ZYGMUNT JANISZEWSKI.

O rozcinaniu płaszczyzny przez kontinua.

(Sur les coupures du plan faites par des continus).

WSTĘP.

Pytania, które sobie możemy postawić przy badaniu danej figury geometrycznej, są dwojakiego rodzaju: jedne dotyczą figury samej w sobie, drugie jej stosunku do reszty przestrzeni. Drugi rodzaj badań jest naturalnie zależny od pierwszego.

Badaniom topologicznym pierwszego rodzaju poświęciłem mą pracę doktorską [1]; badaniom drugiego rodzaju poświęcam pracę niniejszą. Zajmuję się mianowicie w tej pracy dwoma pokrewnemi sobie pojęciami: ograniczenia i rozcięcia [2].

[1] Sur les continus irreductibles entre deux points. Thèse, Paryż 1911 (wydrukowana także w „Journal de l'École Polytechnique" (2) **16**, 1912); będę ją cytował krótko: Thèse.

[2] Pojęcie ograniczenia *(frontière)* zostało wprowadzone, o ile wiem, przez Jordana (Cours d'Analyse t. I, wyd. 2). Jordan też zajmował się rozcinaniem płaszczyzny w swem sławnem twierdzeniu o linii zamkniętej. Rozcinaniem płaszczyzny ogólnie (Gebietsteilung) zajmował się systematycznie Schoenflies (Bericht, t. II). Jednak dopiero Mazurkiewicz pojęcie rozcięcia wyodrębnił i uczynił zeń metodę badania przez określenie go dla kontinuów wogóle (a nie tylko dla płaszczyzny), oraz wprowadzenie pojęcia rozcięcia nieprzywiedlnego.

Pojęcie rozcięcia Mazurkiewicza nabiera swego rzeczywistego znaczenia dopiero przy badaniach wychodzących poza płaszczyznę, tak że w pracy niniejszej pojęcie to nie występuje (przynajmniej jawnie): rozcinanie płaszczyzny jest tu rozumiane tak, jak u Schoenfliesa. Uważałem jednak za stosowne wspomnieć o niem na tem miejscu, gdyż przeszło roczna znajomość z ideami Mazurkiewicza (nie ogłoszonemi drukiem dotychczas) wpłynęła na mój sposób ujmowania tych zagadnień.

Chcąc, aby praca mogła być czytana bez żadnego przygotowania, oraz ze względu na wprowadzenie niektórych terminów i pojęć nowych (lub w zmienionej formie), poświęcam pierwsze dwa rozdziały określeniom i badaniom przygotowawczym. Zawierają one w części rzeczy znane, tylko ujęte w formie, która wydawała mi się najodpowiedniejszą dla mego celu.

Z tych też względów nie cytuję nigdzie autorów, u których znajdują się podawane tu twierdzenia, lub analogiczne do nich. Zaznaczę tylko, że wiele z nich, aczkolwiek inaczej udowodnionych, znajduje się u Schoenfliesa w „Bericht über die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten" t. II; oraz, że metoda „siatki" sześciokątów, której poświęciłem rozdział II, jest metodą C. Rungego, tylko że Runge używa kwadratów zamiast sześciokątów; wprowadzenie tych ostatnich upraszcza nieco zastosowanie metody.

Określenia, podane w rozdziale I, zmieniłem co do formy o tyle, że, stosownie do celu pracy na pierwszy plan wysunąłem pojęcie ograniczenia, oraz o tyle jeszcze, że starałem się jak można najdłużej być zupełnie ogólnym: nie wprowadzam też żadnych założeń co do przestrzeni aż do § 7, od którego począwszy, ograniczam badania do płaszczyzny euklidesowej.

W tego rodzaju badaniach bowiem własności topologiczne przestrzeni, w której figura jest rozpatrywana, grają rolę zasadniczą, i wiele twierdzeń przestaje być prawdziwemi przy przejściu np. do przestrzeni trójwymiarowej. Inne własności przestrzeni (rzutowe i metryczne), rozumie się, na prawdziwość twierdzeń wpływać nie mogą; że jednak własności topologiczne przestrzeni są zawarte w pewnikach, dotyczących pojęcia (nie topologicznego) prostej, i ponieważ wysłowienie dowodów jest prostsze przy posiłkowaniu się własnościami miarowemi (a te znów są najprostsze w Geometryi euklidesowej), więc dlatego takie przedstawienie rzeczy było wskazane.

Rezultaty, będące celem niniejszej pracy, zawierają rozdziały III i IV. W szczególności ostatnie dwa twierdzenia, A i B, o ile wiem, przez nikogo podane nie były.

ROZDZIAŁ I.

Określenia. Wiadomości wstępne.

