

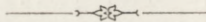
O rozchodzeniu się drgań podczas trzęsień ziemi

przez

M. P. RUDZKIEGO.

~~~~~  
Z tablicą XIII.  
~~~~~

(Rzecz przedstawiona na posiedzeniu Wydziału matem.-przyr. z dnia 8. listopada 1897.
Referował czł. Natanson).



Zakres naszych wiadomości o trzęsieniach ziemi rozszerzył się znacznie w ostatnich latach, głównie dzięki niektórym nowym przyrządom. Przyrządy te są to po prostu wahadła, bądź zwykłe, ale bardzo długie, jakich używają włoscy seismologowie, bądź dwunitkowe w wodzie zawieszane, jak n. p. wahadło G. H. Darwina, bądź wreszcie poziome wahadła Rebeur — Paschwitza.

Ten ostatni przyrząd okazał się bodaj najczulszy. Niesłychanie słabe drgania, sprawione przez odległe trzęsienia ziemi n. p. japońskie, wprawiają poziome wahadło w Europie w silny ruch.

Spostrzeżenia, poczynione przy pomocy wspomnianych przyrządów pokazały, że drgania trzęsień ziemi rozchodzą się z bardzo wielką prędkością. Wprawdzie nie możemy bezpośrednio zmierzyć tej prędkości, drgania przychodzą do nas z odległych miejscowości przez głęboko leżące, niedostępne warstwy, ale wnosimy, że prędkości rozchodzenia się drgań muszą być bardzo znaczne stąd, że pozorne prędkości tegoż rozchodzenia się są bardzo znaczne.

Ognisko trzęsienia ziemi znajduje się zwykle gdzieś pod powierzchnią ziemi, ale na powierzchni ziemi możemy rozróżnić odpowiadającą mu okolicę; albo, gdy sobie wyobrazimy, że ognisko trzęsienia ziemi

jest pewnym punktem, to mamy w powierzchni punkt najbliższy ogniska, do którego trzęsienie ziemi najwcześniej dochodzi. Tę miejscowość, ten punkt, nazywamy *epicentrum*. Oczywiście jest rzeczą, że położenie epicentrum można zawsze określić z większą lub mniejszą dokładnością porównyując między sobą chwile czasu, w których pewne trzęsienie ziemi dało się uczuć w różnych punktach powierzchni ziemi. Przypuśćmy więc że znamy położenie epicentrum, przypuśćmy dalej, że pewna faza trzęsienia ziemi n. p. pierwsze silne wstrząśnienie dało się uczuć w epicentrum w chwili: t_e . Weźmy dalej pewną stacyę n. p. A , na której ta sama faza trzęsienia ziemi dała się uczuć w chwili t_A — wtedy *pozorna* prędkość rozchodzenia się drgań między epicentrum i stacyę A , którą to pozorną prędkość oznaczamy głóską v , będzie:

$$v = \frac{D}{t_A - t_e},$$

gdzie D oznacza najkrótszą (wzdłuż powierzchni) odległość między epicentrum i stacyę A . Warto mimochodem zauważyć, że dawniej tę pozorną prędkość częstokroć uważano za rzeczywistą, co było naturalnie błędne.

Spostrzeżenia pokazały, że przy drganiach, przychodzących z daleka pozorną prędkość jest zmienna a co więcej, że jest tem większa, im większe jest D . t. j. mierzona wzdłuż powierzchni odległość między epicentrum i daną stacyę.

Tego rodzaju zależność pozornej prędkości od D powinnyby istnieć, gdyby n. p. ziemia była kulą jednorodną, zbudowaną z jakiegokolwiek izotropowego materyału¹⁾. W takiej kuli drgania muszą się rozchodzić prostolinijnie, ze stałą prędkością, przytem będą się naturalnie rozchodziły przez wnętrze ziemi.

Lecz, jakto zauważył Rebeur-Paschwitz, hipoteza, że wnętrze ziemi jest jednorodne i izotropowe, okazuje się niewystarczająca²⁾; natomiast zdaje się, że można wytłomaczyć spostrzegane zjawiska, zakładając, że prędkość rozchodzenia się drgań jest funkcją odległości od środka ziemi, przyczem w głębszych warstwach ta prędkość jest większa niż w powierzchniowych. Hypotezę tę, lat temu dziesięć, wygłosił Schmidt ze Stuttgartu, ale nie rozwinął jej analitycznie. W niniejszej pracy zaj-

1) Porównaj Bonetti i Agamennone. Sulla velocita Atti della R. Accad. dei Lincei. ser. V. Rendiconti cl. sc. fis. mat. e naturali tom IV 1. sem. 1895 r. str. 62 - 68.

2) W dalszym ciągu wskażemy przyczyny, dzięki którym wspomniana hipoteza jest nie wystarczająca.

miemy się tą hipotezą Schmidta i postaramy się nadać jej kształty analitycznej teorii.

Będziemy więc badali związek między rzeczywistą prędkością rozchodzenia się drgań w kuli, złożonej z warstw współśrodkowych izotropowych a prędkością pozorną rozchodzenia się tychże drgań na powierzchni kuli. Właściwie wartoby zbadać jeszcze ogólniejszy przypadek, mianowicie wartoby założyć, że materiały, z których składają się oddzielne warstwy nie są izotropowe ale podwójnie łamiące, ponieważ jednak dla objaśnienia spostrzeganych zjawisk wystarcza hipoteza, że materiały są izotropowe, przeto poprzestaniemy tymczasem na rozpatrzeniu tego łatwiejszego przypadku.

Zadanie nasze jest właściwie pewnego rodzaju zadaniem z teorii refrakcyi ośrodka, w którym współczynnik załamania jest funkcją odległości od pewnego punktu.

Za punkt wyjścia posłużą nam znane równania różniczkowe, wyrażające zasadę Fermata:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right) - \frac{\partial n}{\partial x} &= 0 \\ \frac{d}{ds} \left(n \frac{dy}{ds} \right) - \frac{\partial n}{\partial y} &= 0 \\ \frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) - \frac{\partial n}{\partial z} &= 0 \quad ; \end{aligned}$$

gdzie $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ oznacza element promienia

$n = \frac{1}{u}$ współczynnik załamania

u rzeczywistą prędkość rozchodzenia się drgań.

Pisząc te równania, ipso facto robimy założenie, że n jest funkcją ciągłą współrzędnych. Gdyby n było nie wszędzie funkcją ciągłą, musielibyśmy osobno rozważać te powierzchnie, w których ciągłość n zostaje zerwana. Jednakże do celów, o które nam tu chodzi, założenie, że n jest funkcją ciągłą, jest zupełnie wystarczające. Rzeczywiście, gdyby nam chodziło o zbadanie kształtu promieni w pewnym ośrodku, którego fizyczne własności zmieniają się w sposób nagły, to dość byłoby rozważyć kształt promieni w ośrodku, w którym n w pewnych miejscach zmienia się bardzo powoli a w innych bardzo szybko.

Założymy, że miejsce z którego się rozchodzą drgania można rozważać jako punkt, ten punkt nazwiemy ogniskiem i oznaczymy go głóską H (Tabl. XIII. fig. 1). Poprowadźmy średnicę przechodzącą przez H . Oznaczmy punkty, gdzie ta średnica przecina powierzchnię kuli przez E i E_1 .

Oczywista jest rzeczą, że drgania wychodzące z punktu H najpierw dosięgają punktu E ; jest to zatem, wedle określenia, tak zwane epicentrum, gdyż punkt E jest najbliższym punktem powierzchni od ogniska H . Przeciwległy punkt E_1 , zarazem w całej kuli od ogniska H najdalszy, nazwiemy antypodem epicentrum.

Ponieważ n jest funkcją odległości od środka kuli C , przeto zaraz widać, że dla drgań, wychodzących z punktu H , średnica EE_1 przechodząca przez H jest osią symetrii, że w każdej płaszczyźnie, przechodzącej przez EE_1 ruchy będą jednakowe, że wreszcie promienie będą krzywymi płaskimi, leżącymi w płaszczyznach przechodzących przez EE_1 .

