O kształcie fali sprężystej w pokładach ziemskich.

Przez

M. P. RUDZKIEGO.

(Rzecz przedstawiona na posiedzeniu Wydziału matem.-przyr. z dnia 6. grudnia 1897. Referował czł. Natanson).

Wedle Milne'a[1]) spostrzegane okresy drgań w trzęsieniach ziemi wynoszą od $^1/_{15}$ sek do 20 sek. W razie prędkości, wynoszącej tylko 1500 kilom. na sek. najkrótszemu okresowi ($^1/_{15}$ sek.) odpowiada długość fali około 100 metrów.

W porównaniu z tak wielką długością fal seismicznych rozmiary ziarn, z których składają się krystaliczne i inne pokłady są tak bardzo małe, że różnice oryentacyi oraz sprężystych własności różnych ziarn nie mogą mieć wpływu na sposób rozprzestrzeniania się fal seismicznych. Niema chyba wątpliwości, że gneissy, granity, lawy, piaskowce i wogóle wszystkie pokłady muszą się wobec tak długich fal seismicznych zachowywać jak ciała jednolite, że zatem w teoryi trzęsień ziemi, należy najczęściej uważać ich współczynniki sprężystości jako wielkości od miejsca niezależne.

Naturalnie w takim razie, gdy natura pokładu zmienia się w pewnem miejscu zupełnie [n. p. gdy wapienny pokład w pewnej swojej części przechodzi w marmur] należy uważać współczynniki sprężystości za funkcye miejsca.

Powiedzieliśmy, że wobec długich fal seismicznych należy uważać pokłady jako ośrodki jednolite; ale jednocześnie zastrzegamy się, że nie wszystkie pokłady mogą być uważane jako ośrodki izotropowe. W po-

[1]) On seismological Investigation. Rep. on the 66 meeting of the Brit. Ass. (Liverpool 1896) pp. 181. i nast.

kładach uwarstwowanych często daje się spostrzegać pewne zoryentowanie ziarnek, tak np. blaszki miki w gneissie są zwykle ułożone równolegle do płaszczyzn uwarstwowania; wogóle budowa uwarstwowanych pokładów jest inna wzdłuż a inna w poprzek warstw.

Przypomnijmy też znany fakt, że przewodnictwo cieplne skał jest niejednakowe wzdłuż i w poprzek warstw, co wyraźnie dowodzi, że fizyczne własności uwarstwowanych pokładów nie są od kierunku niezależne. Nareszcie zauważmy i to, że pokłady, osobliwie głębsze, znajdują się często pod wielkiem a przytem nie wszechstronnie jednakowem ciśnieniem, wiadomo zaś, że n. p. izotropowe ośrodki poddane niejednakowemu z różnych stron ciśnieniu nabywają własności ośrodków podwójnie załamujących.

W ośrodku izotropowym fala sprężysta ma kształt kulisty; jaki będzie jej kształt w ośrodku elastycznym podwójnie załamującym? Kształt ten niekoniecznie musi być taki sam, jak w ośrodku optycznie podwójnie załamującym; albowiem niektóre warunki, które w optyce muszą być koniecznie spełnione, nie są obowiązujące w ośrodkach elastycznych.

Najbardziej interesujące są ośrodki jednoosiowe, albowiem uwarstwowane pokłady oraz pokłady zalegające poziomo pod pionowem ciśnieniem muszą zachowywać się w podobny sposób jak ośrodki jednoosiowe. Zbadamy taki ośrodek nieco dokładniej, ponieważ zaś chodzi tylko o kształt fali, więc możemy pominąć absorpcyę, dyspersyę i t. d.

Wiadomo, że potencyał sił sprężystych podwójnie załamujących nieabsorbujących ośrodków, jeżeli założymy, że osie symetryi ośrodka są równoległe do osi spółrzędnych, ma kształt następujący:

$$\text{I} \quad W = \tfrac{1}{2}\{Ee^2 + Ff^2 + Gg^2 + 2E_1 fg + 2F_1 ge + 2G_1 ef + Aa^2 + Bb^2 + Cc^2\}$$

gdzie W oznacza potencyał

$$E,\ F,\ G,\ E_1 \ldots\ A_1 \ldots$$

są stałe współczynniki sprężystości danego ośrodka; gdzie dalej:

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad f = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad g = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$a = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \qquad b = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \qquad c = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

wreszcie u, v, są przesunięcia w kierunkach x, y, z. Ponieważ chcemy rozważać kształt fali w ośrodku jednoosiowym, przeto trzeba, aby dwa z pomiędzy kierunków x, y, z, dajmy na to kierunki x i y, nie były od siebie różne, t. j. musimy założyć:

$$F = E \qquad B = A \qquad F_1 = E_1 \,. \tag{II}$$

Wskutek tego W przybiera następującą postać:

$$W = \tfrac{1}{2}\,[E(e^2 + f^2) + Gg^2 + 2E_1(fg + ge) + 2\,G_1\,ef + A(a^2 + b^2) + Cc^2] \tag{I *}$$

Prócz tego kształt potencyału nie powinien się zmienić, gdy obrócimy osie x i y naokoło osi z o dowolny kąt ω. Załóżmy, żeśmy wykonali ten obrót i oznaczmy spółrzędne oraz przesunięcia względem nowych osi przez x_1 y_1 z_1 oraz u_1 v_1 w_1 i t. d. Otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= x\cos\omega + y\sin\omega\\
y_1 &= -x\sin\omega + y\cos\omega\\
z_1 &= z\\
&\text{i odwrotnie:}\\
x &= x_1\cos\omega - y_1\sin\omega\\
y &= x_1\sin\omega + y_1\cos\omega\\
z &= z_1\\
&\text{Dalej:}\\
u_1 &= u\cos\omega + v\sin\omega\\
v_1 &= -u\sin\omega + v\cos\omega\\
w_1 &= w\\
&\text{i odwrotnie:}\\
u &= u_1\cos\omega - v_1\sin\omega\\
v &= u_1\sin\omega + v_1\cos\omega\\
w &= w_1\,.
\end{aligned}\right\}\ \text{III}$$

wskutek tych związków mamy:

$$\left.\begin{aligned}
e_1 &= e\cos\omega - f\sin\omega\\
f_1 &= e\sin\omega + f\cos\omega\\
g_1 &= g\\
a_1 &= a.\cos\omega + b.\sin\omega\\
b_1 &= b.\cos\omega - a\sin\omega\\
c_1 &= c\cos 2\omega + (e-f)\sin 2\omega
\end{aligned}\right\}\ \text{IV}$$

