N° D'ORDRE

66.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ,

PAR M. SIGISMOND JANISZEWSKI.

1re THÈSE. — SUR LES CONTINUS IRRÉDUCTIBLES ENTRE DEUX POINTS.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le juin 1911 devant la Commission d'Examen.

MM. H. POINCARÉ, *Président.*

É. BOREL,
H. LEBESGUE, } *Examinateurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1911

A MARC SANGNIER

En témoignage d'affection et d'estime.

«... Nous ressentions le charme et les douleurs de cet amour pour la blanche abstraction, toujours éclairée par une lumière sereine et éternellement calme et harmonieuse...»

(MARC SANGNIER, *La Vie profonde : Le songe d'Ali.*)

PREMIÈRE THÈSE.

SUR

LES CONTINUS IRRÉDUCTIBLES ENTRE DEUX POINTS

INTRODUCTION.

Les notions fondamentales de la Géométrie pure ne sont pas encore toutes rigoureusement définies et analysées. Seule l'étude de la notion de la droite est amenée à un degré de perfection dans les célèbres *Grundlagen der Geometrie* de M. Hilbert. Mais si l'on passe à l'étude des courbes et des surfaces, on s'aperçoit qu'il nous manque même une définition de ces notions. Grâce aux immortels travaux de Georg Cantor, qui nous ont appris à considérer toute figure comme un ensemble de points et à raisonner à partir de cette conception, cette question peut être posée aujourd'hui d'une facon nouvelle et plus claire : Quelles propriétés doit posséder un ensemble de points pour mériter d'être appelé *courbe*, *surface*, etc. (¹). C'est le premier de ces problèmes que je traite dans cette Thèse.

L'étude des figures considérées comme ensembles de points peut

(¹) Les points étant des êtres dont les propriétés sont définies axiomatiquement, comme le fait M. Hilbert.

J.

être entreprise à deux points de vue. On peut essayer de caractériser les ensembles dont il s'agit par les relations entre les points de l'ensemble et ceux du reste de l'espace ; c'est ce que fait M. Schœnflies (1) dans l'étude de la réciproque du théorème de M. Jordan, d'après lequel une courbe plane fermée sans points multiples partage le plan en deux régions. Ou bien, on peut chercher à caractériser les ensembles par des propriétés de seuls points de ces ensembles, et c'est précisément ce que s'était proposé de faire M. Zoretti (2).

Seulement, les rapports entre l'ensemble et le reste de l'espace interviennent encore dans les raisonnements de M. Zoretti. Au contraire, en me plaçant à ce second point de vue, j'ai évité le plus possible de me servir de ces rapports, et j'ai ainsi obtenu des résultats valables pour l'espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions, et pour les classes très étendues d'autres espaces.

Cependant, l'idée directrice, l'étude de la notion de ligne étant la même dans le présent travail que dans le Mémoire de M. Zoretti, je suis à peu près la même marche que lui. Je pars donc, comme lui, de la notion capitale qui lui est due (3) de continu irréductible entre A et B ; c'est ainsi que M. Zoretti a appelé un ensemble continu contenant les points A et B, dont on ne peut enlever aucune partie sans qu'il cesse d'être continu ou de contenir A et B ; moyennant certaine restriction de cette notion, j'arrive comme lui aux continus équivalents à un arc simple sans points multiples de M. Jordan.

La différence apparaît dans le choix de cette condition restrictive. M. Zoretti a cru pouvoir démontrer qu'un continu irréductible AB peut être décomposé en deux continus AM et BM n'ayant en commun

---

(1) *Beiträge zur Theorie der Punktmengen* (*Math. Ann.*, t. LVIII, LIX, LXII, 1904-1906).

(2) *La notion de ligne* (*Ann. de l'École Norm.*, t. XXVI, 1909).

(3) Elle a été introduite par lui pour la première fois dans ses belles leçons professées au Collège de France en 1908-1909. Je profite de l'occasion pour dire ici que ces leçons ont largement contribué à déterminer la direction de mes recherches.

qu'un seul point M arbitrairement choisi sur AB. Cela est inexact ([1]). Cette propriété, qui appartient évidemment à tout ensemble équivalent au sens de l'*Analysis situs* à un segment de droite, n'est pas générale ; c'est en l'ajoutant comme condition restrictive à la définition du continu irréductible que j'arrive à la notion d'ARC SIMPLE ; *j'appelle donc arc simple* AB *tout continu irréductible* AB *qui peut être décomposé en deux continus n'ayant en commun qu'un point arbitrairement désigné sur* AB. A lire le travail de M. Zoretti, on pourrait croire que la notion d'arc simple est encore plus large que celle de courbe de Jordan sans points multiples, car, pour avoir l'identité de ces notions, M. Zoretti croit devoir introduire une nouvelle restriction. En réalité, je prouve (Chap. III, § 2) que tout arc simple est équivalent au sens de l'*Analysis situs* à un segment de droite, c'est-à-dire qu'il y a identité absolue entre les arcs simples et les arcs de courbes de Jordan sans points multiples.

Une des notions les plus importantes que j'introduis dans cette Thèse est celle de CONTINU DE CONDENSATION d'un continu donné. J'appelle ainsi *tout continu* $\mathcal{K}$, *sous-ensemble du continu donné* $\mathcal{C}$, *tel que tout point de* $\mathcal{K}$ *est un point limite des points de* $\mathcal{C}$ *n'appartenant pas à* $\mathcal{K}$ ([2]).

L'importance de cette notion ressort clairement du fait que la non-existence du continu de condensation sur un continu irréductible entre deux points est une condition nécessaire et suffisante pour que ce continu soit un arc simple (Chap. III, § 2).

([1]) Voir *Comptes rendus* du 18 juillet 1910, où M. Zoretti se corrige en partie, en se réservant de le faire complètement dans un Mémoire qui va paraître dans *Acta mathematica*. — *Cf.* aussi BROUWER, *Sur les continus irréductibles de M. Zoretti*, et ZORETTI, *Remarque au sujet de la remarque de M. Brouwer* (*Ann. de l'École Norm.*, t. XXVI, 1910, p. 565 et 567).

([2]) Dans le cas du plan, cette notion correspond *à peu près* aux continus composés de points *unerreichbar* de M. Schœnflies. Mais pour les espaces à plus de deux dimensions l'idée de M. Schœnflies s'applique aux études des surfaces, tandis que le continu de condensation s'applique toujours aux lignes.

La simplicité de ces énoncés pouvait donner cette idée tout à fait fausse qu'un continu irréductible ne diffère pas beaucoup d'une ligne ; en réalité, *un continu irréductible peut être aussi compliqué qu'on le veut;* dans l'espace à plus de deux dimensions il peut contenir des surfaces, par exemple une infinité indénombrable de sphères (*voir* Chap. II, *exemple* 8, et *fig*. 6 et 7).

Abordant l'étude de quelques continus non irréductibles, je cherche à caractériser ceux qu'on pourra décomposer en un nombre fini d'arcs simples. Je suis ainsi, en particulier, conduit à la notion de *ligne simple fermée* que je définis comme un continu $\mathfrak{C}$ qui peut être décomposé en deux continus n'ayant en commun que deux points arbitrairement donnés sur $\mathfrak{C}$. Je démontre qu'une telle courbe est équivalente au sens plus large de l'*Analysis situs* à une circonférence (Chap. III, § 4). Pour caractériser les figures correspondant aux réseaux les plus généraux, je dois introduire deux notions nouvelles, celle de *point régulier* et celle de *point simple* (Chap. IV, § 1) [1].

Je tiens à me justifier d'avance et une fois pour toutes de la part que je réserve à certaines propositions qui peuvent paraître évidentes et n'avoir besoin d'aucune démonstration. Le fait que plusieurs propositrations réputées évidentes ont été reconnues fausses, explique mon extrême réserve. Aussi, je ne crains pas d'être long. Pour diminuer encore les chances d'erreurs, j'introduis des symboles qui, tout en abrégeant certaines démonstrations, permettent de remplacer le raisonnement par un simple calcul. Ces symboles sont bien connus dans la théorie des ensembles, mais on n'a pas essayé jusqu'ici de s'en servir comme éléments de calcul; ce calcul est cependant, lui

---

(1) Quelques définitions analogues ont été données par M. Young dans son beau Livre *The theory of sets of points* (p. 219-221).

Il m'a été impossible de prendre connaissance de tous les travaux de M. W.-H. Young; aussi, peut-être ne l'ai-je pas cité partout où j'aurais dû le faire. Je le regretterais vivement et m'en excuserais ici.

aussi, bien connu : c'est le calcul logistique (là au moins où n'interviennent pas les ensembles dérivés).

Un des avantages de l'introduction du calcul symbolique est qu'il met bien en évidence les hypothèses nécessaires à la validité des raisonnements, et ainsi j'ai pu dans la Note I étudier dans quelle mesure mes recherches dépendent des axiomes de la Géométrie euclidienne. Je réponds en montrant que presque tous les théorèmes sont vrais pour un espace qui satisfait à un système de quatre axiomes [cet espace correspond à peu près aux classes (V) normales de M. Fréchet], et que la plupart d'entre eux n'a même besoin d'aucun axiome [c'est-à-dire est valable pour toute classe (L) de M. Fréchet (1)].

Avant de terminer, je tiens à remercier ici M. Lebesgue pour ses gracieux conseils concernant la rédaction de cette Thèse. Je ne peux aussi passer sous silence l'aide de mes camarades S. Moszkowski et J. Rudnicki, qui m'a été si précieuse pour la rédaction française, ainsi que les simplifications qu'a apportées M. Moszkowski à plusieurs de mes démonstrations. Qu'il me soit permis de leur adresser ici mes affectueux remercîments.

CHAPITRE I.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

I.

Les ensembles de points dans l'espace euclidien à n dimensions, où $n \geqq 2$, font l'objet de notre étude. Dans tout ce qui va suivre, nous

---

(1) Cette réponse était facilitée encore par le fait, que j'ai évité dans mes raisonnements l'emploi des lignes polygonales, comme une notion étrangère à l'*Analysis situs*.

supposerons implicitement que ces ensembles sont situés entièrement à distance finie, c'est-à-dire qu'ils peuvent être enfermés à l'intérieur d'une sphère de rayon fini.

J'appelle, d'après G. Cantor, *continu* un ensemble de points *fermé* et *bien enchaîné*, qui ne se réduit pas à un seul point. Il existe deux définitions de cette dernière propriété : celle de Cantor et celle de Jordan.

D'après Cantor, un ensemble est bien enchaîné si, étant donnés deux points quelconques A et B de cet ensemble et un nombre positif ε aussi petit qu'on le veut, il est possible de trouver une suite finie de points $T_1, T_2, \ldots, T_m$, telle que

$$(1) \qquad \begin{cases} \rho(A, T_1) < \varepsilon, & \rho(B, T_m) < \varepsilon \ (^1), \\ \rho(T_k, T_{k+1}) < \varepsilon & (k = 1, 2, \ldots, m-1). \end{cases}$$

Nous appellerons cette suite une chaîne par rapport à ε. Elle peut évidemment toujours être supposée composée de points distincts entre eux. Nous dirons que deux points A et B d'un ensemble quelconque sont bien enchaînés entre eux, s'il existe une chaîne entre A et B par rapport à tout ε, composée de points de l'ensemble considéré.

D'après M. Jordan ([2]) et M. Schœnflies ([3]), un ensemble fermé est bien enchaîné s'il est impossible de le décomposer en deux ensembles *fermés* qui n'ont pas de points communs.

Ces deux définitions sont, comme l'a montré M. Jordan, équivalentes.

La définition de Cantor montre immédiatement qu'un ensemble bien enchaîné est contenu dans son ensemble dérivé, c'est-à-dire est dense en soi. En remarquant qu'au sens de Cantor un ensemble reste bien

---

([1]) Je désigne par $\rho(A, B)$ la distance de deux points A et B.

([2]) JORDAN, *Cours d'Analyse*, 2e édition, t. I, p. 25-26.

([3]) SCHŒNFLIES, *Beiträge zur Theorie der Punktmengen* (*Math. Ann.*, t. LVIII, p. 209).

enchaîné ou non, quand on lui adjoint ses points limites, nous étendons la définition de Jordan aux ensembles non fermés de la façon suivante : un ensemble est bien enchaîné, si l'ensemble de ses points et de ses points limites est bien enchaîné. Il en résulte que *l'ensemble dérivé d'un ensemble bien enchaîné est continu*.

Un point appartenant ou non à l'ensemble donné est dit *point frontière* de cet ensemble, si toute sphère décrite autour de ce point contient au moins un point qui appartient et un point qui n'appartient pas à l'ensemble. Par frontière de l'ensemble $\mathcal{A}$, nous entendons l'ensemble de tous les points frontières de $\mathcal{A}$. Nous la désignerons par $\mathfrak{f}(\mathcal{A})$. Un point de l'ensemble qui n'est pas un point frontière de cet ensemble est dit point *intérieur;* un point qui n'appartient ni à l'ensemble donné, ni à sa frontière, est dit *extérieur* à l'ensemble [1].

Un ensemble est *punctiforme* s'il ne contient aucun continu ; il est *discret* si l'ensemble de ses points et de ses points limites est punctiforme [2]. Il résulte de cette définition qu'un ensemble discret ne contient aucun sous-ensemble qui soit bien enchaîné [3].

Un ensemble est *irréductible* par rapport à un système de propriétés données, si aucun de ses sous-ensembles ne possède les mêmes propriétés.

Un ensemble est *saturé* pour un système de propriétés données, s'il

---

(1) Ces définitions ont été données par M. Jordan (*Cours d'Analyse*, t. I).

(2) M. Schœnflies a introduit dans son Ouvrage *Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*, t. II, la notion d'un ensemble punctiforme pour des ensembles fermés ; elle se confond dans ce cas avec la notion d'un ensemble discret ; pour la désigner, M. Schœnflies emploie donc indifféremment les mots *punkthaft* et *zusammenhangslos*.

(3) Dans le cas d'un espace à plus d'une dimension, cette propriété n'est pas une condition suffisante pour qu'un ensemble soit discret. En effet, l'ensemble de points qui ont pour coordonnées $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{1}{q}$, p et q désignant des entiers positifs premiers entre eux où $p < q$, ne contient aucun sous-ensemble bien enchaîné et n'est pas cependant discret.

Remarquons encore qu'un ensemble punctiforme peut être bien enchaîné ; tel est l'ensemble des points qui ont pour coordonnées tous les nombres rationnels plus petits que 1.

n'existe aucun ensemble possédant les mêmes propriétés et contenant l'ensemble donné ([1]).

A l'ensemble irréductible on ne peut donc rien enlever, à l'ensemble saturé rien ajouter, sans qu'ils perdent les propriétés en question. Il est évident que si, par rapport à un système de propriétés, tout ensemble qui le possède est irréductible, il est en même temps saturé et réciproquement ([2]).

II.

Je désigne par $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ l'ensemble des points contenus dans un au moins des ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$; par $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ l'ensemble des points communs aux ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$; par $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ l'ensemble des points de $\mathcal{A}$ non contenus dans $\mathcal{B}$ ([3]).

Les signes

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}, \qquad \mathcal{A} \supset \mathcal{B}, \qquad \mathcal{A} \subset \mathcal{B},$$

signifient et se lisent : $\mathcal{A}$ est identique à $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ contient $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ est contenu dans $\mathcal{B}$.

En employant ces notations, nous pouvons établir les relations suivantes ([4]) :

I.

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathcal{A} \equiv (\mathcal{A} \times \mathcal{B}) + (\mathcal{A} - \mathcal{B}), \\ \mathcal{B} \equiv (\mathcal{A} \times \mathcal{B}) + (\mathcal{B} - \mathcal{A}); \end{cases}$$

$$(2) \qquad \mathcal{A} + \mathcal{B} \equiv (\mathcal{A} \times \mathcal{B}) + (\mathcal{A} - \mathcal{B}) + (\mathcal{B} - \mathcal{A});$$

$$(3) \qquad (\mathcal{A} - \mathcal{B}) + \mathcal{B} \equiv \mathcal{A} + \mathcal{B} \equiv \mathcal{A} + (\mathcal{B} - \mathcal{A});$$

([1]) Pour éviter des malentendus, je préviens que l'expression : l'*ensemble ayant les propriétés* X *irréductible* (*ou saturé*) signifie : *l'ensemble ayant les propriétés* X *et irréductible* (*ou saturé*) *par rapport à ces propriétés* X.

([2]) Les lignes simples fermées que nous étudions plus loin, nous offrent l'exemple des ensembles saturés et irréductibles à la fois par rapport à la propriété d'être une ligne simple fermée.

([3]) *Cf.* Cantor, *Acta math.*, t. II, et Couturat, *Algèbre de la Logique* (*Scientia*, 24).

([4]) Ces relations sont vraies pour tous les ensembles (et non seulement pour des ensembles de points).

(4) $(\mathcal{A}+\mathcal{B})-\mathcal{B}\equiv\mathcal{A}-\mathcal{B}\equiv\mathcal{A}-(\mathcal{A}\times\mathcal{B}).$

II.

(1) $$\mathcal{A}+\mathcal{B}\supset\mathcal{A};$$
(2) $$\mathcal{A}\times\mathcal{B}\subset\mathcal{A};$$
(3) $$\mathcal{A}-\mathcal{B}\subset\mathcal{A}.$$

III. *La relation*

$$\mathcal{A}\supset\mathcal{B}$$

équivaut à chacune des suivantes :

(1) $$\mathcal{A}+\mathcal{B}\equiv\mathcal{A};$$
(2) $$\mathcal{A}\times\mathcal{B}\equiv\mathcal{B};$$
(3) $$\mathcal{B}-\mathcal{A}\equiv 0 \text{ (}^1\text{)}.$$

IV. (1) *Si*

$$\mathcal{A}\subset\mathcal{H} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}\subset\mathcal{H},$$

on a aussi

$$\mathcal{A}+\mathcal{B}\subset\mathcal{H}.$$

(2) *Si*

$$\mathcal{A}\supset\mathcal{H} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}\supset\mathcal{H},$$

on a aussi

$$\mathcal{A}\times\mathcal{B}\supset\mathcal{H}.$$

V. *La relation* $\mathcal{B}\supset\mathcal{C}$ *entraîne* (II *et* IV):

(1) $$\mathcal{A}+\mathcal{B}\supset\mathcal{A}+\mathcal{C};$$
(2) $$\mathcal{A}\times\mathcal{B}\supset\mathcal{A}\times\mathcal{C};$$
(3) $$\mathcal{A}-\mathcal{B}\subset\mathcal{A}-\mathcal{C};$$
(4) $$\mathcal{B}-\mathcal{A}\supset\mathcal{C}-\mathcal{A}.$$

Les formules (1) et (2) sont encore vraies pour un nombre *infini quelconque* d'ensembles.

---

(1) $\mathcal{A}\equiv 0$ signifie que l'ensemble $\mathcal{A}$ ne contient aucun point, c'est-à-dire n'existe pas.

J. 2

Introduisons les notations suivantes dues à Cantor : $\{\Gamma_\alpha\}$ désigne l'ensemble dont les éléments sont Γ_α; $\mathfrak{M}(\{\mathcal{A}_\alpha\})$ désigne l'ensemble de points de tous les $\mathcal{A}_\alpha$; $\mathfrak{D}(\{\mathcal{A}_\alpha\})$ désigne l'ensemble des points communs à tous les $\mathcal{A}_\alpha$. C'est une généralisation des opérations $+$ et $\times$ au cas d'un nombre infini d'ensembles.

Avec ces notations les relations (1) et (2) généralisées s'écriront de la façon suivante :

Si chaque $\mathcal{B}_\alpha$ contient $\mathcal{C}_\alpha$ correspondant, on a

(1) $$\mathfrak{M}(\{\mathcal{B}_\alpha\}) \supset \mathfrak{M}(\{\mathcal{C}_\alpha\});$$

(2) $$\mathfrak{D}(\{\mathcal{B}_\alpha\}) \supset \mathfrak{D}(\{\mathcal{C}_\alpha\}).$$

VI.

(1) $$\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} \equiv (\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C};$$

(2) $$\mathcal{A} \times \mathcal{B} \times \mathcal{C} \equiv (\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \times \mathcal{C}.$$

VII. *(Lois distributives).*

(1) $$(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) + \mathcal{C} \equiv (\mathcal{A} + \mathcal{C}) \times (\mathcal{B} + \mathcal{C});$$

(2) $$(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \times \mathcal{C} \equiv (\mathcal{A} \times \mathcal{C}) + (\mathcal{B} \times \mathcal{C});$$

(3) $$(\mathcal{A} + \mathcal{B}) - \mathcal{C} \equiv (\mathcal{A} - \mathcal{C}) + (\mathcal{B} - \mathcal{C});$$

(4) $$(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) - \mathcal{C} \equiv (\mathcal{A} - \mathcal{C}) \times (\mathcal{B} - \mathcal{C});$$

(5) $$\mathcal{A} - (\mathcal{B} + \mathcal{C}) \equiv (\mathcal{A} - \mathcal{B}) - \mathcal{C}.$$

La relation (1) peut se démontrer par le raisonnement suivant. Tout point de $(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) + \mathcal{C}$ appartient soit à $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, soit à $\mathcal{C}$. S'il appartient à $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, il appartient aussi à $\mathcal{A} + \mathcal{C}$ et à $\mathcal{B} + \mathcal{C}$, donc à

$$(\mathcal{A} + \mathcal{C}) \times (\mathcal{B} + \mathcal{C});$$

s'il appartient à $\mathcal{C}$, il appartient évidemment à $(\mathcal{A} + \mathcal{C}) \times (\mathcal{B} + \mathcal{C})$. Par conséquent, tout point de $(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) + \mathcal{C}$ appartient à

$$(\mathcal{A} + \mathcal{C}) \times (\mathcal{B} + \mathcal{C}).$$

Inversement, un point qui n'appartient pas à $(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) + \mathcal{C}$ n'appartient ni à $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ni à $\mathcal{C}$, donc il ne peut pas appartenir à la fois à $\mathcal{A} + \mathcal{C}$ et à $\mathcal{B} + \mathcal{C}$; par conséquent tout point qui n'appartient pas à $(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) + \mathcal{C}$ n'appartient pas non plus à $(\mathcal{A} + \mathcal{C}) \times (\mathcal{B} + \mathcal{C})$. Il s'ensuit que les ensembles $(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) + \mathcal{C}$ et $(\mathcal{A} + \mathcal{C}) \times (\mathcal{B} + \mathcal{C})$ contiennent les mêmes points, c'est-à-dire sont identiques.

Par un raisonnement analogue on établirait les formules (2), (3), (4), (5).

VIII. *Les relations*

$$(a) \qquad \mathcal{A} + \mathcal{B} \supset \mathcal{A} + \mathcal{C},$$

$$(b) \qquad \mathcal{A} \times \mathcal{B} \supset \mathcal{A} \times \mathcal{C}$$

entraînent

$$\mathcal{B} \supset \mathcal{C}.$$

En effet, tout point qui appartient à $\mathcal{C}$ appartient soit à $\mathcal{A} \times \mathcal{C}$, soit à $\mathcal{C} - \mathcal{A}$. S'il appartient à $\mathcal{A} \times \mathcal{C}$, il appartient, en vertu de (b) à $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, donc à $\mathcal{B}$. S'il appartient à $\mathcal{C} - \mathcal{A}$, il appartient à $\mathcal{C} + \mathcal{A}$, donc en vertu de ($a$) à $\mathcal{A} + \mathcal{B}$; mais comme il ne peut pas appartenir à $\mathcal{A}$, il est contenu nécessairement dans $\mathcal{B}$. Par conséquent, tout point de $\mathcal{C}$ appartient à $\mathcal{B}$. On a donc bien

$$\mathcal{B} \supset \mathcal{C}.$$

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Si*

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} \equiv \mathcal{A} + \mathcal{C}$$

et

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} \equiv \mathcal{A} \times \mathcal{C},$$

on a

$$\mathcal{B} \equiv \mathcal{C}.$$

III.

Nous allons démontrer maintenant une série de propositions et formules relatives aux ensembles dérivés. Nous représentons l'ensemble dérivé de $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A}'$ et l'ensemble avec ses points limites, c'est-à-dire $\mathcal{A}+\mathcal{A}'$ par $\overline{\mathcal{A}}$.

IX. *La relation*

$$\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$$

entraîne

$$\mathcal{A}' \supset \mathcal{B}' \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{A}} \supset \overline{\mathcal{B}}.$$

X^A.

(1) $$(\mathcal{A}+\mathcal{B})' \equiv \mathcal{A}'+\mathcal{B}'.$$

En effet, tout point de $\mathcal{A}'+\mathcal{B}'$ est un point limite des points de $\mathcal{A}$ ou de $\mathcal{B}$, c'est-à-dire de $\mathcal{A}+\mathcal{B}$; il est donc un point de $(\mathcal{A}+\mathcal{B})'$.

Et réciproquement, soit T un point de $(\mathcal{A}+\mathcal{B})'$; soit d'autre part une suite infinie décroissante $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n \ldots$, ayant pour limite zéro. On peut faire correspondre à chaque ε_k un point M_k de l'ensemble $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, tel que

$$\rho(T, M_k) < \varepsilon_k.$$

Considérons à présent l'ensemble des points $M_1 M_2 \ldots M_n \ldots$, qui contient une infinité de points d'un au moins des ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. T est le point limite de cet ensemble; il est donc contenu soit dans $\mathcal{A}'$, soit dans $\mathcal{B}'$, c'est-à-dire dans $\mathcal{A}'+\mathcal{B}'$.