Widzimy więc, że można sprowadzić zadanie trójwymiarowe do dwuwymiarowego. Przypuśćmy więc, że jedna z płaszczyzn współrzędnych n. p. płaszczyzna xy przechodzi przez średnicę EE_1 . Wtedy możemy zamiast trzech równań różniczkowych napisać dwa:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right) - \frac{\partial n}{\partial x} &= 0 \\ \frac{d}{ds} \left(n \frac{dy}{ds} \right) - \frac{\partial n}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

gdzie:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Załóżmy jeszcze, że początek współrzędnych znajduje się w punkcie C , wtedy odległość od środka będzie:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ponieważ zaś:

$$n = f(r)$$

przeto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial x} &= \frac{dn}{dr} \cdot \frac{x}{r} \\ \frac{\partial n}{\partial y} &= \frac{dn}{dr} \cdot \frac{y}{r} \end{aligned}$$

Podstawmy te wartości pochodnych cząstkowych funkcji n w równaniach I, pomnóżmy pierwsze z nich przez y , drugie przez x , odejmijmy następnie pierwsze od drugiego, otrzymamy po zupełnie oczywiście przekształceniu:

$$\frac{d}{ds} \left[n \left(x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} \right) \right] = 0.$$

skąd wynika:

$$(II) \quad n \left(x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} \right) = \alpha,$$

gdzie α oznacza pewien parametr stały.

W dalszym ciągu będziemy używali współrzędnych biegunowych, przyczem za oś biegunową obierzemy średnicę EE_1 za jej dodatni kierunek, kierunek od C ku E , kąty zaś będziemy liczyli w kierunku obrotu wskazówki zegarka.

Równanie (II) we współrzędnych biegunowych przybiera kształt:

$$(II^*) \quad nr^2 \frac{d\theta}{ds} = \alpha$$

Podnieśmy obie strony tego równania do kwadratu i napiszmy je w kształcie:

$$n^2 r^4 d\theta^2 = \alpha^2 ds^2$$

ponieważ:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

tedy:

$$(n^2 r^2 - \alpha^2) r^2 d\theta^2 = \alpha^2 dr^2$$

a zatem:

$$(III) \quad d\theta = \pm \frac{\alpha dr}{r \sqrt{n^2 r^2 - \alpha^2}},$$

To ostatnie równanie jest równaniem różniczkowym promieni. Wstawiając zamiast n różne funkcyje promienia kuli, a następnie całkując równanie III otrzymamy całkowite równanie promieni, odpowiadające danej funkcyi n . Tak n. p. dla $n = \text{stałej}$, t. j. dla jednorodnej kuli otrzymamy promienie prostoliniowe. W dalszym ciągu będziemy jednak badali równanie: III przy pewnych ogólnych założeniach co do natury funkcyi n .

Równanie III można napisać w kształcie:

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm \frac{r}{\alpha} \sqrt{n^2 r^2 - \alpha^2},$$

z którego zaraz widać, że warunek największości i najmniejszości, t. j.

$$\frac{dr}{d\theta} = 0$$

jest spełniony, gdy albo:

$$r = 0$$

albo też:

$$n^2 r^2 - \alpha^2 = 0.$$

Przypadek:

$$r = 0$$

zasługuje na szczególną uwagę. Mianowicie, z równania II* widać, że skoro

$$r = 0,$$

to powinno być jednocześnie:

$$\alpha = 0,$$

inaczej musielibyśmy założyć, że w środku kuli:

$$\frac{d\theta}{ds} = \infty,$$

albo:

$$n = \infty$$

I jedną i drugą hipotezę należy odrzucić. Pierwszą można tłumaczyć w ten sposób, że w środku kuli promienie łamią się pod pewnym skończonym kątem, drugą zaś, że prędkość rozchodzenia się drgań w środku kuli jest równa zeru¹⁾.

Oczywista jest rzeczą, że niema żadnego powodu, aby środkowi kuli nadawać jakieś osobliwe własności, których inne punkty nie posiadają, dlatego też należy odrzucić pierwszą hipotezę. Co zaś do drugiej, to ta jest wręcz przeciwną założeniu, że rzeczywista prędkość rozchodzenia się drgań wzrasta ku środkowi kuli.

Widzimy zatem, że skoro:

$$r = 0,$$

to nie pozostaje nic innego jak położyć:

$$\alpha = 0,$$

t. j. cechą promieni przechodzących przez środek kuli jest to, że posiadają parametr α równy zeru.

Skoro jednak, jak to widać z równania III, musi być w takim razie wzdłuż całego promienia:

$$d\theta = 0,$$

przeto promień przechodzący przez środek kuli t. j. promień o parametrze α równym zeru jest prosty, ponieważ zaś przechodzi przez punkt H zatem jest to prosta EE_1 .

Przejdźmy teraz do równania:

$$r^2 n^2 - \alpha^2 = 0$$

¹⁾ Było bowiem powyżej $n = \frac{1}{u}$

Równanie to rozpada się na dwa równania:

$$rn - \alpha = 0$$

i

$$rn + \alpha = 0.$$

Ponieważ r i n mogą przyjmować tylko dodatnie wartości, a więc jeżeli parametr α jest także dodatni, to tylko pierwsze równanie może mieć miejsce, gdy zaś parametr α jest ujemny, to tylko drugie równanie może mieć miejsce.

A zatem gdy parametr α jest dodatni, największości i najmniejszości promienia wodzącego r krzywej przedstawionej przez równanie III są dane przez równanie:

$$nr - \alpha = 0,$$

gdy zaś ten parametr jest ujemny, to przez równanie:

$$nr + \alpha = 0,$$

Obliczmy wedle znanych wzorów promień krzywizny krzywej wyrażonej przez równanie III. Oznaczając promień krzywizny przez ρ , znajdziemy:

$$\text{IV} \quad \frac{1}{\rho} = \pm \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{n} \right) = \pm \frac{\alpha}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Widzimy stąd, że gdy α jest ujemne, ale jednocześnie weźmiemy z lewej strony równania IV znak ujemny, to otrzymamy taki sam promień krzywizny, jak przy dodatnim α i dodatnim znaku. Tak samo gdy α jest ujemne, a z lewej strony równania IV stoi znak $+$, wartość ρ jest taka sama, jak przy dodatnim α i ujemnym znaku wyrażenia, stojącego z prawej strony równania IV. Można więc założyć, że z prawej strony równania IV stoi znak $+$, zaś α przyjmuje tak dodatnie jak ujemne wartości. Lecz zauważmy, że swoją drogą $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{n} \right)$ może mieć też znak dodatni lub ujemny, a zatem można bez szkody dla ogólności rozumowań założyć, że α jest ciągle tego samego znaku n. p. że jest dodatnie. Wtedy znak wyrażenia stojącego po prawej stronie równania IV będzie zależeć tylko od znaku pochodnej

$$\frac{\partial u}{\partial r},$$

bo r jest wciąż dodatnie. Założymy zatem w dalszym ciągu, że:

$$\text{IV}^* \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{n} \right) = \frac{\alpha}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$$

przyczem α przybiera tylko dodatnie wartości. Dzięki temu założeniu tylko równanie: $nr - \alpha = 0$ będzie możliwe.

Przy tem założeniu, skoro u wrasta jednocześnie z r [t. j. jeżeli n zmniejsza się w miarę tego, jak r wzrasta], to promień krzywizny jest dodatni i krzywa jest zwrócona swą wklęsłą stroną ku środkowi kuli (Fig. 2). Jeżeli zaś przeciwnie n zmniejsza się [t. j. n rośnie] w miarę tego, jak r wzrasta, to promień krzywizny jest odjemny, zaś krzywa jest zwrócona swą wypukłą stroną ku środkowi kuli (patrz Fig. 3). A zatem, gdy funkcyja n między $r = 0$ i $r = R$ kilkakrotnie to wzrasta, to znów się zmniejsza, to wtedy nasze krzywe, t. j. promienie muszą mieć kształt wężykowaty.

W dalszym ciągu założymy, że w myśl hipotezy Schmidta rzeczywista prędkość rozchodzenia się drgań u wzrasta od powierzchni ku środkowi, czyli odwrotnie współczynnik załamania n wzrasta od środka ku powierzchni. Wskutek tego promienie będą krzywymi zwróconemi swą wypukłą stroną ku środkowi kuli (jak w Fig. 3). Zauważmy przytem, że, jak to widać z fizycznego znaczenia tej funkcyi, — między $r = 0$ i $r = R$, n nie może być ani równe zeru ani nieskończone — jest to zatem wciąż skończona, dodatnia i wzrastająca wraz z r funkcyja tej ostatniej zmiennej.