Potencyał sił elastycznych powinien mieć względem nowych osi ten sam kształt jak względem dawnych, a zatem powinno być:

$$W = \tfrac{1}{2}\,E(e_1{}^2 + f^2{}_1) + Gg_1{}^2 + 2E_1(f_1 g_1 + g_1 e_1) + 2G_1\,e_1 f_1 + + A(a_1{}^2 + b_1{}^2) + Cc_1{}^2]$$

Podstawmy tu wartości ze wzorów IV, otrzymamy:

$$W = \tfrac{1}{2}\left[E(e^2 + f^2) + Gg^2 + 2E(fg + ge) + 2Gef + A(a^2 + b^2) + Cc^2\right]$$
$$+ \tfrac{1}{2}(E - G_1 - 2C)\sin 2\omega \left\{\tfrac{1}{2}[c^2 - (e - f)^2]\sin 2\omega - c(e - f)\cos 2\omega\right\}$$

Skąd widać, że na to, aby potencyał W był od kąta ω nie zależny, trzeba, aby było:

$$G_1 = E - 2C, \qquad \text{V}$$

jest to warunek konieczny i zarazem dostateczny. A zatem potencyał sił elastycznych ośrodka podwójnie załamującego jedno-osiowego po wprowadzeniu związku V będzie:

$$\text{(I**)} \quad \begin{aligned} W = \tfrac{1}{2}\,[E(e + f)^2 + Gg^2 + 2E_1(ge + gf) + A(a^2 + b^2) + \\ + C(c^2 - 4ef)]\,. \end{aligned}$$

W tem wyrażeniu mamy pięć stałych:

$$E \quad G \quad E_1 \quad A \quad \text{i} \quad C.$$

Ze względu na znaleziony powyżej kształt potencyału, równania różniczkowe, którym muszą czynić zadość drgania, odbywające się w danym ośrodku, będą miały kształt:

$$\rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (E - C)\,\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (E_1 + A)\,\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$$

. . . .

. . . .

gdzie ρ oznacza gęstość ośrodka. Ponieważ wedle założenia gęstość będzie stała, przeto możemy podzielić równania przez ρ, i pisząc zamiast:

$$\frac{E}{\rho} \text{ znów poprostu } E$$

zamiast:

$$\frac{C}{\rho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad C$$

otrzymamy równania:

$$\text{VI} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (E - C)\,\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (E_1 + A)\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = C\,\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + E\,\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A\,\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (E_1 + A)\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + (E - C)\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = A\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + G\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (E_1 + A)\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}\right) \end{cases}$$

Gdyby ośrodek był optycznie podwójnie załamujący, musielibyśmy wprowadzić jeszcze pewne nowe związki między stałemi A C_1 G etc. Wiadomo z doświadczenia, że drgania świetlne są poprzeczne, tymczasem drgania odpowiadające równaniom VI nie są ani wyłącznie podłużne, ani wyłącznie poprzeczne, ale jednocześnie poprzeczne i podłużne. Aby otrzymać wyłącznie poprzeczne drgania, musimy w optyce zrobić założenie, że między stałemi, figurującemi w równaniach VI, zachodzą związki:

$$\left.\begin{aligned} G &= E \\ \text{i} \qquad E_1 &= E - 2A. \end{aligned}\right\} \qquad \text{VII}$$

Jeżeli te związki istnieją, wtedy przez różniczkowanie, dodawanie i odejmowanie z równań VI łatwo otrzymamy równania:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = E \bigtriangledown^2 \delta \qquad \text{VIII}$$

i

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= A \bigtriangledown^2 \xi - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= A \bigtriangledown^2 \eta - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= A \bigtriangledown^2 \zeta = \frac{\partial \Omega}{\partial z}\,. \end{aligned}\right\} \qquad \text{IX}$$

W tych równaniach δ oznacza przyrost objętości (rozszerzenie) jednostki objętości, przyczem, jak wiadomo:

$$\delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\,,$$

zaś $\frac{1}{2}\xi$, $\frac{1}{2}\eta$, $\frac{1}{2}\zeta$ oznaczają składowe skrętu elementu, przyczem

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\,.$$

Dalej:

$$\Omega = A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + C\,\frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

zaś symbol:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \, .$$

Równanie VIII nie zawiera wielkości ξ, η, ζ, tylko δ; przedstawia więc fale rozrzedzenia i zgęszczenia (albo powiedzmy podłużne) rozprzestrzeniające się ze stałą prędkością $\sqrt{E}$, zaś równania IX nie zawierają δ tylko składowe skrętu ξ, η, ζ, będą zatem wyrażały drgania, polegające na skręcie elementu, t. j. drgania poprzeczne. Widoczną jest rzeczą, że prędkości rozchodzenia się tych drgań nie będą równe prędkości rozchodzenia się fal rozrzedzenia i zgęszczenia, bo równania IX nawet wcale nie zawierają stałej E.

Prócz założeń, wyrażonych przez równania VII musimy w teoryi sprężystej światła poczynić jeszcze pewne dodatkowe założenia, aby pozbyć się zupełnie fal zgęszczenia i rozrzedzenia, ale te dalsze założenia, już nas nie obchodzą.