§ 1. Każda dana mnogość $\mathfrak{M}$, jeśli wogóle punkty zawiera (nie jest próżna, nie jest zerem), a nie zawiera wszystkich punktów przestrzeni, dzieli przestrzeń na dwie części: mnogość punktów należących do $\mathfrak{M}$ i mnogość punktów do $\mathfrak{M}$ nie należących. Czyli, oznaczając przez $\mathfrak{Z}$ mnogość wszystkich punktów przestrzeni, przez 0 zaś mnogość próżną,

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{M} + (\mathfrak{Z} - \mathfrak{M})$$ [1].

Mnogość $\mathfrak{Z} - \mathfrak{M}$ nazywamy *uzupełnieniem* danej mnogości $\mathfrak{M}$. Gdy

$$\mathfrak{M} \neq 0, \quad \mathfrak{M} \neq \mathfrak{Z},$$

wzór ten przedstawia podział prawdziwy przestrzeni na dwie różne od zera mnogości; wzór jest jednak oczywiście prawdziwy zawsze.

Podział ten posiada własność, że żaden punkt nie należy do obu części: mnogość punktów wspólnych mnogości $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{Z} - \mathfrak{M}$ jest próżna:

$$\mathfrak{M} \times (\mathfrak{Z} - \mathfrak{M}) = 0.$$

§ 2. Oznaczmy wzajemną odległość dwu dowolnych punktów A i B przestrzeni przez $\rho(A, B)$. Wiemy, że jest to liczba dodatnia (rzeczywista, skończona, różna od zera). Możemy jednak rozszerzyć zastosowanie tego pojęcia i mówić o odległości punktu od samego siebie, nadając jej wtedy - i tylko wtedy—wartość zero. $\rho(A, B)$ jest to więc funkcya dwóch punktów o następujących własnościach:

$$\rho(A, B) > 0, \text{ gdy } A \neq B;$$
$$\rho(A, A) = 0.$$

Ten sam symbol odległości będziemy stosowali i do mnogości, rozumiejąc przez odległość dwóch mnogości dolny kres odległości par punktów, z których jeden punkt należy do jednej, a drugi do drugiej mnogości, t. j.

$$\rho(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \min \rho(A, B),$$
$$A \subset \mathfrak{A}, B \subset \mathfrak{B}$$ [2].

Mamy więc zawsze $\rho(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \geqslant 0$,

oraz $\rho(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = 0$,

gdy $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \neq 0$.

Koło o środku A i promieniu a, t. j. mnogość wszystkich punktów, których odległość od punktu A jest równa a lub mniejsza [3] od a, oznaczam przez $\mathfrak{S}(A, a)$.

---

[1]) Określenia ścisłe wszystkich używanych znaków znajdują się na końcu rozprawy.
[2]) Znak $\subset$ czytaj: „jest zawarte".
[3]) Mówimy tu o kole, nie o okręgu koła.

To znaczy, że wzory

$$S \subset \mathfrak{S}(A, a)$$

i

$$\rho(S, A) \leqslant a$$

są równoważne, t. j. dla każdego punktu S albo oba prawdziwe, albo oba fałszywe. Stąd możemy wyciągnąć zwięzłe określenie koła w jednym wzorze:

$$\mathfrak{S}(A, a) = \{S\}_{\rho(S, A) \leqslant a},$$

który się czyta tak: koło jest to mnogość wszystkich punktów S, które spełniają warunek:

$$\rho(S, A) \leqslant a.$$

Z określenia koła wynika bezpośrednio

$$\mathfrak{S}(A, a) \supset \mathfrak{S}(A, b),$$

gdy $\qquad a \geqslant b.$

Symbol koła określimy jeszcze nieco szerzej, a mianowicie będziemy oznaczali

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{A}, a) = \{S\}_{\rho(S, \mathfrak{A}) \leqslant a},$$

t. j. mnogość punktów S, spełniających nierówność

$$\rho(S, \mathfrak{A}) \leqslant a.$$

Mamy tu podobnież:

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{A}, a) \supset \mathfrak{S}(\mathfrak{A}, b)$$

dla $\qquad a \geqslant b.$

§ 3. Powróćmy do podziału przestrzeni na różne rodzaje punktów względem danej mnogości $\mathfrak{M}$. Możemy teraz uskutecznić podział subtelniejszy, a mianowicie rozdzielić punkty przestrzeni na t r z y rodzaje: w e w n ę t r z n e, z e w n ę t r z n e i o g r a n i c z e n i a danej mnogości.

Punktem *wewnętrznym* dla mnogości $\mathfrak{M}$ nazywamy każdy punkt P, dla którego można znaleść takie (dostatecznie małe) a, że

$$\mathfrak{S}(P, a) \subset \mathfrak{M},$$

gdzie $\qquad a > 0.$

Punkt wewnętrzny musi więc zawsze n a l e ż e ć do $\mathfrak{M}$.