Co więcej, z tego cośmy tylko co powiedzieli, wypływa wniosek, że wyraz:

$$nr - \alpha$$

przy jakiegokolwiek wartości α może co najwyżej raz stać się zerem między:

$$r = 0 \quad \text{i} \quad r = R. \quad ^1)$$

Dalej możemy też powiedzieć, że funkcyja n będzie na pewno między $r = 0$ i $r = R$ rozwijalna w szereg rosnących całkowitych potęg zmiennej r — skończony lub nieskończony — i w tym ostatnim przypadku zbieżny, zatem n będzie posiadać kształt następujący:

$$n = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_m r^m + \dots$$

Rozważmy teraz pewien pęk promieni, t. j. krzywych, określonych przez równanie III, przechodzących przez punkt H . Krzywe tego pęku odpowiadają rozmaitym wartościom parametru α . Wiemy już, że wartości

¹⁾ Przyczem oczywiście jest rzeczą, że pierwiastek równania

$$nr - \alpha = 0$$

będzie tem większy, im parametr α jest większy.

Ta uwaga będzie bardzo użyteczną w dalszych wywodach.

$$\alpha = 0$$

odpowiada prosta EE_1 — ale załóżmy, że α posiada pewną dodatnią wartość n. p.

$$\alpha = \alpha_1$$

Tej wartości parametru odpowiadają aż dwie krzywe n. p. (F. 4) AA_1 i BB_1 zupełnie symetrycznie względem prostej EE_1 położone. Że dwie krzywe odpowiadają jednej wartości parametru α , to widać n. p. z równania III, które wskazuje, że przy tej samej absolutnej wartości wyrazu, stojącego z prawej strony tego równania przyrost kąta θ może być dodatni lub ujemny.

Pochodna $\frac{dr}{d\theta}$ staje się równą zeru, jeżeli

$$nr - \alpha_1 = 0,$$

przeto pierwiastek tego ostatniego równania, dajmy na to

$$r = r_L = \overline{CL}$$

da nam długość najkrótszego promienia wodzącego naszych krzywych. Jeżeli promieniem r zakreśliśmy naokoło punktu C koło, to obie krzywe AA_1 i BB_1 będą styczne do tego koła w punktach L i L_1 zupełnie symetrycznie względem średnicy EE_1 położonych. Jednocześnie zaś zaraz widać, że prosta CF_1 przechodząca przez L_1 jest osią symetrii dla krzywej BB_1 .

Założmy teraz, że α przybiera nową wartość α_2 większą od α_1 . Tej nowej wartości parametru odpowiadają dwie nowe krzywe A_2A_3 i B_2B_3 . Te nowe krzywe przecinają się z poprzednimi krzywymi w punkcie H , ale dwie krzywe zbliżające się do środka po jednej i tej samej stronie prostej EE_1 n. p. krzywe AA_1 i A_2A_3 prócz punktu H nie mają drugiego punktu przecięcia się. Gdyby bowiem posiadały taki drugi punkt przecięcia, to zasada Fermata, z której wyprowadziliśmy równanie naszych krzywych, nie byłaby spełnioną. Z drugiej strony, pierwiastek równania:

$$rn - \alpha_2 = 0,$$

gdzie $\alpha_2 > \alpha_1$, stosownie do wyżej w przypisku uczynionej uwagi, jest większy aniżeli pierwiastek równania:

$$rn - \alpha_1 = 0,$$

a zatem koło styczne do krzywych o parametrze α_2 jest większe od koła stycznego do krzywych o parametrze α_1 . A zatem krzywe o pa-

rametrze α_2 , t. j. krzywe $A_2 A_3$ i $B_2 B_3$ muszą mieć mniej więcej takie położenie i kształt, jakto na rysunku (Fig. 4) przedstawiono.

Oczywistą jest rzeczą, że pierwiastek:

$$\sqrt{n^2 r^2 - \alpha_1^2}$$

zmienia znak w punktach L i L_1 , zaś

$$\sqrt{n^2 r^2 - \alpha_2^2}$$

w punktach L_2 i L_3 przeczem η . p. na krzywej $A A_1$, jak to widać z równania III*, od A do L jest odjemny, od L do A dodatni; na krzywej $B B_1$ od B_1 do L_1 odjemny, od L_1 do B dodatni i t. d.

Ale załóżmy, że parametr α coraz to bardziej wzrasta; kolejno otrzymamy coraz to nowe pary krzywych, stycznych do coraz to większych kół, kąty $E C L$ i $E C L_1$ (patrz Fig. 4) zmniejszają się, aż dla pewnej wartości parametru α , którą oznaczymy przez α_H ¹⁾, okaże się, że pierwiastek równania:

$$nr - \alpha_H = 0$$

jest ściśle równy odległości punktu H od C , t. j.

$$r = r_H = \overline{CH}.$$

Obie krzywe zejdą się teraz ze sobą, ich wspólną osią symetrii będzie średnica $E E_1$. Punkty u innych krzywych oznaczone przez L, L_1, L_2, L_3 i t. d. zejdą się ze sobą i z punktem H .

Jednocześnie widzimy, że α nie może mieć większej wartości jak $\alpha = \alpha_H$, a raczej gdy α jest większe od α_H , to krzywa nie może przechodzić przez H , albowiem jest styczna do koła o promieniu większym niż odległość \overline{CH} . Z tego powodu nazwiemy α_H graniczną wartością parametru α , zaś samą krzywą odpowiadającą temu parametrowi [na rysunku Fig. 4 krzywa odpowiadająca parametrowi α_H jest przedstawiona krzywą $M H N$] nazwiemy krzywą graniczną. Naturalnie w kuli będziemy mieli pewną powierzchnię, powierzchnię graniczną, wytworzoną przez obrót krzywej $M H N$ około osi $E E_1$ ²⁾ Przestrzeń zawartą między powierzchnią graniczną i tą częścią powierzchni kuli, wśród której znajduje się punkt E (epicentrum) nazwiemy przestrzenią albo okolicą wewnętrzną, zaś przestrzeń między graniczną powierzchnią i tą częścią powierzchni kuli, wśród której znajduje

¹⁾ Gdy n jest znane, wtedy łatwo obliczyć α_H .

²⁾ Gdy n jest stałe, wtedy powierzchnią graniczną jest płaszczyzna prostopadła do osi $E E_1$ w punkcie H .

się punkt E_1 (t. j. antypody epicentrum), nazwiemy okolicą albo przestrzenią zewnętrzną.

Jeżeli od punktu E (epicentrum) posuwamy się ku M , t. j. ku granicy wewnętrznej okolicy, to napotykamy po kolei punkty $B B_2$ i t. d., w których rozmaite promienie przecinają się z powierzchnią. Promieniowi HE odpowiada parametr $\alpha=0$, promieniowi HB parametr $\alpha_1>0$, promieniowi HB_2 parametr $\alpha_2>\alpha_1$, jednym słowem w przestrzeni wewnętrznej mierzona wzdłuż powierzchni odległość danej stacyi od epicentrum i parametr α wzrastają jednocześnie, t. j.

$$\frac{dD}{d\alpha} > 0.$$

Leżąc skoro przekroczymy graniczną linię, to stan rzeczy zupełnie się zmieni, stacyom coraz to bardziej od epicentrum odległym odpowiadają coraz to mniejsze parametry, a zatem w przestrzeni zewnętrznej

$$\frac{dD}{d\alpha} < 0.$$

Jeżeli oznaczymy przez Θ kąt środkowy odpowiadający łukowi D , to

$$D = R\Theta,$$

a zatem możemy napisać:

w wewnętrznej przestrzeni:

$$\frac{dD}{d\alpha} > 0 \quad \frac{d\Theta}{d\alpha} > 0,$$

w zewnętrznej przestrzeni:

$$\frac{dD}{d\alpha} < 0 \quad \frac{d\Theta}{d\alpha} < 0.$$

V

Teraz możemy przejść do rozpatrzenia pozornej prędkości rozchodzenia się drgań. Wzór dla tej prędkości mieliśmy już wyżej:

$$v = \frac{D}{t_A - t_E} = \frac{R\Theta}{t_A - t_E}. \quad \text{VI}$$

Rozważając rozchodzenie się drgań, zwrócimy uwagę tylko na drgania wprost dochodzące do stacyi, zaś pominiemy drgania odbite.

