ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la géométrie de lignes cantoriennes.* Note de M. SIGISMOND JANISZEWSKI.

Les ensembles continus dans l'espace à n dimensions feront l'objet de cette étude.

THÉORÈME I. — *Pour chaque continu* Γ *et deux quelconques de ses points*, A *et* B, *il existe au moins un sous-ensemble de* Γ *qui est un arc irréductible* (1) *entre* A *et* B; je le désigne par AB.

Si Γ n'est pas lui-même un AB, cela veut dire qu'il existe un continu Γ_1 contenant A et B et ne contenant pas au moins un point P de Γ. D'autre part, un ensemble *bien ordonné* n'ayant pas de dernier terme, des ensembles continus Γ_α, Γ_β, ..., dont chacun contient tous les continus suivants et les points A et B, définit un ensemble de points

$$\Gamma_\mu \equiv \mathfrak{D}(\{\Gamma\}).\ (*)$$

On peut démontrer que Γ_μ est un continu, contenant A et B. Si Γ_μ n'est pas un AB il existe de même un sous-ensemble continu $\Gamma_{\mu+1}$, contenant A et B et ne contenant pas un point P_μ de Γ_μ.

De la sorte notre procédé nous fournit un ensemble bien ordonné de continus Γ_α et fait correspondre à chacun d'eux qui n'est pas un arc irréductible AB, un point P_α distinct de tous les points précédents. Mais, d'après le théorème de M. Zermelo, le continu a une puissance *aleph*. Le procédé de détermination de Γ_α doit donc finir au plus sur un nombre transfini de la classe, correspondant à la puissance du continu. Mais il ne peut finir, d'après ce qui a été dit plus haut, que sur un Γ_α qui est un arc irréductible AB. Un tel arc existe donc (2).

---

(1) Je suis la terminologie de M. Zoretti (*Annales de l'École Normale*, 1909); en réservant le nom *arc simple* (que j'employais dans ma Note de *Comptes rendus*, t. CL, 1910, p. 606) pour les ensembles plus simples, je serai de même d'accord avec la terminologie de M. Schœnflies.

(2) Ce théorème me paraît être fondamental; il est nécessaire pour la démonstration de tous les théorèmes suivants. Il est donc bon d'en avoir une démonstration qui ne fait pas appel aux nombres transfinis; M. Mazurkiewicz me signale une démonstration de cette nature.

(*) Le symbole $\mathfrak{D}(\{\Gamma\})$ désigne la partie commune de la suite des sous-continus dont il est question au début de la démonstration du théorème I [*Remarque de la Rédaction*].

Il est évident qu'*un arc irréductible ne peut avoir de points intérieurs* [1]. Mais, dans l'espace, il peut contenir, par exemple, une portion du plan. Aussi pour le plan un arc irréductible peut présenter des singularités très différentes, et voici tout ce qu'on peut énoncer :

Théorème II. — *Soient* AB *un arc irréductible et* M *un de ses points ; on a*

$$\mathfrak{M}(\mathrm{AM}, \mathrm{BM}) \equiv \mathrm{AB},$$

où AM *et* BM *désignent les arcs irréductibles sur* AB.

Mais il peut se présenter qu'il existe plus qu'*un* arc irréductible AM sur AB. Une courbe qui commence en B et enveloppe un cercle une infinité de fois en s'approchant vers lui d'une manière asymptotique nous en fournit un exemple quand on prend A et M sur ce cercle.

Le même exemple montre que $\mathfrak{D}(\mathrm{AM}, \mathrm{BM})$ peut contenir d'autres points que M. Il montre encore qu'un arc irréductible peut diviser (s'il s'agit de lignes planes) le plan en deux régions; il peut être même lui-même une courbe fermée au sens de M. Schœnflies [2].

Pour cela, l'arc irréductible général ne peut être considéré comme correspondant à la notion vulgaire de ligne, *pas plus* qu'une ligne cantorienne générale. Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire de faire une restriction.