(2) $$\mathcal{A}' \times \mathcal{B}' \supset (\mathcal{A} \times \mathcal{B})'.$$

En effet, tout point de $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})'$ est un point limite des points communs aux ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$; il appartient donc à $\mathcal{A}'$ et à $\mathcal{B}'$, c'est-à-dire à $\mathcal{A}' \times \mathcal{B}'$.

X^B.

(1) $$\overline{\mathcal{A}}+\overline{\mathcal{B}} \equiv (\overline{\mathcal{A}+\mathcal{B}});$$

(2) $$\overline{\mathcal{A}} \times \overline{\mathcal{B}} \supset (\overline{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}).$$

On établira ces relations de la même façon que les formules X^A (1).

Par des raisonnements analogues, on peut généraliser les relations X^A, (2) et X^B, (2), au cas d'un nombre *infini quelconque* d'ensembles :

$$\mathfrak{D}(|\mathcal{A}'|)\supset\mathfrak{D}'(|\mathcal{A}|)$$

et

$$\mathfrak{D}(|\overline{\mathcal{A}}|)\supset\mathfrak{D}(|\mathcal{A}|).$$

Par contre, les relations X^A, (1), et X^A, (2), ne se prêtent pas à la généralisation complète.

On a seulement

$$\mathfrak{M}(|\mathcal{A}'|)\subset\mathfrak{M}'(|\mathcal{A}|)$$

et

$$\mathfrak{M}(|\overline{\mathcal{A}}|)\subset\overline{\mathfrak{M}}(|\mathcal{A}|).$$

XI. *Si les ensembles $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont fermés, les ensembles $\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2$ le sont aussi.*

La première partie de cette proposition résulte immédiatement de la relation X^B, (1). En effet, par hypothèse, $\mathcal{F}_1\equiv\overline{\mathcal{F}}_1$ et $\mathcal{F}_2\equiv\overline{\mathcal{F}}_2$. Par conséquent

$$\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2\equiv\overline{\mathcal{F}}_1+\overline{\mathcal{F}}_2\equiv(\overline{\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2}).$$

C. Q. F. D.

Quant à la seconde partie, elle découle de la relation X^B, (2) :

$$\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2\equiv\overline{\mathcal{F}}_1\times\overline{\mathcal{F}}_2\supset(\overline{\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2}).$$

Mais comme d'autre part on a toujours $\mathcal{A}\subset\overline{\mathcal{A}}$,

$$\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2\equiv(\overline{\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2}).$$

C. Q. F. D.

---

(1) On peut aussi les démontrer par le calcul, en s'appuyant sur les relations X^A. En effet,

$$(1)\quad(\overline{\mathcal{A}+\mathcal{B}})\equiv(\mathcal{A}+\mathcal{B})+(\mathcal{A}+\mathcal{B})'\equiv\mathcal{A}+\mathcal{B}+\mathcal{A}'+\mathcal{B}'\equiv(\mathcal{A}+\mathcal{A}')+(\mathcal{B}+\mathcal{B}')\equiv\overline{\mathcal{A}}+\overline{\mathcal{B}},$$

$$\begin{aligned}(2)\quad(\overline{\mathcal{A}\times\mathcal{B}})&\equiv(\mathcal{A}\times\mathcal{B})+(\mathcal{A}\times\mathcal{B})'\subset(\mathcal{A}\times\mathcal{B})+(\mathcal{A}'\times\mathcal{B}')\\&\equiv(\mathcal{A}+\mathcal{A}')\times(\mathcal{A}+\mathcal{B}')\times(\mathcal{B}+\mathcal{A}')\times(\mathcal{B}+\mathcal{B}')\\&\equiv\overline{\mathcal{A}}\times\overline{\mathcal{B}}\times(\mathcal{A}+\mathcal{B}')\times(\mathcal{B}+\mathcal{A}')\subset\overline{\mathcal{A}}\times\overline{\mathcal{B}}.\end{aligned}$$

Le même raisonnement prouve que

$$\mathfrak{D}(\{\mathcal{F}_\alpha\}) \equiv \overline{\mathfrak{D}}(\{\mathcal{F}_\alpha\}),$$

si $\mathcal{F}_\alpha \equiv \overline{\mathcal{F}}_\alpha$ pour tous les α.

XII. *Si les ensembles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parfaits, l'ensemble $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$ est aussi parfait.*

En effet, comme $\mathcal{P}_1 \equiv \mathcal{P}'_1$ et $\mathcal{P}_2 \equiv \mathcal{P}'_2$, on a d'après X^A, (1),

$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 \equiv \mathcal{P}'_1 + \mathcal{P}'_2 \equiv (\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2)'.$$

C. Q. F. D.

XIII. *Si les ensembles $\mathcal{E}_\alpha$ sont bien enchaînés et s'ils ont au moins un point commun entre eux, l'ensemble des points de tous les $\mathcal{E}_\alpha$ est lui-même bien enchaîné* (¹).

Soit P un point de $\mathfrak{D}(\{\mathcal{E}_\alpha\})$ et soient A et B deux points de $\mathfrak{M}(\{\mathcal{E}_\alpha\})$. Chacun de ces points peut être réuni, par hypothèse, par une chaîne avec le point P. Soient A, T_1, T_2, ..., T_k, P et B, S_1, S_2, ..., S_l, P, ces chaînes; réunies ensemble, elles forment la chaîne A, T_1, ..., T_k, P, S_l, ..., S_1, B entre A et B.

L'ensemble $\mathfrak{M}(\{\mathcal{E}_\alpha\})$ est donc bien enchaîné.

XIV. *Si deux continus $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont au moins un point commun, l'ensemble $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$ est un continu.*

Ce théorème résulte immédiatement des propositions XI et XII.

XV. *Si l'ensemble $\mathcal{E} + \mathcal{F}$ est un continu, les ensembles $\overline{\mathcal{E}}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ ont au moins un point commun.*

En effet, l'ensemble $\mathcal{E} + \mathcal{F}$ étant fermé,

$$\mathcal{E} + \mathcal{F} \equiv \overline{(\mathcal{E} + \mathcal{F})} \equiv \overline{\mathcal{E}} + \overline{\mathcal{F}}.$$

L'hypothèse $\overline{\mathcal{E}} \times \overline{\mathcal{F}} \equiv 0$ signifierait que l'ensemble $\mathcal{E} + \mathcal{F}$ peut être

(¹) *Voir* JORDAN, *Cours d'Analyse*, 2e édition, t. I, p. 26.

décomposé en deux ensembles fermés sans points communs, ce qui est impossible, $\mathcal{E}+\mathcal{F}$ étant par hypothèse un continu.

XVI. *Si l'ensemble* $\mathcal{E}+\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2+\ldots+\mathcal{F}_m$ *est un continu, et si les ensembles* $\overline{\mathcal{F}_k}$ *et* $\overline{\mathcal{F}_l}$ $(k\neq l; k, l=1, 2, \ldots, m)$ *n'ont pas de points communs entre eux, tout* $\overline{\mathcal{F}_k}$ $(k=1, 2, \ldots, m)$ *a au moins un point commun* avec $\overline{\mathcal{E}}$.

En effet,

$$\mathcal{E}+\mathcal{F}_1+\ldots+\mathcal{F}_m\equiv(\mathcal{E}+\mathcal{F}_1+\ldots+\mathcal{F}_{k-1}+\mathcal{F}_{k+1}+\ldots\mathcal{F}_m)+\mathcal{F}_k.$$

Par conséquent, en vertu de la proposition XV, les ensembles $\overline{\mathcal{F}_k}$ et $(\overline{\mathcal{E}+\mathcal{F}_1+\ldots+\mathcal{F}_{k-1}+\mathcal{F}_{k+1}+\ldots+\mathcal{F}_m})$ ont au moins un point commun Or [X^{B}, (1), et VII, (2)]

$$(\overline{\mathcal{E}+\mathcal{F}_1+\ldots+\mathcal{F}_{k-1}+\mathcal{F}_{k+1}+\ldots+\mathcal{F}_m})\times\overline{\mathcal{F}_k}$$

$$\equiv(\overline{\mathcal{E}}+\overline{\mathcal{F}_1}+\ldots+\overline{\mathcal{F}_{k-1}}+\overline{\mathcal{F}_{k+1}}+\ldots+\overline{\mathcal{F}_m})\times\overline{\mathcal{F}_k}$$

$$\equiv(\overline{\mathcal{E}}\times\overline{\mathcal{F}_k})+(\overline{\mathcal{F}_1}\times\overline{\mathcal{F}_k})+\ldots+(\overline{\mathcal{F}_{k-1}}\times\overline{\mathcal{F}_k})+(\overline{\mathcal{F}_{k+1}}\times\overline{\mathcal{F}_k})+\ldots(\overline{\mathcal{F}_m}\times\overline{\mathcal{F}_k})\equiv\overline{\mathcal{E}}\times\overline{\mathcal{F}_k},$$

car, par hypothèse,

$$\overline{\mathcal{F}_l}\times\overline{\mathcal{F}_k}\equiv 0\,(k\neq l).$$

Par conséquent,

$$\overline{\mathcal{E}}\times\overline{\mathcal{F}_k}\not\equiv 0.$$

IV.

Soit $\{\mathfrak{M}_\alpha\}$ un ensemble infini d'ensembles $\mathfrak{M}_\alpha$; l'ensemble des points H tels que

$$\underline{\lim}\,\rho(\mathrm{H}, \mathfrak{M}_\alpha)=0$$

est son *ensemble d'accumulation* $\mathcal{H}$.

L'ensemble des points L tels que

$$\lim \rho(L, \mathfrak{M}_\alpha) = 0$$

est son ensemble limite $\mathfrak{L}$ (1).

Il est évident que :

1° L'ensemble d'accumulation existe toujours : $\mathfrak{K} \neq 0$;

2° L'ensemble d'accumulation contient l'ensemble limite :

$$\mathfrak{K} \supset \mathfrak{L};$$

3° Tous les deux sont fermés :

$$\mathfrak{K} \equiv \overline{\mathfrak{K}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{L} \equiv \overline{\mathfrak{L}};$$

4° Si les ensembles $\mathfrak{M}_\alpha$ n'ont pas de points intérieurs, l'ensemble limite n'en a non plus, c'est-à-dire

$$\mathfrak{L} \subset \mathfrak{F}(\mathfrak{L}),$$

si

$$\mathfrak{M}_\alpha \subset \mathfrak{F}(\mathfrak{M}_\alpha),$$

quel que soit α.

Exemples. — 1. Soit une infinité d'ensembles $\mathfrak{M}_{k,l}$, dont chacun se réduit à un seul point d'abscisse $\frac{k}{l}$, situé sur l'axe des x. Nous désignons par $\mathfrak{K}$ l'ensemble d'ac-

---

(1) *Cf.* Schoenflies, *Math. Ann.*, t. LIX, p. 139, et t. LXV, p. 431.

Je désigne, suivant l'usage, par $\overline{\lim}$ la plus petite des limites (limite inférieure). J'observe qu'il n'est pas nécessaire pour que les symboles lim et $\overline{\lim}$ aient un sens précis, que la grandeur en question soit fonction d'un paramètre; en effet, l'expression lim et $\overline{\lim}$ peut concerner l'ensemble des valeurs qui peuvent être prises par une variable indépendante; dans ce cas $a = \lim a_\alpha$ signifie que pour tout $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ donné il n'y a qu'un nombre fini de a_α tels que $|a - a_\alpha| > \varepsilon$; et $a = \overline{\lim}\, a_\alpha$ signifie qu'il n'y a qu'un nombre fini de a_α plus petits que a tels que $(a - a_\alpha) > \varepsilon$ et qu'il existe au moins un a_α (donc une infinité) tel que $|a - a_\alpha| < \varepsilon$. Remarquons qu'on ne doit pas confondre $\underline{\lim}\, a_\alpha$ avec $\lim\limits_{\alpha=\infty} a_\alpha$, à moins que α ne soit pas un entier.

En langage de la théorie des ensembles, la limite c'est le nombre qui est élément limite *unique* d'un ensemble des nombres donnés ; la limite inférieure c'est la borne inférieure de l'ensemble dérivé de $\{a_\alpha\}$. Ce dernier étant supposé infini, la limite inférieure existe toujours.

cumulation et par $\mathcal{L}$ l'ensemble limite. Le $\mathcal{K}$ de $\{\mathfrak{M}_{k,l}\}$ $(k<l; l=1, 2, \ldots)$ c'est l'ensemble de tous les points du segment $(0, 1)$ de cet axe. Quant à $\mathcal{L}$, il est vide.

2. Soit une infinité d'ensembles $\mathfrak{M}_k$ dont chacun se compose d'une infinité de points d'abscisse $\frac{1}{k^i}$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$. Le $\mathcal{K}$ de $\{\mathfrak{M}_k\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ est identique à $\mathcal{L}$; ils ne contiennent que deux points d'abscisse 0 et 1.

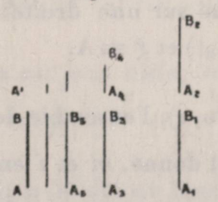
Les plus intéressants pour les applications sont les ensembles de continus; leur ensemble d'accumulation peut être un ensemble fermé absolument quelconque.

3. Soit une infinité d'ensembles $\mathfrak{M}_k \equiv A_k B_k$, le point A_k étant un point d'abscisse $\frac{1}{k}$ sur l'axe des x et $A_k B_k$ un segment de longueur constante de la droite $x=\frac{1}{k}$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$. Ici on a $\mathcal{K} \equiv \mathcal{L} \equiv AB$, le point A étant à l'origine et AB un segment de l'axe des y.

4. Considérons sur chaque droite $x=\frac{1}{k}$ quatre points A_{2k-1}, B_{2k-1}, A_{2k}, B_{2k} ayant respectivement pour ordonnées $0, \frac{1}{2}, 1, 1+\frac{1}{k}$.

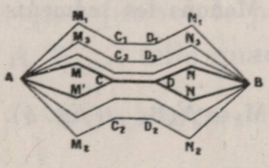
Traçons (*fig.* 1) les segments $A_{2k-1}B_{2k-1}$ et $A_{2k}B_{2k}$ et posons $\mathfrak{M}_k \equiv A_k B_k$. On a ici $\mathcal{K} \equiv AB + A'$ et $\mathcal{L} \equiv 0$.

Fig. 1.



5. Soit une demi-circonférence de diamètre COA_1 et sur cette circonférence une infinité de points, $A_1 A_2 A_3 \ldots A_k \ldots$, tels que $COA_k = \frac{\pi}{2^{k-1}}$. Joignons ces points A_k au point fixe C et soit $\mathfrak{M}_k = A_k C$. Ici on a $\mathcal{K} \equiv \mathcal{L} \equiv C$.

Fig. 2.

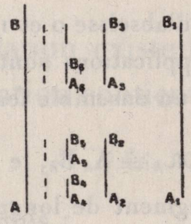


6. Soit une infinité d'ensembles $\mathfrak{M}_k \equiv AM_k C_k D_k N_k B$ (*fig.* 2).

On a : $\mathcal{K} \equiv AMCDNBN'DCM'A$, tandis que $\mathcal{L} \equiv A + CD + B$ seulement; $\mathcal{K}$ est continu, conformément au théorème I (p. 20).

7. Soit une infinité de segments, comme $A_{2k-1}B_{2k-1}$ de l'exemple 3; divisons tous ces segments, excepté le premier, en trois parties égales et enlevons les parties du milieu; soit A_1B_1 le premier segment et A_2B_2 et A_3B_3 les deux segments de la seconde droite.

Fig. 3.

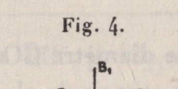


Sans toucher à A_1B_1, A_2B_2 et A_3B_3, subdivisons tous les segments restant en trois parties et enlevons les parties du milieu. Soient : A_4B_4, A_5B_5, A_6B_6 et A_7B_7 les quatre segments de la troisième droite. On continue ainsi indéfiniment et l'on obtient ainsi sur la droite AB un ensemble parfait non dense ; ce sera justement le $\mathcal{K}$ de $\{\mathfrak{M}_k\}$, en posant $\mathfrak{M}_k \equiv A_kB_k$, tandis que $\mathcal{L} \equiv 0$ (*fig.* 3).

8. Joignons par des segments de droites un point fixe A avec les points P_α d'un ensemble parfait non dense, situé sur une droite qui ne passe pas par A. Posons $\mathfrak{M}_\alpha \equiv AP_\alpha$, alors : $\mathcal{K} \equiv \boldsymbol{\mathfrak{M}}\,(\{\mathfrak{M}_\alpha\})$ et $\mathcal{L} \equiv A$.

9. Soit sur le segment $MN \equiv (0, 1)$, l'ensemble de tous les points A_k dont l'abscisse est de la forme $\frac{m}{2^i}$; l'indice k étant donné, m et i en résultent et à un même i correspond, en général, plusieurs k. Menons les segments A_kB_k, perpendiculairement à MN, tels que $A_kB_k = \frac{1}{2^i}$. Posons

Fig. 4.



$$M_k \equiv A_kB_k \quad (\textit{fig. } 4).$$

On a

$$\mathcal{K} \equiv MN \quad \text{et} \quad \mathcal{L} \equiv 0.$$

Cet exemple est intéressant, car il nous met en garde devant une supposition qui paraît toute naturelle, à savoir qu'un ensemble d'accumulation, s'il est continu, peut être regardé comme composé des ensembles limites continus de suites partielles convenablement choisies parmi les ensembles donnés.

Or, l'exemple 9 montre qu'il n'en est rien.

Il montre encore que l'existence d'un ensemble limite n'est nullement une condition nécessaire pour que l'ensemble d'accumulation soit continu.

Avant d'aborder la démonstration d'un lemme important, remarquons qu'il existe pour un ensemble quelconque $\mathcal{E}$, un nombre ε tel que deux points quelconques de cet ensemble peuvent être réunis par une chaîne par rapport à ε. Il suffit de prendre

$$\varepsilon > \max_{A \subset \mathcal{E}} . \rho(A, (\mathcal{E} - A)),$$

A désignant un point variable, contenu dans $\mathcal{E}$.

Lemme. — *Soit* $\{\mathfrak{M}\}$ *un ensemble infini d'ensembles tels que pour toutes les suites possibles*, $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \ldots (\mathfrak{M}_i \not\equiv \mathfrak{M}_k)$

$$\lim_{k=\infty} \left[\max_{A \subset \mathfrak{M}_k} . \rho(A, (\mathfrak{M}_k - A)) \right] = 0.$$

Si son ensemble limite $\mathfrak{L}$ *n'est pas vide, son ensemble d'accumulation* $\mathcal{K}$ *est continu ou se réduit à un point.*

L'ensemble d'accumulation $\mathcal{K}$ étant toujours fermé, il faut démontrer qu'il est bien enchaîné.

Soit L un point de $\mathfrak{L}$ et M un point quelconque de $\mathcal{K}$, c'est-à-dire $M \equiv \lim_{k=\infty} M_k$ où $M_k \subset \mathfrak{M}_k$.

Étant donné un nombre ε, on peut trouver un entier k_0 tel que pour $k \geqq k_0$, $\rho(A_k, \mathcal{K}) < \varepsilon$, quel que soit le point A_k de $\mathfrak{M}_k$. Car autrement on aurait une suite $A_{k_1} A_{k_2} \ldots$ telle que

$$\rho(A_{k_i}, \mathcal{K}) \geqq \varepsilon.$$

Cette inégalité entraîne pour le point limite A_0 de cette suite l'inégalité $\rho(A_0, \mathcal{K}) \geqq \varepsilon$, ce qui est absurde, car $\mathcal{K}$ contient A_0 d'après la définition même d'un ensemble d'accumulation.

Soit donc k_0 un entier tel que, pour $k \geqq k_0$,

(1) $$\rho(M, M_k) < \frac{\varepsilon}{3};$$

(2) $$\rho(A_k, \mathcal{K}) < \frac{\varepsilon}{3};$$

(3) $$\max.[\rho(A_k, (\mathfrak{M}_k - A_k))] < \frac{\varepsilon}{3};$$

(4) $$\rho(L, \mathfrak{M}_k) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit, d'autre part, L_{k_0} un point de $\mathfrak{M}_{k_0}$ pour lequel $\rho(L, L_{k_0}) < \frac{\varepsilon}{3}$ et soit $L_{k_0}, P_1, P_2, \ldots, P_l, M_{k_0}$ une chaîne par rapport à $\frac{\varepsilon}{3}$ dans $\mathfrak{M}_{k_0}$ [cette chaîne existe en vertu de l'inégalité (3)]. Soit encore T_i un point de $\mathcal{K}$ tel que $\rho(P_i, T_i) = \rho(P_i, \mathcal{K}) < \frac{\varepsilon}{3}$. Je dis que les points $L, T_1, T_2, \ldots, T_l, M$ de $\mathcal{K}$ forment une chaîne par rapport à ε entre L et M. En effet,

$$\rho(T_i, T_{i+1}) < \rho(T_i, P_i) + \rho(P_i, P_{i+1}) + \rho(P_{i+1}, T_{i+1}) < \varepsilon.$$

C. Q. F. D.

Une première conséquence directe de ce lemme est le

Théorème I. — *Si l'ensemble limite d'un ensemble de continus n'est pas vide, son ensemble d'accumulation est continu ou se réduit à un point.*

V.

Désignons par $\mathfrak{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ tout ensemble fermé et bien enchaîné (un continu ou un point), qui contient $\mathcal{A}$ et est contenu dans $\mathcal{B}$. Une condition nécessaire d'existence de $\mathfrak{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est que $\mathcal{A}$ soit contenu dans $\mathcal{B}$. Nous désignerons par $\mathfrak{C}_s(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ le $\mathfrak{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *saturé* [par rapport à la propriété d'être un $\mathfrak{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ (1)].

---

(1) On peut pareillement désigner par $\mathfrak{C}_i(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ le $\mathfrak{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ irréductible par rapport à la même propriété. Le théorème I du Chapitre II un peu modifié montre que s'il existe un $\mathfrak{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, et si $\mathcal{A}$ est fermé, il existe au moins un $\mathfrak{C}_i(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

THÉORÈME II. — *$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ étant deux ensembles donnés, si un $\mathfrak{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ existe et si l'ensemble $\mathcal{B}$ est fermé, il existe un et un seul $\mathfrak{C}_s(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.*

Posons

$$\mathcal{M} \equiv \mathfrak{M}(|\mathfrak{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B})|),$$

où $|\mathfrak{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B})|$ désigne l'ensemble de tous les $\mathfrak{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ possibles. Par définition

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{B},$$

d'où, $\mathcal{B}$ étant fermé,

$$\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{M}} \subset \mathcal{B}.$$

Par conséquent, $\overline{\mathcal{M}}$ étant bien enchaîné (XIII) et fermé, est un $\mathfrak{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$; mais comme $\mathcal{M}$ contient tous les $\mathfrak{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ possibles, $\mathcal{M} \supset \overline{\mathcal{M}}$, ce qui entraîne

$$\mathcal{M} \equiv \overline{\mathcal{M}}.$$

$\mathcal{M}$ est donc un $\mathfrak{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ et il est saturé par rapport à cette propriété, car il contient tous les $\mathfrak{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Pour la même raison, il est le seul $\mathfrak{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ qui soit un $\mathfrak{C}_s(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, car tout autre $\mathfrak{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ étant contenu dans $\mathcal{M}$ ne peut pas être saturé par rapport à la propriété considérée.

Désignons par $\mathcal{E}$ l'ensemble de tous les points de l'espace considéré. L'ensemble $\mathcal{E} - \mathcal{A}$ est dit l'ensemble *complémentaire* de $\mathcal{A}$ (1)

A l'aide de cette notation, la frontière de l'ensemble $\mathcal{A}$ (*voir* p. 7) peut s'écrire symboliquement

$$\mathfrak{F}(\mathcal{A}) \equiv \overline{\mathcal{A}} \times (\overline{\mathcal{E} - \mathcal{A}}).$$

THÉORÈME III. — *Si un continu $\mathcal{C}$ a un point commun avec l'ensemble $\mathcal{M}$ et un autre point commun avec l'ensemble complémentaire de ce dernier, il a aussi au moins un point commun avec la frontière de $\mathcal{M}$.*

---

(1) JORDAN. *Cours d'Analyse*, t. I, 2e édition, p. 20.