Pewna określona faza wstrząśnienia, którą nazwiemy fazą (S), przebiega wzdłuż promienia w ciągu czasu dt pewną nieskończenie małą drogę: ds , przyczem:

$$ds = u dt,$$

gdzie u oznacza rzeczywistą prędkość rozchodzenia się drgań.

Ponieważ odwrotność tej rzeczywistej prędkości u jest to właśnie współczynnik załamania n , więc:

$$dt = n ds .$$

A zatem czas, w ciągu którego faza (S) przebiega przestrzeń od ogniska H do stacyi n. p. B będzie:

$$T_B = \int_{(H)}^{(B)} n ds .$$

Załóżmy, że faza (S) zdarzyła się w ognisku w chwili t_H . Ponieważ ta faza potrzebuje czasu T_B aby przebiecz przestrzeń między H i B , przeto da się uczuć na stacyi B w chwili:

$$t_B = t_H + T_B$$

a w epicentrum E w chwili:

$$t_E = t_H + T_E .$$

Zatem wedle wzoru VI pozorna prędkość, z którą drgania przebiegają przestrzeń dzielącą E od B ; będzie:

$$v = \frac{D_B}{t_B - t_E} = \frac{D_B}{T_B - T_E} . \quad (\text{VI}^*)$$

Wiadomo, że niemożna bezpośrednio spostrzedz chwili czasu t_B , ale chwile t_E i t_B mogą być i bywają bezpośrednio spostrzegane na stacyach B i E . Ponieważ:

$$t_B - t_E = T_B - T_E ,$$

przeto: $T_B - T_E$ jest wielkością bezpośrednio daną przez spostrzeżenia, tak samo jak D . Zatem v jest wielkością bezpośrednio daną przez spostrzeżenia, z której można określić nieznaną funkcję n , t. j. innemi słowami: u .

Musimy teraz bliżej rozpatrzyć całki T_B i T_E zachodzące w mianowniku wzoru VI*. W tym celu weźmy równanie II* i pomnóżmy obie strony tego równania przez ds ; otrzymamy:

$$n r^2 \cdot d\theta \cdot ds = \alpha \cdot ds^2 ,$$

ale:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 ,$$

zatem po podstawieniu i łatwych przerobieniach otrzymamy:

$$n ds = \alpha d\theta + \frac{\alpha}{r^2} \frac{dr}{d\theta} dr ,$$

ale wedle równania: III*

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm \frac{r}{\alpha} \sqrt{n^2 r^2 - \alpha^2},$$

zatem:

$$\text{VII} \quad nds = \alpha d\theta \pm \sqrt{n^2 r^2 - \alpha^2} \frac{dr}{r},$$

Niech będzie:

$$\text{VIII} \quad p = \frac{1}{r} \sqrt{n^2 r^2 - \alpha^2},$$

wtedy można równanie VII napisać w kształcie:

$$nds = \alpha d\theta \pm pdr$$

albo, ponieważ:

$$d\theta = \pm \frac{\alpha dr}{r \sqrt{n^2 r^2 - \alpha^2}},$$

t. j.

$$\text{IX} \quad d\theta = \pm \frac{dp}{dx} \cdot dr,$$

można ostatecznie napisać:

$$\text{X} \quad nds = \pm \left(p - \alpha \frac{dp}{dx} \right) dr.$$

Załóżmy najpierw, że punkt B znajduje się w okolicy wewnętrznej, to pierwiastek:

$$\sqrt{n^2 r^2 - \alpha^2}$$

pozostaje na całej przestrzeni od H do B (por. Fig. 4) dodatni, zatem p jest również wciąż dodatnie. Jeżeli zechcemy wyrazić kąt θ jako funkcję r , to musimy, jak to widać ze wzoru IX, napisać:

$$d\theta = - \frac{dp}{dx} dr.$$

Zaś kąt Θ odpowiadający łukowi D_B będzie:

$$\Theta_B := - \int_{(E)} \frac{dp}{dx} dr.$$

W tej całce należy w odpowiedni sposób określić granice całkowania funkcji $\frac{dp}{dx}$, która jest funkcją zmiennej r . Punkтови E , t. j. epicentrum, odpowiada na krzywej punkt H , gdzie

$$r = r_H,$$

zaś w punkcie B , jako znajdującym się na powierzchni kuli,

$$r = R,$$

zatem:

$$\Theta_B = - \int_{r_H}^R \frac{dp}{dx} dr$$

Przejdźmy teraz do całki T_B . Wedle wzoru X

$$nds = + \left(p - \alpha \frac{dp}{dx} \right) dr.$$

granice będą oczywiście tezsame jak w całce Θ_B , a zatem:

$$T_B = \int_{r_H}^R \left(p - \alpha \frac{dp}{dx} \right) dr$$

t. j.

$$T_B = \int_{r_H}^R p dr + \alpha \Theta_B$$

albo wreszcie jeżeli wprowadzimy nowy symbol: J_B pisząc:

$$J_B = \int_{r_H}^R p dr,$$

to

$$T_B = J_B + \alpha \Theta_B$$

Weźmy nareszcie całkę T_E . Ponieważ drgania zdużąją od H do E wzdłuż prostej HE , przeto:

$$\alpha = 0$$

zaś:

$$T_E = \int_{r_H}^R n dr = J_E.$$

Zważywszy, że $D_B = R\Theta_B$ i podstawivszy te wyrażenia we wzorze VI, możemy dla pozornej prędkości rozchodzenia się drgań w okolicy wewnętrznej napisać wzór następujący:

$$v_i = - R \frac{\int_{r_H}^R \frac{dp}{dx} dr}{\int_{r_H}^R \left(p - n - \alpha \frac{dp}{dx} \right) dr}$$

albo też:

$$(XI^*) \quad v_i = \frac{R \Theta_B}{J_B + \alpha \Theta_B - J_E}$$

Utwórzmy teraz pochodną tej prędkości względem parametru α . Po krótkich rachunkach, zważywszy, że granice całkowania w całkach Θ i \bar{J} nie należą do parametru α , że przeto

$$\Theta_B = - \frac{dJ_B}{d\alpha}$$

zważywszy dalej, że $T_E = J_E$ wcale nie zawiera parametru α , że zatem:

$$\frac{dJ_E}{d\alpha} = \frac{dT_E}{d\alpha} = 0,$$

znajdziemy:

$$\frac{dv_i}{d\alpha} = \frac{R \cdot \frac{d\Theta}{d\alpha} \cdot [J_B - J_E]}{[J_B + \alpha \Theta_B - J_E]^2}$$

albo ponieważ:

$$R\Theta = D$$

$$\frac{dv_i}{d\alpha} = \frac{dD}{d\alpha} \cdot \frac{[J_B - J_E]}{[J_B + \alpha \Theta_B - J_E]^2}.$$

Na mocy tego ostatniego wzoru możemy zaraz napisać:

$$\frac{dv_i}{dD} = \frac{J - J_E}{[J_B + \alpha \Theta_B - J_E]^2}.$$

Oczywiście znak tej pochodnej zależy tylko od licznika:

$$J_B - J_E = \int_{r_{II}}^R (p-n) dr,$$

ale element całki:

$$(p-n) dr = \left[\frac{1}{r} \sqrt{n^2 r^2 - \alpha} - n \right] dr$$

jest oczywiście zawsze tylko odjemny, a zatem $J_B - J_E$ [w wewnętrznej okolicy] jest zawsze tylko odjemne, t. j. w wewnętrznej okolicy

$$\frac{dv_i}{dD} < 0.$$

t. j. w wewnętrznej okolicy pozorna prędkość zmniejsza się w miarę tego, jak mierzona wzdłuż powierzchni odległość między stacją B i epicentrum wzrasta.