Théorème III. — *Étant donnés* AC *et* BC *tels que* $\mathfrak{D}(\mathrm{AC}, \mathrm{BC}) \equiv \mathrm{C}$, *on a*

$$\mathfrak{M}(\mathrm{AC}, \mathrm{BC}) \equiv \mathrm{AB}.$$

Théorème IV. — *L'hypothèse que, pour chaque point* M *de* AB, *on ait*

$$\mathfrak{D}(\mathrm{AM}, \mathrm{BM}) \equiv \mathrm{M} \tag{1}$$

suffit pour que AB *jouisse des propriétés suivantes :*

I. *Il ne peut exister sur* AB *deux arcs irréductibles différents :* $(\mathrm{MN})_1$ *et* $(\mathrm{MN})_2$.

II. *Si* N *est situé sur* AM, AN *ne contient pas* M. De cette propriété résulte la possibilité de définir un ordre de succession de points sur AB.

---

(1) Voir L. Zoretti, *Annales de l'École Normale*, 1909, p. 487.

(2) Voir l'exemple de M. Brouwer [*Zur Analysis situs* (*Mathematische Annalen*, t. LXVIII)] ; la ligne de la figure 2 représente un arc irréductible PP′.

III. $\mathfrak{D}$(PQ, PR) $\equiv$ P, *si* R *n'est pas situé sur* PQ, *ni* Q *sur* PR.
IV. $\mathfrak{D}$(PQ, PR) $\equiv$ P, *si* P *est un point de* QR.

Je nomme *arc simple* un arc irréductible AB ayant la propriété (1). La proposition IV peut s'énoncer alors :

Un arc irréductible situé tout entier sur un arc simple est simple lui-même.

Toutes ces propositions sont de simples conséquences des théorèmes I, II, III et de l'hypothèse (1).

Je nomme un *continu de condensation* un continu Γ tel que l'ensemble dérivé de la différence du continu donné et de Γ est identique au continu donné [1].

Théorème V. — *Pour qu'un arc irréductible* AB *soit simple, il faut et il suffit qu'il n'existe sur lui aucun continu de condensation.*

1. Supposons qu'il existe un continu de condensation et soient M et N deux de ses points. AB étant un arc simple, posons M $\prec$ N. AN et BN ayant un seul point N commun, AM et BN n'en ont aucun. L'ensemble dérivé de la différence de AB et de MN est identique à $\mathfrak{M}$(AM, BN) et devrait être identique à AB ; d'où la contradiction.

2. Supposons que AB ne contienne aucun continu de condensation, mais que pour un point M, $\mathfrak{D}$(AM, BM) contienne un point N outre M. Une conséquence de cette hypothèse est, ou bien que AM $\equiv$ AN, ou bien que BM $\equiv$ BN. Il suffit donc de démontrer le

Lemme. — *L'identité* AB $\equiv$ AC *entraîne l'existence d'un continu de condensation.*

Entourons C d'une sphère (de n dimensions) laissant A et B à l'extérieur. *Il existe,* d'après un théorème général, *un continu* γ *intérieur à la sphère et contenant* C. En supposant que sur AB n'existe aucun continu de condensation, on peut trouver sur γ un point C′ tel qu'une sphère de centre C′ et de rayon suffisamment petit laisse l'ensemble AB $-$ γ à l'extérieur. Or, on a évidemment AC′ $\equiv$ AB.

---

[1] Cette notion correspond *pour le plan* à peu près aux arcs composés de points *unerreichbar* de M. Schœnflies. Mais pour les espaces, tandis que l'idée de M. Schœnflies peut être appliquée aux surfaces, la notion de continu de condensation s'applique toujours aux lignes.

Soit Σ l'ensemble des points de cette sphère et de γ. Parmi les sous-ensembles continus de AB, contenant A et situés à l'extérieur et sur la frontière de Σ, il existe un continu α qui est « le plus grand ». α ne contient pas B, parce qu'il ne contient pas C'. Donc α et γ doivent avoir des points communs. $\mathfrak{M}(\alpha, \gamma)$ est alors un continu; il contient A et C', mais pas B. Il en résulte que $AC' \not\equiv AB$, d'où la contradiction.

(18 juillet 1910.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SEANCES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES.
45848 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.