Supposons, en effet, que

$$\mathcal{C}\times\mathfrak{F}(\mathcal{M})\equiv\mathcal{C}\times[\overline{\mathcal{M}}\times(\overline{\mathcal{Z}-\mathcal{M}})]\equiv 0.$$

Il s'ensuit [VI, (2); III, (2)]

$$\mathcal{C}\times\overline{\mathcal{M}}\times(\overline{\mathcal{Z}-\mathcal{M}})\equiv(\mathcal{C}\times\overline{\mathcal{M}})\times[\mathcal{C}\times(\overline{\mathcal{Z}-\mathcal{M}})]\equiv 0$$

et comme [X^b, (2), et V, (2)]

$$(\mathcal{C}\times\overline{\mathcal{M}})\times[\mathcal{C}\times(\overline{\mathcal{Z}-\mathcal{M}})]\supset(\overline{\mathcal{C}\times\mathcal{M}})\times[\overline{\mathcal{C}\times(\mathcal{Z}-\mathcal{M})}],$$

on a

$$(a)\qquad (\overline{\mathcal{C}\times\mathcal{M}})\times[\overline{\mathcal{C}\times(\mathcal{Z}-\mathcal{M})}]\equiv 0.$$

D'autre part,

$$(b)\qquad \mathcal{C}\equiv\overline{\mathcal{C}}\equiv\overline{\{(\mathcal{C}\times\mathcal{M})+[\mathcal{C}\times(\mathcal{Z}-\mathcal{M})]\}}\equiv(\overline{\mathcal{C}\times\mathcal{M}})+[\overline{\mathcal{C}\times(\mathcal{Z}-\mathcal{M})}].$$

Les relations (*a*) et (*b*) sont incompatibles avec l'hypothèse que $\mathcal{C}$ est continu, car elles expriment que $\mathcal{C}$ se décompose [(*b*)] en deux ensembles fermés sans points communs [(*a*)].

Théorème IV. — *Si le continu $\mathcal{C}$ contient un point* A *qui est un point intérieur d'un ensemble fermé $\mathcal{H}$, il existe un $\mathfrak{C}$(A, $\mathcal{C}\times\mathcal{H}$), qui ne se réduit pas à un seul point, c'est-à-dire il existe un continu contenant le point* A *et contenu dans $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$.*

Soit M un point de $\mathcal{C}-\mathcal{H}$ (si un tel point n'existe pas, le théorème est évident, car alors $\mathcal{C}$ est situé tout entier dans $\mathcal{H}$).

Soit, d'autre part, une suite infinie ε_1, ε_2, ..., de nombres décroissants, tels que

$$\lim_{m=\infty}\varepsilon_m = 0.$$

Par rapport à chaque ε_m, il existe dans $\mathcal{C}$ une chaîne entre A et M : A, $T_1^{(m)}$, $T_2^{(m)}$, ..., $T_{k_m}^{(m)}$, M.

Soit $T_{h_m+1}^{(m)}$ le premier point de cette suite extérieur à $\mathcal{H}$; les points A, $T_1^{(m)}$, ..., $T_{h_m}^{(m)}$ appartiennent tous à $\mathcal{H}$.

L'ensemble d'accumulation $\mathfrak{T}$ de la suite infinie d'ensembles infinis $(A + T_1^{(m)} + \ldots + T_{h_m}^{(m)})$ $(m = 1, 2, \ldots)$ est le continu cherché.

En effet, c'est un sous-ensemble de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{K}$, l'ensemble des points $T_i^{(m)}$ étant contenu dans $\mathcal{C}$ et $\mathcal{K}$ et ces derniers étant fermés. Il contient le point A qui appartient à l'ensemble limite de la même suite d'ensembles, et un point appartenant à la frontière $\mathfrak{f}(\mathcal{K})$, notamment le point

$$T \equiv \lim_{m=\infty} T_{h_m}^{(m)} \equiv \lim_{m=\infty} T_{h_m+1}^{(m)}.$$

Comme, par hypothèse, A n'est pas contenu dans $\mathfrak{f}(\mathcal{K})$, on a

$$A \not\equiv T.$$

L'ensemble limite n'étant pas vide, le lemme de la page 19 s'applique ; or, l'ensemble $\mathfrak{T}$ contenant A et T, ne se réduit pas à un point ; il est donc nécessairement continu.

D'après le théorème II, il existe $\mathfrak{C}(A, \mathcal{C} \times \mathcal{K})$ *saturé ;* si $\mathcal{C}$ n'est pas contenu dans $\mathcal{K}$, ce $\mathfrak{C}_s(A, \mathcal{C} \times \mathcal{K})$ contient un point T de $\mathfrak{f}(\mathcal{K})$, car l'ensemble $\mathfrak{T}$ construit plus haut le contient aussi. Par conséquent, si $\mathcal{K}$ ne contient pas $\mathcal{C}$, nous avons la relation

$$\mathfrak{C}_s(A, \mathcal{C} \times \mathcal{K}) \times \mathfrak{f}(\mathcal{K}) \not\equiv 0.$$

THÉORÈME V. — *Soit $\mathcal{C}$ un continu et $\mathfrak{P}$ un ensemble punctiforme. L'ensemble dérivé de l'ensemble des points de $\mathcal{C}$ qui n'appartiennent pas à $\mathfrak{P}$ est identique à $\mathcal{C}$, c'est-à-dire*

$$(\mathcal{C} - \mathfrak{P})' \equiv \mathcal{C}.$$

En effet, à l'intérieur de *chaque* sphère ayant pour centre un point quelconque C de $\mathcal{C}$, il existe un sous-ensemble continu de $\mathcal{C}$; comme $\mathfrak{P}$ n'a aucun sous-ensemble continu, il existe sur ce sous-ensemble de $\mathcal{C}$ des points qui n'appartiennent pas à $\mathfrak{P}$. Ceci montre que tout point C de $\mathcal{C}$ est le point limite de $\mathcal{C} - \mathfrak{P}$, c'est-à-dire

$$(\mathcal{C} - \mathfrak{P})' \supset \mathcal{C}.$$

D'autre part, $\mathcal{C}$ étant fermé, contient $(\mathcal{C}-\mathfrak{P})'$, donc

$$(\mathcal{C}-\mathfrak{P})' \equiv \mathcal{C}.$$

C. Q. F. D.

Corollaire. — Ce théorème nous montre que l'ensemble des points de deux ensembles discrets est aussi un ensemble discret.

Soient $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$, deux ensembles discrets. Supposons que $\mathfrak{P}_1+\mathfrak{P}_2$ n'est pas discret, c'est-à-dire que l'ensemble $\left(\overline{\mathfrak{P}_1+\mathfrak{P}_2}\right)$ n'est pas punctiforme. Par conséquent

$$\left(\overline{\mathfrak{P}_1+\mathfrak{P}_2}\right) \equiv \overline{\mathfrak{P}_1}+\overline{\mathfrak{P}_2} \supset \mathcal{C},$$

$\mathcal{C}$ désignant un ensemble continu. On a évidemment

$$\overline{\mathfrak{P}_1} \supset \mathcal{C}-\overline{\mathfrak{P}_2},$$

d'où, en vertu du théorème précédent,

$$(\overline{\mathfrak{P}_1})' \supset \mathcal{C},$$

ce qui est absurde, $\mathfrak{P}_1$, donc $\overline{\mathfrak{P}_1}$ et $\left(\overline{\mathfrak{P}_1}\right)'$ étant discrets.

L'ensemble $\mathfrak{P}_1+\mathfrak{P}_2$ est donc discret.

VI.

J'appelle continu de condensation *d'un continu $\mathcal{C}$ tout continu $\mathcal{K}$ composé exclusivement de points limites de l'ensemble des points de $\mathcal{C}$ non contenus dans $\mathcal{K}$, c'est-à-dire un continu $\mathcal{K}$ tel que*

$$(\mathcal{C}-\mathcal{K})' \supset \mathcal{K}.$$

Cette relation est équivalente aux suivantes :

$$\mathcal{C} \supset \mathcal{K},$$
$$(\overline{\mathcal{C}-\mathcal{K}}) \equiv \mathcal{C}\ (^1).$$

(1) Et même $(\mathcal{C}-\mathcal{K})' \equiv \mathcal{C}$, car $\mathcal{C}$ étant continu et $\mathcal{F}$ fermé on a

$$(\mathcal{C}-\mathcal{F})' \supset \mathcal{C}-\mathcal{F}.$$

En effet,

$$(\overline{\mathcal{C}-\mathcal{K}}) \equiv (\mathcal{C}-\mathcal{K}) + (\mathcal{C}-\mathcal{K})' \supset (\mathcal{C}-\mathcal{K}) + \mathcal{K} \supset \mathcal{C}.$$

D'autre part [II, (3); IX],

$$\mathcal{C} \supset \mathcal{C}-\mathcal{K},$$
$$\mathcal{C} \supset (\overline{\mathcal{C}-\mathcal{K}}).$$

Donc

$$\mathcal{C} \equiv (\overline{\mathcal{C}-\mathcal{K}})$$

et

$$\mathcal{C} \supset (\mathcal{C}-\mathcal{K})' \supset \mathcal{K}.$$

Nous distinguerons deux espèces de points faisant partie d'un continu : les points qui n'appartiennent à aucun continu de condensation de ce continu seront dits de *première espèce ;* les points de *seconde espèce* seront ceux qui sont situés sur un continu de condensation.

Les points de première espèce dans le voisinage desquels il n'y a pas de points de seconde espèce, appartiendront à la classe I; tous les autres points de première espèce, à la classe II.

Exemples. — 1. L'ensemble des points (x, y), où pour $0 < x \leqq \frac{2}{\pi}$, $y = \sin \frac{1}{x}$ et pour $x = 0$, $-1 \leqq y \leqq 1$, est un continu. Le segment $(-1, +1)$ de l'axe des y est son continu de condensation.

2. Adjoignons à la figure 4 le segment MN, et considérons le tout comme un seul continu composé des $\mathfrak{M}_k$ et de MN. Ce continu admet MN comme continu de condensation.

3. Considérons la figure de l'exemple 8, comme un seul continu. Chaque segment AP_α est pour cet ensemble un continu de condensation. Cet exemple nous montre qu'un continu de condensation *saturé* peut ne pas exister. Cela tient à ce que le théorème VI qui va suivre, ne peut être généralisé au cas d'un nombre infini de continus de condensation. En effet, $\mathfrak{M}(\{AP_\alpha\})$ est identique ici au continu donné, et ne peut donc pas être son continu de condensation. Le même exemple montre que l'ensemble d'accumulation, même s'il est continu, peut ne pas être un continu de condensation.

4. Toute ligne tracée sur une surface est un continu de condensation de cette surface.

L'ensemble des points de seconde espèce d'un continu donné peut être évidemment non fermé. Il existe donc des points de première espèce et de seconde classe, par exemple le point A de la ligne représentée par la figure 6.

Mais il est particulièrement intéressant de voir que même si tous les points dans le voisinage d'un point sont de deuxième espèce, celui-ci peut cependant être de première espèce. Pour en donner un exemple, nous utiliserons la ligne de la figure 7, dont tous les points sont, comme nous le verrons (théorème IX, Chap. II), de deuxième espèce.

Prenons une suite infinie de ces lignes, toutes semblables entre elles, mais de dimensions tendant vers zéro. Joignons-les de telle façon que les points A_i viennent à coïncider avec les points B_{i-1}, et qu'elles n'aient pas d'autres points communs.

On obtient ainsi une ligne telle que le point limite A des $A_i B_i$ possède la propriété annoncée. Remarquons que la construction de cette figure ne peut être réalisée que dans l'espace à plus de deux dimensions.

Théorème VI. — *Si deux continus de condensation $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$ d'un continu $\mathcal{C}$ ont au moins un point commun entre eux, leur somme $\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2$ est aussi un continu de condensation de $\mathcal{C}$.*

En effet, d'après XIV, $\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2$ est un continu.

D'autre part, comme $\mathcal{C} \supset \mathcal{K}_1$ et $\mathcal{C} \supset \mathcal{K}_2$,

$$\mathcal{C} \supset \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2.$$

Nous avons l'identité suivante [I, (3), et VII, (5)] :

$$\mathcal{C} - (\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2) \equiv \mathcal{C} - [\mathcal{K}_1 + (\mathcal{K}_2 - \mathcal{K}_1)] \equiv (\mathcal{C} - \mathcal{K}_1) - (\mathcal{K}_2 - \mathcal{K}_1)$$

ou, en ajoutant de part et d'autre l'ensemble $\mathcal{K}_2 - \mathcal{K}_1$,

$$\begin{aligned}[\mathcal{C} - (\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2)] + (\mathcal{K}_2 - \mathcal{K}_1) \\ \equiv [(\mathcal{C} - \mathcal{K}_1) - (\mathcal{K}_2 - \mathcal{K}_1)] + (\mathcal{K}_2 - \mathcal{K}_1) \equiv \mathcal{C} - \mathcal{K}_1,\end{aligned}$$

car

$$\mathcal{K}_2 - \mathcal{K}_1 \subset \mathcal{C} - \mathcal{K}_1 \; [\text{IV}, (4)].$$

De cette relation on tire immédiatement (IX)

$$(a) \qquad (\mathcal{C} - \mathcal{K}_1)' \equiv [\mathcal{C} - (\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2)]' + (\mathcal{K}_2 - \mathcal{K}_1)'.$$

Tout pareillement,

$$(b) \qquad (\mathcal{C} - \mathcal{K}_2)' \equiv [\mathcal{C} - (\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2)]' + (\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2)'.$$

D'après notre hypothèse,

$$\mathcal{K}_1 \subset (\mathcal{C} - \mathcal{K}_1)'$$

et

$$\mathcal{K}_2 \subset (\mathcal{C} - \mathcal{K}_2)'.$$

Par conséquent, en vertu de (a) et de (b),

$$(c) \qquad \mathcal{K}_1 \subset [\mathcal{C} - (\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2)]' + (\mathcal{K}_2 - \mathcal{K}_1)',$$

$$(d) \qquad \mathcal{K}_2 \subset [\mathcal{C} - (\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2)]' + (\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2)',$$

c'est-à-dire [II, (1); IV (1)]

$$(e) \qquad \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 \subset [\mathcal{C} - (\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2)]' + (\mathcal{K}_2 - \mathcal{K}_1)' + (\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2)'.$$

D'un autre côté,

$$\mathcal{K}_2 - \mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2,$$

c'est-à-dire (IX)

$$(\mathcal{K}_2 - \mathcal{K}_1)' \subset \mathcal{K}_2;$$

donc, en vertu de (c) et de (d),

$$\mathcal{K}_1 \subset [\mathcal{C} - (\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2)]' + \mathcal{K}_2,$$

de même,

$$\mathcal{K}_2 \subset [\mathcal{C} - (\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2)]' + \mathcal{K}_1.$$

Ces deux relations montrent [I, (4)] que

$$\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2 \subset [\mathcal{C} - (\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2)]'$$

et

$$\mathcal{K}_2 - \mathcal{K}_1 \subset [\mathcal{C} - (\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2)]'$$

c'est-à-dire [IV, (1)]

$$(\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2) + (\mathcal{K}_2 - \mathcal{K}_1) \subset [\mathcal{C} - (\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2)]',$$

ou encore [IX; X^a, (1)]

$$(f) \qquad (\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2)' + (\mathcal{K}_2 - \mathcal{K}_1)' \subset [\mathcal{C} - (\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2)]'.$$

Des relations (c) et (f), on déduit immédiatent [III, (1)]

$$\mathcal{K}_1+\mathcal{K}_2\subset[\mathcal{C}-(\mathcal{K}_1+\mathcal{K}_2)]',$$

ce qui montre bien que $\mathcal{K}_1+\mathcal{K}_2$ est continu de condensation de $\mathcal{C}$ (¹).

THÉORÈME VII. — *Si les continus $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ..., $\mathcal{C}_k$ (k fini) n'ont pas de continu de condensation, l'ensemble $\mathcal{C}_1+\mathcal{C}_2+\ldots+\mathcal{C}_k$ (dans le cas où il est un continu) n'en a pas non plus.*

Supposons, en effet, que $\mathcal{C}_1+\mathcal{C}_2+\ldots+\mathcal{C}_k$ contienne un continu de condensation $\mathcal{K}$, c'est-à-dire que

$$[(\mathcal{C}_1+\mathcal{C}_2+\ldots+\mathcal{C}_k)-\mathcal{K}]'\supset\mathcal{K}$$

ou encore [VII, (3), et IX]

$$(\mathcal{C}_1-\mathcal{K})'+(\mathcal{C}_2-\mathcal{K})'+\ldots+(\mathcal{C}_k-\mathcal{K})'\supset\mathcal{K}.$$

De cette relation, on tire [III, (2)]

$$[(\mathcal{C}_1-\mathcal{K})'+\ldots+(\mathcal{C}_k-\mathcal{K})']\times\mathcal{K}\equiv\mathcal{K},$$

c'est-à-dire [VII, (2)]

$$[(\mathcal{C}_1-\mathcal{K})'\times\mathcal{K}]+[(\mathcal{C}_2-\mathcal{K})'\times\mathcal{K}]+\ldots+[(\mathcal{C}_k-\mathcal{K})'\times\mathcal{K}]\equiv\mathcal{K}.$$

Cette relation montre qu'au moins un des ensembles $(\mathcal{C}_i-\mathcal{K})'\times\mathcal{K}$ n'est pas punctiforme.

En effet, si les ensembles fermés (d'après XI) $(\mathcal{C}_i-\mathcal{K})'\times\mathcal{K}$ étaient punctiformes, ils seraient discrets.

Or le théorème V (Corollaire) montre que l'ensemble des points d'un nombre fini d'ensembles discrets est également discret. L'ensemble des points de tous les $(\mathcal{C}_i-\mathcal{K})'\times\mathcal{K}$ ne pourrait donc être identique à un continu $\mathcal{K}$.

Par conséquent, un des ensembles $(\mathcal{C}_i-\mathcal{K})'\times\mathcal{K}$ n'est pas puncti-

(¹) La forme actuelle de cette démonstration est due à M. Moszkowski; elle est une simplification considérable de ma démonstration primitive.

forme, c'est-à-dire qu'il contient un continu $\mathcal{K}_1$,

$$(\mathcal{C}_{i_1} - \mathcal{K})' \times \mathcal{K} \supset \mathcal{K}_1.$$

De cette relation, nous tirons [II, (2)]

$$\mathcal{K} \supset \mathcal{K}_1$$

d'où [V, (3), et IX]

$$(\mathcal{C}_{i_1} - \mathcal{K}_1)' \supset (\mathcal{C}_{i_1} - \mathcal{K})' \supset \mathcal{K}_1.$$

$\mathcal{C}_{i_1}$ contiendrait donc un continu de condensation $\mathcal{K}_1$, contrairement à l'hypothèse.

THÉORÈME VIII. — *Si l'ensemble d'accumulation d'un ensemble infini de continus $\mathcal{C}_\alpha$ qui n'ont deux à deux aucun point commun (c'est-à-dire tels que $\mathcal{C}_\alpha \times \mathcal{C}_\beta \equiv 0$, $\alpha \neq \beta$) est un continu, tout continu $\mathcal{C}$, dont les $\mathcal{C}_\alpha$ sont des sous-ensembles, admet un continu de condensation.*

Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble d'accumulation de $\{\mathcal{C}_\alpha\}$. Deux cas sont possibles : 1° l'ensemble $\mathcal{C}_\alpha \times \mathcal{H}$ est punctiforme (ou vide) quel que soit α; 2° il existe un $\mathcal{C}_{\alpha_1}$ tel que $\mathcal{C}_{\alpha_1} \times \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_1$ désignant un continu.

Dans le premier cas nous avons [VIII, (3); X; I, (4), et Th. V]

$$\begin{aligned}(\mathcal{C} - \mathcal{H})' &\supset [\mathfrak{M}(\{\mathcal{C}_\alpha\}) - \mathcal{H}]' \\ &\equiv \mathfrak{M}'(\{\mathcal{C}_\alpha - \mathcal{H}\}) \supset \mathfrak{M}\{(\mathcal{C}_\alpha - \mathcal{H})'\} \equiv \mathfrak{M}(\{\mathcal{C}_\alpha\}),\end{aligned}$$

d'où

$$(\mathcal{C} - \mathcal{H})' \supset \mathfrak{M}'(\{\mathcal{C}_\alpha\}) \supset \mathcal{H}.$$

C. Q. F. D.

Dans le second cas, les $\mathcal{C}_\alpha$ n'ayant pas deux à deux de points communs entre eux, $\mathcal{H}_1$ n'a aucun point commun avec l'ensemble de $\mathcal{C}_\alpha$, d'où l'on a exclu $\mathcal{C}_{\alpha_1}$, l'ensemble que nous désignerons par $\{\mathcal{C}_\alpha\}_1$. Nous avons donc

$$(a) \qquad \mathfrak{M}(\{\mathcal{C}_\alpha\}_1) \times \mathcal{H}_1 \equiv 0.$$

L'ensemble d'accumulation de $\{\mathcal{C}_\alpha\}_1$ est évidemment le même que celui de $\{\mathcal{C}_\alpha\}$. Par conséquent

$$\mathfrak{M}'(\{\mathcal{C}_\alpha\}_1) \supset \mathcal{H}_1.$$

D'autre part,

$$(\mathfrak{C} - \mathfrak{K}_1)' \supset [\mathfrak{M}(\{\mathfrak{C}_\alpha\}_1) - \mathfrak{K}_1]' \equiv \mathfrak{M}'(\{\mathfrak{C}_\alpha\}_1)$$

en vertu de la relation (a). D'où

$$(\mathfrak{C} - \mathfrak{K}_1)' \supset \mathfrak{K}_1$$

$\mathfrak{K}_1$ est donc un continu de condensation de $\mathfrak{C}$. C. Q. F. D.

Théorème IX. — *Le continu de condensation est un invariant de l'Analysis situs.*

Soit un continu $\mathfrak{C}_1$ équivalent à un autre continu $\mathfrak{C}_2$ et soit $\mathfrak{K}_1$ le continu de condensation de $\mathfrak{C}_1$. Je dis que le sous-ensemble continu $\mathfrak{K}_2$ de $\mathfrak{C}_2$, qui correspond dans cette transformation à $\mathfrak{K}_1$, est continu de condensation de $\mathfrak{C}_2$. En effet, à $\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{K}_1$ correspond évidemment $\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{K}_2$ et par suite à $(\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{K}_1)'$, l'ensemble $(\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{K}_2)'$; mais $(\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{K}_1)'$ étant, par hypothèse, identique à $\mathfrak{C}_1$, c'est $\mathfrak{C}_2$ qui lui correspond. Par conséquent

$$(\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{K}_2)' \equiv \mathfrak{C}_2.$$

C. Q. F. D.

CHAPITRE II.

CONTINU IRRÉDUCTIBLE ENTRE DEUX POINTS.

I.

Nous appelons CONTINU IRRÉDUCTIBLE ENTRE A ET B, *ou* AB *tout court, un continu, contenant les points* A *et* B, *dont on ne peut enlever aucune partie sans qu'il cesse d'être continu ou de contenir* A *et* B *à la fois* (¹).

(¹) *Voir* Zoretti, *Annales de l'École Normale*, t. XXVI, 1909, et *Leçons sur le prolongement analytique professées au Collège de France*, 1908-1909.

En d'autres termes $\mathcal{C}$ est un AB si $\mathcal{C} \supset A + B$ et si tout $\mathfrak{C}(A+B, \mathcal{C})$ est identique à $\mathcal{C}$.

THÉORÈME I. — *Soient* M *et* N *deux points quelconques d'un continu* $\mathcal{C}$. *Il existe au moins un continu irréductible* MN, *sous-ensemble de* $\mathcal{C}$ (1).

LEMME I. — *Soit* $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ *une suite infinie d'ensembles* $\mathfrak{K}(A, B)$ (2), *tels que tout précédent contient le suivant :*

$$(a) \qquad \mathfrak{M}_k \supset \mathfrak{M}_{k+1}.$$

L'ensemble $\mathfrak{M}_\omega \equiv \mathfrak{D}(\{\mathfrak{M}_k\})$ *est un* $\mathfrak{K}(A, B)$.

$\mathfrak{M}_\omega$ est l'ensemble d'accumulation de $\{\mathfrak{M}_k\}$; en effet $\mathfrak{D}(\{\mathfrak{M}_k\})$ fait évidemment partie de l'ensemble limite de $\{\mathfrak{M}_k\}$; et réciproquement, soit M_ω le point limite d'une suite quelconque

$$M_{k_1}, \quad M_{k_2}, \quad \ldots \qquad \text{ou} \qquad M_i \subset \mathfrak{M}_i$$

et $k_i < k_{i+1}$. On a en vertu de (a)

$$\mathfrak{M}_i \supset M_{i+p} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots)$$

et comme $\mathfrak{M}_i$ est fermé

$$\mathfrak{M}_i \supset M_\omega,$$

d'où

$$\mathfrak{D}(\{\mathfrak{M}_i\}) \supset M_\omega.$$

En vertu du lemme (p. 19) du Chapitre I, on voit facilement que $\mathfrak{M}_\omega$ est un $\mathfrak{K}(A, B)$.

LEMME II. — *Tout* $\mathfrak{K}(A, B)$ *contient un* $\mathfrak{K}(A, B)$ IRRÉDUCTIBLE.

---

(1) JANISZEWSKI, *Comptes rendus*, t. CLI (voir Note II), et MAZURKIEWICZ, *Comptes rendus*, t. CLI. Je reproduis ici presque textuellement cette dernière Note, sauf la démonstration du Lemme I. — M. Zoretti a signalé (*Comptes rendus*, t. CLI) qu'il possède aussi une démonstration de ce théorème.

