355.

SUR UN THÉORÈME RELATIF À HUIT POINTS SITUÉS SUR UNE CONIQUE.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. LXV. (1866), pp. 180—184.]

ON sait que le théorème de Pascal peut être déduit du théorème suivant: toute courbe cubique qui passe par 8 des 9 points d'intersection de deux courbes cubiques passe par tous les 9 points.

De même cet autre théorème—toute courbe quartique qui passe par 13 des 16 points d'intersection de deux courbes quartiques passe par tous les 16 points—conduit à un théorème relatif à 8 points situés sur une conique.

En effet si par 8 points donnés et situés sur une conique donnée on fait passer deux systèmes de 4 droites (ces deux systèmes doivent être sans droite commune) les deux systèmes sont des courbes quartiques qui se rencontrent dans les 8 points donnés et de plus dans 8 nouveaux points; donc toute courbe quartique qui passe par 13 des $8+8$ points passe par tous les $8+8$ points. Or la conique donnée passe par les 8 points donnés, et par 5 des 8 nouveaux points on peut faire passer une autre conique: les deux coniques forment ensemble une courbe quartique qui passe par $8+5$ des $8+8$ points, et qui passera ainsi par les $8+8$ points; c'est-à-dire la nouvelle conique passe par les 8 nouveaux points, ou autrement dit, les 8 nouveaux points sont situés sur une conique—c'est là le théorème relatif à 8 points situés sur une conique.

On déduit de là les théorèmes 3, 4, 5 de Steiner (Lehrsätze und Aufgaben, ce journal t. XXX, [1846], pp. 274 et 275). En effet considérons sur une conique donnée n points donnés, et les n tangentes dans ces mêmes points. En combinant deux à

www.rcin.org.pl

deux les n points on obtient $\frac{1}{2}n(n-1)$ droites G: ces droites se coupent deux à deux dans les n points donnés, qui comptent pour $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ intersections, et de plus dans $\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$ points r. Chacune des n tangentes rencontre les $\{\frac{1}{2}n(n-1)-(n-1)\}$ droites G qui ne passent pas par le point de contact de cette tangente, dans $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points s, ce qui donne en tout $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ points s. Enfin les n tangentes se rencontrent deux à deux dans $\frac{1}{2}n(n-1)$ points t.

On a ainsi

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3) & \text{points } r, \\ \frac{1}{2}n(n-1)(n-2) & \quad\text{,,} \quad s, \\ \frac{1}{2}n(n-1) & \quad\text{,,} \quad t, \\ \text{ensemble } \frac{1}{8}n(n-1)(n^2-n+2) & \text{points}; \end{array}$$

or parmi ces points il y a selon les trois théorèmes de Steiner un grand nombre de systèmes de 8 points sur une conique.

Prenons d'abord sur la conique donnée 4 points quelconques a, b, c, d des n points, et considérons aussi les points consécutifs a', b', c', d'. La figure des 4 points a, b, c, d et des 4 tangentes dans ces mêmes points équivaut à celle des 8 points $a, a', b, b', c, c', d, d'$. Partant de l'arrangement $abcd$ (lisez-le cycliquement et il correspondra à l'un des 3 quadrilatères que l'on peut former avec les 4 points) on forme avec les 8 points les deux systèmes que voici de 4 droites chacun:

système aa', bb', cc', dd', c'est-à-dire les tangentes aux 4 points a, b, c, d;

système $a'b, b'c, c'd, d'a$, c'est-à-dire ab, bc, cd, da;

et ces deux systèmes se rencontrent dans les 8 points $a, a', b, b', c, c', d, d'$ (ou, ce qui est la même chose, dans les points a, b, c, d, chacun compté 2 fois) et dans 8 nouveaux points compris entre les points r, s, t; ces 8 points sont donc situés sur une conique. Comme il y a 3 arrangements $abcd, acdb, adbc$ des 4 points, on obtient de cette manière 3 systèmes de 8 points sur une conique.