Punktem *zewnętrznym* dla mnogości $\mathfrak{M}$ nazywamy każdy punkt P, dla którego można znaleść takie a, że

$$\mathfrak{S}(P, a) \times \mathfrak{M} = 0$$

$$\text{(czyli} \quad \mathfrak{S}(P, a) \subset \mathfrak{Z} - \mathfrak{M}),$$

$$\text{gdzie} \quad a > 0.$$

Punkt zewnętrzny nigdy nie może należeć do mnogości, t. j. należy do jej uzupełnienia.

Punkty, które nie są ani wewnętrznemi, ani zewnętrznemi, nazywamy punktami *ograniczenia*. Punkt ograniczenia jest to więc taki punkt, że w każdem kole, zakreślonem około niego, znajdują się punkty należące i punkty nie należące do danej mnogości. Sam punkt ograniczenia może do niej należeć lub nie należeć.

Mnogość wszystkich punktów ograniczenia danej mnogości $\mathfrak{M}$ (bez względu na to, czy który z nich należy, czy też nie należy do $\mathfrak{M}$) nazywamy *ograniczeniem* mnogości $\mathfrak{M}$ i oznaczamy przez symbol $\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$.

Rozkład przestrzeni na te trzy mnogości punktów wewnętrznych, zewnętrznych i ograniczenia przedstawia się tak:

$$\mathfrak{Z} = (\mathfrak{M} - \mathfrak{F}(\mathfrak{M})) + (\mathfrak{Z} - \mathfrak{M} - \mathfrak{F}(\mathfrak{M})) + \mathfrak{F}(\mathfrak{M}),$$

gdzie żadne dwa z tych składników mnogości $\mathfrak{Z}$ nie mają ze sobą punktów wspólnych. Jednak nie wszystkie te składniki muszą rzeczywiście istnieć. Może być

$$\mathfrak{M} - \mathfrak{F}(\mathfrak{M}) = 0,$$

$$\text{t. j.} \quad \mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}(\mathfrak{M}),$$

czyli mnogość $\mathfrak{M}$ może nie posiadać punktów wewnętrznych[1].

Mnogość $\mathfrak{M}$ nazywa się *domkniętą*, gdy wszystkie punkty ograniczenia należą do niej, t. j. gdy

$$\mathfrak{M} \supset \mathfrak{F}(\mathfrak{M})$$

Będziemy nazywali *domknięciem* mnogości dodanie do niej jej ograniczenia i sumę tę oznaczać będziemy przez kreskę poziomą nad symbolem oznaczającym mnogość, t. j.

$$\mathfrak{M} + \mathfrak{F}(\mathfrak{M}) = \overline{\mathfrak{M}}.$$

Dla mnogości domkniętej mamy oczywiście

$$\mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{M}}.$$

§ 4. Nazywamy mnogość *spójną*, gdy się nie da rozłożyć na dwie mnogości nie próżne, nie posiadające po domknięciu punktów wspól-

[1]) Taka mnogość w terminologii Schoenfliesa nazywa się *nigdzie nie gęstą*.

nych. Mnogość $\mathfrak{M}$ będzie przeciwnie niespójną, gdy można znaleść takie $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$, że

$$\mathfrak{M}_1 \neq 0, \quad \mathfrak{M}_2 \neq 0,$$

$$\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 \equiv \mathfrak{M},$$

$$\overline{\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2} \equiv 0.$$

Mnogość domkniętą i spójną nazywamy *kontinuum*.

Pojęciem pośredniem między mnogością spójną a kontinuum jest *semikontinuum:* jest to taka mnogość, że każde dwa jej punkty dadzą się połączyć kontinuum w niej zawartem.

Semikontinuum jest oczywiście spójne. Przypuśćmy bowiem, że dane semikontinuum $\mathfrak{S}$ jest niespójne, t. j. że istnieją takie $\mathfrak{S}_1$ i $\mathfrak{S}_2$, że

(a) $$\mathfrak{S}_1 \neq 0, \quad \mathfrak{S}_2 \neq 0,$$

(b) $$\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2,$$

(c) $$\overline{\mathfrak{S}_1} \times \overline{\mathfrak{S}_2} \equiv 0.$$

Biorąc, co jest możliwe ze względu na (a), dwa punkty

(d) $$S_1 \subset \mathfrak{S}_1,$$

(e) $$S_2 \subset \mathfrak{S}_2,$$

oraz łącząc je kontinuum $\mathfrak{K}$, t. j.