Zastanówmy się jeszcze przez chwilę nad pozorną prędkością w samym epicentrum. Dla epicentrum parametr α staje się równy zeru. We wzorze XI licznik i mianownik stają się równe zeru, jednak pozorna prędkość nie jest bynajmniej nieokreślona, przeciwnie badając wedle znanych prawideł wartość wyrazu XI dla $\alpha = 0$ znajdziemy, że:

$$v_i = \infty,$$

t. j. w epicentrum pozorna prędkość jest nieskończenie wielka. Rezultat ten jest w zgodzie ze spostrzeżeniami. Wiadomo, że przy trzęsieniach ziemi okolica leżąca tuż naokoło epicentrum bywa wstrząśniona prawie jednocześnie — tak, że trudno oznaczyć to miejsce, które najpierw zostało wstrząśnione (właściwe epicentrum). Fakt ten zazwyczaj tłumaczono sobie w ten sposób, że przecie ognisko nie jest punktem ale pewną trójwymiarową przestrzenią niekiedy może nawet dość dużą. Widzimy jednak, że to mniemanie jest po części tylko słuszne, albowiem nawet w takim razie, gdyby ognisko było matematycznym punktem, to zawsze najbliższe dokoła epicentrum punkty doznałyby wstrząśnienia prawie jednocześnie tak, że w praktyce epicentrum przedstawiłoby się nam, nie jako punkt, lecz jako pewna mniejsza lub większa powierzchnia. Nawet najdokładniejsze i najlepiej zregulowane zegary nie zdołałyby zanotować tych bardzo a bardzo małych różnic między chwilami czasu, w których nastąpiło wstrząśnienie w bliskich od siebie punktach powierzchni ziemi.

Przejdźmy teraz do rozpatrzenia pozornej prędkości w okolicy zewnętrznej. Obliczmy całki $\Theta \dots T$ i t. d. dla stacji położonej w okolicy zewnętrznej n. p. dla stacji A_1 . W okolicy zewnętrznej tym samym wartościom parametru α odpowiadają inne wartości całek Θ , T i t. d. niż w okolicy wewnętrznej n. p. dla

$$\begin{array}{l} \alpha = 0 \text{ w wewnętrznej okolicy } \Theta_B = 0 \\ \text{w zewnętrznej} \quad \Theta_{A_1} = \pi \end{array}$$

Promień łączący punkt H z punktem A_1 , t. j. promień HA_1 (Tabl. XII fig. 4) od H do L zbliża się ku środkowi kuli, zaś od L do A_1 oddala się od środka. Wskutek tego od H do L $\frac{d\theta}{dr}$ jest odjemne, od L do A_1 $\frac{d\theta}{dr}$ jest dodatnie, zatem:

od H do L

$$d\theta = -\frac{\alpha}{r} \frac{dr}{\sqrt{n^2 r^2 - \alpha^2}} = \frac{dp}{dz} dr$$

od L do A_1

$$d\theta = \frac{\alpha}{r} \frac{dr}{\sqrt{n^2 r^2 - \alpha^2}} = -\frac{dp}{dz} dr.$$

Biorąc całkę Θ dla kąta odpowiadającego całej drodze od H do A_1 musimy całkowanie rozdzielić na dwie części. Dla drogi od H do L granice będą:

$$r = r_H = \overline{CH} \quad \text{i} \quad r = r_L = \overline{CL}.$$

zaś dla drogi od L do A_1 mamy granice:

$$r = r_L = \overline{CL} \quad \text{i} \quad r = R,$$

zatem:

$$\Theta_{A_1} = \int_{r_H}^{r_L} \frac{dp}{dz} dr - \int_{r_L}^R \frac{dp}{dz} dr$$

albo odwracając granice w pierwszej całce:

$$\Theta_{A_1} = - \int_{r_L}^H \frac{dp}{dz} dr - \int_{r_L}^R \frac{dp}{dz} dr.$$

Możemy też napisać:

XIV

$$\Theta_{A_1} = 2\Theta_0 - \Theta_1,$$

gdzie

$$\Theta_0 = - \int_{r_L}^R \frac{dp}{dz} dr$$

$$\Theta_1 = - \int_{r_H}^R \frac{dp}{dz} dr.$$

Przy symbolach Θ_0 i Θ_1 opuściliśmy wskaźnik A_1 , aby uprościć znakowanie.

Zanim pójdziemy dalej, musimy trochę zastanowić się nad całką: Θ_0 , w której funkcya, stojąca pod znakiem całkowania dla dolnej granicy staje się nieskończenie wielką, albowiem:

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{\alpha}{r} \frac{1}{\sqrt{n^2 r^2 - \alpha^2}}.$$

gdy zaś $r = r_L$, to:

$$nr - \alpha = 0.$$

Należy zbadać bliżej te równanie.

Ponieważ, jak to wyżej było powiedziane, funkcya n daje się zawsze rozwinąć na skończony lub nieskończony szereg potęg rosnących całkowitych, przeto można zawsze napisać:

$$nr - \alpha = (r - r_L)^m \psi,$$

gdzie ψ jest pewną funkcją, która ani w punkcie $r = r_L$, ani też wogóle na całej przestrzeni od $r = 0$ do $r = R$ nie staje się zerem, zaś m jest wykładnik całkowity dodatni.

Lecz w naszym przypadku ten wykładnik będzie nie tylko całkowity i dodatni, ale co więcej równy jedności. Albowiem gdyby n było większe od jedności, to wtedy nie tylko

$$nr - \alpha$$

ale i pochodna tej funkcji względem r byłaby równą zeru w punkcie $r = r_L$. Ale:

$$d \frac{(nr - \alpha)}{dr} = \frac{d(nr)}{dr},$$

a zatem:

$$\frac{d(nr)}{dr} = 0.$$

t. j.

$$n + r \frac{dn}{dr} = 0.$$

Lecz to ostatnie równanie jest zgoła niemożliwe, albowiem wszystkie trzy wielkości: n , r i $\frac{dn}{dr}$ są dodatnie, pierwsze dwie same przez się, zaś ostatnie dzięki założeniu, które uczyniliśmy na początku naszej rozprawy.

Lecz wiadomo, że jeżeli $m < 2$, to wtedy całka Θ_0 pozostaje skończoną.

Największą wartość osiąga Θ_0 dla parametru $\alpha = 0$, mianowicie gdy $\alpha = 0$ $\Theta_0 = \frac{\pi}{2}$, albowiem wtedy Θ_0 jest połową kąta środkowego, odpowiadającego całemu łukowi EME_1 , t. j. połowie obwodu koła. (Naturalnie ta uwaga odnosi się do zewnętrznej okolicy, zresztą w wewnętrznej okolicy wcale nie wprowadzaliśmy kąta Θ_0 do naszych rozumowań).

Ponieważ dla dolnej granicy całki Θ_0 , $nr - \alpha$ staje się równe zero, przeto niedogodnie tworzyć pochodną

$$\frac{d\Theta_0}{dz}$$

przy pomocy zwykłych sposobów różniczkowania pod znakiem całkowania, otrzymalibyśmy bowiem z jednej strony całkę nieskończoną, z drugiej strony wyraz stojący zewnątrz znaku całkowania (bo dolna granica całki Θ_0 zależy od parametru α) także nieskończoność wielki i musielibyśmy dopiero badać, czy te nieskończoności wzajemnie się nie neutralizują i t. d. Tymczasem przy pomocy prostego rozumowania dowiedzimy, że $\frac{d\Theta_0}{dz}$ jest w rzeczywistości zawsze skończone. Dowiedzimy zaś tego w sposób następujący.

Weźmiemy na uwagę następujące całki:

$$\text{XV} \quad \left\{ \begin{array}{l} J_{A1} = \int_{r_L}^{r_H} p \, dr + \int_{r_L}^R p \, dr \\ J_0 = \int_{r_L}^R p \, dr \\ J_1 = \int_{r_H}^R p \, dr \end{array} \right.$$

Tedy jest widocznie:

$$J_{A1} = 2J_0 - J_1. \quad \text{XVI}$$

Granice całki J_1 są oczywiście od α niezależne, przytem niema tu żadnej nieskończoności; a zatem:

$$\frac{dJ_1}{dz} = \frac{\partial J_1}{\partial z} = \frac{d}{dz} \int_{r_H}^R p \, dr = \int_{r_L}^R \frac{dp}{dz} \, dr = - \Theta_1 \quad \text{XVII}$$

Lecz jeżeli weźmiemy pochodną całki J_0

$$\frac{dJ_0}{dz} = \frac{d}{dz} \int_{r_L}^R p dr,$$

to musimy zwrócić na to uwagę, że r_L jako pierwiastek równania:

$$nr - \alpha = 0$$

jest od α zależne, zatem:

$$\frac{dJ_0}{dz} = \frac{\partial J_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial J_0}{\partial r_L} \cdot \frac{dr_L}{dz},$$

ale ponieważ

$$J_0 = \int_{r_L}^R p dr = \int_{r_L}^R \frac{1}{r} \sqrt{n^2 r^2 - \alpha^2} \cdot dr$$

przeto

$$\frac{\partial J_0}{\partial r_L} = \left[\frac{1}{r} \sqrt{n^2 r^2 - \alpha^2} \right] \text{ dla } r = r_L;$$

lecz wyraz ten zniknie dla $r = r_L$, a zatem:

$$\frac{\partial J_0}{\partial r_L} = 0$$

t. j. całka J_0 od dolnej granicy nie zależy i będzie:

$$\frac{dJ_0}{dz} = \frac{\partial J_0}{\partial \alpha}$$

t. j.

