354.

NOTE SUR LES SINGULARITÉS SUPÉRIEURES DES COURBES PLANES.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. LXIV. (1865), pp. 369—371.]

Dans un mémoire "On the higher singularities of plane Curves" destiné pour le *Quarterly Mathematical Journal* j'ai cherché à établir qu'une singularité quelconque équivaut à un certain nombre δ' de points doubles, κ' de points de rebroussement, τ' de tangentes doubles, et ι' d'inflexions; et pour déterminer ces nombres, j'ai donné dans le cas d'une singularité simple, où la courbe n'a qu'une seule branche, des formules que je vais reproduire ici. Si la branche est par rapport à ses points de l'indice α, ayant avec elle-même le nombre $\frac{1}{2}M$ de points communs, et par rapport à ses tangentes de l'indice β, ayant avec elle-même le nombre $\frac{1}{2}N$ de tangentes communes, on trouve

$$\begin{aligned}\delta' &= \tfrac{1}{2}[M-3(\alpha-1)],\\ \kappa' &= \alpha-1\ ,\\ \tau' &= \tfrac{1}{2}[N-3(\beta-1)],\\ \iota' &= \beta-1\ .\end{aligned}$$

Pour expliquer ces formules, je remarque que la singularité dont il s'agit est telle que, prenant pour origine le point sur la courbe, on obtient pour l'ordonnée y *une seule suite* de la forme

$$y = Ax^p + Bx^q + \dots,$$

où la suite est arrangée suivant les puissances ascendantes de x et les coefficients $A, B, \dots$ ont chacun une valeur unique. Si l'axe des y ne touche pas la courbe, aucun des exposants $p, q, \dots$ ne sera inférieur à l'unité, et si de plus l'axe des x touche la courbe, ce que l'on peut toujours effectuer par un choix convenable de la direction des axes, les exposants $p, q, \ldots$ seront tous supérieurs à l'unité. Cela posé, et les exposants fractionnaires étant exprimés chacun dans ses moindres termes, si α est le plus petit nombre entier divisible par tous les dénominateurs des fractions (de manière que y soit fonction entière de $x^{\frac{1}{\alpha}}$), je dis que la branche est de l'indice α par rapport à ses points. On a donc pour y précisément le nombre α de valeurs, qui s'obtiennent en attribuant à $x^{\frac{1}{\alpha}}$ ses valeurs diverses. A chacune de ses valeurs correspond une "branche partielle" de la courbe, de manière que la branche à l'indice α est composée de α branches partielles; pour $\alpha = 1$ la branche partielle n'est autre chose que la branche même. En considérant deux branches partielles, et en désignant par p le plus petit exposant de x qui se trouve dans la suite par laquelle est exprimée la différence $y_1 - y_2$ des ordonnées des deux branches partielles (ce nombre p pouvant être entier ou fractionnaire), je pose comme définition que les deux branches partielles ont un nombre p de points communs, ou d'intersection. En combinant deux à deux les α branches partielles qui composent la branche de l'indice α, et en formant la somme Σp des nombres p qui correspondent à chaque paire de branches partielles, on obtient le nombre $\frac{1}{2}M$ des points communs de la branche avec elle-même. En se servant des coordonnées tangentielles, on a par rapport aux tangentes de la branche une théorie tout à fait semblable; cette remarque suffit pour expliquer les notions d'une branche de l'indice β par rapport à ses tangentes, et du nombre $\frac{1}{2}N$ des tangentes communes de la branche avec elle-même.