(2) Suivant la notation de M. Mazurkiewicz, je désigne par $\mathfrak{K}(A, B)$ un ensemble possédant les propriétés suivantes : 1° il est fermé; 2° il contient A et B; 3° il est impossible de le décomposer en deux ensembles fermés sans points communs, dont l'un contiendrait A, l'autre B.

Définissons une opération $f_k(\mathcal{E})$ où $\mathcal{E}$ est un $\mathfrak{K}(A, B)$, de la façon suivante. Soit $\mathfrak{Q}$ un cube à n dimensions qui enferme $\mathcal{E}$, c'est le *cube fondamental*. Décomposons $\mathfrak{Q}$ à l'aide des plans parallèles équidistants en k^n cubes que nous rangeons d'une manière déterminée en une suite $\mathfrak{Q}_k^{(1)}$, $\mathfrak{Q}_k^{(2)}, \ldots, \mathfrak{Q}_k^{(k^n)}$. Soit $\mathfrak{P}_k^{(i)}$ l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ situés à l'intérieur de $\mathfrak{Q}_k^{(i)}$; nous formons la suite

$$\mathcal{E}^{(0)}, \quad \mathcal{E}^{(1)}, \quad \ldots, \quad \mathcal{E}^{(k^n)}$$

où

$$\mathcal{E}^{(0)} \equiv \mathcal{E}; \qquad \mathcal{E}^{(i+1)} \equiv \mathcal{E}^{(i)} - \mathfrak{P}_k^{(i+1)}, \quad \text{si} \quad \mathcal{E}^{(i)} - \mathfrak{P}_k^{(i+1)} \text{ est un } \mathfrak{K}(A, B)$$

et

$$\mathcal{E}^{(i+1)} \equiv \mathcal{E}^{(i)} \quad \text{si} \quad \mathcal{E}^{(i)} - \mathfrak{P}_k^{(i+1)} \text{ n'est pas uu } \mathfrak{K}(A, B).$$

Nous posons

$$f_k(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^{(k^n)}.$$

Soit $\mathcal{A}$ un $\mathfrak{K}(A, B)$ quelconque. Formons la suite

$$\mathcal{A}_1, \quad \mathcal{A}_2, \quad \ldots$$

où

$$\mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}, \qquad \mathcal{A}_{i+1} \equiv f_{i+1}(\mathcal{A}_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

toutes les opérations f_i étant exécutées par rapport au même cube fondamental $\mathfrak{Q}$. Tout $\mathcal{A}_i$ est un $\mathfrak{K}(A, B)$; $\mathcal{A}_i \supset \mathcal{A}_{i+1}$, donc d'après le lemme I,

$$\mathcal{A}_\omega \equiv \mathfrak{D}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots)$$

est un $\mathfrak{K}(A, B)$.

Je dis que c'est un $\mathfrak{K}(A, B)$ irréductible, car autrement il existerait un $\mathfrak{K}(A, B)$, sous-ensemble de $\mathcal{A}_\omega$, que nous désignerons par $\mathcal{B}$.

Soit alors R un point de $\mathcal{A}_\omega - \mathcal{B}$; il y aurait évidemment une infinité d'entiers k tels que : 1° R est à l'intérieur du cube $\mathfrak{Q}_k^{(i)}$; 2° l'arête de ce cube est plus petite que $\frac{\rho(R, \mathcal{B})}{\sqrt{n}}$ (¹) et le cube ne renferme, par suite, aucun point de $\mathcal{B}$.

(¹) $\sqrt{n}$ c'est la longueur de la diagonale d'un cube à n dimensions, dont l'arête est égale à 1.

Considérons la suite qui définit $\mathcal{A}_k$

$$\mathcal{A}_{k-1}^{(0)}, \quad \mathcal{A}_{k-1}^{(1)}, \quad \ldots, \quad \mathcal{A}_{k-1}^{(i-1)}, \quad \mathcal{A}_{k-1}^{(i)}, \quad \ldots, \quad \mathcal{A}_{k-1}^{(k^n)},$$

où

$$\mathcal{A}_{k-1}^{(0)} \equiv \mathcal{A}_{k-1}; \qquad \mathcal{A}_{k-1}^{(k^n)} \equiv \mathcal{A}_k.$$

$\mathcal{A}_{k-1}^{(i-1)} - \mathcal{P}_k^{(i)}$ est fermé et contient $\mathcal{B}$, donc c'est un $\mathfrak{K}(A, B)$; par suite

$$\mathcal{A}_{k-1}^{(i)} = \mathcal{A}_{k-1}^{(i-1)} - \mathcal{P}_k^{(i)}.$$

Cette relation montre que $\mathcal{A}_{k-1}^{(i)}$ et *a fortiori* $\mathcal{A}_k$ et $\mathcal{A}_\omega$ ne contiennent pas R, contrairement à l'hypothèse. $\mathcal{A}_\omega$ est donc bien un $\mathfrak{K}(A, B)$ irréductible.

LEMME III. — *Tout* $\mathfrak{K}(A, B)$ *irréductible est un continu irréductible* AB

Il suffit de montrer que la décomposition de l'ensemble $\mathcal{A}$ qui est un $\mathfrak{K}(A, B)$ irréductible, en deux ensembles fermés sans points communs, est impossible.

Supposons, en effet, le contraire et soit

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{M} + \mathcal{N}$$

une telle décomposition. Si A est contenu dans $\mathcal{M}$, il en sera de même de B, et comme $\mathcal{M}$ n'est pas un $\mathfrak{K}(A, B)$, tout en étant fermé et contenant A et B, il existera une décomposition

$$\mathcal{M} \equiv \mathcal{P} + \mathcal{Q},$$

où $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont fermés et sans points communs et où $\mathcal{P} \supset A$ et $\mathcal{Q} \supset B$.

La décomposition

$$\mathcal{A} \equiv (\mathcal{P} + \mathcal{N}) + \mathcal{Q},$$

montre que $\mathcal{A}$ n'est pas un $\mathfrak{K}(A, B)$, contrairement à l'hypothèse.

La réciproque de ce lemme est évidemment vraie; on peut donc dire qu'un *continu irréductible* AB, *c'est un* $\mathfrak{K}(A, B)$ *irréductible.*

$\mathcal{C}$ étant un continu, M et N deux de ses points, $\mathcal{C}$ est évidemment un $\mathfrak{K}(M, N)$; il contient donc d'après le lemme II un $\mathfrak{K}(M, N)$ irréductible, c'est-à-dire (lemme III) un continu irréductible MN. C. Q. F. D.

Entre deux points A et B d'un continu quelconque $\mathcal{C}$ il peut exister plusieurs continus irréductibles AB; dans ce cas je les distingue entre eux par des indices : $(AB)_1$, $(AB)_2$, etc. Les formules où figure le symbole AB sans indice s'appliquent à tous les AB possibles sur le continu donné. Autrement elles ne s'appliquent qu'à l'arc irréductible déterminé par l'indice.

Théorème II. — *Un continu irréductible n'est composé que de points frontières* (1).

En effet, il est toujours possible d'enlever une partie d'un continu ayant un point intérieur et contenant les points A et B, sans qu'il cesse d'être continu et contenir A et B. Il suffit de circonscrire autour du point intérieur une sphère ne contenant que les points du continu donné et d'enlever tous les points *intérieurs* à cette sphère.

L'ensemble de points qui restent est fermé, car aucun de ses points limites ne peut se trouver à l'intérieur de la sphère enlevée; il est de plus bien enchaîné : soit, en effet, $M, T_1, \ldots, T_m, N$ une chaîne quelconque et soit T_k le premier point intérieur à la sphère enlevée et T_l le dernier. Soit T' et T'' les points d'intersection des segments $\overline{T_{k-1}T_k}$ et $\overline{T_lT_{l+1}}$ avec la surface de la sphère. Sur cette surface on peut évidemment trouver une chaîne $T', T'_1, \ldots, T'_i, T''$; la chaîne

$$M, T_1, \ldots, T_{k-1}, T', T'_1, \ldots, T'_i, T'', T_{l+1}, \ldots, N$$

est la chaîne cherchée.

Exemples. — 1. Soient A et B deux points d'une droite; le segment AB est le continu irréductible AB.

2. Soient A et B deux points d'un cercle, les deux arcs AB sont deux continus irréductibles $(AB)_1$ et $(AB)_2$.

Ces exemples montrent, dans le cas où le continu donné est une courbe *honnête*, qu'un continu irréductible AB correspond à un *arc* AB (au sens vulgaire) de cette courbe.

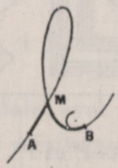
---

(1) *Voir* Zoretti, *Annales de l'École Normale*, t. XXVI, p. 487; je reproduis ici sa démonstration en la détaillant.

Or, *continu irréductible entre* A *et* B, *c'est précisément le plus simple moyen*, me paraît-il, *de définir d'une façon purement géométrique un segment* AB, *un arc* AB, *de découper*, pour ainsi dire, *une ligne entre les points* A *et* B.

3. Sur le continu de la figure 5, c'est AMB qui est le continu irréductible AB. Cet exemple montre clairement le rôle essentiel de la notion de continu irréductible AB qui consiste dans la simplification apportée.

Fig. 5.



Cependant il ne faut pas s'imaginer qu'un continu irréductible entre deux points soit toujours une figure géométrique très simple. Au contraire, il peut être très compliqué, *aussi compliqué qu'on veut, car un ensemble continu quelconque de l'espace euclidien à* $n-1$ *dimensions peut être un sous-ensemble d'un continu irréductible entre deux points d'un espace à* n *dimensions* [1].

4. La ligne définie par les conditions analytiques suivantes :

$$y = \sin\frac{1}{x} \qquad \text{pour} \qquad \frac{1}{\pi} \geqq x > 0$$

et

$$-1 \leqq y \leqq 1 \qquad \text{pour} \qquad x = 0;$$

est un continu irréductible entre les points $\left(\frac{1}{\pi}, 0\right)$ et $(0, 0)$.

5. La figure 6 représente un continu irréductible entre A et B. Il se compose : 1° d'une infinité indénombrable de carrés concentriques qui découpent sur les diagonales un ensemble de points parfait non dense, et qui sont réunis par des spirales, de façon que toute spirale admet l'un d'eux comme carré asymptotique; 2° d'une ligne s'approchant asymptotiquement à une ligne de la forme équivalente à la courbe $y^2 = \sin\frac{1}{x}$.

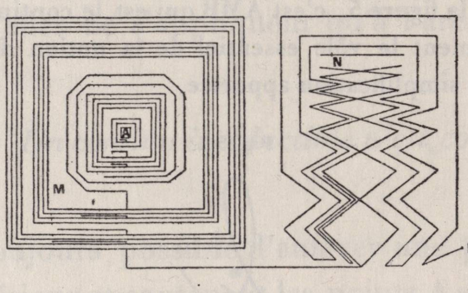
Cet exemple montre clairement qu'un continu irréductible AB peut avoir des points multiples, qu'il peut, si on le considère dans le plan, diviser le plan en plusieurs parties [2], qu'il peut contenir une infinité indénombrable de courbes fermées, etc.

---

(1) *Voir* pour la démonstration l'exemple 8, p. 38.
(2) M. Zoárd de Geöcze a donné en 1908 un exemple d'un tel continu.

Il peut même être une courbe fermée au sens de M. Schœnflies, car l'exemple que M. Brouwer a donné d'une telle courbe fermée ([1]), représente en même temps un con-

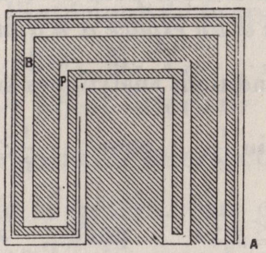
Fig. 6.



tinu qui est irréductible entre les points P et P′.

6. La figure 7 (qui n'est qu'une simplification de la figure citée plus haut de M. Brouwer), représente un continu irréductible entre A et B, pourvu que le point B soit

Fig. 7.



pris sur un segment, qui ne délimite pas une portion du plan couverte de hachures. Elle est construite de la façon suivante : soit sur la base A_1A d'un carré une suite $A_1, A_1', A_2, A_2', \ldots$ telle que $\overline{A_{k+1}A} = \frac{1}{3}\overline{A_kA}$ et $\overline{A_k'A} = \frac{2}{3}\overline{A_kA}$. Notre figure se compose : 1° de la ligne brisée AA_1, formée de trois autres côtés du carré ; 2° du segment $\overline{A_1A_1'}$; 3° de la ligne brisée $A_1'A_2$ parallèle à A_1A ; 4° du segment $\overline{A_2A_2'}$; 5° de la ligne brisée $A_2'A_3$ parallèle à la ligne $A_2A_1' + \overline{A_1'A_1} + A_1A$; et ainsi de suite.

Ce continu, comme on le voit, est entièrement composé de continus de condensation.

D'après le théorème II, un continu irréductible entre deux points de l'espace euclidien, n'a pas de points intérieurs. Cela suffit pour qu'on puisse en conclure que, dans le plan, un continu irréductible entre deux points représente une ligne (cantorienne). Mais dans l'espace à n ($n \geqq 3$) dimensions, un continu irréductible entre

([1]) *Zur Analysis situs* (*Math. Ann.*, t. LXVIII), *fig.* 2.

deux points peut contenir, comme le montre l'exemple 8, une portion quelconque d'un plan à $(n-1)$ dimensions.

7. Soit dans le plan des xy une épicycloïde Π telle que le centre du cercle fixe soit à l'origine en O et que le rayon r_1 de ce cercle soit incommensurable avec le rayon r_2 du cercle mobile. Une telle épicycloïde représente un ensemble partout dense dans toute la partie du plan xy comprise entre les deux cercles de centre O et de rayon r_2 et r_1+2r_2 respectivement. D'autre part, considérons la surface réglée :

$$x \sin \frac{1}{z} + y \cos \frac{1}{z} = 0,$$

qui est analogue à une surface hélicoïdale, avec cette différence que ses feuilles viennent se condenser en nombre infini au voisinage du plan xy [1].

Prenons un point (x_0, y_0) de l'épicycloïde et un point A (x_0, y_0, z_0) de la surface. Faisons correspondre à chaque point (x, y) de l'épicycloïde un point (x, y, z) de la surface de telle sorte, que, si le point (x_0, y_0) se déplaçant d'une manière continue, arrive à coïncider avec le point (x, y), le point A vienne à coïncider avec le point (x, y, z), en décrivant également une ligne continue Λ. Pour une direction convenable du mouvement du point de l'épicycloïde, le z du point correspondant de la surface tendra vers zéro. Soit B un point $(x_1, y_1, 0)$ tel que

$$r_1 \leqq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \leqq r_1 + 2r_2.$$

Le continu irréductible AB *contient la portion du plan entre les deux cercles de centre* O *et de rayon r_2 et r_1+2r_2 respectivement.*

En effet, chaque point M de cette portion du plan est un point limite des points de la ligne Λ, située sur la surface ; car, quel que soit ε, on peut trouver un point P de Π tel que

$$\rho(\mathrm{M}, \mathrm{P}) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

et que

$$z = \rho(\mathrm{P}, \mathrm{L}) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},$$

en désignant par L le point de Λ qui correspond au point P de Π. On a alors

$$\rho(\mathrm{M}, \mathrm{L}) < \varepsilon,$$

ce qui justifie notre assertion.

---

[1] Le plan $\frac{y}{x} = \operatorname{tang} \alpha$ coupe la surface considérée suivant une série infinie de droites parallèles qui sont données par l'équation $z = \frac{1}{n\pi - \alpha}$, avec $n = 1, 2, 3, \ldots$

8. Soit $\mathfrak{C}$ un continu quelconque sur le plan $x_n = 0$.

Considérons une série de plans parallèles :

$$x_n = 1, \quad x_n = \frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{1}{k}, \quad \ldots.$$

Partageons ensuite chaque plan

$$x_n = \frac{1}{k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

par le réseau de plans :

$$x_i = \frac{h}{2^k} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3, \ldots, n-1 \\ h = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots \end{pmatrix};$$

nous décomposerons ainsi chaque plan en petits cubes de $(n-1)$ dimensions; dans un même plan, les arêtes de ces cubes sont toutes égales entre elles et tendent vers zéro avec $\frac{1}{k}$, quand on passe d'un plan au suivant.

Considérons l'ensemble $\mathcal{E}$ des sommets de ceux de ces cubes dont les projections sur le plan $x_n = 0$, contiennent les points de $\mathfrak{C}$.

Sur chaque plan $x_n = \frac{1}{k}$ il n'y a qu'un nombre fini de tels sommets, donc on peut les réunir par des lignes polygonales, en commençant par n'importe lequel d'entre eux, soit A_k, et cela de telle façon que l'ensemble de ces lignes forme une ligne polygonale qui : 1° ne se rencontre pas et ne soit pas fermée; 2° qui contienne tous les sommets en question, et 3° qui soit située entièrement dans les cubes en question et les cubes voisins (c'est-à-dire dans des cubes ayant comme sommet au moins un sommet de l'espèce indiquée).

Soit B_k le dernier sommet auquel on arrive en suivant la ligne polygonale en question; $A_k B_k$ représente alors évidemment un continu irréductible. Joignons B_k par un segment de droite avec le sommet le plus voisin situé sur le plan $x_n = \frac{1}{k+1}$ et appartenant à l'ensemble des sommets considérés $\mathcal{E}$; soit A_{k+1} ce sommet. Faisons dans le plan $x_n = \frac{1}{k+1}$, ce que nous avons fait dans le plan $x_n = \frac{1}{k}$; on arrive ainsi au dernier sommet B_{k+1} et ainsi de suite. Soit C un point de $\mathfrak{C}$. Je dis que la ligne polygonale $\mathfrak{P} \equiv A_1 B_1 A_2 B_2 \ldots$, plus le continu $\mathfrak{C}$, est un continu irréductible $A_1 C$. Nous allons montrer, en effet, que $\mathfrak{P} + \mathfrak{C}$ est continu, contient A_1 et C et est irréductible par rapport à ces deux propriétés.

Je dis que

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{C} \equiv \overline{\mathfrak{P}},$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{C} \equiv \overline{\mathfrak{P}} - \mathfrak{P} \equiv \mathfrak{P}' - \mathfrak{P}.$$

En effet, $\mathfrak{P}' - \mathfrak{P}$ est situé entièrement dans le plan $x_n = 0$, car les points de $\mathfrak{P}$ pour lesquels $x_n \geqq \frac{1}{k}$ forment un ensemble fermé, quel que soit k, et tous les points de $\mathfrak{P}$ ont la coordonnée $x_n > 0$. Dans le plan $x_n = 0$ il n'y a pas de points appartenant à $\mathfrak{P}$. Il suffit donc de montrer qu'un point M du plan $x_n = 0$ appartient à $\mathfrak{P}'$ ou ne lui appartient pas, suivant que M est ou n'est pas un point de $\mathfrak{S}$. Dans le premier cas, c'est-à-dire si M est un point de $\mathfrak{S}$, on peut faire correspondre à tout nombre ε un entier k tel que

$$\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{n-1}}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$$

($\sqrt{n-1}$ c'est la longueur de la diagonale d'un cube à $n-1$ dimensions).

Dans le plan $x_n = \frac{1}{k}$ considérons un cube de notre réseau, tel que le point M appartienne à la projection de ce cube sur le plan $x_n = 0$. Soit P un des sommets de ce cube qui a ses arêtes égales à $\frac{1}{2^k}$. On a alors évidemment, $\rho(\mathrm{M}, \mathrm{P}) < \varepsilon$ et M appartient, par conséquent, à $\mathfrak{P}'$.

Dans le second cas, c'est-à-dire si M n'est pas un point de $\mathfrak{S}$, on a

$$\rho(\mathrm{M}, \mathfrak{S}) > 0.$$

Soit k un entier tel que

$$2\frac{\sqrt{n-1}}{2^k} < \frac{\rho(\mathrm{M}, \mathfrak{S})}{2},$$

et soit a une quantité fixe telle que

$$a < \frac{\rho(\mathrm{M}, \mathfrak{S})}{2}, \qquad a < \frac{1}{k}.$$

On a alors

$$\rho(\mathfrak{P}, \mathrm{M}) > a \neq 0,$$

et par suite $\mathfrak{P}'$ ne contient pas M.

C. Q. F. D.

L'ensemble $\mathfrak{P} + \mathfrak{S} \equiv \overline{\mathfrak{P}}$ est bien enchaîné, car $\mathfrak{P}$ est bien enchaîné.

$\mathfrak{P} + \mathfrak{S}$ est donc un $\mathfrak{K}$ (A_1, C) continu.

Il est *irréductible*. En effet, on ne peut enlever aucun point de $\mathfrak{P}$ sans que A_1 et C cessent d'être bien enchaînés entre eux ou sans que l'ensemble en question cesse d'être fermé. Or, en laissant à $\mathfrak{P}$ tous ces points, on ne peut enlever aucun point de $\mathfrak{S}$ sans que $\mathfrak{P} + \mathfrak{S}$ cesse d'être fermé, en vertu de la relation $\mathfrak{P}' \supset \mathfrak{S}$.

Si $\mathfrak{S}$ est une portion du plan à $(n-1)$ dimensions $x_n = 0$, par exemple, une sphère, le continu $\mathrm{A}_1\mathrm{C}$ contiendra cette sphère. Dès lors, il semblerait que la proposition que nous avons énoncée à la page 35, est vraie non seulement pour un continu, mais pour un ensemble quelconque de l'espace à $(n-1)$ dimensions, car cet ensemble peut être un sous-ensemble d'une sphère à $(n-1)$ dimensions, et, par suite, du continu irréductible A_1C.

Mais ce n'est pas dans ce sens banal, que nous avons énoncé cette proposition. Son sens véritable se trouve précisé par la construction même de l'exemple 8, et c'est dans ce cas seulement qu'elle présente un intérêt véritable; cette proposition peut s'énoncer de la façon suivante : *Tout continu situé sur un plan de* $n-1$ *dimensions peut être un continu de condensation* SATURÉ *d'un continu irréductible* AB *dans l'espace à n dimensions.*

Théorème III. — *Soit* M *un point quelconque d'un continu irréductible* AB. *Je dis que*

$$AM + BM \equiv AB,$$

quels que soient les continus irréductibles AM *et* BM *situés sur* AB (qui existent d'après le théorème I).

On a d'abord [IV, (1), Chap. I]

$$AM + BM \subset AB.$$

D'autre part, AM + BM est un continu et, comme il contient A et B, il résulte de la définition d'un continu irréductible que nécessairement

$$AM + BM \equiv AB.$$

C. Q. F. D.

Remarque. — Il est évident que ce théorème s'applique aussi à tout $\mathfrak{K}(A, M)$ et $\mathfrak{K}(B, M)$ situé sur AB.

Théorème IV. — *Étant donnés deux continus irréductibles* AB *et* BC, *n'ayant qu'un seul point commun* B, *leur somme est un continu irréductible* AC.

C'est-à-dire que si

$$(a) \qquad AB \times BC \equiv B,$$

on a

$$AB + BC \equiv AC.$$

En effet, $AB + BC$ est un continu (XIV, Ch. I), donc un $\mathfrak{K}(A, C)$. Supposons qu'il ne soit pas irréductible, c'est-à-dire qu'il existe un $\mathfrak{K}(A, C)$ continu $\mathcal{S}$, qui soit un vrai [1] sous-ensemble de $AB + BC$.

$\mathcal{S}$ doit nécessairement contenir B, car autrement on pourrait le décomposer en deux ensembles fermés, $\mathcal{S} \times AB$ et $\mathcal{S} \times BC$, n'ayant, d'après (a), aucun point commun, ce qui est évidemment absurde.

Soit M un point de $AB + BC$, non contenu dans $\mathcal{S}$. Comme M est différent de B, il est contenu soit dans AB seulement, soit dans BC seulement.

Supposons que $AB \supset M$. Par conséquent, $\mathcal{S}$ ne contient pas AB.

L'ensemble $AB \times \mathcal{S}$ ne peut pas être un $\mathfrak{K}(A, B)$, car c'est un vrai sous-ensemble de AB; par conséquent, il peut être décomposé en deux ensembles fermés sans points communs $\mathcal{H}_A$ et $\mathcal{H}_B$, dont l'un contient A et l'autre B. L'ensemble $\mathcal{S}$ sera décomposé ainsi en trois ensembles $\mathcal{H}_A$, $\mathcal{H}_B$ et $\mathcal{S} - AB$, et l'on déduit facilement de la proposition XVI (Ch. I) que les ensembles $\left(\overline{\mathcal{S} - AB}\right)$ et $\mathcal{H}_A$ ont un point commun P.

Ce point P est différent de B, car $\mathcal{H}_A$ ne contient pas B. Or $\mathcal{H}_A$ est contenu dans AB, tandis que $\mathcal{S} - AB$, donc aussi (IX, Ch. I) $\left(\overline{\mathcal{S} - AB}\right)$ est contenu dans BC, d'où il s'ensuit que AB et BC auraient en commun le point P, contrairement à l'hypothèse.

Le théorème est donc démontré.

THÉORÈME V. — *Si sur un continu quelconque* $\mathcal{S}$, *entre les points* A *et* B, *existe seulement* UN *continu irréductible* AB, *et si* C *est un point de* AB, *tout* $(AC)_1$ *situé sur* $\mathcal{S}$ *et contenant* B *est identique à* AB.