(f) $$\mathfrak{K} \supset S_1 + S_2,$$

i

(g) $$\mathfrak{K} \subset \mathfrak{S},$$

otrzymujemy rozkład kontinuum $\mathfrak{K}$ na dwie mnogości (mnożąc tożsamość (b) obustronnie przez $\mathfrak{K}$ i pamiętając, że ze względu na (g) mamy

$$\mathfrak{S} \times \mathfrak{K} \equiv \mathfrak{K}),$$

bez punktów wspólnych, a mianowicie

(h) $$\mathfrak{K} \equiv (\mathfrak{K} \times \mathfrak{S}_1) + (\mathfrak{K} \times \mathfrak{S}_2).$$

Zważywszy, iż

$$\overline{\mathfrak{K} \times \mathfrak{S}_i} \subset \overline{\mathfrak{K}} \times \overline{\mathfrak{S}_i} \quad (i = 1{,}2),$$

oraz, z określenia kontinuum,

$$\overline{\mathfrak{K}} \equiv \mathfrak{K},$$

zastosujmy do iloczynu obu składników, na któreśmy rozłożyli $\mathfrak{K}$ (wzór (h)), wzór (c)

$$\overline{(\mathcal{K} \times \mathcal{S}_1)} \times \overline{(\mathcal{K} \times \mathcal{S}_2)} \subset (\mathcal{K} \times \overline{\mathcal{S}_1}) \times (\mathcal{K} \times \overline{\mathcal{S}_2}) \subset \overline{\mathcal{S}_1} \times \overline{\mathcal{S}_2} \equiv 0,$$

czyli

(i) $$\overline{(\mathcal{K} \times \mathcal{S}_1)} \times \overline{(\mathcal{K} \times \mathcal{S}_2)} \equiv 0.$$

Wreszcie, według (d) i (f)

(j) $$\mathcal{K} \times \mathcal{S}_1 \supset S_1 \not\equiv 0,$$

a według (e) i (f)

(k) $$\mathcal{K} \times \mathcal{S}_2 \supset S_2 \not\equiv 0.$$

Wzory (h), (i), (j) i (k) oznaczają, że $\mathcal{K}$ jest niespójne, co jest w sprzeczności z określeniem mnogości $\mathcal{K}$, jako kontinuum. Więc każde semikontinuum jest spójne.

§ 5. Punktem *odosobnionym* mnogości $\mathfrak{M}$ nazywamy taki jej punkt P, że

(a) $$\overline{(\mathfrak{M} - P)} \times P \equiv 0,$$

gdzie $\mathfrak{M} \supset P$ [1].

Każdy punkt mnogości $\overline{\mathfrak{M}}$ nie odosobniony względem $\mathfrak{M}$, nazywamy punktem *skupienia* mnogości $\mathfrak{M}$; symbolicznie więc punkt skupienia określa się wzorem

$$\overline{\mathfrak{M} - P} \supset P$$

(gdzie wzór ten jest negacyą wzoru (a) i zawiera warunek $\overline{\mathfrak{M}} \supset P$).

Mnogość wszystkich punktów skupienia $\mathfrak{M}$ nazywamy *pochodną* mnogości $\mathfrak{M}$ i oznaczamy przez $\mathfrak{M}'$. Z określenia punktu skupienia wynika, że

$$\overline{\mathfrak{M}} - \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}',$$

a więc $$\overline{\mathfrak{M}} \equiv \mathfrak{M} + \mathfrak{M}'.$$

Wzór (a) możemy napisać:

$$\{(\mathfrak{M} - P) + \mathfrak{F}(\mathfrak{M} - P)\} \times P \equiv 0,$$

co oczywiście jest równoważne dwóm tożsamościom

$$(\mathfrak{M} - P) \times P \equiv 0,$$
$$\mathfrak{F}(\mathfrak{M} - P) \times P \equiv 0,$$

z których pierwsza mówi, że punkt P nie jest wewnętrzny dla mnogości $\mathfrak{M} - P$ (bo musiałby należeć do niej, gdyby był wewnętrzny); a druga, że P nie jest punktem ograniczenia dla $\mathfrak{M} - P$; P jest więc zewnętrzny, t. j. istnieje takie a, że

(b) $$\mathfrak{S}(P, a) \times (\mathfrak{M} - P) \equiv 0,$$

[1]) Punkt nazywamy odosobnionym, choćby $\mathfrak{M} - P \equiv 0$, t. j. nawet gdy $\mathfrak{M}$ składa się tylko z jednego punktu P.

Odwrotnie, jeśli zachodzi wzór (b), t. j. punkt P jest zewnętrzny dla $\mathfrak{M} - P$, to możemy rozumowanie powyższe przebiedz w kierunku odwrotnym i otrzymamy wzór (a), jako wynik wzoru (b). Więc wzory (a) i (b) są równoważne i wzór (b) możemy przyjąć za określenie punktu odosobnionego; w słowach tak ono brzmi:

Punktem odosobnionym danej mnogości nazywamy taki jej punkt, z którego można opisać koło dostatecznie małe, aby nie zawierało, prócz punktu rozpatrywanego, żadnych innych punktów mnogości.

Punktem skupienia więc danej mnogości nazywamy taki punkt P (należący do niej, lub nie należący), że w każdem kole o środku P istnieją punkty danej mnogości, różne od P.