Otóż pytamy się, czy w teoryi seismicznych drgań także należy poczynić założenia, wyrażone przez równania VII. Oczywiście położenie nasze jest zgoła inne, aniżeli w elastycznej teoryi światła. Tam musimy zrobić założenia VII, bo inaczej nie otrzymamy wyłącznie poprzecznych drgań, rozchodzących się oddzielnie od podłużnych; poprzeczne zaś drgania są nam koniecznie potrzebne, bo doświadczenia niezbicie dowodzą że drgania świetlne są wyłącznie poprzeczne. Tu dzieje się wprost inaczej: nie znamy ani jednego faktu, ani jednego doświadczenia, na podstawie którego możnaby twierdzić, że w trzęsieniach ziemi oddzielnie rozchodzą się drgania podłużne a oddzielnie poprzeczne. Wprawdzie często czytamy w rozprawach o trzęsieniach ziemi o oddzielnem rozchodzeniu się drgań podłużnych i poprzecznych ale li tylko dlatego, że wśród uczonych, zajmujących się trzęsieniami ziemi, panuje mniemanie, jakoby wszystkie ośrodki, czy to izotropowe czy nieizotropowe, oddzielnie przewodziły podłużne a oddzielnie poprzeczne drgania. To mniemanie jest słuszne, jeżeli chodzi o ośrodki izotropowe, ci tedy, którzy uważają pokłady ziemskie za ośrodki izotropowe mają racyą mówić o oddzielnem rozchodzeniu się drgań poprzecznych i podłużnych; ale ci, którzy tej hypotezy izotropii nie stawiają, nie mają zgoła żadnego słusznego powodu mówić o oddzielnem rozchodzeniu się poprzecznych i podłużnych drgań.

Skoro zaniechamy warunki VII, nie otrzymamy ani drgań wyłącznie podłużnych ani drgań wyłącznie poprzecznych, tylko drgania mięszanego charakteru.

Postaramy się teraz zbadać kształt fali w naszym ośrodku. W tym celu użyjemy metod podobnych do tych, które bywają używane w optyce.

Oznaczmy przez l, m, n dostawy kierunkowe „czoła“ fali; przez λ, μ, ν dostawy kierunkowe kierunku drgania, przez V prędkość fali, zaś przez R i k pewne stałe i weźmy cząstkowe całki równań VI:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= R\lambda \, . \, e^{\sqrt{-1}k(lx+my+nz-Vt)} \\ v_1 &= R\mu \, . \, e^{\sqrt{-1}k(lx+my+nz-Vt)} \\ w_1 &= R\nu \, . \, e^{\sqrt{-1}k(lx+my+nz-Vt)} \end{aligned}\right\} \qquad \text{X}$$

Podstawiamy te wartości we wzory VI, a po podstawieniu skróćmy przez wspólny czynnik:

$$R\, e^{\sqrt{-1}k(lx+my+nz-Vt)}$$

Otrzymamy po skróceniu następujące równania:

$$\left.\begin{aligned} (El^2+Cm^2+An^2-V^2)\lambda+(E-C)lm\mu+(E_1+A)ln\nu &= o \\ (E-C)lm\lambda+(Cl^2+Em^2+An^2-V^2)\mu+(E_1+A)mn\nu &= o \\ (E_1+A)ln\lambda+(E_1+A)mn\mu+[A(l^2+m^2)+Gn^2-V^2]\nu &= o \end{aligned}\right\} \qquad \text{XI}$$

Rugując z tych równań: λ, μ, ν otrzymamy równanie:

$$\begin{vmatrix} H_1-V^2, & N, & M \\ N, & H_2-V^2, & L \\ M, & L, & H_3-V^2 \end{vmatrix} = o \qquad \text{XII}$$

w którem:

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= El^2+Cm^2+An^2 \\ H_2 &= Cl^2+Em^2+An^2 \\ H_3 &= A(l^2+m^2)+Gn^2 \\ L &= (E_1+A)\,mn \\ M &= (E_1+A)\,ln \\ N &= (E-C)\,lm\,. \end{aligned}\right\} \qquad \text{XIII}$$

Równanie XII jest dobrze znane, wiadomo, że jego pierwiastki są zawsze rzetelne, jeżeli tylko wielkości H_1 H_2 .... L ..... są rzetelne, co tak jest oczywiście w tym przypadku. Zauważmy, że jednak ujemne pierwiastki tego równania prowadzą do urojonych wartości V (bo V występuje tylko w kwadracie) a zatem tylko dodatnim pierwiastkom tego równania odpowiadają rzetelne wartości prędkości V. Dla nas osobliwy interes ma ten specyalny przypadek gdy:

$$m = o \quad \text{albo} \quad l = o\,.$$

---

[1]) Wiadomo, że co się tyczy ośrodków izotropowych, to warunki VII są zawsze spełnione (prócz tego jeszcze $C = A$).

Weźmy n. p.:

$$m = o$$

wtedy:

$$L = o \qquad N = o \qquad l^2 + n^2 = 1$$

$$H_1 = El^2 + An^2 \qquad H_2 = Cl^2 + An^2 \qquad H_3 = Al^2 + Gn^2 .$$

Zaś równanie XII rozpada się na dwa równania:

$$V^2 - H_2 = o$$

i

$$(V^2 - H_1)(V^2 - H_3) - M^2 = o$$

Z ostatniego równania:

$$2V^2 = H_1 + H_3 \pm \sqrt{(H_1 - H_3)^2 + 4M^2} .$$

Oczywiście pierwiastek równania:

$$V^2 - H_2 = o$$

i pierwszy pierwiastek równania kwadratowego są dodatnie, albowiem H_1 H_3 . . . są dodatnie z powodu, że stałe: E, C, A, G i E_1 są dodatnie, ale drugi pierwiastek równania kwadratowego jest odjemny, gdy:

$$(H_1 + H_3)^2 < (H_1 - H_3)^2 + 4M^2 ,$$

t. j. gdy

$$H_1 H_3 < M^2 ,$$

t. j. gdy

$$A(El^4 + Gn^4) < [E_1(E_1 + 2A) - EG]\, l^2 n^2 ,$$

co wcale nie jest niemożebne.

Jeżeli otrzymane trzy wartości dla V^2 n. p. V_1^2 V_2^2 V_3^2 napowrót podstawimy w równania XI, to uwzględniając znany związek:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1 ,$$

otrzymamy trzy systemy wartości na λ, μ, ν, odpowiadające trzem wartościom V^2.