En effet, il existe (Th. I), sur $(AC)_1$, un continu irréductible entre A et B qui, $(AC)_1$ étant un sous-ensemble de $\mathcal{S}$, ne peut être autre que AB.

[1] C'est-à-dire non identique à $AB + BC$.

On a donc

$$AB \subset (AC)_1,$$

et comme AB contient A et C, il s'ensuit que

$$AB \equiv (AC)_1.$$

C. Q. F. D.

Remarques. — 1° L'hypothèse qu'il n'y a qu'un AB sur $\mathfrak{S}$ est essentielle, comme le montre l'exemple où $\mathfrak{S}$ est un cercle.

2° L'identité $AB \equiv AC$ n'entraîne nullement $B \equiv C$. En effet, un continu irréductible entre A et B peut être irréductible aussi entre A et C.

Comme exemple, considérons le continu formé par la courbe $y = \sin \frac{1}{x}$ où $0 < x \leqq \frac{1}{\pi}$ et le segment de l'axe des y entre $y = -1$ et $y = +1$. Il est irréductible entre le point $A\left(\frac{1}{\pi}, 0\right)$ et tout point du segment de l'axe des y appartenant au continu en question. En particulier, soient

$$B \equiv (0, -1)$$

et

$$C \equiv (0, +1);$$

on a alors

$$AB \equiv AC$$

et cependant $B \not\equiv C$.

Il peut même se faire *qu'un continu soit irréductible entre deux quelconques des trois points* A, B, C *donnés*.

La figure 7 offre un exemple d'un tel continu, à condition de prendre le point C sur un segment vertical dont l'abscisse est incommensurable avec celles des points A et B et leurs combinaisons linéaires à coefficients rationnels.

3° En vertu du résultat de ce théorème on ne peut pas conclure qu'il n'existe sur $\mathfrak{S}$ qu'un seul AC; pour qu'il en soit ainsi, il faut faire au sujet de $\mathfrak{S}$ une hypothèse complémentaire, à savoir que $\mathfrak{S}$ ne contient aucun point M tel que $BM \equiv CM \equiv BC$.

On a, en effet,

$$(AC)_2 + (BC)_1 \supset AB \equiv (AC)_1,$$

où $(BC)_1 \subset AB$.

Donc

$$(AC)_2 \supset (AC)_1 - (BC)_1$$

et, par conséquent,

$$(AC)_2 \supset [(AC)_1 - (BC)]';$$

D'autre part, d'après notre hypothèse et le théorème VIII du paragraphe suivant, on a

$$[(AC)_1 - (BC)_1]' \equiv (AC)_1, \qquad \text{d'où} \qquad (AC)_1 \equiv (AC)_2.$$

Mais si la condition spécifiée plus haut n'est pas vérifiée, il peut y avoir un $(AC)_2$ différent de $(AC)_1$. Comme exemple, considérons un continu $\mathfrak{C}$ composé d'un AM, d'un $BC \equiv MB \equiv MC$ et d'un $(MC)_0$, liés entre eux par les relations

$$AM \times BC \equiv M,$$
$$AM \times (MC)_0 \equiv M,$$
$$(MC)_0 \times BC \equiv M + C.$$

(Il n'est possible de réaliser une telle figure que dans l'espace de plus de deux dimensions.) On a ainsi sur $\mathfrak{C}$ un seul continu irréductible entre A et B et deux continus irréductibles entre A et C. En effet,

$$AB \equiv AM + BC \qquad \text{(Th. IV, Ch. II)};$$
$$(AC)_1 \equiv AM + BC \equiv AB;$$
$$(AC)_2 \equiv AM + (MC)_0 \not\equiv (AC)_1.$$

L'existence des continus irréductibles $AB \equiv AC \equiv BC$ nous conduit tout naturellement à nous demander s'il existe un continu irréductible AB, tel que, quel que soit le point P, on ait $AP \equiv AB$. Le théorème VI va nous montrer que ceci est impossible. (Pourtant il existe des continus irréductibles AB, tels qu'à tout point P, on peut faire correspondre un point Q tel que $PQ \equiv AB$. En effet, ceci est vrai pour tout continu $AB \equiv AC \equiv BC$, comme nous le verrons au cours de la démonstration du théorème IX.)

Théorème VI. — *On peut trouver sur chaque continu irréductible* AB *un point* C *tel que*

$$AC \not\equiv AB.$$

Il suffit de circonscrire une sphère $\mathfrak{S}(A, r)$ [1], où $r < \rho(A, B)$, et de prendre pour C un des points du continu $\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{C}[A, AB \times \mathfrak{S}(A, r)]$, dont l'existence a été démontrée (Th. IV, Ch. I).

Soit $(AC)_1$ un continu irréductible entre A et C sur $\mathfrak{C}$; on a

$$(AC)_1 \subset \mathfrak{C} \subset AB$$

---

[1] Nous désignons par ce symbole l'ensemble des points situés à l'intérieur et sur la surface d'une sphère de centre A et de rayon r.

et comme $\mathfrak{C}$, donc aussi $(AC)_1$, ne contient pas B, on a

$$(AC)_1 \not\equiv AB.$$

Cette non-identité étant vraie pour le continu irréductible $(AC)_1$, est vraie pour tous les continus irréductibles (s'il y en a plusieurs) situés sur AB entre les points A et C.

En effet, le continu AB ne peut pas être irréductible entre les points A et C, car il existe un $\mathfrak{K}(A, C)$ sous-ensemble de AB, notamment $(AC)_1$.

Par conséquent,

$$AC \not\equiv AB.$$

C. Q. F. D.

II.

Théorème VII. — *Étant donné un continu irréductible à la fois entre les points* A *et* B *et entre* A *et* C (AB $\equiv$ AC, B $\not\equiv$ C), *on a, pour tout point* M *d'un continu irréductible* BC *quelconque situé sur* AB, *une des deux relations suivantes :*

$$AM \equiv AB, \tag{1}$$

$$BM \equiv CM \equiv BC. \tag{2}$$

Distinguons deux cas :

1° AM contient B.

Comme AM est un sous-ensemble de AB, on doit, dans ce cas, avoir l'identité AM $\equiv$ AB, qui montre en même temps qu'il n'y a sur AB qu'un seul continu irréductible entre A et M.

2° AM ne contient pas B.

Dans ce cas AM ne peut pas contenir C, car s'il le contenait, il contiendrait AC, c'est-à-dire AB, donc B.

Prenons sur BC deux continus irréductibles quelconques, l'un entre M et B, l'autre entre M et C. Nous avons les relations (Th. III)

$$AM + BM \equiv AB,$$

$$AM + CM \equiv AC \equiv AB,$$

qui montrent que BM et CM contiennent tous les deux les points B et C. Mais, comme ils sont des sous-ensembles de BC, on a évidemment

$$BC \equiv BM \equiv CM.$$

Lemme. — *Soit $\mathcal{C}$ un continu, $\mathcal{F}$ un sous-ensemble fermé de $\mathcal{C}$,* A *un point de $\mathcal{C} - \mathcal{F}$ et $\mathcal{A}$ l'ensemble de tous les points de $\mathcal{C} - \mathcal{F}$, bien enchaînés avec* A; *l'ensemble dérivé de $\mathcal{A}$, qui est continu, a des points communs avec $\mathcal{F}$.*

En effet, dans le cas contraire, la distance de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{F}$ ne serait pas nulle. Soit alors F un point de $\mathcal{F}$. Considérons sur $\mathcal{C}$ les chaînes $A, T_1, T_2, \ldots, T_{k_m}, F$ par rapport à un nombre ε_m, faisant partie d'une suite infinie décroissante $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m, \ldots$, telle que

$$\varepsilon_1 < \rho(\mathcal{A}, \mathcal{F})$$

et

$$\lim_{m=\infty} \varepsilon_m = 0.$$

Soit T_{h_m} le premier point de la chaîne par rapport à ε_m appartenant à l'ensemble $(\mathcal{C} - \mathcal{F}) - \mathcal{A}$ et T_{i_m} le premier point de la même chaîne contenu dans $\mathcal{F}$.

T_{h_m} et T_{i_m} existent toujours, et l'on a évidemment $h_m < i_m$. Considérons l'ensemble $\mathfrak{M}(\{A + T_1 + \ldots + T_{i_m-1}\})$ (la somme $\mathfrak{M}$ étendue à $m = 1, 2, \ldots$). Cet ensemble est contenu dans $\mathcal{C} - \mathcal{F}$ et est bien enchaîné, il devrait donc faire partie de $\mathcal{A}$; mais, d'autre part, il contient les points T_{h_m} qui ne sont pas contenus dans $\mathcal{A}$.

Nous arrivons ainsi à une contradiction. Par conséquent,

$$\mathcal{A}' \times \mathcal{G} \neq 0.$$

Théorème VIII. — *Sur un continu irréductible à la fois entre* A *et* B *et entre* A *et* C (AB ≡ AC, B ≢ C), *tout continu* BC *qui, pour aucun de ses points* M, *ne vérifie la relation* BM ≡ CM ≡ BC, *est un continu de condensation de* AB.

En effet, l'ensemble $AB - BC$ contient A, car BC n'est pas, par hypothèse, identique à $AB \equiv AC$.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble de tous les points de $AB - BC$, qui sont bien enchaînés avec A.

Il existe, d'après le lemme précédent, un point M commun à $\mathcal{A}'$ et à BC. D'après le théorème VII, on voit, en tenant compte de notre hypothèse sur BC, qu'il n'existe sur AB qu'un continu irréductible entre A et M qui est identique à AB. Comme A et M font partie de l'ensemble $\mathcal{A}'$ qui est continu, $\mathcal{A}'$ contient AM. Par conséquent

$$(AB - BC)' \supset \mathcal{A}' \supset AM \equiv AB \supset BC,$$

ce qui montre que BC est un continu de condensation de AB.

Théorème IX. — *Tous les points d'un continu irréductible à la fois entre deux quelconques de trois points* A, B, C *donnés* ($AB \equiv AC \equiv BC$) *sont de deuxième espèce.*

Soit P un point quelconque de ce continu.

Deux cas sont à distinguer :

1° $AP \equiv BP \equiv CP \equiv AB$;

2° Un des trois continus irréductibles AP, BP, CP n'est pas identique à AB.

Supposons, par exemple, que

$$CP \not\equiv AB.$$

Dans ce cas, CP ne peut contenir ni A ni B.

Ceci posé, l'identité

$$CP + AP \equiv AC \equiv AB$$

montre que B est un point de AP, et l'identité

$$CP + BP \equiv BC \equiv AB,$$

que A est un point de BP. Par conséquent

$$(a) \qquad AP \equiv BP \equiv AB.$$

Dans les deux cas, nous voyons que tout point P joue le même rôle que les points A, B, C. Il suffit donc de montrer que ceux-ci sont de deuxième espèce.

Considérons un continu irréductible $(CP)_1 \not\equiv AB$ (un tel CP existe, d'après le théorème VI). Dans ce cas, d'après (a), on a

$$AP \equiv AB \equiv AC.$$

En raisonnant comme dans le théorème précédent et en employant les mêmes notations (en remplaçant seulement B par P), on obtient un point M commun à $\mathcal{A}'$ et à $(PC)_1$. Comme $(CM)_1$ situé sur $(CP)_1$ n'est pas identique à AB, on peut appliquer la formule (a) à M. On a donc $AM \equiv AB$ (sans faire l'hypothèse, comme dans le théorème précédent, que CM n'est pas identique à $CP \equiv MP$).

D'où, comme dans le théorème VIII, il résulte que PC est un continu de condensation de AB, et C un point de deuxième espèce.

C. Q. F. D.

De ces deux derniers théorèmes, nous pouvons conclure que, *si* $AB \equiv AC\,(B \not\equiv C)$, *tous les points de* AB *situés sur* BC *sont de deuxième espèce*.

Théorème X. — *Si* M *est un point de première espèce d'un continu irréductible* AB, *les continus irréductibles* AM *et* BM *n'ont en commun que le point* M, *c'est-à-dire*

$$AM \times BM \equiv M.$$

En effet, si la partie commune de AM et BM contenait encore le point N différent de M, on aurait, d'après le théorème I,

$$(a) \qquad AM \supset (AN)_1 \quad \text{et} \quad BM \supset (BN)_1.$$

Or, comme (Th. III)

$$(AN)_1 + (BN)_1 \equiv AB \supset M,$$

le point M est contenu nécessairement dans l'un au moins de deux ensembles $(AN)_1$ et $(BN)_1$. Supposons que $(AN)_1 \supset M$. En vertu de (a), nous aurons alors $AM \equiv (AN)_1$. Or, d'après le résultat des théorèmes VIII et IX, cette égalité montre que M est un point de deuxième espèce, contrairement à l'hypothèse.

THÉORÈME XI. — *Si un continu irréductible* AB *peut être décomposé en deux continus* $\mathcal{C}_1$ *et* $\mathcal{C}_2$ *ayant en commun un seul point* M : 1° *cette décomposition n'est possible que d'une seule manière*; 2° *les continus* $\mathcal{C}_1$ *et* $\mathcal{C}_2$ *sont irréductibles respectivement entre* A *et* M *et entre* B *et* M [1].

Par hypothèse,

$$\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 \equiv AB \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \equiv M.$$

$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, comme sous-ensembles continus de AB, ne peuvent contenir A et B à la fois.

Posons donc

$$\mathcal{C}_1 \supset A \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_2 \supset B.$$

Soit, d'autre part, AM un continu irréductible quelconque situé sur AB. En vertu du théorème III,

$$AM + \mathcal{C}_2 \equiv AB \equiv \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2.$$

Il est évident que

$$AM \times \mathcal{C}_2 \supset M \equiv \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2.$$

Par conséquent (VIII, Ch. I),

$$AM \supset \mathcal{C}_1 \supset A + M,$$

c'est-à-dire

$$AM \equiv \mathcal{C}_1.$$

Tout pareillement, on démontrerait que

$$BM \equiv \mathcal{C}_2.$$

Ces égalités montrent d'abord qu'il n'existe sur AB qu'un continu

---

(1) Les deux parties de ce théorème ont été démontrées par M. Zoretti (*Annales de l'École Normale*, t. XXVI, p. 489 et 491).

irréductible entre A et M et entre B et M, et ensuite que la décomposition de AB en deux continus n'ayant en commun que le point M, ne peut se faire que d'une seule manière.

Corollaire. — M *étant un point de première espèce de* AB, *il existe sur* AB *un seul continu irréductible* AM *et un seul continu irréductible* BM [1].

Théorème XII. — *Entre deux points* M *et* N *de première espèce* [2] *d'un continu irréductible* AB, *il n'existe sur* AB *qu'un seul continu irréductible* MN.

En effet, il n'existe sur AB qu'un seul AM et un seul BM n'ayant en commun que le point M. Supposons que le point N est situé sur AM (il n'est donc pas situé sur BM). Pour la même raison, il n'existe sur AM qu'un seul continu irréductible $(MN)_0$, mais ceci ne prouve pas encore qu'il n'existe pas sur AB un autre continu irréductible $(MN)_1$. Nous allons montrer que $(MN)_1 \equiv (MN)_0$. Remarquons d'abord qu'il n'existe qu'un seul AN. L'ensemble $AN + (MN)_1$ contient un continu irréductible entre A et M qui, étant contenu dans AB, est identique à AM. On a donc

$$AN + (MN)_1 \supset AM \equiv AN + (NM)_0,$$
$$AN \times (MN)_1 \supset N \quad \equiv AN \times (MN)_0,$$

d'où, en vertu de VIII (Ch. I),

$$(MN)_1 \supset (MN)_0$$

et, par suite de l'irréductibilité de $(MN)_1$, on a

$$(MN)_1 \equiv (MN)_0.$$

C. Q. F. D.

---

[1] En général il peut exister sur AB plusieurs continus irréductibles entre A et un point M de AB. (Sur la figure 6, il y a *deux* AM et une *infinité indénombrable* de AN.)

[2] Cette condition n'est pas nécessaire; la démonstration qui suit suppose seulement que les points M et N vérifient tous les deux la condition du théorème XI.

THÉORÈME XIII. — *Un continu irréductible entre* A *et* B *ne peut être décomposé en deux ensembles fermés ayant en commun le seul point* A (*ou* B), *à moins qu'un d'eux ne se réduise à ce point.*

En effet, supposons le contraire, et soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux ensembles fermés répondant à la question, c'est-à-dire tels que

$$\mathcal{E} + \mathcal{F} \equiv AB \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E} \times \mathcal{F} \equiv A.$$

Le point B appartient soit à $\mathcal{E}$, soit à $\mathcal{F}$; supposons que ce soit $\mathcal{E}$ qui le contienne. Désignons par $\mathcal{B}$ l'ensemble des points de $AB - \mathcal{F}$, bien enchaînés avec B.

D'après le lemme de ce paragraphe, il existe un point commun à $\mathcal{B}'$ et à $\mathcal{F}$. Ce point commun ne peut être, d'après notre hypothèse, vu que $\mathcal{B}' \subset (AB - \mathcal{F})' \subset \mathcal{E}$, autre que le point A. Or, $\mathcal{B}$ étant bien enchaîné, l'ensemble $\mathcal{B}'$ est continu; c'est donc un $\mathfrak{C}(A + B, AB)$, c'est-à-dire AB. Comme $\mathcal{F}$ est contenu dans AB et n'a avec $\mathcal{B}'$, c'est-à-dire avec AB, que le point B en commun, on a

$$\mathcal{F} \equiv A.$$

C. Q. F. D.

THÉORÈME XIV. — *Si l'ensemble* $\mathcal{C}$ *est équivalent au sens de l'*Analysis situs *à un continu irréductible* AB, *il est lui-même un continu irréductible entre les points* A′ *et* B′ *correspondant respectivement à* A *et* B, *dans la transformation de* $\mathcal{C}$ *en* AB.

En effet, l'existence d'un vrai sous-ensemble de $\mathcal{C}$ qui serait un $\mathfrak{K}(A', B')$ entraînerait l'existence sur AB d'un vrai sous-ensemble $\mathfrak{K}(A, B)$, ce qui est absurde.

CHAPITRE III.

ARC SIMPLE.

I.

Nous appellerons ARC SIMPLE AB *un continu irréductible* [1] AB *qui, relativement à tout point* M *donné sur lui, peut être décomposé en deux continus n'ayant en commun que ce point* M [2].

En d'autres termes, le continu irréductible AB est un arc simple si pour tout point $M \subset AB$, on peut trouver deux continus $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$ satisfaisant aux relations suivantes :

$$\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 \equiv AB, \tag{1}$$

$$\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \equiv M. \tag{2}$$

D'après le théorème XI (Chap. II), les continus $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$ sont les seuls continus irréductibles qui existent sur AB entre les points A et M et entre B et M respectivement.

LEMME I. — *Si sur un arc simple* AB *le point* Q *est situé sur* AP, *le point* P *n'est pas situé sur* AQ.

Si P était situé sur AQ, on aurait, en vertu du théorème V (Chap. II), $AP \equiv AQ$, ou encore

$$AB - AP \equiv AB - AQ,$$

d'où évidemment

$$BP - P \equiv BQ - Q.$$

Cette identité est impossible, car P est un point limite de l'en-

(1) La condition d'irréductibilité n'est pas essentielle (*cf.* § III, Th. VIII).

(2) Notre arc simple correspond dans le cas du plan à *einfacher Kurvenbogen* de M. Schœnflies (*Math. Ann.*, t. LXII, p. 305).

semble BP — P, et ne lui appartient pas, tandis qu'il ne joue pas le même rôle pour l'ensemble BQ — Q.

Remarquons que les identités $AM + BM \equiv AB$ et $AM \times BM \equiv M$ montrent que *tout point* P *autre que* M *d'un arc simple* AB *appartient à un des continus irréductibles* AM *et* BM *et à un seulement*.

Théorème I. — *On peut établir sur un arc simple* AB *un ordre de succession des points de la façon suivante* : P *précède ou suit* Q, *ce qu'on désignera symboliquement par* $P \prec Q$ *ou* $P \succ Q$, *suivant que* $AP \subset AQ$ *ou* $AP \supset AQ$.

Il suffit de montrer qu'étant donnés sur un arc simple AB deux points P et Q, ou P est situé sur AQ ou Q sur AP.

Le lemme I nous assure que ces deux propositions s'excluent mutuellement. Mais il est aussi impossible qu'elles soient fausses toutes les deux, car alors le point P serait situé sur BQ et Q sur BP, ce qui contredit aussi le lemme.

Lemme II. — *Un continu irréductible* AQ, *sous-ensemble d'un arc simple* AB, *est un arc simple*.

Soit P un point quelconque de AQ ; il existe, d'après la définition d'un arc simple, un AP et un BP uniques, tels que

$$(a) \qquad AP \times BP \equiv P.$$

D'autre part (lemme I), BP contient Q, donc un $(PQ)_0$; ce $(PQ)_0$ ne peut, d'après (*a*), avoir avec AP d'autres points communs que P; donc

$$(b) \qquad AP \times (PQ)_0 \equiv P.$$

En vertu de cette relation et du théorème IV (Chap. II), l'ensemble $AP + (PQ)_0$ est un continu irréductible $(AQ)_0$. $(AQ)_0$ étant évidemment contenu dans AB, car AP et $(PQ)_0$ le sont, est, en vertu du théorème V (Chap. II), identique à AQ.

Théorème II. — *Un continu irréductible entre deux points, sous-ensemble d'un arc simple, est un arc simple lui-même.*

Soit AB un arc simple, P et Q deux points quelconques de cet arc, et posons $P \prec Q$.

En appliquant le lemme II à AB et à AQ, puis à AQ et à PQ, on démontre le théorème.

Théorème III. — *Soient* P, Q, R, *trois points d'un arc simple* AB ; *si* PQ *ne contient* PR, *ni* PR *ne contient* PQ, *ils n'ont qu'un seul point commun* P ; *c'est-à-dire le continu* $PQ + PR$ *est toujours un arc simple.*

En effet, supposons $Q \prec P$; je dis que $P \prec R$, car autrement, en appliquant le théorème I à l'arc simple AP, on trouverait soit que Q est situé sur PR, soit que R est situé sur PQ, ce qui n'a pas lieu.

Donc

$$(a)\qquad \begin{aligned} AP &\equiv AQ + QP \supset QP, \\ BP &\equiv BR + RP \supset RP, \end{aligned}$$

et de ces relations on conclut, en vertu de la relation fondamentale (2), que $QP \times RP \equiv P$, et par conséquent (Th. IV, Chap. II) $QP + PR \equiv QR$.

Théorème IV. — *Pour qu'un continu irréductible entre deux points soit un arc simple, il faut et il suffit qu'il ne contienne aucun continu de condensation.*

Cette condition est nécessaire. Soit, en effet, AB un arc simple, et supposons qu'il contienne un continu de condensation $\mathcal{K}$. Soient M et N deux points de $\mathcal{K}$. Les points de AB étant simplement ordonnés (Th. I), on peut poser, par exemple, $M \prec N$, c'est-à-dire

$$AN \supset AM.$$

D'autre part,

$$AN \times BN \equiv N.$$

Par conséquent,

$$(a) \qquad AM \times BN \equiv 0,$$

car AM ne contient pas N.

Il existe sur $\mathcal{K}$ un continu irréductible MN ; d'après le théorème XII (Chap. II), c'est le seul qui existe sur AB.

D'après la définition de $\mathcal{K}$,

$$(AB - \mathcal{K})' \equiv AB;$$

mais comme $\mathcal{K} \supset MN$, on a [V, (3), Ch. I]

$$AB - \mathcal{K} \subset AB - MN \subset AB.$$

Ces relations entraînent (IX, Ch. I)

$$(AB - \mathcal{K})' \subset (AB - MN)' \subset AB$$

ou

$$AB \subset (AB - MN)' \subset AB,$$

ce qui montre que

$$(AB - MN)' \equiv AB.$$

Nous avons d'autre part

$$(AB - MN)' \equiv (AM + MN + NB - MN)'$$
$$\equiv [AM + NB - (AM + NB) \times MN]' \equiv (AM + NB - M - N)' \equiv AM + NB,$$

c'est-à-dire

$$AB \equiv AM + NB.$$

Or, cette relation comparée à la relation (a) montre que AB n'est pas bien enchaîné, ce qui est absurde.

Par conséquent, *il n'existe pas de continu de condensation sur un arc simple*.

Mais cette condition est aussi suffisante, car un continu irréductible dont tous les points sont de première espèce est, d'après les théorèmes X et XI (Chap. II), un arc simple [1].

---

[1] J'ai publié une autre démonstration de la seconde partie de ce théorème dans les *Comptes rendus*, t. CLI (18 juillet 1910).

II.

Un ensemble est simplement ordonné [1] ou *a un type d'ordre simple :* 1° si entre deux éléments quelconques P et Q de cet ensemble a lieu une des deux relations

$$P \prec Q \text{ [2]} \quad \text{ou} \quad Q \prec P$$

et 2° si les relations

$$P \prec Q, \quad Q \prec R$$

entraînent

$$P \prec R.$$

On appelle *élément limite* d'un ensemble d'éléments $\{P\}$ d'un type d'ordre simple, un élément T tel que si la relation

$$X \prec T \prec Y$$

a lieu entre deux éléments quelconques de cet ensemble, il existe un élément $P \not\equiv T$, tel que

$$X \prec P \prec Y \text{ [3]}.$$

Nous dirons que l'ordre de succession des points d'un ensemble simplement ordonné est *naturel*, si chaque point limite, au sens géométrique de son sous-ensemble $\{P\}$ quelconque, est en même temps un élément limite de $\{P\}$, les points P étant considérés comme éléments du type d'ordre correspondant, et réciproquement.