Wynika stąd, że jeżeli dla danego ciągu punktów

$$A_1, A_2 \ldots, A_n, \ldots$$

zachodzi wzór

$$\lim_{n=\infty} \rho(A, A_n) = 0,$$

to A jest punktem skupienia tego ciągu; gdy A jest jedynym punktem skupienia ciągu uważanego, będziemy go nazywali punktem *granicznym* ciągu i oznaczali symbolicznie:

$$\lim A_n \equiv A.$$

Teraz możemy podać parę wzorów, dotyczących odległości punktu, lub mnogości, od mnogości.

Według określenia punktu zewnętrznego, jego odległość od mnogości uważanej jest większa od zera. Odwrotnie, gdy

$$\rho(P, \mathfrak{M}) > 0,$$

to oczywiście

$$\mathfrak{S}(P, a) \times \mathfrak{M} \equiv 0,$$

gdzie

$$a < \rho(P, \mathfrak{M}),$$

czyli punkt P jest zewnętrzny dla $\mathfrak{M}$.

Stąd wynika, że punkty wewnętrzne i ograniczenia każdej mnogości, znajdują się w odległości zero od niej, i odwrotnie, t. j. wzory

$$P \subset \overline{\mathfrak{M}}$$

i

$$\rho(P, \mathfrak{M}) = 0$$

są równoważne [1].

§ 6. Z określenia granicy, zupełnie symetrycznego względem mnogości danej i jej uzupełnienia, wynika

(1) $$\mathfrak{F}(\mathfrak{M}) \equiv \mathfrak{F}(\mathfrak{Z} - \mathfrak{M}).$$

[1]) Możnaby więc podać takie określenie: $\mathfrak{M} \equiv \{P\}_{\rho(P, \mathfrak{M}) = 0}$, czyli $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, 0)$.

Wygodnie jest mieć ograniczenie $\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$, wyrażone przez mnogości $\overline{\mathfrak{M}}$ i $\overline{\mathfrak{Z}-\mathfrak{M}}$. Osiągamy to, posiłkując się wzorem (1). Mamy mianowicie obok wzoru

$$\mathfrak{M}+\mathfrak{F}(\mathfrak{M})=\overline{\mathfrak{M}},$$

wzór

$$(\mathfrak{Z}-\mathfrak{M})+\mathfrak{F}(\mathfrak{M})=\overline{\mathfrak{Z}-\mathfrak{M}}.$$

Pomnóżmy je stronami; otrzymamy:

$$\mathfrak{M}\times(\mathfrak{Z}-\mathfrak{M})+(\mathfrak{F}(\mathfrak{M})\times[(\mathfrak{Z}-\mathfrak{M})+\mathfrak{M}+\mathfrak{F}(\mathfrak{M})])=\overline{\mathfrak{M}}\times(\overline{\mathfrak{Z}-\mathfrak{M}});$$

zważywszy, że $\mathfrak{M}\times(\mathfrak{Z}-\mathfrak{M})=0$.

oraz $\mathfrak{Z}-\mathfrak{M}+\mathfrak{M}+\mathfrak{F}(\mathfrak{M})=\mathfrak{Z}$,

otrzymujemy szukane wyrażenie na ograniczenie:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{M})=\overline{\mathfrak{M}}\times(\overline{\mathfrak{Z}-\mathfrak{M}}). \tag{2}$$

Twierdzenie I. Ograniczenie mnogości domkniętej jest mnogością bez punktów wewnętrznych, t. j. gdy

(a) $$\mathfrak{D}\supset\mathfrak{F}(\mathfrak{D}),$$

to $$\mathfrak{F}(\mathfrak{D})\subset\mathfrak{F}(\mathfrak{F}(\mathfrak{D})).$$

Rzeczywiście, gdyby mnogość $\mathfrak{F}(\mathfrak{D})$ zawierała punkt wewnętrzny[1] P t. j. gdyby

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{D})\supset\mathfrak{S}(P,a)$$

przy a dostatecznie małem, to z (a) wynikłoby

$$\mathfrak{D}\supset\mathfrak{S}(P,a)$$

i punkt P byłby wewnętrzny dla $\mathfrak{D}$, a więc nie byłby punktem ograniczenia, wbrew założeniu.

Uwaga. Nie dodając żadnych założeń co do przestrzeni, możemy jeszcze wypowiedzieć o ograniczeniu tylko tyle:

gdy $\mathfrak{D}=\mathfrak{F}(\mathfrak{D})$,

to i $\mathfrak{F}(\mathfrak{D})=\mathfrak{F}(\mathfrak{F}(\mathfrak{D}))$,

oraz, gdy $\mathfrak{D}\supset\mathfrak{F}(\mathfrak{D})$,

[1]) Wewnętrzny względem siebie, nie zaś względem $\mathfrak{D}$, bo to jest wykluczone przez określenie ograniczenia.

to (czego dowodzimy, domykając najprzód obustronnie wzór powyższy)

$$\mathfrak{D} \supset \mathfrak{F}(\mathfrak{F}(\mathfrak{D})).$$

Potrzebną nam będzie jeszcze następująca własność ograniczenia, która nie zakłada żadnych specyalnych własności przestrzeni.

