sur laquelle est fondé le Mémoire sous une forme plus symétrique en introduisant dès le commencement les fonctions homogènes.

Soit $f = (*)(x, y, z, t)^m$ une fonction du degré m des variables x, y, z, t, lesquelles seront toujours liées par l'équation $f = 0$: écrivons aussi $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}, \frac{df}{dt} = X, Y, Z, T$, de manière que X, Y, Z, T sont des fonctions du degré $m-1$: et soient A, B, C, D des fonctions chacune du degré $m-3$ et Q une fonction du degré $m-4$, telles que $AX + BY + CZ + DT = Qf$ identiquement; donc, en supposant $f = 0$, on aura

$$AX + BY + CZ + DT = 0.$$

On vérifie sans peine que l'expression

$$d\Omega = \begin{vmatrix} \lambda, & \mu, & \nu, & \rho \\ A, & B, & C, & D \\ x, & y, & z, & t \\ dx, & dy, & dz, & dt \end{vmatrix} \div (\lambda X + \mu Y + \nu Z + \rho T)$$

est indépendante des valeurs de λ, μ, ν, ρ, et ainsi égale à chacune des quatre expressions $d\Omega_x, d\Omega_y, d\Omega_z, d\Omega_t$,

$$= \frac{1}{X}\begin{vmatrix} B, & C, & D \\ y, & z, & t \\ dy, & dz, & dt \end{vmatrix}, \quad -\frac{1}{Y}\begin{vmatrix} C, & D, & A \\ z, & t, & x \\ dz, & dt, & dx \end{vmatrix},$$

$$\frac{1}{Z}\begin{vmatrix} D, & A, & B \\ t, & x, & y \\ dt, & dx, & dy \end{vmatrix}, \quad -\frac{1}{T}\begin{vmatrix} A, & B, & C \\ x, & y, & z \\ dx, & dy, & dz \end{vmatrix},$$

respectivement.

Cela étant, soit

$$d\Omega_t = -\frac{1}{T}\begin{vmatrix} A, & B, & C \\ x, & y, & z \\ dx, & dy, & dz \end{vmatrix} = \text{une différentielle totale};$$

en écrivant pour un moment $x, y, z = x't, y't, z't$, et en dénotant par f' la fonction $(*)(x', y', z', 1)^m$, et de même par $X', Y', Z', T', A', B', C'$ les valeurs correspondantes de X, Y, Z, T, A, B, C, les variables x', y', z' seront liées par l'équation $f' = 0$, ce qui donne

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' = 0;$$

et l'on voit sans peine que l'expression de $d\Omega_t$ se réduit à

$$-\frac{1}{T'}\begin{vmatrix} A', & B', & C' \\ x', & y', & z' \\ dx', & dy', & dz' \end{vmatrix},$$

fonction de la forme

$$F'dx' + G'dy' + H'dz',$$

qui ne contient que les variables x', y', z'. Donc, en omettant les accents, il est permis de prendre $t = \text{const.}$, ce qui donne

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0;$$

et avec cette relation entre les différentielles dx, dy, dz, de faire que $d\Omega_t = F\,dx + G\,dy + H\,dz$ soit une différentielle totale: cela donne la condition

$$X\left(\frac{dG}{dz} - \frac{dH}{dy}\right) + Y\left(\frac{dH}{dx} - \frac{dF}{dz}\right) + Z\left(\frac{dF}{dy} - \frac{dG}{dx}\right) = 0,$$

ou enfin

$$X\left(\frac{d}{dz}\,\frac{Cx - Az}{T} - \frac{d}{dy}\,\frac{Ay - Bx}{T}\right)$$

$$+ Y\left(\frac{d}{dx}\,\frac{Ay - Bx}{T} - \frac{d}{dz}\,\frac{Bz - Cy}{T}\right)$$

$$+ Z\left(\frac{d}{dy}\,\frac{Bz - Cy}{T} - \frac{d}{dx}\,\frac{Cx - Az}{T}\right) = 0.$$

On a d'abord un terme $\mathfrak{A} \div T$, où

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} = \; & X\left[-2A + x\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}\right)-\left(x\frac{dA}{dx}+y\frac{dA}{dy}+z\frac{dA}{dz}\right)\right] \\
& + Y\left[-2B + y\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}\right)-\left(x\frac{dB}{dx}+y\frac{dB}{dy}+z\frac{dB}{dz}\right)\right] \\
& + Z\quad -2C + z\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}\right)-\left(x\frac{dC}{dx}+y\frac{dC}{dy}+z\frac{dC}{dz}\right)\Bigg],
\end{aligned}$$

ou, en réduisant,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} = & -2(AX+BY+CZ) \\
& + (Xx+Yy+Zz)\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}\right) \\
& - (m-3)(AX+BY+CZ) \\
& + t\left(X\frac{dA}{dt}+Y\frac{dB}{dt}+Z\frac{dC}{dt}\right) \\
= \; & (m-1)DT \\
& - Tt\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}+\frac{dD}{dt}\right) \\
& + t\left(X\frac{dA}{dt}+Y\frac{dB}{dt}+Z\frac{dC}{dt}+T\frac{dD}{dt}\right);
\end{aligned}$$

puis un terme $\mathfrak{B} \div T^2$, où

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B} = & -X\left[(Cx-Az)\frac{dT}{dz}-(Ay-Bx)\frac{dT}{dy}\right] \\
& - Y\left[(Ay-Bx)\frac{dT}{dx}-(Bz-Cy)\frac{dT}{dz}\right] \\
& - Z\left[(Bz-Cy)\frac{dT}{dy}-(Cx-Az)\frac{dT}{dx}\right],
\end{aligned}$$

ou, en réduisant,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B} = \; & \frac{dT}{dx}\left[(AX+BY+CZ)x - A(xX+yY+zZ)\right] \\
& + \frac{dT}{dy}\left[(AX+BY+CZ)y - B(xX+yY+zZ)\right] \\
& + \frac{dT}{dz}\left[(AX+BY+CZ)z - C(xX+yY+zZ)\right] \\
= & -DT\left(x\frac{dT}{dx}+y\frac{dT}{dy}+z\frac{dT}{dz}\right) \\
& + tT\left(A\frac{dT}{dx}+B\frac{dT}{dy}+C\frac{dT}{dz}\right) \\
= & -(m-1)DT^2 \\
& + Tt\left(A\frac{dX}{dt}+B\frac{dY}{dt}+C\frac{dZ}{dt}+D\frac{dT}{dt}\right).
\end{aligned}$$

Donc, en réunissant les deux parties, $0 = \mathfrak{A} + \dfrac{\mathfrak{B}}{T}$, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} 0 &= - Tt\left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} + \frac{dD}{dt}\right) \\ &\quad + t\frac{d}{dt}(AX + BY + CZ + DT) \\ &= - Tt\left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} + \frac{dD}{dt}\right) \\ &\quad + tQT, \end{aligned}$$

ou, en omettant le facteur tT, on obtient enfin

$$0 = Q - \left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} + \frac{dD}{dt}\right),$$

c'est-à-dire que les fonctions A, B, C, D sont telles que

$$AX + BY + CZ + DT = \left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} + \frac{dD}{dt}\right) f;$$

et, cela étant, l'expression générale $d\Omega$, et de même chacune des expressions $d\Omega_x$, $d\Omega_y$, $d\Omega_z$, $d\Omega_t$, sera égale à une différentielle totale.

Cambridge, le 8 janvier 1886.