Comme exemple je prends la singularité donnée par l'équation

$$y = x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{5}{2}} + \ldots;$$

dans ce cas les exposants n'ont que les dénominateurs 2 et 3, la branche est de l'indice 6 par rapport à ses points, elle est composée de six branches partielles représentées par les équations

$$\begin{aligned} y_1 &= x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{5}{2}} \ldots, & y_4 &= x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{5}{2}} \ldots, \\ y_2 &= \omega\, x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{5}{2}} \ldots, & y_5 &= \omega\, x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{5}{2}} \ldots, \\ y_3 &= \omega^2 x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{5}{2}} \ldots, & y_6 &= \omega^2 x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{5}{2}} \ldots, \end{aligned}$$

où ω est une racine cubique imaginaire de l'unité. La branche partielle y_1 coupe les autres branches partielles dans un nombre $\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}$ de points, ce qui donne pour la branche partielle y_1 le nombre $\frac{16}{3} + \frac{5}{2}, = \frac{47}{6}$ de points; on a ce même nombre $\frac{47}{6}$ pour les autres branches partielles y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 respectivement, et de là on trouve, pour le *double* du nombre des intersections de la branche avec elle-même, la valeur $M = 47$, donc $\delta' = \frac{1}{2}(47 - 15) = 16$, $\kappa' = 5$.

En coordonnées tangentielles, la branche $y = x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{5}{2}} + \ldots$ s'exprime par l'équation

$$Z = X^4 + \ldots + X^{\frac{15}{2}} \ldots.$$

Plus généralement, on a pour une branche $y = Ax^p + Bx^q + \ldots$ l'équation en coordonnées tangentielles $Z = A'X^{\frac{q}{p-1}} + B'X^{\frac{q}{p-1}} + \ldots$, la forme générale des exposants étant $\dfrac{\lambda p + \mu q + \ldots}{p-1}$, où λ, μ, ... sont des entiers positifs, résultat que je ne m'arrête pas à démontrer. Dans le cas particulier qui nous occupe, la branche est donc de l'indice 2 par rapport à ses tangentes. On trouve de suite $N = 15$ et de là $\tau' = \frac{1}{2}(15-3) = 6$, $\iota' = 1$; donc la singularité dont il s'agit équivaut à un nombre 16 de points doubles, 5 de points de rebroussement, 6 de tangentes doubles, et 1 inflexion.

On a un exemple plus simple dans le point de rebroussement de seconde espèce; l'équation est ici $y = x^2 + x^{\frac{5}{2}} \ldots$ et en coordonnées tangentielles on obtient l'équation $Z = X^2 + X^{\frac{5}{2}} \ldots$ de la même forme. De là on trouve $\delta' = 1$, $\kappa' = 1$, $\tau' = 1$, $\iota' = 1$, de manière que cette singularité équivaut à 1 point double, 1 point de rebroussement, 1 tangente double et 1 inflexion. M. Plücker dans son grand ouvrage a trouvé *à posteriori* que cette singularité se compose de $2\frac{1}{2}$ points doubles et de $2\frac{1}{2}$ tangentes doubles, ce qui donne en effet les mêmes réductions pour la classe et les mêmes nombres pour les inflexions et les tangentes doubles, que donnent mes valeurs $\delta' = 1$, $\kappa' = 1$, $\tau' = 1$, $\iota' = 1$; mais il y a à remarquer qu'en considérant par exemple une courbe du quatrième ordre avec un point double et un point de rebroussement de seconde espèce (courbe qui existe), on aurait $\delta + \kappa = 3\frac{1}{2}$, nombre plus grand que le maximum du nombre des points doubles et de rebroussement que peut avoir une courbe du quatrième ordre.

Je n'ai parlé que des singularités simples, où il y a une seule branche de la courbe, mais on étend sans peine la théorie précédente aux singularités composées, où il y a plusieurs branches de la courbe. Cette extension exige la distinction de trois cas différents. Il peut y avoir sur la courbe un point avec une seule tangente, mais avec plusieurs branches qui se touchent,—ou un point avec plusieurs tangentes dont chacune touche une ou plusieurs branches,—ou enfin une tangente avec plusieurs points de contact, dans lesquels la tangente touche une seule ou plusieurs branches de la courbe.

Cambridge, 1 *Juin*, 1865.