Dla dowolnych dwóch mnogości $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ zachodzi wzór

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{F}(\mathfrak{A}) + \mathfrak{F}(\mathfrak{B}). \tag{3}$$

Ze wzoru (2) mamy bowiem:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) \equiv \overline{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})} \times \overline{(\mathfrak{Z}-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}))} \equiv (\overline{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}) \times (\overline{\mathfrak{Z}-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}). \tag{a}$$

Lecz $\mathfrak{Z}-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) \equiv (\mathfrak{Z}-\mathfrak{A})-\mathfrak{B} \equiv (\mathfrak{Z}-\mathfrak{A}) \times (\mathfrak{Z}-\mathfrak{B}),$ [1]

a więc: $\overline{\mathfrak{Z}-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})} \equiv \overline{[(\mathfrak{Z}-\mathfrak{A}) \times (\mathfrak{Z}-\mathfrak{B})]} \subset (\overline{\mathfrak{Z}-\mathfrak{A}}) \times (\overline{\mathfrak{Z}-\mathfrak{B}}).$

Podstawiając to we wzór (a), otrzymujemy:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) \subset (\overline{\mathfrak{A}}+\overline{\mathfrak{B}}) \times (\overline{\mathfrak{Z}-\mathfrak{A}}) \times (\overline{\mathfrak{Z}-\mathfrak{B}});$$

roztwierając pierwszy nawias i stosując wzór (2) do $\mathfrak{A}$ i do $\mathfrak{B}$,

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) \subset [\mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \times (\overline{\mathfrak{Z}-\mathfrak{B}})] + [\mathfrak{F}(\mathfrak{B}) \times (\overline{\mathfrak{Z}-\mathfrak{A}})],$$

skąd, stosując do prawej strony dwa razy wzór

$$\mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \subset \mathfrak{M},$$

otrzymujemy wzór (3).

§ 7. Dotychczas nie zrobiliśmy **żadnego założenia** co do własności przestrzeni, prócz tego, że każdej parze punktów **odpowiada** pewna **liczba dodatnia**, którą nazwaliśmy **odległością**. By się posuwać dalej, trzeba przyjmować coraz to nowe założenia. Nie chcąc wdawać się tu jednak w analizę, jakie założenia specyalne są konieczne i dostateczne dla różnych twierdzeń tego paragrafu, zakładamy odrazu, że przestrzeń nasza jest płaszczyzną euklidesową [2], i poprzestajemy na podaniu potrzebnych nam twierdzeń, opuszczając dowody, jako ogólnie znane [3].

---

[1] Jest to wzór de Morgana z Logiki.

[2] Zauważymy tylko, że podane w tym paragrafie wzory są prawdziwe dla każdej przestrzeni, będącej klasą (E) Frécheta „compacte" i spójną (por. Sur quelques points du calcul fonctionnel. Thèse, Paris 1906, lub Rend. circ. Pal.); por. Thèse, Note I.

[3] Por. Thèse, oraz Jordan, Cours d'Analyse t. I, wydanie 2-gie lub 3-e.

I. (4) $$\rho(A, B) + \rho(A, C) \geqq \rho(B, C),$$

skąd wynika **ciągłość** funkcyi odległości, t. j. gdy

$$\lim B_n = B,$$

(5) to $$\lim_{n=\infty} \rho(A, B_n) = \rho(A, B);$$

stąd zaś wynika:

(6) $$\rho(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \rho(\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}).$$

II. Dla danych dwóch mnogości ograniczonych $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ istnieją takie punkty A i B, że

$$A \subset \overline{\mathfrak{A}}, \qquad B \subset \overline{\mathfrak{B}},$$

i $$\rho(A, B) = \rho(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}).$$

Stąd bezpośrednio wynika, że gdy

$$\overline{\mathfrak{A}} \times \overline{\mathfrak{B}} = 0,$$

to $$\rho(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) > 0.$$

Możemy teraz uogólnić wzór (4):

(4') $$\rho(A, \mathfrak{B}) + \rho(A, \mathfrak{C}) \geqq \rho(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$$ [1].