Założmy, że można uważać źródło drgań jako pewien punkt, dalej załóżmy, że środek spółrzędnych znajduje się właśnie w tem źródle; t. j. źródło drgań jest to punkt:

$$x = o \qquad y = o \qquad z = o .$$

Co do kierunków osi spółrzędnych już na początku założyliśmy, że są one równoległe do osi symetryi ośrodka.

Tedy wedle założenia drgania rozchodzą się z punktu:

$$x = y = z = o$$

na wszystkie strony. Aby znaleźć kształt fali, musimy poszukiwać powierzchnię owijającą wszystkie elementarne płaskie fale, t. j. powierzchnię owijającą płaszczyzny:

$$lx + my + nz = V(t-t_0)$$

gdzie na $t-t_0$ przyjmujemy pewną stałą wartość; co zaś do l, m, n, to te dostawy mogą przyjmować wszelkie wartości zadość czyniące związkowi:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1\,.$$

Ponieważ $t - t_0$ oznacza odstęp czasu, który upłynął od chwili t_0, pewnej fazy (S) drgań, w źródle drgań aż do tej chwili t, w której ta sama faza (S) drga w pewnej odległości od źródła drgań (powiedzmy od ogniska drgań), więc możemy ten odstęp czasu oznaczyć zupełnie dowolnie. Załóżmy n. p. dla ułatwienia dalszych rachunków, że:

$$t - t_0 = 1$$

Zauważmy teraz, że z powodu własności naszego ośrodka powierzchnia falowa musi być powierzchnią obrotową, co zresztą widać już ze wzorów XI, XII i XIII. Osią obrotu jest oś z-ów. A zatem można znów wprowadzić uproszczenie do naszych rachunków od razu rozważając kształt przecięcia się powierzchni falowej z jedną z płaszczyzn zx lub zy. Weźmy n. p. przecięcie się z płaszczyzną zx; wtedy mamy:

$$y = o \qquad m = o$$

oraz:

$$l^2 + n^2 = 1\,.$$

Jednocześnie zadanie sprowadza się do znalezienia krzywej owijającej proste:

$$lx + nz = V\,.$$

Ponieważ mamy związek:

$$l^2 + n^2 = 1,$$

więc właściwie tylko jeden parametr l albo n jest niezależny. A zatem otrzymamy krzywą owijającą, jeżeli w równaniu:

$$lx + nz = V$$

wyrazimy l przez n, zaś następnie wyrugujemy n z równań:

$$\frac{\partial}{\partial n}(lx + nz - V) = o$$

i

$$lx + nz - V = o$$

Ale

$$\frac{\partial l}{\partial n} = -\frac{n}{l}$$

a zatem możemy napisać poprzednie równania pod kształtem:

$$\text{XIV} \left\{ \begin{array}{l} -xn + lz = l\dfrac{\partial V}{\partial n} \\ \text{i} \\ lx + nz = V \end{array} \right.$$

przyczem:

$$l = \sqrt{1-n^2}$$

Funkcyę V należy podstawić z równania: XII, które, jeżeli

$$m = o$$

rozpada się, jak to wyżej było wskazane, na dwa równania:

$$V^2 - H_2 = o$$

i

$$(V^2 - H_1)(V^2 - H_2) - M^2 = o\ .$$

Oznaczmy którekolwiek z tych równań przez

$$f = o$$

i obliczmy $\frac{\partial V}{\partial n}$. Zakładając, że niezależna zmienna jest n, otrzymamy:

$$\frac{\partial f}{\partial n} + \frac{\partial f}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial f}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial n} = o$$

ale ponieważ

$$\frac{\partial l}{\partial n} = -\frac{n}{l}$$

więc można napisać:

$$l\frac{dV}{dn} = \frac{n\dfrac{\partial f}{\partial l} - l\dfrac{\partial f}{\partial n}}{\dfrac{\partial f}{\partial V}}.$$

Z tego równania i z równań: XIV otrzymujemy:

$$\frac{\partial f}{\partial V}(-xn + lz) = n\frac{\partial f}{\partial l} - l\frac{\partial f}{\partial n}$$

co można też napisać:

$$l\left(z\frac{\partial f}{\partial V} + \frac{\partial f}{\partial n}\right) = n\left(x\frac{\partial f}{\partial V} + \frac{\partial f}{\partial l}\right).$$

Oznaczając przez φ pewien czynnik proporcyonalności, możemy to ostatnie równanie rozdzielić na dwa następujące równania:

$$\left.\begin{aligned} x\frac{\partial f}{\partial V}+\frac{\partial f}{\partial l} &= l\,.\,\varphi \\ z\frac{\partial f}{\partial V}+\frac{\partial f}{\partial n} &= l\,.\,\varphi \end{aligned}\right\} \quad \text{XV}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie przez l; drugie przez n; następnie dodajmy je do siebie, otrzymamy ze względu na związki:

$$l^2 + n^2 = 1$$

oraz:

$$lx + nz = V$$

następujące równanie:

$$\varphi = V\frac{\partial f}{\partial V} + l\frac{\partial f}{\partial l} + n\frac{\partial f}{\partial n}.$$

Ale teraz skorzystajmy z tego, że f w obu przypadkach[1]) jest funkcyą jednorodną wielkości V, l i n a zatem:

$$V\frac{\partial f}{\partial V} + l\frac{\partial f}{\partial l} + n\frac{\partial f}{\partial n} = if\,,$$

gdzie $i = 2$ albo $i = 4$ stosownie do tego, czy zamiast f podstawiamy pierwszą czy drugą funkcyą, którą ten symbol przedstawia. Ale

$$f = o$$

a zatem:

$$V\frac{\partial f}{\partial V} + l\frac{\partial f}{\partial l} + n\frac{\partial f}{\partial n} = \varphi = o\,.$$

Tedy z równania XV wypada:

$$\left.\begin{aligned} x\frac{\partial f}{\partial V}+\frac{\partial f}{\partial l} &= o \\ z\frac{\partial f}{\partial V}+\frac{\partial f}{\partial n} &= o \end{aligned}\right\} \quad \text{XV*}$$

To są ostateczne równania, z których wyprowadzimy równanie powierzchni falowej.