Théorème V. — *L'ordre de succession des points d'un arc simple* AB *établi par la règle du théorème* I, *est un ordre naturel.*

1. Je dis qu'un point limite T au sens géométrique d'un ensemble $\{P\}$ de points de AB, l'est aussi comme élément du type d'ordre de AB.

---

[1] Schœnflies-Baire, *Encyclopédie des Sc. math.*, t. I, 1re édition française, p. 498.

[2] Lisez : P *précède* Q.

[3] *Voir* G. Cantor, *Acta math.*, t. II.

En effet, soient X et Y deux points de AB, tels que

$$X \prec T \prec Y,$$

c'est-à-dire

$$XY \supset T.$$

Comme

$$AB \equiv AX + XY + YB \quad \text{et} \quad AX \times XY \equiv X, \qquad XY \times YB \equiv Y$$

on a

$$\rho\,[T, (AX + YB)] > 0.$$

Il existe donc dans $\{P\}$ un point $P_0 \not\equiv T$, tel que

$$\rho\,(T, P_0) < \rho\,[T, (AX + YB)].$$

Par conséquent

$$XY \supset P_0,$$

c'est-à-dire

$$X \prec P_0 \prec Y.$$

C. Q. F. D.

2. Réciproquement, si la relation $XY \supset T$ entraîne toujours $XY \supset P_0$ $(P_0 \not\equiv T)$, T est un point limite au sens géométrique pour $\{P\}$.

En effet,

$$AB \equiv AT + TB.$$

Considérons une sphère $\mathfrak{S}(T, \varepsilon)$, où ε désigne un nombre arbitraire. Il existe dans $\mathfrak{S}(T, \varepsilon)$ deux continus $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ contenant T et contenus l'un dans AT, l'autre dans TB. Soit X un point de $\mathcal{C}_1$ et Y un point de $\mathcal{C}_2$.

On a

$$XT \subset \mathcal{C}_1, \qquad YT \subset \mathcal{C}_2,$$
$$XT + TY \equiv XY.$$

Par hypothèse, il existe dans l'ensemble $\{P\}$ un point $P_0 \not\equiv T$ situé sur XY, c'est-à-dire

$$XY \supset P_0,$$

XY étant situé à l'intérieur de la sphère $\mathfrak{S}(T, \varepsilon)$,

$$\rho(T, P_0) < \varepsilon.$$

C. Q. F. D.

Dans tout ce qui va suivre, *nous ne parlerons que de l'ordre naturel.*

Théorème VI. — *Le type d'ordre d'un continu est fermé et partout dense et réciproquement* ([1]), c'est-à-dire que chaque sous-ensemble contenant une infinité de points possède au moins un point limite et qu'entre deux points M et N quelconques, il existe un point P.

En effet, d'après la définition d'un ordre naturel, à l'ensemble fermé correspond un type d'ordre fermé et réciproquement.

Or, à un type d'ordre fermé non partout dense, correspond évidemment un ensemble qui peut être décomposé en deux ensembles fermés sans points communs, c'est-à-dire un ensemble qui n'est pas continu. Par conséquent, le type d'ordre d'un continu est partout dense.

Réciproquement, *à un type d'ordre fermé et partout dense correspond toujours un ensemble continu.*

Car autrement cet ensemble fermé pourrait être décomposé en deux ensembles également fermés $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sans points communs. Soit P un point de $\mathcal{E}$ et Q un point de $\mathcal{F}$. Posons par exemple

$$P \prec Q$$

et soit $\mathfrak{Q}$ l'ensemble de tous les points de $\mathcal{F}$ entre P et Q (Q compris). $\mathfrak{Q}$ possède un élément premier R ([2]) qui est évidemment, un élément limite des points de $\mathcal{E}$ et par conséquent appartient à $\mathcal{E}$; $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ auraient donc un point commun R, contrairement à l'hypothèse.

Théorème VII. — *Tous les continus qui peuvent être simplement ordonnés (d'une façon naturelle), sont équivalents entre eux au sens de l'*Analysis situs ([3]).

([1]) *Voir* Schœnflies-Baire, *loc. cit.*, p. 502-503.

([2]) *Voir* Note III.

([3]) *Voir* la remarque à la fin du paragraphe IV.

Deux ensembles ayant le même type d'ordre sont évidemment équivalents au sens de l'*Analysis situs*.

Il nous reste à démontrer que tous les types d'ordre simple correspondant à un ensemble continu de points, sont identiques entre eux. Pour cela, il suffit de démontrer qu'on peut trouver sur chaque continu $\mathcal{C}$ ordonné simplement, un ensemble *dénombrable* de points partout dense dans le type d'ordre de $\mathcal{C}$ (¹). Soit A le premier et B le dernier point de $\mathcal{C}$.

Or, comme $\mathcal{C}$ est continu, on peut trouver sur lui une chaîne A, $T_1^{(m)}, \ldots, T_{k_m}^{(m)}$, B par rapport à tout nombre ε_m faisant partie d'une suite infinie arbitraire $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m, \ldots$, où $\lim\limits_{m=\infty} \varepsilon_m = 0$. Je dis que l'ensemble

$$\{T_i^{(m)}\} \quad \begin{pmatrix} m = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots \\ i = 0, 1, \ldots, k_m + 1 \end{pmatrix}$$

est l'ensemble cherché.

En effet, il est dénombrable; il est aussi partout dense *sur* $\mathcal{C}$, car s'il y avait deux points P et Q ($P \prec Q$) de AB entre lesquels il n'y aurait aucun $T_i^{(m)}$, on aurait la relation

$$(a) \qquad \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 \supset \{T_i^{(m)}\},$$

en désignant par $\mathcal{C}_1$ et par $\mathcal{C}_2$ l'ensemble des points situés entre A et P et entre Q et B respectivement.

Or (a) montre que A et B sont bien enchaînés sur $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$, ce qui est faux; car les ensembles fermés $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ($A \prec P \prec Q \prec B$) n'ont pas de points communs et par conséquent, $\rho(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) > 0$.

L'existence de $\{T_i^m\}$ démontre que tout continu ordonné simplement, donc tout arc simple AB, a le type d'ordre de tous les nombres réels entre 0 et 1 inclusivement (¹), c'est-à-dire est équivalent à un segment de droite au sens de l'*Analysis situs*.

En se rappelant qu'un arc simple est un invariant de l'*Analysis situs*, on voit que *tout continu ordonné simplement est un arc simple*.

(¹) *Voir* SCHŒNFLIES-BAIRE, *loc. cit.*, p. 503.

Nous pouvons maintenant compléter le théorème II de la façon suivante :

Tout continu situé sur un arc simple est un arc simple lui-même.

Remarque. — Un arc simple est, comme nous le voyons, le continu le plus simple au point de vue de l'*Analysis situs*. Mais au point de vue de l'Analyse un arc simple peut être très capricieux; il peut, par exemple, n'avoir pas de tangente en aucun de ses points; car toute fonction *uniforme* et *continue* dans l'intervalle (a, b) représente évidemment un arc simple, irréductible entre les points d'abscisse $x = a$, $x = b$.

III.

Une *ligne simple fermée* Γ est un continu qui peut être décomposé en deux continus $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ n'ayant en commun que deux points M et N arbitrairement donnés sur Γ. $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ satisfont donc aux relations :

$$\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 \equiv \Gamma, \tag{1}$$

$$\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \equiv M + N. \tag{2}$$

Théorème VIII. — *Les continus $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ définis par les relations* (1) *et* (2) *sont des continus irréductibles* MN.

Soient en effet $(MN)_1$ et $(MN)_2$ deux continus irréductibles entre M et N contenus respectivement dans $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Supposons que $\mathcal{C}_1$, par exemple, n'est pas identique à $(MN)_1$, et soit R un point de $\mathcal{C}_1 - (MN)_1$. Considérons encore un point P sur $(MN)_2$ différent de M et de N, et soient $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$ deux continus analogues à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, mais relatives aux points P et R, c'est-à-dire tels que

$$\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 \equiv \Gamma,$$

$$\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2 \equiv P + R.$$

L'ensemble $(MN)_1$ se décompose en deux ensembles fermés

$$(MN)_1 \times \mathcal{K}_1 \quad \text{et} \quad (MN)_1 \times \mathcal{K}_2,$$

qui n'ont aucun point commun entre eux.

Ceci montre que l'un de ces deux ensembles est vide ; posons par exemple $\mathcal{K}_2 \times (MN)_1 \equiv 0$, c'est-à-dire $\mathcal{K}_1 \supset (MN)_1$. D'autre part, $(MN)_2 \equiv MP + NP$. Le continu irréductible MP se décompose en deux ensembles fermés $MP \times \mathcal{K}_2$ et $MP \times \mathcal{K}_1$ ayant un seul point P commun.

Il s'ensuit, en vertu du théorème XIII (Chap. II), que l'un d'eux se réduit à un seul point P. Ce ne peut être que $MP \times \mathcal{K}_2$, car $MP \times \mathcal{K}_1 \supset M$. Le même raisonnement s'applique à NP. Par conséquent, l'ensemble $[(MN)_1 + (MN)_2] \times \mathcal{K}_2$ se réduit à un seul point P.

Il s'ensuit que

$$P \subset \mathcal{K}_2 \subset (\mathfrak{C}_1 - (MN)_1) + (\mathfrak{C}_2 - (MN)_2) + P,$$

d'où [IX; X^a (1), Chap. I]

$$\mathcal{K}_2 \subset \overline{\mathfrak{R}_1} + \overline{\mathfrak{R}_2},$$

en posant pour abréger $\mathfrak{R}_i \equiv \mathfrak{C}_i - (MN)_i$. $\mathcal{K}_2$ se décompose donc en deux ensembles fermés $\mathcal{K}_2 \times \overline{\mathfrak{R}_1}$ et $\mathcal{K}_2 \times \overline{\mathfrak{R}_2}$ sans points communs, car $\mathcal{K}_2$ ne contient ni M ni N qui sont les seuls points communs à $\overline{\mathfrak{R}_1}$ et $\overline{\mathfrak{R}_2}$.

Aucun de ces deux ensembles n'est vide, car $\mathcal{K}_2 \times \overline{\mathfrak{R}_1}$ contient R et ne contient pas P, ce qui entraîne à son tour que $\mathcal{K}_2 \times \overline{\mathfrak{R}_2}$ contient P. Une telle décomposition étant absurde, $\mathcal{K}_2$ étant, par hypothèse, un ensemble continu, notre supposition initiale, à savoir que $\mathfrak{C}_1$ n'est pas identique à $(MN)_1$, est impossible. On a donc bien

$$\mathfrak{C}_1 \equiv (MN)_1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{C}_2 \equiv (MN)_2.$$

THÉORÈME IX. — *Il n'existe que deux continus irréductibles* (MN) *entre deux points quelconques* M *et* N *d'une ligne simple fermée.*

Supposons, en effet, qu'en dehors de $(MN)_1$ et $(MN)_2$ qui satisfont aux relations (1) et (2) de la page 59, il existe entre M et N encore un continu irréductible $(MN)_3$. Il se décompose en deux ensembles fermés

$$(MN)_1 \times (MN)_3 \quad \text{et} \quad (MN)_2 \times (MN)_3$$

qui, évidemment, ne peuvent être des $\mathfrak{K}(M, N)$.

Chacun d'eux peut donc être décomposé en deux ensembles fermés sans points communs, dont l'un contient M, l'autre N. Soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{F}_2$, ces ensembles. Ils sont définis par les relations suivantes :

$$\left.\begin{array}{c}(MN)_i \times (MN)_3 \equiv \mathcal{E}_i + \mathcal{F}_i \\ \mathcal{E}_i \supset M; \qquad \mathcal{F}_i \supset N \\ \mathcal{E}_i \times \mathcal{F}_i \equiv 0\end{array}\right\} (i = 1, 2).$$

On a aussi

$$\mathcal{E}_i \times \mathcal{F}_k \subset (MN)_i \times (MN)_k \equiv M + N \qquad \begin{pmatrix} i \neq k \\ i, k = 1, 2 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{E}_i \times \mathcal{F}_k \equiv 0,$$

car $\mathcal{E}_i$ ne contient pas N et $\mathcal{F}_k$ ne contient pas M.

Mais

$$(a) \qquad (MN)_3 \equiv \mathcal{E}_1 + \mathcal{F}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{F}_2 \equiv (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) + (\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2).$$

D'autre part [VII, (2), Chap. I],

$$(b) \quad (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) \times (\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2) \equiv (\mathcal{E}_1 \times \mathcal{F}_1) + (\mathcal{E}_1 \times \mathcal{F}_2) + (\mathcal{E}_2 \times \mathcal{F}_1) + (\mathcal{E}_2 \times \mathcal{F}_2) \equiv 0.$$

Comme les ensembles $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ et $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ sont fermés, les relations (*a*) et (*b*) montrent que $(MN)_3$ n'est pas continu, contrairement à l'hypothèse.

THÉORÈME X. — *Une ligne simple fermée* Γ *ne renferme aucun continu de condensation*.

En effet, supposons le contraire et soit $\mathcal{K}$ un continu de condensation de Γ. Prenons deux points quelconques M et N de $\mathcal{K}$ et soit $(MN)_1$ un continu irréductible entre M et N situé sur $\mathcal{K}$.

D'après le thèorème précédent, il n'existe sur Γ en dehors de $(MN)_1$ que le continu irréductible $(MN)_2$; $(MN)_1$ et $(MN)_2$ satisfont aux conditions (1) et (2) de la page 59.

Par conséquent $(MN)_2 \supset \Gamma - (MN)_1$, d'où

$$(MN)_2 \supset [\Gamma - (MN)_1]' \supset (\Gamma - \mathcal{K})' \equiv \Gamma \supset (MN)_1,$$

contrairement à la relation (2).

Ce théorème nous montre que $(MN)_1$ et $(MN)_2$ sont des arcs simples.

Réciproquement, si $(AB)_1$ et $(AB)_2$ *sont deux arcs simples n'ayant en commun que les points* A *et* B, *l'ensemble* $(AB)_1 + (AB)_2$ *est une ligne simple fermée.*

On voit, en effet, facilement que, quels que soient les points M et N, contenus dans $(AB)_1 + (AB)_2$, on peut décomposer $(AB)_1 + (AB)_2$ en deux continus irréductibles $(MN)_1$ et $(MN)_2$ n'ayant en commun que les points M et N.

Posons, par exemple,

$$M + N \subset (AB)_1$$

et supposons que $M \prec N$.

On a

$$(AB)_1 \equiv (AM)_1 + (MN)_1 + (NB)_1.$$

La somme $(NB)_1 + (AB)_2 + (AM)_1$ est un continu irréductible $(MN)_2$, comme on peut s'en assurer, en appliquant deux fois le théorème IV (Chap. II). Les continus irréductibles $(MN)_1$ et $(MN)_2$ répondent, comme on le voit sans peine, à la question.

Nous pouvons ainsi affirmer que *toutes les lignes simples fermées sont équivalentes entre elles au sens (plus large) de l'*Analysis situs.

Ceci montre encore que le type d'ordre d'une ligne simple fermée peut être considérée comme composé de deux types d'ordre simples (fermés et denses en soi), de façon que le premier élément de l'un soit le dernier élément de l'autre. Un tel type d'ordre est dit *cyclique*.

En vertu de ce qui précède et des résultats du paragraphe II, nous pouvons donc affirmer que *toute ligne simple fermée ordonnée naturellement est du type d'ordre cyclique*, c'est-à-dire est équivalente au sens de l'*Analysis situs* à une circonférence ; et réciproquement, *tout continu ordonné naturellement, du type d'ordre cyclique, est une ligne simple fermée* (1).

(1) Il en résulte, en vertu du théorème de M. Jordan et de sa réciproque, que notre ligne simple fermée est identique dans le cas du plan à celle de M. Schœnflies (*Math. Ann.*, t. LVIII, p. 216).

Remarque. — L'équivalence de deux ensembles, au point de vue de l'*Analysis situs*, peut être comprise dans les sens différents. Elle peut signifier (au sens le plus large) qu'il est possible d'établir une correspondance biunivoque et continue entre les deux ensembles considérés et (au sens le plus restrictif) qu'il existe une correspondance transformant l'espace en lui-même de telle façon que l'un de deux ensembles donnés se transforme en l'autre.

C'est seulement quand on adopte le premier sens, que les théorèmes des paragraphes II et III sont vrais.

En effet, dans l'espace à trois dimensions, une ligne simple fermée peut avoir des nœuds et, dans ce cas, elle n'est pas équivalente, si l'on adopte le deuxième sens de ce mot, à une ligne simple fermée sans nœuds.

CHAPITRE IV.

POINTS SINGULIERS.

I.

Un point A *d'un continu* $\mathfrak{C}$ *est un* POINT RÉGULIER D'ORDRE k, *si l'on peut trouver sur* $\mathfrak{C}$ *un nombre* FINI k *de continus irréductibles* AP_1, AP_2, ..., AP_k *possédant les propriétés suivantes :* 1° *deux à deux, ils n'ont en commun que le point* A ; 2° *ils contiennent tous les points de* $\mathfrak{C}$ *situés dans le voisinage de* A ; 3° *chacun d'eux peut être remplacé par tout continu irréductible* AQ *situé sur lui, sans que les conditions* 1° *et* 2° *cessent d'être remplies.*

En d'autres termes,

$$AP_h \times AP_i \equiv A \qquad (h \neq i), \tag{1}$$

$$[\mathfrak{C} - (AP_1 + AP_2 + \ldots + AP_k)]' \times A \equiv 0, \tag{2}$$

et tout AQ_i *contenu dans* AP_i *vérifie la relation*

$$(AP_i - AQ_i)' \times A \equiv o \quad (3)$$ [1].

Si les AP_i sont des arcs simples [la condition (3) est alors remplie d'elle-même], le point A est dit *point* SIMPLE *d'ordre k*. Un point simple d'ordre 1 est dit *point d'arrêt* et d'ordre 2 *point ordinaire* [2].

THÉORÈME I. — *Le nombre k est un nombre bien défini pour chaque point régulier.*

Pour démontrer ce théorème, nous établirons d'abord deux lemmes.

LEMME I. — *Si un continu* $\mathfrak{C}$ *ne peut pas être décomposé en deux continus ayant un seul point commun, il ne peut non plus être décomposé en deux ensembles fermés qui n'auraient qu'un point commun.*

En effet, si une telle décomposition était possible, l'un des ensembles composants $\mathfrak{F}_1$, par exemple, ne serait pas continu. Soit F un point de $\mathfrak{F}_1$ qui n'est pas bien enchaîné avec le point C qui est le seul point commun de $\mathfrak{F}_1$ et de $\mathfrak{F}_2$. Le continu irréductible CF situé sur $\mathfrak{C}$ pourrait être décomposé en deux ensembles fermés $CF \times \mathfrak{F}_1$, $CF \times \mathfrak{F}_2$ n'ayant en commun que le point C. Or nous savons qu'une telle décomposition est impossible (Th. XIII, Chap. II).

LEMME II. — *Soit le continu* $\mathfrak{C}$ *la somme de k continus* $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_k$ *n'ayant deux à deux en commun que le point C; si aucun* $\mathfrak{C}_i$ *ne peut être décomposé en deux continus* $\mathfrak{C}_{i1}$, $\mathfrak{C}_{i2}$, *qui n'auraient en*

---

[1] Le rôle véritable de cette formule est expliqué par l'expression de la condition (3) en langage ordinaire : ces deux expressions de la condition (3) sont, en effet, équivalentes, comme cela résulte de deux relations :

$$[\mathfrak{C} - (AP_1 + \ldots + AP_i \ldots + AP_k)'] + (AP_i - AQ_i)' \supset [\mathfrak{C} - (AP_1 + \ldots + AQ_i + \ldots + AP_k)]',$$
$$(AP_i - AQ_i)' \subset [\mathfrak{C} - (AP_1 + \ldots + AQ_i + \ldots + AP_k)]',$$

que l'on vérifie par le calcul.

[2] Le point A de la figure 6 nous donne un exemple d'un point régulier (non simple) d'ordre 1.

commun que le point C, *il n'existe aucun autre système de continus* $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_l$ *satisfaisant aux mêmes conditions que les* $\mathcal{C}_i$.

Supposons, en effet, le contraire. Nous aurons

$$(a) \qquad \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_l \equiv \mathcal{C} \supset \mathcal{C}_1.$$

Il existe donc au moins un $\mathcal{E}_{i_1}$ tel que $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{E}_{i_1}$ ne se réduit pas à un seul point C; $\mathcal{E}_{i_1}$ se décompose en deux ensembles fermés, $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{E}_{i_1}$ et $(\mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3 + \ldots + \mathcal{C}_k) \times \mathcal{E}_{i_1}$ ayant un seul point commun C, ce qui n'est pas possible, en vertu du lemme I, à moins que l'un des ensembles composants ne se réduise à un point C.

Or, d'après le choix de $\mathcal{E}_{i_1}$, ce ne peut être que l'ensemble $(\mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3 + \ldots + \mathcal{C}_k) \times \mathcal{E}_{i_1}$.

On en conclut que

$$\mathcal{E}_{i_1} \subset \mathcal{C}_1$$

Le même raisonnement appliqué à $\mathcal{E}_{i_1}$ et $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \ldots + \mathcal{C}_k$ montre que

$$\mathcal{E}_{i_1} \supset \mathcal{C}_1;$$

on a donc

$$\mathcal{E}_{i_1} \equiv \mathcal{C}_1.$$

En raisonnant de la même façon, on trouvera

$$\mathcal{C}_2 \equiv \mathcal{E}_{i_2}, \qquad \ldots, \qquad \mathcal{C}_k \equiv \mathcal{E}_{i_k}$$

(les nombres i_h étant choisis parmi 1, 2, ..., l).

On a donc

$$\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \ldots + \mathcal{C}_k \equiv \mathcal{E}_{i_1} + \mathcal{E}_{i_2} + \ldots + \mathcal{E}_{i_k}.$$

D'autre part

$$\mathcal{C} \equiv \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_i$$

et

$$\mathcal{E}_h \times \mathcal{E}_i \equiv \mathrm{C} \qquad (h \neq i;\ h,\ i = 1, 2, \ldots, l).$$

On en déduit

$$k = l.$$

Revenons à la démonstration de notre proposition.

La relation (3) montre qu'il est impossible de trouver sur AP_i deux continus irréductibles AM_i et AN_i qui n'auraient que le point A en commun.

En effet, cette relation, appliquée successivement à AM_i et AN_i, montre qu'on peut trouver un nombre r assez petit, pour que les points de AP_i situés dans $\mathfrak{S}(A, r)$ appartiennent tous à AM_i et, de même, à AN_i, c'est-à-dire tel que

$$AM_i \times AN_i \supset AP_i \times \mathfrak{S}(A, r) \not\equiv A,$$

car l'identité $\mathcal{A} \times \mathfrak{S}(A, r) \equiv A$ signifie que A est isolé sur $\mathcal{A}$, ce qui n'a pas lieu pour AP_i.

Il s'agit à présent de démontrer qu'étant donnés deux systèmes de continus irréductibles $AP_1, \ldots, AP_{k_1}$ et $AQ_1, AQ_2, \ldots, AQ_{k_2}$, satisfaisant tous les deux aux conditions (1), (2) et (3), on a nécessairement $k_1 = k_2$.

En vertu de la relation (2),

$$\rho' = \rho[A, \mathcal{C} - (AP_1 + AP_2 + \ldots + AP_k)] > 0,$$
$$\rho'' = \rho[A, \mathcal{C} - (AQ_1 + AQ_2 + \ldots + AQ_k)] > 0.$$

Si r est donc un nombre plus petit que ρ' et ρ'', on aura évidemment

$$AP_1 + AP_2 + \ldots + AP_{k_1} \supset \mathfrak{C}_s[A, \mathcal{C} \times \mathfrak{S}(A, r)] \equiv \mathcal{C}_0,$$
$$AQ_1 + AQ_2 + \ldots + AQ_{k_2} \supset \mathcal{C}_0.$$

D'où

$$\mathcal{C}_0 \subset (AP_1 + \ldots + AP_{k_1}) \times (AQ_1 + \ldots + AQ_{k_2}).$$

Posons

$$\mathcal{C}_0 \times AP_i \equiv \mathcal{C}_i^{(1)},$$
$$\mathcal{C}_0 \times AQ_i \equiv \mathcal{C}_i^{(2)}.$$

On a évidemment

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{C}_h^{(l)} \times \mathcal{C}_i^{(l)} &\equiv A \\ \mathcal{C}_1^{(l)} + \mathcal{C}_2^{(l)} + \ldots + \mathcal{C}_{k_l}^{(l)} &\equiv \mathcal{C}_0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &(l = 1, 2); \\ &(i, h = 1, 2, \ldots, k_2 \quad \text{et} \quad i \neq h). \end{aligned}$$

Nous avons vu tout à l'heure qu'il est impossible de trouver, sur AP_i

ou sur AQ_i, deux continus irréductibles AM_i, AN_i n'ayant en commun que le point A.