Rzeczywiście mamy:

(a) $$\rho(A, \mathfrak{B}) = \rho(A, B),$$

gdzie

(b) $$B \subset \overline{\mathfrak{B}};$$

(c) $$\rho(A, \mathfrak{C}) = \rho(A, C),$$

gdzie

(d) $$C \subset \overline{\mathfrak{C}};$$

oraz

(e) $$\rho(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = \rho(B_1, C_1)$$

gdzie

(f) $$B_1 \subset \overline{\mathfrak{B}},$$

(g) $$C_1 \subset \overline{\mathfrak{C}}.$$

Ze wzoru (4) mamy

(h) $$\rho(A, B) + \rho(A, C) \geqq \rho(B, C).$$

Ze wzorów zaś (b), (d), (e), (6) i z określenia odległości dwóch mnogości jako dolnego kresu odległości zawartych w nich punktów, wynika

(i) $$\rho(B, C) \geqq \rho(B_1, C_1).$$

[1]) Lecz **nie**: $\rho(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) + \rho(\mathfrak{A}, \mathfrak{C}) \geqq \rho(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$!

Ze wzorów (h) i (i) wynika

$$\rho(A, B) + \rho(A, C) \geqslant \rho(B_1, C_1),$$

skąd, podstawiając za wyrazy tej nierówności ich wartości, otrzymane ze wzorów (a), (c) i (e), otrzymujemy szukany wzór (4').

§ 8. Przypominamy jeszcze następujące własności ograniczenia mnogości:

1) Gdy $\mathfrak{M} \neq 0$ i $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{Z}$,

to $\mathfrak{F}(\mathfrak{M}) \neq 0$.

2) Ograniczenie jest mnogością domkniętą:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{M}) \supset \mathfrak{F}(\mathfrak{F}(\mathfrak{M})).$$

3) Kontinuum, łączące punkt danej mnogości z punktem jej uzupełnienia, zawiera i punkt ograniczenia danej mnogości.

Wreszcie cytujemy tu następujące twierdzenie, które ciągle będzie nam potrzebne:

4) Semikontinuum, złożone ze *wszystkich* tych punktów danego kontinuum $\mathfrak{C}$, posiadającego punkty wspólne z mnogością domkniętą $\mathfrak{D}$, które dadzą się połączyć z danym na $\mathfrak{C} - \mathfrak{D}$ punktem A przez kontinua, zawarte w $\mathfrak{C} - \mathfrak{D}$, posiada po domknięciu punkty wspólne z $\mathfrak{D}$[1].

Do oznaczenia takiego semikontinuum używam symbolu

$$\mathfrak{C}^s_s(A, \mathfrak{C} - \mathfrak{D}),$$

który się czyta: semikontinuum ($\mathfrak{C}$ oznacza kontinuum, a $\mathfrak{C}^s$—semikontinuum) nasycone (co oznacza s u dołu, od francuskiego „saturé“), zawierające A i zawarte w $\mathfrak{C} - \mathfrak{D}$. Takie semikontinuum zawsze istnieje, gdy $\mathfrak{C}$ jest kontinuum, $\mathfrak{D}$ mnogością domkniętą, a A zawarte w $\mathfrak{C} - \mathfrak{D}$; mamy bowiem:

$$\mathfrak{C}^s_s(A, \mathfrak{C} - \mathfrak{D}) \equiv \mathfrak{M}(\{\mathfrak{C}(A, \mathfrak{C} - \mathfrak{D})\}),$$

gdzie $\mathfrak{M}$ oznacza sumę rozciągniętą na wszystkie kontinua $\mathfrak{C}(A, \mathfrak{C} - \mathfrak{D})$, takie zaś kontinua istnieją. W rzeczy samej: ponieważ A jest punktem uzupełnienia domkniętej mnogości $\mathfrak{D}$, więc

$$\rho(A, \mathfrak{D}) > 0$$

i $$\mathfrak{S}(A, \tfrac{1}{2}\rho(A, \mathfrak{D})) \subset \mathfrak{Z} - \mathfrak{D},$$

więc $$\mathfrak{S}(A, \tfrac{1}{2}\rho(A, \mathfrak{D})) \times \mathfrak{C} \subset \mathfrak{C} - \mathfrak{D}.$$

---

[1]) Por. Thèse, Chap. II § II (str. 45) oraz mą notę: Démonstration d'une propriété des continus irreductibles entre deux points (Bulletin de l'Académie des sciences de Cracovie. Novembre 1912).

Pierwsza część tego wzoru musi zawierać kontinuum, zawierające punkt A [1]. To kontinuum, zawarte w $\mathfrak{C} - \mathfrak{D}$ według ostatniego wzoru, jest więc:

$$\mathfrak{G}(A, \mathfrak{C} - \mathfrak{D}).$$

Wreszcie wiadomo, że każda pochodna, $\mathfrak{M}'$, i mnogość po domknięciu, $\overline{\mathfrak{M}}$, są w płaszczyźnie mnogościami domkniętemi:

$$\overline{\overline{\mathfrak{M}}} \equiv \overline{\mathfrak{M}};$$

stąd więc wynika:

Mnogość spójna, a w szczególności semikontinuum, dają po domknięciu kontinuum.