Podstawimy w te równania najpierw:

$$f = V^2 - H_2 = V^2 - Cl^2 - An^2 = o\,, \qquad \text{XVI}$$

---

[1]) t. j. i wtedy, gdy $f = V^2 - H_2 = o$

i gdy $f = (V^2 - H_1)(V^2 - H_3) - M^2 = o$

uwzględniając przytem równanie:

$$lx + nz = V.$$

Z równania XVI wypada:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = -2Cl$$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = -2An$$

$$\frac{\partial f}{\partial V} = 2V$$

Równania zaś XV ze względu na:

$$lx + nz = V,$$

po podstawieniu wartości pochodnych: $\frac{\partial f}{\partial l}$ etc. będą teraz:

$$lxz + n(z^2 - A) = o$$

$$nxz + l(x^2 - C) = o.$$

Wyrugowawszy z tych równań stosunek: $\frac{l}{n}$, otrzymamy równanie ellipsy:

$$\frac{x^2}{C} + \frac{z^2}{A} = 1.$$

A zatem powierzchnia falowa, odpowiadająca równaniu:

$$V^2 - H_2 = o$$

jest ellipsoidą obrotową, której osią obrotu jest oś z-ów, zaś połowy osi są:

$$\sqrt{C} \text{ i } \sqrt{A}.$$

Gdy

$$\sqrt{C} > \sqrt{A}$$

wtedy elipsoida jest w kierunku z spłaszczona:

gdy

$$\sqrt{C} > \sqrt{A}$$

wtedy jest w kierunku z wydłużona.

Podstawmy teraz zamiast f drugą wartość tej funkcyi tj. wartość:

$$f = (V^2 - H_1)(V^2 - H_3) - M^2 = o$$

gdzie

$$H_1 = El^2 + An^2$$

$$H_3 = Al^2 + Gn^2$$

$$M = D \cdot ln,$$

gdzie

$$D = A + E_1$$

Wskutek tego otrzymamy teraz:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = 2l[-V^2(A+E)+2AEl^2+(A^2+EG-D^2)n^2]$$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = 2n[-V^2(A+g)+2AGn^2+(A^2+EG-D^2)l^2]$$

$$\frac{\partial f}{\partial V} = 4V^3-2V[(A+E)l^2+(A+G)n^2$$

Załóżmy dla uproszczenia:

$$A^2+GE-D^2=2K^2;$$

następnie wyrugujmy z powyższych wyrazów V przy pomocy równania:

$$lx+nz=V$$

otrzymamy:

$$\frac{\partial f}{\partial l}=2l\{[2AE-(A+E)x^2]l^2-2(A+E)xzln+[2K^2-(A+E)z^2]n^2\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial n}=2n\{[2K^2-(A+G)x^2)]l^2-2(A+G)xzln+[2AG-(A+G)z^2]n^2\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial V}=2(lx+nz)\{[2x^2-(A+E)]l^2+4xzln+[2z^2-(A+G)]n^2\}.$$

Podstawmy te wyrażenia do równań XV*, oznaczmy:

$$\frac{l}{n}=q$$

uporządkujmy wedle potęg q; otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned} r_0q^3+r_1q^2+r_2q+r_3&=o\\ s_0q^3+s_1q^2+s_2q+s_3&=o\end{aligned}\right\}\ \text{XVII}$$

gdzie:

$$\left.\begin{aligned} r_0&=2(x^2-A)(x^2-E)\\ r_1&=3zx(2x^2-A-E)\\ r_2&=2(K^2+x^2z^2)+x^2(2z^2-A-G)+z^2(2x^2-A-E)\\ r_3&=zx(2z^2-A-G)\\ s_0&=zx(2x^2-A-E)\\ s_1&=2(K^2+x^2z^2)+x^2(2z^2-A-G)+z^2(2x^2-A-E)\\ s_2&=3zx(2z_2-A-G)\\ s_3&=2(z^2-A)(z^2-G).\end{aligned}\right\}\ \text{XVIII}$$

Widzimy, że

$$r_2=s_1$$
$$r_1=3s_0$$
$$s_2=3r_3.$$

Trzeba teraz wyrugować q z równań XVII; uczynimy to przy pomocy znanych metod. Oznaczmy dla krótkości pierwsze równanie XVII przez:

$$\varphi_1=o,$$

zaś drugie przez:

$$\varphi_2=o$$

i utwórzmy równania:

$$
\begin{aligned}
s_0 \varphi_1 - r_0 \varphi_2 &= o \\
(s_0 q + s_1)\varphi_1 - (r_0 q + r_1)\varphi_2 &= o \\
(s_0 q^2 + s_1 q + s_2)\varphi_1 - (r_0 q^2 + r_1 q + r_2)\varphi_2 &= o\,.
\end{aligned}
$$

Oczywiście te równania są zawsze spełnione, albowiem mamy:

$$\varphi_1 = o \quad \text{i} \quad \varphi_2 = o\,.$$

Uporządkujmy teraz te same równania wedle potęg q, otrzymamy:

$$
\text{XIX} \quad \left\{
\begin{aligned}
c_{11} q^2 + c_{12} q + c_{13} &= o \\
c_{12} q^2 + c_{22} q + c_{23} &= o \\
c_{13} q^2 + c_{23} q + c_{33} &= o\,,
\end{aligned}
\right.
$$

gdzie:

$$
\text{XX} \quad \left\{
\begin{aligned}
c_{11} &= r_0 s_1 - s_0 r_1 \\
c_{12} &= r_0 s_2 - s_0 r_2 \\
c_{13} &= r_0 s_3 - s_0 r_3 \\
c_{22} &= r_0 s_3 - s_0 r_3 + r_1 s_2 - s_1 r_2 \\
c_{23} &= r_1 s_3 - s_1 r_3 \\
c_{33} &= r_2 s_3 - s_2 r_3\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Łatwo wyrugować q z równań XIX traktując te równania tak, jak gdyby to były równania liniowe z niewiadomemi:

$$q^2 \quad q \quad \text{i} \quad q^0 = 1$$

Po wyrugowaniu q otrzymamy ostatecznie:

$$
\text{XXI} \quad \begin{vmatrix} c_{11}, & c_{12}, & c_{13} \\ c_{12}, & c_{22}, & c_{23} \\ c_{13}, & c_{23}, & c_{33} \end{vmatrix} = o
$$

i to jest równanie przecięcia się powierzchni falowej odpowiadającej równaniu:

$$(V^2 - H_1)(V^2 - H_3) - M^2 = o$$

z płaszczyzną zx.