$$\frac{dJ_0}{dz} = \int_{r_L}^R \frac{dp}{d\alpha} dr = -\Theta_0.$$

XVI

t. j.

$$\Theta_0 = - \frac{\partial J_0}{\partial \alpha} = - \frac{dJ_0}{dz}.$$

Lecz jeżeli Θ_0 jest pochodną funkcji od r_L niezależnej, to również nie będzie zależec od tej granicy, a zatem i pochodna

$$\frac{d\Theta_0}{dz}$$

nie będzie zależną od $r = r_L$ i nie może być nieskończoną, bo punkt, w którym owa nieskończoność zachodzi, jest to właśnie punkt

$$r = r_L.$$

Zupełnie takie same rozumowania przekonałyby nas, że pochodne całek T są również skończone, albowiem również nie zależą od granicy: $r = r_L$.

Czas, w ciągu którego drgania przebiegają od H do A_1 po drodze HLA_1 wyraża się całką T_{A_1} gdzie:

$$T_{A_1} = - \int_{r_H}^{r_L} \left(p - \alpha \frac{\partial p}{\partial \alpha} \right) dr + \int_{r_L}^R \left(p - \alpha \frac{\partial p}{\partial \alpha} \right) dr$$

czyli:

$$T_{A_1} = 2 \int_{r_L}^R \left(p - \alpha \frac{\partial p}{\partial \alpha} \right) dr - \int_{r_H}^R \left(p - \alpha \frac{\partial p}{\partial \alpha} \right) dr.$$

Na podstawie wzorów: XIV, XV aż do XVIII włącznie możemy napisać:

$$T_{A_1} = 2 \left(J_0 - \alpha \frac{\partial J_0}{\partial \alpha} \right) - \left(J_1 - \alpha \frac{\partial J_1}{\partial \alpha} \right)$$

albo:

$$T_{A_1} = 2 (J_0 + \alpha \Theta_0) - (J_1 + \alpha \Theta_1).$$

Wreszcie czas, w ciągu którego drgania przebiegają przestrzeń między punktami C i E jest tak jak poprzednio dla wewnętrznej okolicy T_E , gdzie:

$$T_E = J_E = \int_{r_H}^R ndr.$$

Podstawmy te wyrażenia we wzorze VI a otrzymamy:

$$\text{XIX} \quad \left\{ \begin{aligned} v_e &= \frac{R \cdot \Theta_{A_1}}{T_{A_1} - T_E} \\ &= \frac{R \Theta_{A_1}}{J_{A_1} + \alpha \Theta_{A_1} - J_E} \\ &= \frac{R (2 \Theta_0 - \Theta_1)}{2 \left(J_0 - \alpha \frac{\partial J_0}{\partial \alpha} \right) - \left(J_1 - \alpha \frac{\partial J_1}{\partial \alpha} \right) - J_E} \end{aligned} \right.$$

Jeżeli teraz utworzymy pochodną $\frac{dv_e}{d\alpha}$ to otrzymamy po łatwych przekształceniach:

$$\text{XX} \quad \frac{dv_e}{d\alpha} = \frac{R \frac{d\Theta_{A_1}}{d\alpha} (J_{A_1} - J_E)}{(J_{A_1} + \alpha \Theta_{A_1} - J_E)^2}$$

Skąd ponieważ $R\Theta_{A_1} = D$, gdzie D oznacza mierzoną wzdłuż powierzchni kuli najkrótszą odległość od epicentrum E do stacyi A_1 , wynika

$$\frac{dv_e}{dD} = \frac{(J_{A_1} - J_E)}{M^2} = \frac{(2J_0 - J_1 - J_E)}{M^2}$$

gdzie dla krótkości wprowadziliśmy symbol M zamiast:

$$J_{A_1} + \alpha\Theta_{A_1} - J_E.$$

Oczywiście znak pochodnej $\frac{dv_e}{dD}$ zależy tylko od licznika:

$$2J_0 - J_1 - J_E = 2 \int_{r_L}^R \sqrt{n^2 r^2 - \alpha^2} \frac{dr}{r} - \int_{r_H}^R \sqrt{n^2 r^2 - \alpha^2} \frac{dr}{r} - \int_{r_H}^R ndr$$

Na granicy między wewnętrzną i zewnętrzną okolicą parametr α posiada największą wartość:

$$\alpha = \alpha_H$$

jednocześnie zaś:

$$r = r_H,$$

zatem dla:

$$\alpha = \alpha_H$$

$$2J_0 - J_1 - J_E = \int_{r_H}^R \left[\frac{1}{r} \sqrt{n^2 r^2 - \alpha^2} - n \right] dr.$$

Ponieważ zaś wszystkie elementy tej całki są odjemne więc licznik wyrażenia XXI dla $\alpha = \alpha_H$, t. j. na granicy między zewnętrzną i wewnętrzną okolicą jest odjemny.

Z drugiej strony dla punktu E_1 , t. j. dla antypodów epicentrum:

$$\alpha = 0$$

$$r_L = 0,$$

zaś:

$$J_0 - J_1 - J_E = 2 \int_0^{r_H} ndr$$

t. j. licznik wyrażenia XXI jest dodatni. Poczynając od granicy między zewnętrzną i wewnętrzną okolicą i antypodami epicentrum E_1 parametr α wciąż maleje w miarę tego jak odległość od epicentrum wzrasta, a wskutek tego:

$$2J_0 - J_1 = \int_{r_L}^R \sqrt{n^2 r^2 - \alpha^2} \frac{dr}{r} + \int_{r_H}^R \sqrt{n^2 r^2 - \alpha^2} \frac{dr}{r}$$

które zresztą jest widocznie ciągle dodatnie, wzrasta w miarę tego jak odległość od epicentrum się zwiększa, albowiem i elementy całki się zwiększają i granice całkowania stają się obszerniejsze.

Tymczasem

$$T_E = J_E = \int_{r_H}^R ndr$$

jako wielkość od α niezależna pozostaje stała.

Oczywista jest rzeczą, że w tych warunkach wyraz: $2J_0 - J_1 - J_E$ może między granicą wewnętrzną okolicy i antypodami epicentrum tylko raz przejść przez wartość zero.

A zatem między granicą wewnętrzną okolicy i pewnym kołem różnoleżnikowem (naturalnie mówimy o równoleżniku odniesionym do osi EE_1), określonym przez równanie

$$\text{XXII} \quad 2J_0 - J_1 - J_E = 0$$

iloraz $\frac{dv_e}{dD}$ jest odjemny, a poczynając od tego koła aż do antypodów epicentrum dodatni.

Zestawiając teraz znalezione rezultaty z tem, co wprzódzy znaleźliśmy dla wewnętrznej okolicy, możemy powiedzieć, że: pozorna prędkość wsamem epicentrum jest nieskończenie wielka, następnie w miarę tego, jak mierzona wzdłuż powierzchni kuli odległość danego punktu wzrasta, w całej wewnętrznej przestrzeni i poza granicami wewnętrznej przestrzeni zmniejsza się aż do koła równoleżnikowego (względem osi EE_1) określonego przez równanie XXII, t. j. przez równanie:

$$2J_0 - J_1 - J_E = 0.$$

Na tem kole pozorna prędkość jest najmniejsza, poczynając zaś od tego koła aż do antypodów epicentrum, t. j. do punktu E_1 wciąż wzrasta i w samych antypodach epicentrum osiąga swoje drugie maximum (pierwsze maximum istnieje w epicentrum).

Warto tu zaznaczyć, że jedyne założenia, które poczyniliśmy względem natury funkcji n , były: 1) że ta funkcja jest ciągłą, 2) że między $r = 0$ i $r = R$ funkcja n wzrasta razem z r . Ale gdyby nawet pierwsze założenie nie było spełnione tylko drugie, to prawo zmienności pozornej prędkości pozostałoby to samo.