Il est, *a fortiori*, impossible de décomposer un $\mathfrak{C}_i^{(j)}$ en deux continus ayant un seul point A commun.

Le lemme II peut donc s'appliquer et montre que les deux systèmes de continus $\mathfrak{C}_i^{(1)}$ et $\mathfrak{C}_i^{(2)}$ sont identiques.

$$\mathfrak{C}_1^{(1)} \equiv \mathfrak{C}_{i_1}^{(2)}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{C}_{k_1}^{(1)} \equiv \mathfrak{C}_{i_{k_1}}^{(2)}.$$

Par conséquent,

$$k_1 = k_2.$$

C. Q. F. D.

Théorème II. — *Un point régulier est toujours de première espèce.*

Supposons, en effet, le contraire, et soit $\mathcal{K}$ un continu de condensation contenant un point régulier A. En vertu de la condition (2) et du théorème IV (Chap. I), il existe un continu $\mathfrak{T}$ tel que

$$(a) \qquad A \subset \mathfrak{T} \subset (AP_1 + AP_2 + \ldots + AP_k) \times \mathcal{K},$$

$$(b) \qquad \rho[\mathfrak{T}, \mathfrak{C} - (AP_1 + \ldots + AP_k)] > 0.$$

Soit T un point de $\mathfrak{T}$ autre que A ; T appartient à un et à un seul AP_i. Considérons un AT contenu dans $\mathfrak{T}$. Les deux ensembles $AP_i \times AT$ et $(AP_1 + \ldots + AP_{i-1} + AP_{i+1} + AP_k) \times AT$ n'ont en commun, en vertu de la condition (1), que le point A.

Il s'ensuit, en vertu du théorème XIII (Chap. II), que

$$(c) \quad AP_i \supset AT \quad \text{et} \quad (AP_1 + \ldots + AP_{i-1} + AP_{i+1} + \ldots + AP_k) \times AT \equiv A.$$

De $\mathcal{K} \supset AT$, on déduit

$$(\mathfrak{C} - AT)' \supset AT,$$

c'est-à-dire, à cause de (b),

$$[(AP_1 + AP_2 + \ldots + AP_k) - AT]' \supset AT$$

et, *a fortiori*,

$$(AP_i - AT)' + (AP_1 + \ldots + AP_{i-1} + AP_{i+1} + \ldots + AP_k)' \supset AT;$$

d'où, en vertu de (c) et de IX (Chap. I),

$$(AP_i - AT)' \supset AT,$$

ce qui est impossible, car A est un point régulier [condition (3)].

Réciproquement, si un point est de première espèce et s'il satisfait aux conditions (1) et (2), il est un point régulier, c'est-à-dire la condition (3) est vérifiée. Cela résulte immédiatement du

Lemme III. — *Si le point* A *d'un continu irréductible* AB *est de première espèce, on a*

$$(AB - AP)' \times A \equiv 0,$$

P *étant un point quelconque de* AB.

En effet, supposons qu'il existe un P_1 tel que

$$[AB - (AP_1)_1]' \supset A.$$

Or, $AB \equiv (AP_1)_1 + P_1B$; donc [I, (4), Chap. I]

$$AB - (AP_1)_1 \equiv P_1B - (AP_1)_1$$

et [II, (3); IX, Ch. I],

$$BP_1 \supset [BP_1 - (AP_1)_1]' \supset A,$$

$$AB \supset BP_1 \supset A + B,$$

c'est-à-dire

$$BA \equiv BP_1.$$

Donc, d'après les théorèmes VIII et IX (Chap. II) le point P_1 est de seconde espèce, contrairement à l'hypothèse [1].

Théorème III. — *Un point régulier* A *de première espèce et de première classe est un point simple.*

En effet, A étant de première classe, $\mathfrak{S}(A, r)$ ne contient, pour r suffisamment petit, aucun continu de condensation, et les continus

---

[1] On peut même démontrer que si $(AB - (AP_1)_1)' \supset A$, le continu $(AP_1)_1$ est un continu de condensation de AB.

irréductibles $AQ_1, \ldots, AQ_k$, situés respectivement sur $AP_1, \ldots, AP_k$ et contenus dans $\mathfrak{S}(A, r)$, deviennent des arcs simples.

Ce théorème nous montre également que *tout point régulier non simple est de première espèce et de seconde classe.*

Théorème IV. — *Un point de première espèce d'un continu irréductible* AB *est un point régulier d'ordre* 2, *sauf* A *et* B *qui sont dans ce cas d'ordre* 1; *si donc un tel point est en plus de première classe, il est ordinaire, sauf* A *et* B, *qui sont alors points d'arrêt.*

En effet, soit M un point de première espèce différent de A et de B. Nous avons

$$MA + MB \equiv AB \qquad \text{(Th. III, Chap. II)},$$
$$MA \times MB \equiv M \qquad \text{(Th. X, Chap. II)},$$

c'est-à-dire les conditions (1) et (2) sont remplies, et cela suffit, car le le point M est de première espèce.

Pour A et B, le théorème est encore plus évident.

Corollaire. — *Tous les points d'un arc simple* AB *sont des points ordinaires, sauf* A *et* B *qui sont points d'arrêt.*

Théorème V. — *Les points réguliers d'ordre* $k \neq 2$ *d'un continu donné sont des points isolés.*

C'est une conséquence immédiate du théorème IV.

Sur les points simples, on peut dire plus : *il n'existe dans le voisinage des points simples que les points ordinaires.*

Remarquons enfin que les propriétés des points d'être simples, réguliers, d'ordre, espèce et classe déterminés, constituent des invariants de l'*Analysis situs.*

C'est une conséquence immédiate de ce fait que les notions : continu irréductible entre deux points et continu de condensation d'un continu sont de tels invariants (Th. IX, Chap. I, et Th. XIV, Chap. II).

II.

Un continu qui ne contient que des points simples sera dit *simple*.

Lemme. — *Tout continu simple* $\mathcal{S}$ *est saturé par rapport à l'ordre de tous ses points,* c'est-à-dire qu'il n'y a pas de continu $\mathcal{C}$ contenant $\mathcal{S}$ (et non identique à $\mathcal{S}$), par rapport auquel tout point de $\mathcal{S}$ serait simple et du même ordre k que par rapport à $\mathcal{S}$.

En effet, soit $\mathcal{C}$ un continu contenant $\mathcal{S}$ ($\mathcal{C} \supset \mathcal{S}$).

L'ensemble $\mathcal{C} - \mathcal{S}$ n'est pas fermé, il existe donc un point A de $\mathcal{C}$, tel que

$$(a) \qquad (\mathcal{C} - \mathcal{S})' \supset \mathrm{A},$$

$$(b) \qquad \mathcal{C} - \mathcal{S} \times \mathrm{A} \equiv 0.$$

Il résulte de (b), vu que $\mathrm{A} \subset \mathcal{C}$,

$$\mathrm{A} \subset \mathcal{S}.$$

Soit k l'ordre du point simple A par rapport à $\mathcal{S}$ et soient AP_1, AP_2, ..., AP_k les arcs simples correspondants.

Relativement à $\mathcal{C}$, on a

$$\mathcal{C} - (\mathrm{AP}_1 + \ldots + \mathrm{AP}_k) \supset \mathcal{C} - \mathcal{S} \supset \mathrm{A}.$$

Par conséquent, le point A n'est pas un point simple d'ordre k par rapport au continu $\mathcal{C}$.

Théorème VI. — *Un continu* $\mathcal{C}$ *dont tous les points sont ordinaires, sauf deux* A *et* B *qui sont points d'arrêt, est un arc simple* AB.

Par hypothèse, il n'y a pas de continu de condensation sur $\mathcal{C}$. Par conséquent, le continu irréductible AB qui existe sur $\mathcal{C}$ est un arc simple.

$\mathcal{C}$ contient AB, et tous les points de AB sont du même ordre par rapport à $\mathcal{C}$ que par rapport à AB ; d'où, en vertu du lemme précédent,

$$\mathcal{C} \equiv AB.$$

C. Q. F. D.

Théorème VII. — *Un continu simple sans points de ramification ne peut avoir plus de deux points d'arrêt.*

Soit, en effet, $\mathcal{S}$ un continu simple et A, B, C ses trois points d'arrêt. Il existe évidemment sur $\mathcal{S}$ un continu irréductible AB qui est un arc simple. Tous les points de AB, sauf A et B, sont ordinaires ; le point C qui est un point d'arrêt de $\mathcal{S}$, n'appartient donc pas à AB ; par conséquent, $AB \not\equiv \mathcal{S}$.

Mais, en vertu du lemme, au moins un point de AB augmentera son ordre, si on le considère comme un point de $\mathcal{S}$.

Comme les points A et B restent points d'arrêt, il existe un point de AB qui est un point de ramification pour $\mathcal{S}$.

Théorème VII. — *Un continu simple sans points de ramification qui ne renferme pas deux points d'arrêt, n'en contient aucun et est une ligne simple fermée.*

Soit A l'unique point d'arrêt de la ligne simple $\mathcal{S}$, ou, si elle n'en possède pas, un point ordinaire quelconque.

Soit AP_0 un arc simple situé sur $\mathcal{S}$, et désignons par AP tout arc simple *contenu* dans AP_0 ou *contenant* AP_0.

Je dis que de deux AP quelconques, l'un d'eux contient l'autre.

Admettons, en effet, que deux arcs simples AP_1 et AP_2 sont tels que ni $AP_1 \supset AP_2$, ni $AP_2 \supset AP_1$. On voit tout de suite que ce cas ne peut pas se présenter si AP_0 contient soit AP_1, soit AP_2 ; donc AP_1 et AP_2 contiennent tous les deux AP_0.

Soit AP_3 l'arc simple *saturé* contenu dans

$$AP_1 \times AP_2.$$

Cet arc existe, en vertu des théorèmes II (Chap. I) et II (Chap. III) complété (p. 59).

On a

$$AP_1 \supset AP_3 \supset AP_0,$$

P_3 étant différent de P_1 et de P_2

Il existerait donc dans le voisinage du point P_3 les points de P_3P_2 non contenus ni dans P_3A ni dans P_3P_1, et le point P_3 ne serait pas ordinaire, contrairement à l'hypothèse.

Considérons l'ensemble $\mathfrak{M}(|AP|)$; il sera simplement ordonné, si nous convenons que

$$M_1 \prec M_2$$

quand

$$M_1 \subset AM_2.$$

Il est évident que le point limite de la suite $M_1, M_2, \ldots$, quand on considère les M_k comme éléments d'un type d'ordre simple, est aussi le point limite géométrique de cette suite ; et réciproquement, le point limite géométrique est le point limite du type d'ordre, à la condition que la suite $M_1, M_2, \ldots$ en admet un ; il peut arriver, en effet, que le type d'ordre de $\mathfrak{M}(|AP|)$ ne soit pas fermé, même si $\mathfrak{M}(|AP|)$ est fermé.

Il est évident que ceci ne peut se présenter que pour des suites telles que, N étant un point quelconque de $\mathfrak{M}(|AP|)$, on peut trouver, dans la suite $M_1, M_2, \ldots$, un point M_i tel que

$$N \prec M_i.$$

Je dis que toutes les suites jouissant de cette propriété ont le même point limite géométrique.

Supposons, en effet,

$$\begin{aligned} H_1 &\equiv \lim_{i=\infty} M'_i \\ H_2 &\equiv \lim_{i=\infty} M''_i \end{aligned} \qquad (H_1 \not\equiv H_2).$$

On peut évidemment supposer

$$M'_i \prec M''_i \prec M'_{i+1}.$$

Considérons les arcs simples $M'_i M''_i$.

L'ensemble $\{M'_i M''_i\}$ admet l'ensemble-limite contenant les points H_1 et H_2 ; son ensemble d'accumulation est donc un continu, et, par conséquent, $\mathfrak{M}(\{AP\})$ et, par suite, $\mathcal{S}$ devrait contenir un continu de condensation (Th. VIII, Chap. I), ce qui est manifestement absurde, tous les points de $\mathcal{S}$ étant, par hypothèse, simples.

Je dis que ce point limite unique H appartient à $\mathfrak{M}(\{AP\})$. En effet, supposons que H n'appartient pas à $\mathfrak{M}(\{AP\})$. D'après ce qui précède,

$$\overline{\mathfrak{M}}(\{AP\}) \equiv \mathfrak{M}(\{AP\}) + H.$$

L'ensemble $\overline{\mathfrak{M}}(\{AP\})$ étant simplement et naturellement ordonné, est un arc simple AH. Mais alors AH est un AP et devrait être contenu dans $\mathfrak{M}(\{AP\})$, contrairement à l'hypothèse.

Le point H appartient donc à $\mathfrak{M}(\{AP\})$. Je dis que $H \equiv A$.

Considérons, en effet, un point R, tel que $H \prec R$. Un tel point existe, car $\mathfrak{M}(\{AP\})$ ne possède pas de dernier élément (*voir* plus bas). Par conséquent, dans le voisinage du point H (si $H \not\equiv A$), nous aurons les points des arcs simples HA et HR et encore les points M_k, dont H est le point limite. Le point H ne serait donc pas ordinaire. H est donc identique à A. Mais alors A n'est pas un point d'arrêt, mais un point ordinaire. D'après le lemme de ce paragraphe,

$$\mathfrak{M}(\{AP\}) \equiv \mathcal{S}.$$

Le type d'ordre de $\mathcal{S}$ étant cyclique simple, $\mathcal{S}$ est une ligne simple fermée.

Nous avons supposé, au cours de la démonstration, que le type d'ordre de $\mathfrak{M}(\{AP\})$ n'est pas fermé.

Il est facile de voir que notre supposition est nécessairement vérifiée.

En effet, si le type d'ordre de $\mathfrak{M}(\{AP\})$ était fermé, son dernier élément étant K, $\mathfrak{M}(\{AP\})$ serait un arc simple AK. K étant un point ordinaire de $\mathcal{S}$, il devrait exister un KL n'ayant avec AK que le point K en commun.

Mais alors AK + KL est un arc simple AL qui est évidemment un AP. $\mathfrak{M}(\{AP\})$, c'est-à-dire AK, devrait donc contenir AL, ce qui n'a pas lieu.

THÉORÈME IX. — *Tout continu simple :*

1° *N'a qu'un nombre fini de points non ordinaires* (conséquence immédiate du théorème V);

2° *Peut être décomposé en un nombre fini d'arcs simples n'ayant en commun que les extrémités.*

Prenons un point non ordinaire quelconque A d'un continu simple $\mathcal{S}$; soit k son ordre.

Il existe donc, dans le voisinage de A, k arcs simples $AP_1^{(0)}, \ldots, AP_k^{(0)}$.

Considérons tous les AP_i contenus dans $AP_i^{(0)}$ ou contenant $AP_i^{(0)}$, et dont tous les points, sauf peut-être les extrémités, seraient ordinaires pour $\mathcal{S}$.

L'ensemble $\mathfrak{M}(\{AP_i\})$ est ou bien un arc simple AA_i, A_i étant un autre point non ordinaire de $\mathcal{S}$, ou bien une ligne simple fermée; dans ce cas, $\mathfrak{M}(\{AP_i\})$ peut être toujours décomposée en deux arcs simples.

En procédant de la sorte avec chaque point non ordinaire, nous obtiendrons la décomposition cherchée en arcs simples.

Ce théorème démontre que les continus simples sont des *lignes* connues dans l'*Analysis situs* sous le nom de *réseaux*.

NOTE I.

L'espace euclidien à n dimensions sert de base à nos recherches ; nous devons donc nous demander ce qu'il faut entendre par *espace euclidien à n dimensions*. On dira peut-être, on le dit dans ce cas presque toujours, que c'est l'ensemble de tous les groupes de n-nombres réels (finis). Or, ce n'est pas *l*'espace euclidien, ce qu'on définit ainsi, mais *un* certain espace, *une* certaine interprétation de l'espace euclidien. Et, comme nous avons adopté un exposé purement géométrique, nous sommes obligés, pour des raisons d'esthétique, de suivre la voie axiomatique.

La réponse la plus parfaite à cette question, mais pour $n \leqq 3$ seulement, a été faite par M. Hilbert, dans son célèbre travail *Grundlagen der Geometrie ;* à ma connaissance, personne n'a complété jusqu'ici ses résultats, de manière à les étendre à l'espace à un nombre quelconque de dimensions. Nous aussi, nous ne nous arrêterons pas sur cette question, et nous allons passer tout de suite à un problème plus général : nous nous proposons de construire une Géométrie contenant comme cas particuliers toutes les géométries, pour lesquelles les théorèmes et les raisonnements du présent Mémoire sont applicables. On pourra ensuite vérifier directement, à l'aide de la Géométrie analytique euclidienne à n dimensions, qu'elle contient réellement, comme cas particulier, la Géométrie euclidienne.

Ce qui frappe tout d'abord dans les théorèmes qui font l'objet de notre étude actuelle, c'est qu'ils se déduisent, à quelques exceptions près, les uns des autres par un calcul où n'interviennent pas les propriétés géométriques de l'espace, à savoir, à l'aide des propositions fondamentales des paragraphes II et III (Chap. I), qui sont valables pour les ensembles les plus généraux. En effet, aucun axiome ni aucune notion géométrique fondamentale, telle que la droite, le plan n'y sont utilisés, sauf dans la démonstration de M. Mazurkiewicz du théorème I (Chap. II), que nous remplacerons par une autre (*voir* Note II).

Une seule notion géométrique paraît intervenir d'une façon essentielle dans nos raisonnements, c'est celle de la distance entre deux points. Elle nous sert à définir la notion du point limite et la propriété d'un ensemble d'être bien enchaîné. En utilisant la définition de Jordan-Schœnflies de cette dernière propriété, il ne nous restera qu'à définir la notion du point limite, pour que toutes les autres définitions aient un sens précis, indépendant de la notion de distance. Nous supposerons seulement que le point limite d'une suite satisfait aux deux conditions de M. Fréchet [1] : 1° si chacun des éléments de la suite infinie $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ est identique à un même élément A, toute la suite a certainement une limite, qui est A ; 2° si une suite infinie $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ a une limite A, toute suite d'éléments extraits de la première suite et pris dans le même ordre $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_p}$ (où $n_p < n_{p+1}$), a une limite, qui est aussi A.

Cette remarque est très utile : elle montre, en effet, qu'on peut étendre les propositions relatives à un ensemble de points aux ensembles d'autres éléments, une fois la notion d'élément limite pour la classe de ces éléments définie [2].

Remarquons aussi, dans le même ordre d'idées, que l'étude des axiomes de l'espace, que nous nous proposons de faire en ce moment,

---

(1) *Sur quelques points du calcul fonctionnel* (Thèse, Paris 1906).

Pour les définitions se rapportant aux autres propriétés des ensembles, voir *Ibid.;* je ne m'écarte de M. Fréchet que dans la définition d'un ensemble bien enchaîné, où j'introduis, comme M. Schœnflies, la définition de M. Jordan.

(2) C'est ce que nous ferons, en particulier, pour les ensembles, dont les éléments sont des arcs simples.

est importante non seulement par l'intérêt qu'elle présente en soi, mais encore parce qu'elle permet de passer des propriétés des ensembles de points dans un espace déterminé aux propriétés des ensembles de points considérés dans un autre espace, de même que l'étude des ensembles abstraits permet de passer des ensembles de points aux ensembles composés d'autres éléments. Les deux procédés que nous venons de signaler me semblent indispensables dans l'étude « des surfaces ».

En dehors de deux définitions, signalées plus haut, la notion de distance intervient encore d'une façon plus ou moins directe, dans certaines démonstrations ; de plus, les propriétés des ensembles qué l'on peut obtenir en utilisant la définition axiomatique, ci-dessus donnée, du point limite, sont insuffisantes pour la démonstration de certains théorèmes.

Avant d'introduire le système complet d'axiomes dont nous avons besoin dans nos démonstrations, nous compléterons la classification des ensembles de M. Fréchet par la définition d'un ensemble *parfaitement compact*.

M. Fréchet ne parle que de l'élément limite d'une suite des éléments dont le nombre ordinal est ω. Pourtant, ses conditions 1° et 2° restent valables, quand on substitue aux nombres finis n_i les nombres transfinis α_i plus petits qu'un certain nombre μ de seconde espèce [1].

Nous dirons qu'un ensemble est *parfaitement compact*, si de toute suite de ses éléments on peut extraire une suite du même type d'ordre et possédant un élément limite.

Voici notre système d'axiomes :

L'espace est un ensemble d'éléments, que nous nommons *points* et

---

[1] En particulier, en introduisant la notion de distance de deux éléments, nous adoptons la définition suivante : un point A_0 est le point limite d'une suite du type d'ordre μ : $A_1, A_2, \ldots, A_\omega, A_{\omega+1}, \ldots, A_\alpha, \ldots, (\alpha < \mu)$ si à tout nombre ε on peut faire correspondre un nombre ordinal $\alpha_1 < \mu$ tel que $\rho(A_0, A_\alpha) < \varepsilon$ pour tout $\alpha < \alpha_1$.

que nous désignons par des majuscules romaines, assujetti aux conditions suivantes :

I. Il est : 1° Parfaitement compact (extrémal) ;
2° Bien enchaîné (ce qu'on peut exprimer comme il suit : l'ensemble complémentaire d'un ensemble fermé est non fermé).

On peut résumer ces deux axiomes en un mot, en disant que l'espace est un ensemble *continu* (nous supposons qu'il contient plus d'un élément).

II. 1° A chaque couple de deux points distincts A et B correspond un nombre positif (réel, fini et non nul) nommé *distance* des points A et B. Nous le désignerons par le symbole

$$\rho(A, B) = \rho(B, A).$$

Nous convenons de plus que $\rho(A, A) = 0$.

2° $\rho(A, B)$ est une fonction continue de A et de B.

Si l'on a

$$\lim_{n=\infty} A_n \equiv A \quad \text{et} \quad \lim_{n=\infty} B_n = B,$$

alors, d'après la continuité de $\rho(A, B)$, $\lim\limits_{n=\infty} \rho(A_n, B_n)$, si elle existe, est égale à $\rho(A, B)$; or, $\lim\limits_{n=\infty} \rho(A_n, B_n)$ existe toujours, car soit

$$\lim_{k=\infty} \rho(A_{n_k}, B_{n_k}) = \overline{\lim_{n=\infty}}\, \rho(A_n, B_n)$$

et

$$\lim_{k=\infty} \rho(A_{m_k}, B_{m_k}) = \underline{\lim_{m=\infty}}\, \rho(A_m, B_m);$$

or

$$\lim_{k=\infty} A_{n_k} \equiv A, \quad \lim_{k=\infty} B_{n_k} \equiv B,$$

et de même

$$\lim_{k=\infty} A_{m_k} \equiv A, \quad \lim_{k=\infty} B_{m_k} \equiv B ;$$

il en résulte :

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\, \rho(A_n, B_n) = \rho(A, B) \quad \text{et} \quad \underline{\lim_{n=\infty}}\, \rho(A_n, B_n) = \rho(A, B);$$

par suite, la limite de $\rho(A_n, B_n)$ existe, et l'on a

$$\lim_{n=\infty} \rho(A_n, B_n) = \rho(A, B).$$

En supposant toujours le point limite assujetti uniquement aux deux conditions de M. Fréchet, les axiomes II, 1° et II, 2° entraînent la définition complète du point limite, à savoir celle qu'on adopte toujours pour les ensembles géométriques.

En effet, soit

$$\lim_{n=\infty} A_n \equiv A;$$

ceci entraîne

$$\lim_{n=\infty} \rho(A_n, A) = \rho(A, A) = 0.$$

Réciproquement, la relation

$$\lim_{n=\infty} \rho(A_n, A) = 0$$

entraîne

$$\lim_{n=\infty} A_n \equiv A.$$

En effet, soit B un point limite de l'ensemble $\{A_n\}$, et supposons B différent de A ; soit $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_k}$, la suite qui admet B comme élément limite, c'est-à-dire

$$\lim_{k=\infty} A_{n_k} \equiv B.$$

Cela entraîne

$$\lim_{k=\infty} \rho(A_{n_k}, A) = \rho(B, A).$$

Or,

$$\lim_{k=\infty} \rho(A_{n_k}, A) = \lim_{n=\infty} \rho(A_n, A) = 0,$$

donc $B \equiv A$, contrairement à l'hypothèse.

En partant de l'axiome II, 2°, moyennant une longe chaîne dc théorèmes que je me dispense de reproduire ici, on peut démontrer l'existence d'une fonction $f(a)$ positive, monotone et croissante qui satisfait aux deux conditions suivantes :

1° $\lim\limits_{a=0} f(a) = 0$;

2° Si $\rho(A, B) < a$ et $\rho(A, C) < a$, on a $\rho(B, C) < f(a)$(1).

Ceci montre que l'espace qui satisfait à nos quatre axiomes est une classe (V) de M. Fréchet. Par conséquent, l'ensemble dérivé d'un ensemble de points de notre espace est fermé.

Nos quatre axiomes sont, comme nous l'avons dit plus haut, compatibles et indépendants entre eux. *Ils sont compatibles*, car ils sont vérifiés par n'importe quel continu situé à distance finie dans l'espace euclidien, et, en général, par un *continu quelconque d'un espace qui lui-même satisfait à ces axiomes*. Cette remarque nous sera très utile dans la suite.