Podamy tu jeszcze dokładne wyrażenia funkcyj c_{11}, c_{12} etc., ale wprowadzimy przy tem nowe stałe, założymy mianowicie, że:

$$
\begin{aligned}
(A + E) &= 2a \\
(A + G) &= 2b \\
AE &= c^2 \\
AG &= d^2.
\end{aligned}
$$

Dzięki wprowadzeniu tych nowych stałych można napisać wzory dla funkcyi c_{11} c_{12} etc. w stosunkowo krótkim kształcie. Mianowicie otrzymamy:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{1}{4}c_{11} = -x^4(bx^2+az^2)+(2ab+K^2)x^4+(3c^2-a^2)x^2z^2 \\
\qquad -(2aK^2+bc^2)x^2-ac^2z^2+c^2K^2 \\
\frac{1}{4}c_{12} = xz\left\{\begin{array}{l} -2x^2(bx^2+az^2)+(5ab-K^2)x^2+(3c^2-a^2)z^2 \\ \qquad -(3bc^2-aK^2)\end{array}\right\} \\
\frac{1}{4}c_{13} = -x^2z^2(bx^2+az^2)+d^2x^4+3abx^2z^2+c^2z^4 \\
\qquad -2ad^2x^2-2bc^2z^2+c^2d^2 \\
\frac{1}{4}c_{22} = -4x^2z^2(bx^2+az^2)+(d^2-b^2)x^4+(10ab-6K^2)x^2z^2 \\
\qquad +(c^2-a^2)z^4-2(ad^2-bK^2)x^2-2(bc^2-aK^2)z^2 \\
\qquad +c^2d^2-K^4 \\
\frac{1}{4}c_{23} = xz\left\{\begin{array}{l} -2z^2(bx^2+az^2)+(3d^2-b^2)x^2+(5ab-K^2)z^2 \\ \qquad -(3ad^2-bK^2)\end{array}\right\} \\
\frac{1}{4}c_{33} = -z^4(bx^2+az^2)+(3d^2-b^2)z^4+(2ab+K^2)x^2z^2 \\
\qquad -(2bK^2+ad^2)z^2-bd^2x^2+d^2K^2
\end{array}\right\} \text{XXII}$$

Widzimy tu, że chociaż r i s są wielomianami czwartego stopnia, wielomiany:

$$c = r_i s_k - r_k s_i$$

są nie ósmego ale szóstego stopnia. Pochodzi to stąd, że wyrazy ósmego stopnia zupełnie się znoszą, a wyrazów 7-go stopnia wcale niema. Lecz uformujmy teraz podwyznaczniki wyznacznika XXI i sam ten wyznacznik; ponieważ $c\ldots$ są 6-tego stopnia, więc podwyznaczniki powinneby być 12-go a wyznacznik 18-go stopnia; tymczasem podwyznaczniki są 10-tego a wyznacznik 14. stopnia. Weźmy n. p. podwyznacznik:

$$c_{22}\, c_{33} - c^2_{23}\,.$$

Wyrazy 12-go stopnia będą:

$$16\,(bx^2+az^2)\,[\,4x^2z^2z^4 - (2z^3x)^2] = o.$$

ponieważ zaś podwyznacznik zawiera li tylko wyrazy parzystego stopnia zatem będzie to wielomian 10. stopnia. Tak samo w samym wyznaczniku wyrazy 18. stopnia będą:

$$64\,(bx^2+az^2)\,D$$

gdzie:

$$D = \begin{vmatrix} x^4 & 2x^3z & x^2z^2 \\ 2x^3z & 4x^2z^2 & 2xz^3 \\ x^2z^2 & 2xz^3 & z^4 \end{vmatrix}.$$

Wyznacznik D jest tożsamościowo równy zeru, wskutek tego w wyznaczniku XXI zniką wyrazy 18 stopnia; co więcej ponieważ nietylko D

ale wszystkie pierwsze podwyznaczniki wyznacznika D są tożsamościowo równe zeru, a zatem muszą zniknąć wszystkie wyrazy 16 stopnia, albowiem będą one te podwyznaczniki zawierać. Ponieważ zresztą wyznacznik XXI zawiera tylko wyrazy parzystych stopni, zatem ostatecznie pozostanie wyznacznik 14. stopnia.

Zauważmy dalej, że wyznacznik XXI zawiera tylko parzyste potęgi zmiennych x i z pomimo tego, że pomiędzy wielomianami c_{12}... są dwa, mianowicie: c_{12} i c_{23} takie, które zawierają też nieparzyste potęgi zmiennych x i z. Mianowicie rzecz się ma tak, że wyrazy zawierające nieparzyste potęgi wzajemnie się mnożą i dają li tylko parzyste potęgi.

Widzimy zatem, żę krzywa wyrażona równaniem XXI jest krzywą 14 stopnia symetryczną tak względem osi z jak względem osi x; dość więc znać jej przebieg w jednym kwadrancie, aby „eo ipso" znać przebieg we wszystkich czterech kwadrantach.

Dalej łatwo się przekonać, że wśród wyrazów 14 stopnia w równaniu XXI niema ani wyrazu zawierającego x^{14} ani też wyrazu zawierającego z^{14}, ale są wyrazy, zawierające:

$$z^{12} x^2 \text{ i } x^{12} z^2,$$

a zatem kładąc n p. $x =$ stałej, otrzymamy na z równanie 12. stopnia; zaś kładąc $z =$ stałej, otrzymamy na x równanie 12. stopnia. Innemi słowy wszystkie proste równoległe czy to do osi x, czy to do osi z, przecinają naszą krzywą w skończoności tylko w 12 punktach — dwa zaś pozostałe punkty przecięcia się znajdują się w nieskończonej odległości. Ponieważ uwaga ta odnosi się do wszystkich prostych równoległych do osi spółrzędnych, a zatem oczywiście krzywa ma wszędzie w nieskończoności jedną gałąź; ta gałąź znajdująca się w nieskończoności niema fizycznego znaczenia.