Równanie XXII oznacza granicę między okolicą, gdzie pozorna prędkość się zmniejsza i okolicą, gdzie ta pozorna prędkość wzrasta. Granica ta leży zawsze w zewnętrznej okolicy i co najwięcej może w pewnych przypadkach być identyczną z granicą między wewnętrzną i zewnętrzną okolicą.

O ile się zdaje spostrzeżenia poczynione przy pomocy różnych nowszych udoskonalonych przyrządów pozwoliły skonstatować istnienie tej granicy. Tak n. p. Rebeur-Paschwitz¹⁾ przytacza szereg spostrzeżeń odnoszących się do pewnego trzęsienia ziemi w Serbii, przy którym położenie granicy między okolicą, gdzie pozorna prędkość maleje, i okolicą, gdzie pozorna prędkość wzrasta, daje się przybliżenie oznaczyć. Mianowicie na Węgrzech ta granica znajdowała się mniej więcej w odległości 600—700 kilometrów od epicentrum.

Przy wielu innych trzęsieniach ziemi nie udało się skonstatować tej granicy, ale to wcale nie znaczy, żeby ta granica nie istniała. Aby ją było można skonstatować należy posiadać cały szereg spostrzeżeń ze stacyi w różnych odległościach od epicentrum, tymczasem najczęściej tak nie jest. I tak n. p. względem tak częstych trzęsień ziemi w Japonii, europejskie stacye leżą wszystkie już w okolicy rosnącej pozornej prędkości, zaś japońskie jako bliskie od epicentrum zapewne znajdują się wszystkie w okolicy malejącej pozornej prędkości. Gdybyśmy mieli szereg stacyi między Europą i Japonią, to moglibyśmy stwierdzić, czy omawiana wyżej granica istnieje i gdzie jest położona.

Ważnych wskazówek mogą dostarczyć spostrzeżenia nad trzęsieniami ziemi we Włoszech, Grecyi i Małej Azyi, ale ten zasób spostrzeżeń, który obecnie posiadamy, nie upoważnia jeszcze do stanowczych wniosków.

Rozwiązać równanie XXII można naturalnie tylko wtedy gdy n jest znane²⁾. W przypadku szczególnym gdy n jest wielkością stałą (t. j. dla kuli izotropowej) można równanie XXII tłumaczyć geometrycznie w dość prosty sposób. Pomijając rachunki, które każdy łatwo sobie może odtworzyć, wskażemy, że równanie XXII t. j.

$$2J_0 - J_1 - J_E = 0$$

jest równoważne następującemu geometrycznemu związkowi [patrz F. 5]:

¹⁾ Beitr. zur Geophysik II tom str. 490.

²⁾ Naturalnie, gdy ze spostrzeżeń znamy geometryczne miejsce, w którym równanie XXII jest spełnione, to możemy tę empiryczną daną zużytkować w celu określenia funkcji n .

$$\begin{aligned} \overline{HF} - \overline{HE} &= \text{arc} SLS_1 \\ &= r_L \cdot (\text{kąt}) ECF, \end{aligned}$$

gdzie H oznacza jak wprzódy ognisko, E epicentrum, F punkt znajdujący się na równoleżniku (liczonym względem osi EE_1) określonym przez równanie XXII, $r_L = \overline{CL}$ jest to prostopadła spuszczone z punktu C na prostą HF , dalej $\text{arc} SLS_1$ oznacza łuk koła zakreślonego promieniem \overline{CL} od punktu S leżącego na osi EE_1 ze strony epicentrum E , do punktu S_1 na promieniu łączącym C z F .

Przytem przypominamy raz jeszcze, że ten związek geometryczny odnosi się do przypadku gdy n jest stałe.

Zauważmy, że, *ceteris paribus*, im głębokość ogniska jest mniejsza, tem mniejszą jest okolica wewnętrzna oraz okolica malejącej pozornej prędkości. [Dowodzie tego nie potrzebujemy albowiem jest to widoczne z figury 4]. Dalej zaraz widać, że wskutek tego im mniejszą jest głębokość ogniska, tem szybciej zmniejsza się pozorna prędkość w miarę tego, jak oddalamy się od ogniska. Wnosimy stąd, że im mniejsza głębokość ogniska, tem ta okolica dokoła epicentrum, która jest pozornie jednocześnie wstrząśniona, jest mniejsza, natomiast gdy ognisko znajduje się bardzo głęboko, wtedy ta okolica może być bardzo rozległa. Gdyby *n. p.* ognisko znajdowało się w samym środku kuli, to wtedy wszystkie punkty jej powierzchni byłyby jednocześnie wstrząsane i pozorna prędkość byłaby wszędzie nieskończoną. W tym ostatnim przypadku okolica zewnętrzna i okolica rosnącej prędkości zupełnie znikają. Natomiast w drugim ostatecznym przypadku gdy ognisko znajduje się na samej powierzchni i epicentrum jest identyczne z ogniskiem, okolica zewnętrzna i okolica rosnącej pozornej prędkości pokrywają całą powierzchnię kuli, zaś okolica wewnętrzna i okolica malejącej prędkości zupełnie znikają.

Jak to wyżej było wskazane prędkość pozorna osiąga w epicentrum swe maximum i jest tamże nieskończonie wielką, następnie na linii

$$2J_0 - J_1 - J_E = 0$$

osiąga swe minimum, zaś w antypodach epicentrum ma swe drugie maximum, przyczem wartość jej w tem drugim maximum, podobnie jak w minimum, jest skończona. Oznaczmy stosunek między tem drugim maximum w antypodach epicentrum i minimum na linii:

$$2J_0 - J_1 - J_E = 0$$

przez q . Ten stosunek jest, *ceteris paribus*, tem większy, im mniejszą jest głębokość ogniska. Skorzystamy zaraz z tej uwagi a mianowicie poka-

zemy, że gdy $n = \text{stałej}^1$), to stosunek q , o którym tylko co mówiliśmy, może być co najwyżej: $\frac{\pi}{2}$. Rzeczywiście, weźmy przypadek, gdy ten stosunek jest największy, t. j. gdy ognisko znajduje się na powierzchni. Okolica malejącej prędkości zupełnie nie istnieje, pozorna prędkość jest najmniejszą u samego epicentrum, największą w jego antypodach, ale u samego epicentrum pozorna prędkość v jest równa rzeczywistej u .

$$v = u$$

a w antypodach

$$v = \frac{\pi}{2} u$$

droga bowiem pozornie przebieżona przez drgania od epicentrum do antypodów wzdłuż łuku wielkiego koła wynosi tu połowę obwodu koła, zaś droga rzeczywiście przebieżona przez drgania jest równa średnicy tego samego koła.

Porównajmy ten rezultat z tem, co nam dają spostrzeżenia poczynione za pomocą poziomych wahadeł i t. p. przyrządów. Wielka część tych spostrzeżeń odnosi się do okolicy rosnącej prędkości, ale jednocześnie te spostrzeżenia wskazują, że pozorna prędkość w okolicy rosnącej prędkości rośnie [w miarę wzrastania odległości] wogóle szybko tak, że ów stosunek q między największą możebną i najmniejszą możebną prędkością w przypadku ziemi jest z pewnością znacznie większy niż $\frac{\pi}{2}$.

Już dla tej jednej przyczyny (nie mówiąc o innych) hipoteza, że n dla wnętrza ziemi jest stałe, musi być odrzuconą tembardziej, że niema ani jednej słusznej racyi, którąby można przytoczyć na poparcie tej hipotezy.

Powiedzieliśmy wyżej, że funkcyja n zawsze da się rozwinąć między $r = 0$ i $r = R$ na skończony lub nieskończony zbieżny szereg kształtu:

$$n = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_m r^m + \dots \quad \text{XXIII}$$

Aby określić funkcyję n ze spostrzeżeń, należy określić stałe a_0 a_1 a_2 ... etc. Oczywiście ze spostrzeżeń można określić tylko skończoną ilość stałych, gdyby więc szereg przedstawiający funkcyję n był nie-

¹⁾ Wspomnieliśmy na początku niniejszej rozprawy, że specjalnie ten wypadek był rozważany przez pp. Bonetti i Agamennone.

skończony, to poczynając od pewnego bliższego lub dalszego wyrazu stałe a musiałyby pozostać nieokreślonymi. Ale wiemy, że skoro szereg jest zbieżny, to zawsze wystarcza pewna skończona ilość wyrazów, aby obliczyć wartość funkcji z żadaną dokładnością, a zatem dość jest znać pewną skończoną ilość wyrazów szeregu¹⁾.