Ils sont indépendants entre eux, car on peut donner des exemples qui montrent que trois quelconques de nos axiomes peuvent être vérifiés, sans que le quatrième le soit (2).

L'espace euclidien n'est pas compact; il le devient si on lui adjoint les éléments à l'infini (le point ou le plan), mais alors l'axiome II, 1° ne se trouve plus vérifié. Cela ne nous gêne pas autrement, car notre étude se borne aux ensembles de points situés entièrement à distance finie, c'est-à-dire contenus dans une sphère (de rayon fini) qui est bien un ensemble compact (d'après le théorème de Weierstrass), et même parfaitement compact (*voir* Note III).

---

(1) Si au lieu de l'axiome II, 2°, on adoptait l'axiome suivant :

$$\rho(B, C) \leqq \varphi[\rho(A, B), \rho(A, C)], \text{ où } \varphi(a, b) = \varphi(b, a) \text{ et } \lim_{a=0} \varphi(a, b) = b,$$

la continuité de ρ et l'existence de la fonction $f(a)$ en résulterait immédiatement. Mais sous cette forme cet axiome suppose implicitement l'indépendance de la fonction $\varphi(a, b)$ des points A, B, C, tandis que cette indépendance peut se démontrer à l'aide de notre axiome II, 2°.

(2) Il se peut cependant qu'il suffise de supposer notre espace *compact*, pour qu'on puisse démontrer qu'en vertu des axiomes du groupe II, il est aussi *parfaitement compact*.

Dans beaucoup de démonstrations, nous n'avons besoin d'aucun de nos axiomes. Il suffit de supposer que les éléments des ensembles envisagés appartiennent à la classe (L) (1), les éléments de la classe (L) étant caractérisés par la propriété d'admettre une définition des éléments limites, satisfaisant aux conditions 1° et 2°. Nous restreindrons seulement la notion du continu, en réservant cette dénomination pour les *ensembles compacts*, *fermés et bien enchaînés*, ne se réduisant pas à un point unique, c'est-à-dire extrémaux, parfaits et bien enchaînés (2).

C'est ainsi que les formules du paragraphe III, Chap. I (sans parler de celles du paragraphe II), sont absolument générales, le point limite n'étant défini que par les deux conditions de M. Fréchet. Seule, la proposition XIII fait exception, car l'ensemble dérivé d'un ensemble pouvant être, dans le cas général, non fermé, la propriété d'être bien enchaîné ne peut être définie que pour les ensembles fermés. En nous restreignant à ce cas, le théorème est vrai sous la forme suivante :

Étant donnés deux ensembles fermés et bien enchaînés $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ ayant des points communs, l'ensemble fermé $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ est aussi bien enchaîné.

Supposons, en effet, le contraire, et soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux ensembles fermés sans points communs en lesquels on peut décomposer $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$. Un de ces ensembles, $\mathcal{F}_1$ par exemple, a nécessairement des points communs avec l'ensemble $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$.

D'autre part, $\mathcal{F}_2$ a des points communs avec un au moins de deux ensembles $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$. Supposons que $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{F}_2 \not\equiv 0$. Il en résulterait, contrairement à l'hypothèse, la possibilité de décomposer $\mathcal{E}_1$ en deux

---

(1) Fréchet, *loc. cit.*, p. 5.

(2) La notion d'ensemble fermé est relative à l'espace dans lequel on considère l'ensemble donné; l'espace lui-même est toujours fermé, car il contient tous les éléments possibles, donc les éléments limites aussi ; par conséquent, l'axiome 1 exprime que l'espace est extrémal et, par suite, continu. Je remarque que la notion d'espace joue ici le même rôle que la notion de *classe* de M. Fréchet.

ensembles fermés (XI, Ch. I) $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{F}_1$ et $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{F}_2$ sans points communs.

Pour démontrer la proposition XIV, il faut remarquer que $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$ étant tous les deux compacts, l'ensemble $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$ l'est aussi.

J'ajoute ici encore un théorème qui est banal pour un espace métrique, mais ne l'est pas pour un espace, pour lequel aucun axiome géométrique n'est supposé d'avance.

Si A *est un point intérieur de chacun de deux continus donnés* $\mathfrak{C}_1$ *et* $\mathfrak{C}_2$, *il est un point intérieur de l'ensemble de leurs points communs.*

En effet, les hypothèses

$$\mathfrak{C}_1 \supset A, \quad \mathfrak{C}_2 \supset A, \quad [\mathfrak{L} - (\mathfrak{C}_1)]' \times A \equiv 0, \quad (\mathfrak{L} - \mathfrak{C}_2)' \times A \equiv 0.$$

entraînent

$$\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \supset A \quad \text{et} \quad [\mathfrak{L} - (\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2)']\times A \equiv [(\mathfrak{L} - \mathfrak{C}_1)' + (\mathfrak{L} - \mathfrak{C}_2)'] \times A \equiv 0.$$

C. Q. F. D.

Les théorèmes III, VI du Chapitre I; Th. III, IV, V, VII, XI du Chapitre II; Th. I, II du Chapitre III, sont aussi absolument généraux.

Revenons à l'espace qui satisfait au système d'axiomes de la page 78.

L'axiome I, 2° n'est nécessaire que pour la démonstration du théorème suivant :

Si un ensemble $\mathcal{A}$ *contient au moins un élément de l'espace* $\mathfrak{L}$, *mais ne contient pas tous les éléments de cet espace, la frontière de cet ensemble contient un élément au moins* ([1]).

Soit, en effet,

$$\overline{\mathcal{A}} \equiv \mathcal{A} + \mathcal{E}_1, \tag{a}$$

où

$$\mathcal{E}_1 \times \mathcal{A} \equiv 0, \tag{b}$$

et

$$(\overline{\mathfrak{L} - \mathcal{A}}) \equiv (\mathfrak{L} - \mathcal{A}) + \mathcal{E}_2, \tag{c}$$

([1]) Jordan, *Cours d'Analyse*, 2e édition, t. I, p. 20. La démonstration de M. Jordan n'est pas valable dans le cas qui nous occupe, car elle utilise la notion de droite; mais en se servant des axiomes du groupe II, on peut donner une démonstration analogue à celle de M. Jordan.

où

$$(d) \qquad \mathcal{E}_2 \times (\mathfrak{Z} - \mathcal{A}) \equiv 0.$$

De la relation (b) on tire

$$\mathcal{E}_1 \subset (\mathfrak{Z} - \mathcal{A}) \subset (\overline{\mathfrak{Z} - \mathcal{A}})$$

et de (d)

$$\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}},$$

ce qui donne, en vertu de (a) et (c),

$$\mathfrak{F}(\mathcal{A}) \equiv \overline{\mathcal{A}} \times (\overline{\mathfrak{Z} - \mathcal{A}}) \supset \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2.$$

Les ensembles $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ ne peuvent pas être vides à la fois, car les ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathfrak{Z} - \mathcal{A}$, qui n'ont pas de points communs, seraient alors fermés [1], et $\mathfrak{Z}$ qui est leur somme ne serait pas bien enchaîné, contrairement à l'axiome I, 2°. Par conséquent,

$$\mathfrak{F}(\mathcal{A}) \not\equiv 0.$$

C. Q. F. D.

Le sphéroïde [2] $\mathfrak{S}(A, a)$, de centre A et de rayon a, est, par définition, l'ensemble de tous les points M tels que $\rho(A, M) \leqq a$; cet ensemble est fermé.

Soit, en effet, $S_1, S_2, \ldots, S_n$ une suite des points du sphéroïde admettant un point limite S_0, c'est-à-dire $\lim\limits_{n=\infty} S_n \equiv S_0$. Pour tous les points S_n, on a

$$\rho(A, S_n) \leqq a \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

En vertu de l'axiome II, 2°,

$$\rho(A, S_0) = \lim_{n=\infty} \rho(A, S_n) \leqq a,$$

c'est-à-dire S_0 appartient au sphéroïde.

---

(1) Bien que $\overline{\mathfrak{M}}$ puisse être non-fermé, l'identité $\overline{\mathfrak{M}} \equiv \mathfrak{M}$ montre toujours que $\mathfrak{M}$ est fermé, car $\overline{\mathfrak{M}} \supset \mathfrak{M}'$.

(2) FRÉCHET, *loc. cit.*, p. 21.

Un raisonnement tout à fait pareil montre que si $\mathcal{A}$ est fermé, l'ensemble $\mathfrak{S}(\mathcal{A}, a)$ [c'est-à-dire l'ensemble de tous les points M, tels que $\rho(\mathrm{M}, \mathcal{A}) \leqq a$] est fermé, et que pour tout point F de $\mathfrak{f}[\mathfrak{S}(\mathcal{A}, a)]$, on a $\rho(\mathrm{F}, \mathcal{A}) = a$ (¹).

La démonstration de l'équivalence des définitions de Cantor et de Jordan d'un ensemble bien enchaîné subsiste sans aucune modification.

Quant au lemme du paragraphe IV (Ch. I), il suffit d'y remplacer $\frac{\varepsilon}{3}$ par une quantité suffisamment petite η, telle que

$$f[f(\eta) + \eta] < \varepsilon,$$

ce qui est toujours possible, vu que

$$\lim_{\eta = 0} f(\eta) = 0.$$

En effet, les inégalités

$$\rho(\mathrm{T}_i, \mathrm{P}_i) < \eta, \qquad \rho(\mathrm{P}_i, \mathrm{P}_{i+1}) < \eta$$

entraînent

$$\rho(\mathrm{T}_i, \mathrm{P}_{i+1}) < f(\eta) < f(\eta) + \eta$$

et cette dernière, jointe à

$$\rho(\mathrm{P}_{i+1}, \mathrm{T}_{i+1}) < \eta < f(\eta) + \eta,$$

donne

$$\rho(\mathrm{T}_i, \mathrm{T}_{i+1}) < f[f(\eta) + \eta] < \varepsilon.$$

Je complète encore la démonstration du théorème IV (Ch. I) en montrant que $\mathfrak{T}$ contient un point T non identique à A.

On a, en effet,

$$(a) \qquad \rho(\mathrm{A}, \mathrm{T}^{(i)}_{h_i+1}) > a,$$

$$(b) \qquad \rho(\mathrm{T}^{(i)}_{h_i}, \mathrm{T}^{(i)}_{h_i+1}) < \varepsilon_i.$$

Soit

$$\mathrm{T} \equiv \lim_{k=\infty} \mathrm{T}^{(i_k)}_{h_{i_k}}.$$

(¹) Mais la réciproque n'est pas vraie, même pour un sphéroïde.

Si T était identique à A, c'est-à-dire si

$$\lim_{k=\infty} \rho\,(\mathrm{A}, \mathrm{T}^{(ik)}_{h_{i_k}}) = 0,$$

on pourrait faire correspondre à tout ε un k_0 tel que pour tout $k \geqq k_0$, on aurait

$$(c) \qquad \rho\,(\mathrm{A}, \mathrm{T}^{(ik)}_{h_{i_k}}) < \varepsilon.$$

Pour k suffisamment grand, on aura $\varepsilon_{i_k} < \varepsilon$ et, par conséquent,

$$(d) \qquad \rho\,(\mathrm{T}^{(ik)}_{h_{i_k}}, \mathrm{T}^{(ik)}_{h_{i_k}+1}) < \varepsilon.$$

Des relations (c) et (d), on déduit la relation

$$\rho\,(\mathrm{A}, \mathrm{T}^{(ik)}_{h_{i_k}+1}) < f(\varepsilon)$$

qui est en contradiction avec (a), car on peut prendre ε suffisamment petit pour que $f(\varepsilon)$ soit plus petit que a.

Tout pareillement, on peut compléter les autres théorèmes.

Dans la Note II, nous allons donner une démonstration, valable pour notre espace, du théorème I du Chapitre II, et dans la Note III, celle du théorème VI du Chapitre III. Il se trouve donc que le seul théorème qui n'est pas général, c'est le théorème II du Chapitre II. Il n'est pas, en effet, vérifié dans l'espace à *une* dimension qui satisfait pourtant au système de nos quatre axiomes.

NOTE II.

La démonstration de M. Mazurkiewicz utilise d'une façon essentielle les propriétés de l'espace euclidien. Pourtant, le théorème est général : j'en donne ici une démonstration (1) qui n'utilise que le système d'axiomes de la page 78.

(1) Elle a été publiée dans ma Note des *Comptes rendus* du 18 juillet 1910.

Soit $\mathfrak{C}$ le continu donné et A et B deux de ses points. Si $\mathfrak{C}$ n'est pas un $\mathfrak{K}(A, B)$ irréductible, il existe un autre $\mathfrak{K}(A, B)$ continu $\mathfrak{C}_1$, tel que $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_1 \neq 0$. En général :

a. Étant donné un $\mathfrak{C}_\alpha$, qui n'est pas un $\mathfrak{K}(A, B)$ irréductible, il existe un $\mathfrak{K}(A, B)$ continu $\mathfrak{C}_{\alpha+1}$ tel que

$$\mathfrak{C}_\alpha \supset \mathfrak{C}_{\alpha+1} \text{ et } \mathfrak{C}_\alpha - \mathfrak{C}_{\alpha+1} \neq 0.$$

Il existe donc un point C_α de $\mathfrak{C}_\alpha$, non contenu dans $\mathfrak{C}_{\alpha+1}$.

b. Étant donnée une suite infinie bien ordonnée $\{\mathfrak{C}_\alpha\}$, où chaque $\mathfrak{C}_\alpha$ est un $\mathfrak{K}(A, B)$ et où $\mathfrak{C}_\alpha \supset \mathfrak{C}_{\alpha+\beta}$, ou bien cette suite aura un dernier terme $\mathfrak{C}_0$ qui sera un $\mathfrak{K}(A, B)$ irréductible, ou bien on pourra la prolonger de telle façon qu'elle n'aura pas de dernier élément et qu'elle définira un ensemble

$$\mathfrak{C}_\mu \equiv \mathfrak{D}(\{\mathfrak{C}_\alpha\}),$$

où μ est un nombre transfini de seconde espèce (c'est-à-dire que le nombre $\mu - 1$, précédant immédiatement μ, n'existe pas), et $\mu > \alpha$.

Je dis que $\mathfrak{C}_\mu$ est un $\mathfrak{K}(A, B)$. En effet, $\mathfrak{C}_\mu$ est un ensemble fermé [Ch. I, XIII, (2)] et contient A et B. Si l'on suppose donc que $\mathfrak{C}_\mu$ n'est pas un $\mathfrak{K}(A, B)$, il en résulte que

$$\mathfrak{C}_\mu \equiv \mathfrak{A} + \mathfrak{B},$$

où

$$(a) \qquad \mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}' + A,$$

$$(b) \qquad \mathfrak{B} \supset \mathfrak{B}' + B,$$

$$(c) \qquad \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \equiv 0.$$

Soit $\mathfrak{Q}$ l'ensemble de points Q tels que

$$\rho(Q, \mathfrak{A}) \leq \frac{\rho(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})}{2},$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{Q} \equiv \mathfrak{S}\left[\mathfrak{A}, \frac{1}{2}\rho(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})\right].$$

Donc, $\mathfrak{Q}$ étant fermé (*voir* p. 84),

$$(d) \qquad \mathfrak{Q} \supset \mathcal{A},$$

$$(e) \qquad \overline{\mathfrak{Q}} \times \mathcal{B} = \mathfrak{Q} \times \mathcal{B} \equiv 0$$

et

$$(f') \qquad \mathfrak{F}(\mathfrak{Q}) \times \mathcal{B} \equiv 0.$$

D'autre part (*voir* p. 84),

$$\rho(F, \mathcal{A}) = \frac{1}{2}\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B}),$$

pourvu que

$$F \subset \mathfrak{F}(\mathfrak{Q})$$

et, par conséquent,

$$(f'') \qquad \mathfrak{F}(\mathfrak{Q}) \times \mathcal{A} \equiv 0.$$

Donc

$$(f) \qquad \mathfrak{F}(\mathfrak{Q}) \times \mathfrak{C}_\mu \equiv 0.$$

Les relations

$$\mathfrak{Q} - \mathfrak{F}(\mathfrak{Q}) \supset A \qquad [(d), (f''), (a)]$$

(c'est-à-dire A est un point intérieur de $\mathfrak{Q}$)

et

$$\overline{\mathfrak{Q}} \times B \equiv 0 \qquad [(e), (b)]$$

(c'est-à-dire B est un point extérieur de $\mathfrak{Q}$)

entraînent (d'après le théorème III, Ch. I),

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{Q}) \times \mathfrak{C}_\alpha \supset F_\alpha.$$

Mais comme

$$\mathfrak{C}_\alpha \supset \mathfrak{C}_{\alpha+\beta},$$

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{Q}) \times \mathfrak{C}_\alpha \supset \mathfrak{F}(\mathfrak{Q}) \times \mathfrak{C}_{\alpha+\beta} \supset F_{\alpha+\beta},$$

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{Q}) \times \mathfrak{C}_\alpha \supset \mathfrak{M}(\vdots\, F_{\alpha+\beta} \vdots) \qquad \begin{pmatrix} \beta = 1, 2, 3, \ldots . \\ \alpha + \beta < \mu \end{pmatrix}$$

et (IX, XI, Ch. I)

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{Q}) \times \mathfrak{C}_\alpha \supset \mathfrak{M}'(\{F_{\alpha+\beta}\}) \supset F_\mu,$$

pour toutes les valeurs de l'indice $\alpha < \mu$, F_μ étant un point tel qu'à un nombre transfini quelconque $\varkappa$, plus petit que μ et à une quantité arbitraire ε, on puisse faire correspondre un nombre $\gamma > \varkappa$, tel que

$$\rho(F_\gamma, F_\mu) < \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$F_\mu \equiv \lim_{\lambda=\lambda_0} F_{\alpha+\beta_\lambda}, \quad \text{où} \quad \lim_{\lambda=\lambda_0} (\alpha + \beta_\lambda) = \mu.$$

Un tel point F_μ existe, car nous avons supposé l'espace *parfaitement* compact (axiome I, 1°).

Par conséquent,

$$\mathfrak{D}(\{[\mathfrak{F}(\mathfrak{Q}) \times \mathfrak{C}_\alpha]\}) \supset F_\mu,$$

ou (VI, Ch. I)

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{Q}) \times \mathfrak{D}(\{\mathfrak{C}_\alpha\}) \supset F_\mu,$$

ce qui est en contradiction avec (f).

Donc A et B sont bien enchaînés dans $\mathfrak{C}_\mu$, et, par conséquent, $\mathfrak{C}_\mu$ est un $\mathfrak{K}(A, B)$.

D'après le célèbre théorème de M. Zermelo [1], la puissance de tout ensemble est un *aleph;* soit $\aleph_\zeta$ celle de l'ensemble de tous les points de notre espace. Il en résulte qu'à l'ensemble bien ordonné des points C_α, il ne peut correspondre qu'un nombre transfini de la classe $\zeta + 2$ ou inférieur à $\zeta + 2$, si $\zeta < \omega$; de la classe ζ ou inférieur à ζ, si $\zeta \geqq \omega$; et de même, en ce qui concerne l'ensemble des $\mathfrak{C}_\alpha$, semblable à l'ensemble des C_α.

De cette remarque, on déduit immédiatement que l'hypothèse de la non-existence d'un continu irréductible AB sur $\mathfrak{C}$ conduit à une contradiction.

---

(1) *Der Satz, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann* ... (*Math. Ann.*, t. LIX, p. 514) et *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung* (*Math. Ann.*, t. LXV, p. 107).

En effet, si AB n'existait pas, nous pourrions prolonger notre suite des $\mathfrak{S}_\alpha$ jusqu'à atteindre tout nombre transfini de la classe $\zeta + 2$, respectivement ζ. Or, l'ensemble $\mathfrak{D}(\{\mathfrak{S}_\alpha\})$, où l'indice α parcourt la suite de tous les nombres transfinis de la classe ζ, nous définit, d'après ce qui a été dit, un $\mathfrak{K}(A, B)$. S'il n'était pas AB, il existerait un C_ξ, où ξ est le premier nombre de la classe $\zeta + 1$, respectivement $\zeta + 3$, distinct des autres C_α, ce qui est manifestement absurde.

La démonstration de M. Mazurkiewicz a pourtant, outre qu'elle procède par un simple passage à la limite, un autre avantage : elle donne le moyen, au moins en théorie, de trouver effectivement un AB dans un continu donné, et, par suite, de répondre à la question suivante : un $\mathfrak{K}(A, B)$ étant donné, est-il irréductible ou non?

NOTE III.

L'ensemble compact n'est pas nécessairement parfaitement compact, comme le montre bien l'exemple de l'ensemble de tous les nombres transfinis ordinaux de la seconde classe. On peut démontrer qu'une portion de l'espace euclidien à n dimensions est parfaitement compacte par le même raisonnement (méthode de décomposition en cubes) qu'on démontre qu'elle est compacte, c'est-à-dire le théorème de Weierstrass.

La notion de l'ensemble parfaitement compact nous a été nécessaire pour la démonstration du théorème I, Chap. II (Note II, p. 88); elle nous permettra aussi de généraliser les résultats du paragraphe II, (Chap. III).

Nous avons utilisé dans ce paragraphe la propriété que possède un type d'ordre simple fermé (il serait plus rationnel d'appeler ce type *compact*), d'avoir le premier et le dernier élément. Cette propriété appartient bien aux types d'ordre des ensembles des points à distance finie de l'espace euclidien (on le démontre encore par le même procédé de décomposition en cubes), mais elle ne résulte nullement de la définition du type d'ordre fermé. C'est ainsi que le type d'ordre de tous les nombres transfinis ordinaux de la seconde classe est fermé [car toute suite (du type ω) de la forme $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots$, où $\alpha_k < \alpha_{k+1}$ a un élément limite], mais n'a pas de dernier élément.

La propriété de posséder le premier (et le dernier) élément appartient cependant toujours aux types d'ordres fermés et parfaitement compacts. En effet, il existe dans un ensemble simplement ordonné sans élément dernier une suite ascendante transfinie du type μ $A_1, A_2, \ldots, A_\omega, A_{\omega+1}, \ldots$ (dont la puissance est évidemment au plus égale à celle de l'ensemble donné), telle qu'il n'existe dans l'ensemble aucun élément de rang supérieur à celui de tous les éléments de cette suite; donc aucune suite du même type d'ordre μ extraite d'elle ne peut avoir d'élément limite, contrairement à la définition d'un ensemble parfaitement compact.

NOTATIONS.

---

1. Les majuscules romaines (A, B, ...) désignent les points.

2. Les majuscules rondes ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ...) désignent les ensembles de points.

3. Les lettres h, i, j, k, l, m, n, p, q désignent des entiers positifs (finis).

4. $\rho(A, B)$ désigne la distance entre A et B.

$\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ désigne la borne inférieure de $\rho(A, B)$, le point A étant contenu dans $\mathcal{A}$ et B dans $\mathcal{B}$.

5. $\{\Gamma_\alpha\}$ désigne l'ensemble dont les éléments sont Γ_α.

6. $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ désigne l'ensemble des points contenus dans $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

$\mathfrak{M}\{\mathcal{A}_\alpha\}$ désigne l'ensemble de points de tous les $\mathcal{A}_\alpha$.

7. $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ désigne l'ensemble des points communs aux ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

$\mathfrak{D}\{\mathcal{A}_\alpha\}$ désigne l'ensemble des points communs à tous les $\mathcal{A}_\alpha$.

8. $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ désigne l'ensemble de tous les points de $\mathcal{A}$ qui ne sont pas contenus dans $\mathcal{B}$.

9. $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ signifie : $\mathcal{A}$ est identique à $\mathcal{B}$.

10. $\left.\begin{array}{l}\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \\ \mathcal{B} \supset \mathcal{A}\end{array}\right\}$ signifie : $\mathcal{A}$ est contenu dans $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{B}$ contient $\mathcal{A}$.

11. $\left.\begin{array}{l}A \prec B \\ B \succ A\end{array}\right\}$ signifie : A précède B. ou B suit A.

12. $\mathcal{A}'$ désigne l'ensemble dérivé de $\mathcal{A}$.

13. $\overline{\mathcal{A}} \equiv \mathcal{A} + \mathcal{A}'$.

14. $\mathfrak{F}(\mathcal{A})$ désigne la frontière de $\mathcal{A}$.

15. $\mathfrak{S}(\mathcal{A}, a)$ désigne l'ensemble des points S tels que $\rho(\mathcal{A}, S) \leqq a$. En particulier $\mathfrak{S}(A, a)$ désigne le sphéroïde de centre A et de rayon a.

16. $\mathfrak{K}(A, B)$ désigne un ensemble qui contient les points A et B et qui ne peut pas être décomposé en deux ensembles fermés sans points communs, dont l'un contiendrait A et l'autre B.

17. $\mathfrak{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ désigne un continu ou un point qui contient $\mathcal{A}$ et est contenu dans $\mathcal{B}$.

18. AB désigne un continu irréductible entre les points A et B.

Vu et approuvé :

Paris, le 26 avril 1911.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Paul APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 26 avril 1911.

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

L. LIARD.

TABLE DES MATIÈRES.