Poprowadźmy prostą przez środek spółrzędnych; ta prosta będzie przecinała naszą krzywą w 12 punktach, znajdujących się w skończoności; ale z tych punktów niekoniecznie są wszystkie rzetelne; przeciwnie niektóre punkty przecięcia mogą być urojone [jak wogóle całe gałęzie krzywej mogą być urojone]. Dalej liczba rzetelnych i liczba urojonych punktów przecięcia nie jest koniecznie dla wszystkich prostych jednakowa; niektóre mają więcej rzetelnych punktów przecięcia a inne mniej; stosunek między liczbą jednych punktów i drugich zależy od położenia prostej. Zresztą przypominamy, że liczba tak rzetelnych jak urojonych punktów przecięcia jest zawsze parzysta i że punkty przecięcia prostych przechodzących przez środek współrzędnych leżą zupełnie symetrycznie parami. Jeżeli mamy n. p. rzetelny punkt przecięcia się:

$$x = a \qquad y = b$$

to będzie też:

$$x = -a \qquad y = -b \, .$$

Z tego wnosimy, że, jeżeli weźmiemy jakikolwiek punkt x, y, w naszym ośrodku, to przez ten punkt mogą kolejno przesunąć się co najwięcej 6 powłok naszej powierzchni falowej; ale z tych powłok niektóre mogą być wszędzie urojone, inne zaś choć rzetelne mogą właśnie dany punkt ominąć. Zatem zależnie od położenia danego punktu mogą przezeń przesunąć się 2, 3, 4, 5 i t. d. rzetelne powłoki powierzchni falowej t. j. innemi słowy: ta sama faza wstrząśnienia może w pewnym punkcie powtórzyć się 2, 3 i t. d. razy stosownie do tego, jakie położenie ten punkt zajmuje względem ogniska.

To, cośmy tylko co powiedzieli, odnosi się tylko do powierzchni falowej, odpowiadającej równaniu:

$$(V^2 - H_1)(V^2 - H_3) - M^2 = o \, ,$$

bo elipsoidalna fala odpowiadająca równaniu:

$$V^2 - H_2 = o$$

naturalnie nie omija żadnego punktu.

Oczywiście wartoby bliżej zbadać kształt powierzchni falowej określonej przez równanie XXI, jednakże ze względu na to, że to równanie jest aż 14. stopnia, postanowiliśmy tymczasem przynajmniej zaniechać dalszego badania natury tego równania i ograniczyć się do paru uwag.

Przedewszystkiem zauważymy, że krzywa XXI nie przechodzi przez środek spółrzędnych, albowiem wartości:

$$x = o \qquad z = o$$

nie czynią zadość równaniu.

Dalej zbadamy nieco dokładniej położenie punktów przecięcia się naszej krzywej z osiami spółrzędnych. Założmy n. p. $x = o$. Wtedy ze wzorów XVIII otrzymamy:

$$\begin{aligned}
r_0 &= 2AE \\
r_1 &= o \\
r_2 &= 2K^2 - z^2(A+E) \\
r_3 &= o \\
s_0 &= o \\
s_1 &= 2K^2 - z^2(A+E) \\
s_2 &= o \\
s_3 &= 2(z^2 - A)(z^2 - G)
\end{aligned}$$

a wskutek tego na mocy równań XX:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 2AE[2K^2 - z^2(A+E)] \\ c_{12} &= o \\ c_{13} &= 4AE(z^2 - A)(z^2 - G) \\ c_{22} &= 4AE(z^2 - A)(z^2 - G) - [2K^2 - z^2(A+E)]^2 \\ c_{23} &= o \\ c_{33} &= 2(z^2 - A)(z^2 - G)[2K^2 - z^2(A+E)]\,. \end{aligned}$$

Skoro podstawimy te wartości w równanie: XXI, otrzymamy:

$$4AE(z^2 - A)(z^2 - G).\{4AE(z^2 - A)(z^2 - G) - [2K^2 - z^2(A+E)]^2\}^2 = o. \quad \text{XXIII}$$

Jestto równanie 6 stopnia względem z^2 [1]). Rozpada się ono na równania

$$z^2 = A$$
$$z^2 = G$$

i

$$4AE(z^2 - A)(z^2 - G) - [2K^2 - z^2(A+E)]^2 = o \qquad \text{XXIV}$$

Pierwiastki tego ostatniego równania, jak to widać ze wzoru XXIII, są podwójne. Z równania XXIV otrzymamy podstawiając napowrót zamiast:

$$2K^2 = A^2 + GE - D^2$$

$$z^2 = \frac{1}{(A-E)^2}\left\{ \begin{array}{l} (A^2 - GE)(A-E) - D^2(A+E) \\ \pm 2D\sqrt{AE}\sqrt{G(A-E) + D^2} \end{array} \right\} \qquad \text{XXV}$$

Pierwiastki równań:

$$z^2 - A = o \quad \text{i} \quad z^2 - G = o$$

dają cztery rzetelne punkty przecięcia osi z-ów przez naszą krzywą, mianowicie punkty:

$$z = +\sqrt{A} \qquad z = +\sqrt{G}$$
$$z = -\sqrt{A} \qquad z = -\sqrt{G}$$

Pierwiastki kwadratowego równania XXIV jako pierwiastki podwójne właściwie nie dają przecięć; odpowiadają one punktom, w których nasza krzywa dotyka osi z-ów, ale dotknięcie następuje jednocze-

---

[1]) Przypominamy, że pozostałe dwa pierwiastki równania XXI leżą w nieskończoności.