Założmy tedy, że w całej przestrzeni od $r = 0$ do $r = R$ dość jest znać m współczynników szeregu XXIII aby w każdym punkcie obliczyć funkcję n z dokładnością, która nigdzie nie spada niżej od pewnej określonej i znanej granicy.

Podstawmy teraz:

$$n = a_0 + a_1 r + \dots + a_{m-1} r^{m-1} + \dots$$

we wzorach dla całek Θ, T, J .

Te całki będą funkcjami wielkości R, r_H, α i a_0, a_1, \dots, a_{m-1} n. p.

$$T_{A1} = F_1(a_0 \dots a_{m-1}, r_H, R, \alpha)$$

$$\Theta_{A1} = F_2(a_0 \dots a_{m-1}, r_H, R, \alpha).$$

Rozwiązując drugie z tych równań względem α , otrzymamy:

$$\alpha = f(a_0 \dots a_{m-1}, R, r_H, \Theta_{A1}).$$

Podstawivszy tę wartość α w równanie dla T_{A1} otrzymamy:

$$T_{A1} = \Phi(a_0 \dots a_{m-1}, R, r_H, \Theta_{A1}).$$

Wyobraźmy sobie teraz, że jedna i ta sama faza tego samego trzęsienia ziemi n. p. faza (S), która zdarzyła się w ognisku H w chwili t_H , została zanotowana na stacyach: 1, 2, 3. . . .

w chwilach:

$$t_1, t_2, t_3, \dots,$$

wtedy, jak wiemy:

$$t_1 = t_H + T_1$$

$$t_2 = t_H + T_2,$$

$$\dots$$

albo podstawiając wyżej znaną wartość T :

$$XXIV \quad t_1 = t_H + \Phi(a_0 \dots a_{m-1}, R, r_H, \Theta_1)$$

$$t_2 = t_H + \Phi(a_0 \dots a_{m-1}, R, r_H, \Theta_2)$$

$$\dots$$

¹⁾ Niepotrzebujemy chyba dodawać, że gdyby szereg był skończonym, to dalsze rozumowania byłyby zupełnie takie same. Należy tylko założyć, że m jest równe ilości wyrazów szeregu skończonego.

Aby uprościć zadanie, założmy, że położenie epicentrum jest znane. Założenie to jest dozwolone, można bowiem wprost ze spostrzeżeń to położenie znaleźć. Jeżeli położenie epicentrum jest znane, to Θ_1 , Θ_2 i t. d. są znane, a zatem w równaniach XXIV mamy $m + 2$ niewiadomych (bo R jest znane) mianowicie m współczynników szeregu XXIII, odległość ogniska od środka r_H i t_H , t. j. chwilę, w której rozważana faza trzęsienia ziemi zdarzyła się w ognisku. A zatem trzeba mieć spostrzeżenia na $m + 2$ stacyach, a nadto trzeba, aby odległości stacyi od epicentrum były jedne od drugich różne.

Ponieważ wprost ze spostrzeżeń można określić granicę między okolicą wzrastającej i okolicą zmniejszającej się pozornej prędkości, ale nie można oznaczyć granicy między wewnętrzną i zewnętrzną okolicą, zaś z drugiej strony całki T , Θ , J odnoszące się do wewnętrznej okolicy różnią się od całek odnoszących się do zewnętrznej okolicy, przeto należy posługiwać się tylko spostrzeżeniami ze stacyi, należących do okolicy rosnącej pozornej prędkości, wiadomo bowiem, że te stacye jednocześnie należą do zewnętrznej okolicy.

Rozumowaliśmy w taki sposób, jak gdyby liczba wyrazów m szeregu przedstawiającego funkcję n z żadaną dokładnością była z góry wiadoma. W rzeczywistości tak nie jest, liczba m nie jest znana, należy próbować czy wystarczy, dajmy na to, $m = 5, 6 \dots$ i t. d.; atoli im liczba m jest większa, tem naturalnie rachunki są dłuższe i bardziej zawikłane, przytem już dla $m = 2$ będziemy mieli do czynienia z eliptycznemi, a dla $m > 2$ z hypereliptycznemi całkami. Ta ostatnia okoliczność naturalnie wysoce utrudnia zadanie.

Przedstawiliśmy w ten sposób główne cechy metody, za pomocą której można funkcję n określić ze spostrzeżeń, ale rozumowaliśmy tak, jak gdyby z jednej strony spostrzeżenia były absolutnie ściśle z drugiej zaś strony ziemia była kulą zupełnie regularnie zbudowaną ze współśrodkowych kulistych warstw, ognisko zaś matematycznym punktem.

Nie potrzebujemy chyba dodawać, że z powodu nieuniknionych błędów obserwacyi dla oznaczenia h niewiadomych trzeba mieć nie h spostrzeżeń ale o wiele więcej, że wogóle praktyczne wykonanie naszkicowanego tu zadania jest połączone z mnóstwem różnych trudności, nie mówiąc już o trudnościach natury analitycznej, o których zresztą wspomnieliśmy pokrótce wyżej.

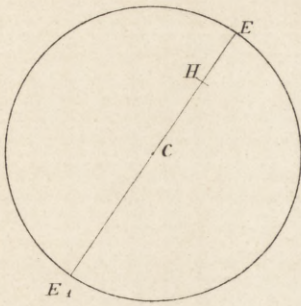
Okoliczności, że ognisko nie jest punktem matematycznym, nie należy nadawać wielkiego znaczenia, bo rozmiary ognisk wobec ogromnych rozmiarów ziemi są bądź co bądź małe. Tak samo nie wielkiego znaczenia jest fakt, że ziemia nie jest kulą, ale sferoidem, albowiem jak wiadomo spłaszczenie ziemi jest małe. Stosunkowo więcej trudności

może sprawić nieregularność budowy jej zewnętrznych warstw, której w żaden sposób ująć rachunkiem nie można. Co zaś do budowy wewnętrznych głębszych warstw, to przecie właśnie chodzi o sprawdzenie pewnej hipotezy co do ich budowy. Gdyby wyprowadzone z tej hipotezy wnioski nie dały się w żaden sposób pogodzić ze spostrzeżeniami, to znaczyłoby, że sama hipoteza czy w całości czy częściowo jest fałszywa.

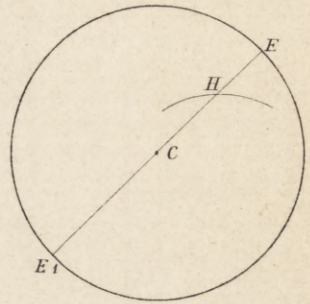
Zauważymy wreszcie, że obecnie rozporządzalny zasób spostrzeżeń nad trzęsieniami ziemi jest jeszcze nazbyt szczupły, aby można było na jego podstawie sprawdzić hipotezę Schmidta.



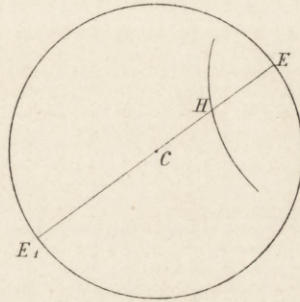
F. 1.



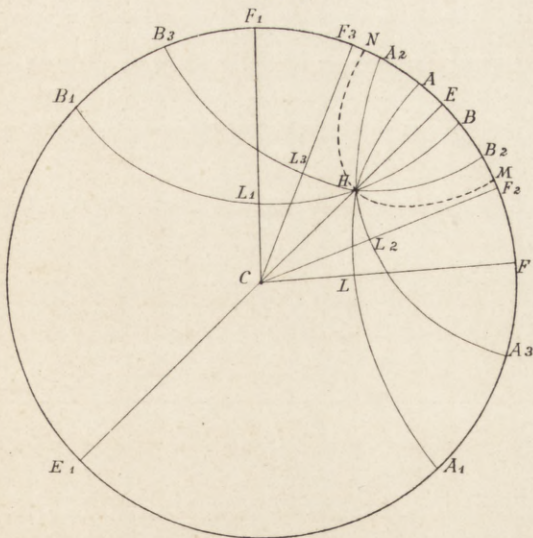
F. 2.



F. 3.



F. 4.



F. 5.

