ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les continus irréductibles entre deux points.* Note de M. **Sigismond Janiszewski.**

Dans ma Note du 18 juillet 1910, j'ai essayé de montrer la grande variété et l'irrégularité d'un continu irréductible entre deux points (1) et je me suis borné à l'étude du genre le plus simple de ces continus, des arcs simples. Pourtant le continu irréductible AB est aussi susceptible de théorèmes tout à fait généraux et mérite d'être étudié (2).

La seconde partie de ma Note en question nous montre déjà une propriété générale d'un arc irréductible, qui n'est pas simple (nous nous bornons naturellement à ceux-là, les arcs simples étant étudiés à part). Elle exprime qu'il y a sur un arc irréductible non simple AB deux points M et N ($M \not\equiv N$) tels que soit $AM \equiv AN$, soit $BM \equiv BN$, et que dans le voisinage de M et de N il existe un continu de condensation (3).

Je vais démontrer à présent que M et N sont eux-mêmes situés respectivement sur un continu de condensation. Je remarque que ce théorème ne dérive point du précédent et n'est nullement évident. On peut en effet construire un continu, *dont* TOUS *les points* SAUF UN *appartiennent à des continus de condensation.*

I. *Étant donné un continu irréductible à la fois entre* A *et* B *et entre* A *et* C ($B \not\equiv C$), *c'est-à-dire*

$$AB \equiv AC$$

et sur lui un BC *quelconque* (4) *on a, pour chaque point* M *de* BC, *soit*

$$AM \equiv AB,$$

---

(1) Un continu irréductible entre deux points A et B ou arc irréductible AB est un ensemble : 1° continu; 2° contenant A et B; 3° irréductible par rapport à ces deux propriétés (comp. Zoretti, *Annales de l'École Normale*, 1909).

(2) Voir Zoretti, *Comptes rendus*, t. 151, n° 3.

(3) C'est-à-dire un sous-ensemble continu $\mathcal{K}$ d'un continu donné $\mathcal{C}$, tel que l'ensemble dérivé de $\mathcal{C}-\mathcal{K}$ contient $\mathcal{K}$.

(4) Voir le théorème I de ma Note citée et la Note de M. Mazurkiewicz (*Comptes rendus*, t. 151, n° 4).

soit

$$BM \equiv CM \equiv BC.$$

Distinguons deux cas :

1° AM contient B.

Comme AM est un sous-ensemble de AB

$$AM \equiv AB.$$

Cette identité montre en même temps qu'il n'existe sur AB qu'un seul continu irréductible entre A et M ;

2° AM ne contient pas B; dans ce cas, il ne peut pas contenir C, car autrement il contiendrait AC, c'est-à-dire AB, donc B.

Considérons sur BC deux continus irréductibles quelconques, l'un entre M et B, l'autre entre M et C. Les identités

$$\mathfrak{M}(AM, BM) \equiv AB,$$
$$\mathfrak{M}(AM, CM) \equiv AC \equiv AB,$$

(théorème II de la Note citée) montrent que BM et CM contiennent tous les deux les points B et C. Mais comme BM et CM sont des sous-ensembles de BC

$$BC \equiv BM \equiv CM.$$

Les continus qui sont irréductibles entre deux quelconques de trois points donnés forment une classe tout à fait particulière. Je les désigne par ABC.

II. *Étant donné un continu irréductible*

$$AB \equiv AC \qquad (B \not\equiv C),$$

tout BC *situé sur* AB *qui n'est pas un* BCM *est un continu de condensation de* AB.

En effet, l'ensemble (AB − BC) contient A, BC étant par hypothèse différent de AB ≡ AC.

Soit Γ l'ensemble de tous les points de (AB − BC) bien enchaînés avec A. Il est évident que Γ n'est pas fermé. Il existe donc un point M de l'ensemble dérivé Γ′ qui n'est pas contenu dans Γ et par conséquent aussi dans (AB − BC); ce point appartient nécessairement à BC. En tenant compte de notre hypothèse, on voit d'après le paragraphe I, qu'il n'existe qu'un continu irréductible entre A et M :

$$AM \equiv AB.$$

Comme A et M font partie de l'ensemble Γ' qui est continu, Γ' contient un continu irréductible entre A et M qui n'est autre que AM.

Par conséquent

$$(AB - BC)' \supset \Gamma' \supset AM \equiv AB \supset BC,$$

ce qui montre que BC est un continu de condensation pour AB.

C. Q. F. D.

J'appelle *point de la seconde espèce* tout point situé sur un continu de condensation; tous les autres points seront dits *de la première espèce*.

III. *Tous les points d'un continu* ABC ($\equiv AB \equiv AC \equiv BC$) *sont de la deuxième espèce*.

Soit M un point de AB. On a soit : 1° $AM \equiv BM \equiv CM \equiv AB$; soit : 2° un des continus AM, BM, CM, par exemple CM, est différent de AB; CM ne contiendra donc ni A ni B.

L'identité

$$\mathfrak{M}(CM, AM) \equiv AB$$

montre que B appartient à AM et l'identité

$$\mathfrak{M}(CM, BM) \equiv AB,$$

que A appartient à BM. Par conséquent

$$AM \equiv BM \equiv AB.$$

Dans les deux cas on voit que tout point de notre continu joue le même rôle que les points A, B, C. Il suffit donc de montrer qu'un des points A, B et C est de la seconde espèce. Décrivons, de C comme centre, une sphère laissant A à l'extérieur. A l'intérieur de cette sphère, il existe, comme on peut le démontrer, un sous-ensemble de AB continu et contenant C. Soit P un point de ce continu et considérons sur lui un PC.

$$CP \not\equiv AB,$$
$$AP \equiv AC.$$

En raisonnant comme plus haut (§ II), on obtient, en employant les mêmes notations, un point M de Γ' et de PC. Mais comme CP et *a fortiori* CM ne contient ni A ni B, l'identité

$$\mathfrak{M}(AM, CM) \equiv AC \equiv AB$$

montre que

$$AM \equiv AB.$$

D'où il résulte, comme plus haut, que PC est un continu de condensation de AB, et C un point de la deuxième espèce.

Par conséquent, si $AB \equiv AC$, on voit, d'après les paragraphes II et III, que *tout* BC *n'est composé que des points de la deuxième espèce.*

(20 mars 1911.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES.
47115 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.