śnie z obu stron osi tak, że w punktach przez równanie XXIV wyznaczonych dwie gałęzie krzywej stykają się jednocześnie ze sobą i z osią z. Aby jednak te punkty były rzetelnymi punktami, trzeba nietylko aby pierwiastki równania XXIV były rzetelne ale też ażeby były dodatnie.

Ze wzoru XXV widać, że warunkiem rzetelności jest:

$$G(A - E) + D^2 > o .$$

Znaki pierwiastków zależą od znaków wyrazów:

$$p = 4(K^4 - A^2GE) = D^4 + (A^2 - GE)^2 - 2D^2(A^2 + GE)$$

oraz:

$$q = 2K^2(A+E) - 2AE(A+G) = (A^2 - GE)(A-E) - D^2(A+E).$$

Od znaku wyrazu p zależy znak iloczynu pierwiastków a od znaku wyrazu q zależy znak sumy pierwiastków. Otóż łatwo jest okazać, że q musi być ujemne. Rzeczywiście warunek:

$$q > o$$

można napisać, przestawiwszy tylko wyrazy, pod następującym kształtem:

$$A(A^2 - AE - D^2) > E[G(A-E) + D^2]$$

Z prawej strony tej nierówności stoi wyraz, który musi być dodatni ze względu na tylko co przytoczony warunek rzetelności; z lewej zaś strony mamy wyraz ujemny, albowiem wszystkie stałe A, E, E_1 i t. d. są zawsze dodatnie; zaś:

$$D^2 = (A + E_1)^2 > A^2 .$$

Widzimy więc, że warunek:

$$q > o$$

nie może być spełniony, że przeciwnie wyraz q jest zawsze ujemny i suma pierwiastków jest zawsze ujemna. Co do wyrazu p, nie można nic ogólnego wypowiedzieć o jego znaku. Stosownie do wartości stałych A, E, G i t. d. p może być raz dodatnie, raz odjemne. Gdy p jest dodatnie, to z powodu, że q jest ujemne [zakładamy, że warunek rzetelności pierwiastków jest spełniony], oba pierwiastki kwadratowego równania XXIV są ujemne i nasze punkty podwójne są urojone; jeżeli zaś p jest ujemne, to jeden z pierwiastków tego równania jest dodatni a drugi ujemny. Ujemnemu pierwiastkowi odpowiada urojony; a dodatniemu rzeczywisty punkt podwójny na osi z.

Jednocześnie przykład ten wskazuje, że szczegóły kształtu naszej krzywej w wysokim stopniu zależą od stosunków między wartościami stałych: A, E, G . . . etc.

Zupełnie to samo, co powiedzieliśmy o przecięciach naszej krzywej z osią z, można powiedzieć o jej przecięciach z osią x, trzeba tylko wszędzie zamiast G podstawić E i odwrotnie.

Dla pewnych specyalnych wartości stałych A, E i t. d. całe gałęzie krzywej wyrażonej przez równanie XXI stają się urojone albo odsuwają się w nieskończoność, zatem tracą fizyczne znaczenie, a pozostała rzeczywista krzywa staje się o wiele mniej zawiłą.

Załóżmy n. p. że równanie:

$$(V^2 - H_1)(V^2 - H_3) - M^2 = o$$

rozpada się na dwa liniowe równania; zachodzi to n. p. wtedy, gdy [1]:

$$D^2 = (A + E_1)^2 = (E - A)(G - A)$$

Wtedy można nasze równania napisać w kształcie:

$$(V^2 - El^2 - An^2)(V^2 - Al^2 - Gn^2) - (E - A)(G - A)l^2n^2 = o\,,$$

albo po oczywistych przekształceniach:

$$(V^2 - A)(V^2 - El^2 - Gn^2) = o\,.$$

Oczywiście równaniu:

$$V^2 - A = o,$$

odpowiada fala kulista, rozchodząca się z prędkością $\sqrt{A}$, zaś równaniu:

$$V^2 - El^2 - Gn^2 = o$$

fala, mająca kształt elipsoidy obrotowej. Równanie południkowego przecięcia tej elipsoidy będzie:

$$\frac{x^2}{E} + \frac{z^2}{G} = 1.$$

Jeżeli $E = G$, wtedy ta elipsoida staje się kulą, ale jednocześnie natrafiamy na ten przypadek, w którym spełnione są warunki: VII i drgania poprzeczne rozchodzą się oddzielnie od podłużnych. Wtedy kulista powierzchnia falowa o przecięciu południkowem:

$$x^2 + z^2 = E$$

odpowiada drganiom podłużnym; zaś powierzchnie, których południkowe przecięcia są:

$$x^2 + z^2 = A$$

[1]) Inne przypadki, w których powyższe równanie rozpada się na dwa liniowe, nie budzą interesu.

$$\frac{x^2}{C} + \frac{z^2}{A} = 1$$

odpowiadają drganiom poprzecznym.

Założyliśmy, że dzięki uwarstwowaniu, ciśnieniu i t. p. przyczynom niektóre pokłady należy uważać za nieizotropowe [choć nie należy uważać odstępstw od izotropii za bardzo znaczne]. Jako przykład obraliśmy jednoosiowy podwójnie załamujący ośrodek ale nie wprowadziliśmy warunków VII w optyce niezbędnych a tu nie obowiązujących. Znaleźliśmy, że: 1) w takim razie drgania nie są ani wyłącznie podłużne, ani wyłącznie poprzeczne, lecz mają charakter mięszany; 2) że powierzchnia fali składa się z elipsoidy obrotowej i pewnej innej obrotowej wogóle skomplikowanej powierzchni; 3) że liczba rzeczywistych fal, przechodzących przez dowolnie w ośrodku obrany punkt, zależy od położenia tego punktu względem ogniska, z którego wychodzą drgania, a także od względnych wartości stałych sprężystych A, E . . . i t. d.

Dodajmy na zakończenie, że mieliśmy na celu rozpatrzenie tylko pewnej specyalnej kwestyi z teoryi rozchodzenia się drgań w trzęsieniach ziemi. Z tego powodu nie należy sądzić, aby rozpatrywany tu idealny ośrodek miał być zupełnym dokładnym m o d e l e m pokładów ziemskich.