Prenons sur la conique 5 points quelconques a, b, c, d, e des n points, et considérons aussi 3 points consécutifs a', b', c'. Partant de l'arrangement $abcde$ (qui correspond à l'un des 12 pentagones que l'on peut former avec les 5 points) on forme avec les points $a, a', b, b', c, c', d, e$ les deux systèmes de 4 droites chacun:

système aa', bb', cc', de, c'est-à-dire les tangentes en a, b, c et la droite de;

système $a'b, b'c, c'd, ea$, c'est-à-dire ab, bc, cd, ea;

et on obtient de là (parmi les points r, s, t) un système de 8 points sur une conique. A cause des 12 arrangements des 5 points, il y a 12 systèmes. Mais au lieu des points consécutifs (a', b', c') on aurait pu prendre toute autre combinaison (a', b', d') etc.; le nombre des combinaisons étant 10, il y a donc $12 \times 10 = 120$ systèmes de 8 points sur une conique.

www.rcin.org.pl

Prenons de même 6 points quelconques a, b, c, d, e, f des n points. En considérant les points consécutifs a', b' et en partant de l'arrangement $abcdef$, on forme avec les 8 points a, a', b, b', c, d, e, f les deux systèmes de 4 droites:

système aa', bb', cd, ef, c'est-à-dire les tangentes en a, b et les droites cd, ef;

système $a'b$, $b'c$, de, fa, c'est-à-dire ab, bc, de, fa;

ce qui donne parmi les points r, s, t un système de 8 points sur une conique. Il y a 60 arrangements des points a, b, c, d, e, f et 15 combinaisons (a', b') etc. des points consécutifs; on a donc $60 \times 15 = 900$ systèmes de 8 points sur une conique.

Prenons encore 7 points quelconques a, b, c, d, e, f, g des n points. En considérant le point consécutif a', et en partant de l'arrangement $abcdefg$, on forme avec les points a, a', b, c, d, e, f, g les deux systèmes de 4 droites:

système aa', bc, de, fg, c'est-à-dire la tangente en a, et les droites bc, de, fg;

système $a'b$, cd, ef, ga, c'est-à-dire ab, cd, ef, ga;

et on obtient ainsi parmi les points r, s, t un système de 8 points sur une conique. Il y a 360 arrangements $abcdefg$, etc. et 7 différents points consécutifs a', etc.: cela donne $360 \times 7 = 2520$ systèmes de 8 points sur une conique.

Prenons enfin 8 points quelconques a, b, c, d, e, f, g, h des n points: partant de l'arrangement $abcdefgh$, on forme avec les 8 points les deux systèmes de 4 droites chacun (ab, cd, ef, gh) et (bc, de, fg, ha), ce qui conduit à un système de 8 points sur une conique. Mais on a 2520 arrangements $abcdefgh$, etc.—il y a ainsi 2520 systèmes de 8 points sur une conique.

On voit que les systèmes de 8 points sur une conique se dérivent de 4, 5, 6, 7 ou 8 des n points sur la conique donnée. En supposant $n = 4$ on n'a que les systèmes qui se dérivent des 4 points; si $n = 5$, on a les systèmes qui se dérivent de 4 points choisis d'une manière quelconque entre les 5 points—et les systèmes qui se dérivent des 5 points: et ainsi de suite; pour $n = 8$ on a les systèmes qui se dérivent de 4, 5, 6 ou 7 points choisis d'une manière quelconque entre les 8 points, et les systèmes qui se dérivent des 8 points. On peut former la table suivante pour montrer dans les différents cas le nombre des systèmes de 8 points sur une conique:

	$r=$	$s=$	$t=$	$r+s+t=$	Nombre des systèmes de 8 points sur une conique 4 points 3	5 points 120	6 points 900	7 points 2520	8 points 2520
$n=4$, sys. 3	3	12	6	21	$\times\ 1 = 3$				
$n=5$, sys. 4	15	30	10	55	$\times\ 5 = 15$	$\times\ 1 = 120$			
$n=6$, sys. 5	45	60	15	110	$\times 15 = 45$	$\times\ 6 = 720$	$\times\ 1 = 900$		
$n=7$	105	105	21	231	$\times 35 = 105$	$\times 21 = 2520$	$\times\ 7 = 6300$	$\times 1 = 2520$	
$n=8$	210	168	28	406	$\times 70 = 210$	$\times 56 = 6720$	$\times 28 = 25200$	$\times 8 = 20160$	$\times 1 = 2520$

Le cas $n = 4$ est le théorème 3 de Steiner, il y a 3 systèmes de 8 points sur une conique; le cas $n = 5$ est le théorème 4, il y a $15 + 120$ systèmes; le cas $n = 6$ est le théorème 5, il y a $45+720+900$ systèmes. Pour $n=7$ il y a $105+2520+6300+2520$ systèmes et pour $n=8$, $210+6720+25200+20160+2520$ systèmes.

Le cas $n=5$ est surtout intéressant: en effet comme une conique est déterminée par 5 points, on a ici 5 points quelconques (a, b, c, d, e), et les cinq tangentes (les droites A, B, C, D, E de Steiner) sont des droites déterminées par les cinq points et que l'on peut construire (avec la règle seulement). C'est là en effet la forme sous laquelle le théorème est présenté par Steiner; il ne parle nullement de la conique qui passe par les 5 points—et il donne pour les 5 droites une construction; à savoir, les 15 points r sont situés deux à deux sur 15 droites L qui ne dépendent chacune que de 4 points, et sur 60 droites H qui dépendent chacune des 5 points; les 60 droites H combinées deux à deux d'une manière convenable se rencontrent dans 30 points s (c'est la définition de ces points) et puis (théorème) on a 5 droites A, B, C, D, E qui contiennent chacune 6 points s et qui passent par les points a, b, c, d, e respectivement—et (théorème) les 30 points s sont aussi situés sur les 10 droites G, 3 points sur chaque droite. Je remarque qu'en prenant sur la conique qui passe par a, b, c, d, e, un point quelconque g, il y aurait 24 hexagones inscrits ayant ag pour côté—et de là 24 droites Pascaliennes—et par le point d'intersection de ag avec l'une quelconque des 6 droites bc, etc. on a 4 de ces droites Pascaliennes. Cela posé, en prenant pour g le point consécutif a', les 24 hexagones se confondent deux à deux—on a donc 12 hexagones inscrits et autant de droites Pascaliennes—ces droites sont les 12 droites H lesquelles se rencontrent deux à deux dans les 6 points s situés sur la droite aa', ou A. Steiner dit que les 120 coniques dépendent des 5 points, mais que les 15 coniques *dépendent chacune de* 4 *points seulement*; en donnant (comme il l'a fait) le théorème comme un théorème par rapport à cinq points quelconques, cela n'est pas exact—en effet les coniques dont il s'agit dépendent chacune de 4 des cinq points, et des 4 droites correspondantes, tangentes dans ces mêmes points à la conique qui passe par les cinq points—ces coniques dépendent ainsi des cinq points.

Je remarque en passant que partant des cinq points donnés a, b, c, d, e, il y a sur chacune des droites A, B, C, D, E un point remarquable, dont Steiner ne parle pas, mais qui aurait pu servir à une construction de cette droite—par exemple il y a sur la droite A le point α qui est l'intersection commune des polaires de a par rapport à toutes les coniques qui passent par les points b, c, d, e—en particulier ce point α est l'intersection commune des polaires (harmonicales) de a par rapport aux trois paires de droites (bc, de), (bd, ec), (be, cd) respectivement.

Cambridge, 16 *Fév.* 1865.

www.rcin.org.pl