Ta własność mnogości $\overline{\mathfrak{M}}$ pozwoli nam udowodnić jednę własność jej ograniczenia:

(7) $$\mathfrak{F}(\overline{\mathfrak{M}}) \subset \mathfrak{F}(\mathfrak{M}).$$

Mamy bowiem:

$$\mathfrak{F}(\overline{\mathfrak{M}}) \equiv \overline{\overline{\mathfrak{M}}} \times \overline{(\mathfrak{Z} - \overline{\mathfrak{M}})} \equiv \overline{\mathfrak{M}} \times \overline{(\mathfrak{Z} - \overline{\mathfrak{M}})}.$$

Zaś $$\mathfrak{F}(\mathfrak{M}) \equiv \overline{\mathfrak{M}} \times \overline{(\mathfrak{Z} - \mathfrak{M})}.$$

Ponieważ oczywiście

$$\mathfrak{Z} - \overline{\mathfrak{M}} \subset \mathfrak{Z} - \mathfrak{M},$$

więc (domykając obustronnie)

$$\overline{\mathfrak{Z} - \overline{\mathfrak{M}}} \subset \overline{\mathfrak{Z} - \mathfrak{M}}.$$

Mnożąc obustronnie ostatni wzór przez $\overline{\mathfrak{M}}$, otrzymujemy po lewej stronie $\mathfrak{F}(\overline{\mathfrak{M}})$, po prawej zaś $\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$, a więc wzór (7).

ROZDZIAŁ II.

O wielokątach aproksymacyjnych.

§ 1. Wszystkie mnogości, które odtąd będziemy rozpatrywali, znajdują się w skończoności, t. j. można znaleść takie koło, w którem one są zawarte. Z twierdzeń Geometryi elementarnej będziemy się tu opierali w szczególności na następującem:

Wielokąt (nie przecinający samego siebie) rozcina płaszczyznę na dwie części; t. j. że wszystkie punkty płaszczyzny, nie na-

[1]) Porów. Thèse, Ch. I § V, th. IV (str. 22).

leżące do danego wielokąta — nazwijmy go Π[1] — dadzą się podzielić na dwa zbiory takie, że dwa punkty, należące do jednego zbioru, dadzą się połączyć linią łamaną[2], nie posiadającą punktów wspólnych z Π; zaś dwa punkty, należące do różnych zbiorów, taką linią połączyć się nie dadzą.

Ponieważ oczywiście każde dwa punkty, wzięte dostatecznie daleko, dadzą się połączyć linią nie przecinającą Π, więc wszystkie będą należały do jednego i tego samego z dwu poszczególnych zbiorów. Nazwijmy go częścią płaszczyzny, leżącą po stronie zewnętrznej wielokąta Π, albo krócej: leżącą zewnątrz Π. Drugi zbiór, pozostały, będzie leżał w skończoności; nazywamy go częścią płaszczyzny, leżącą po stronie wewnętrznej wielokąta Π, lub krócej: wnętrzem wielokąta Π.

Dla oznaczenia tych mnogości będziemy się posługiwali symbolami: $\mathfrak{W}(\Pi)$ dla wnętrza wielokąta Π i $\mathfrak{W}^{\infty}(\Pi)$—dla strony zewnętrznej wielokąta Π.

Wogóle przez symbol

$$\mathfrak{W}^{A}(\mathfrak{M})$$

będziemy oznaczali mnogość punktów uzupełnienia danej mnogości $\mathfrak{M}$, dających się połączyć z danym punktem A tegoż uzupełnienia przez kontinuum bez punktów wspólnych z $\mathfrak{M}$; t. j.

$$\mathfrak{W}^{A}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{C}^{s}_{s}(A, \mathfrak{Z} - \mathfrak{M}).$$

Wskaźnik ∞ oznacza, że A jest wzięte dostatecznie daleko, poza granicami wykonywanych konstrukcyj; ponieważ dla wielokątów oprócz $\mathfrak{W}^{\infty}(\Pi)$ istnieje tylko jedno semikontinuum $\mathfrak{W}^{A}(\Pi)$, więc jest ono jednoznacznie określone (przez to, że nie jest $\mathfrak{W}^{\infty}(\Pi)$); możemy oznaczać je poprostu przez $\mathfrak{W}(\Pi)$, nie wymieniając żadnego zawartego w nim punktu. Mnogość punktów wnętrza wielokąta Π wraz z punktami samego wielokąta Π (z którą będziemy mieli częściej do czynienia[3]) otrzymamy, domykając wnętrze wielokąta Π; będzie więc ona przedstawiona przez symbol

$$\overline{\mathfrak{W}}(\Pi) = \mathfrak{W}(\Pi) + \Pi.$$

[1]) Będziemy stale oznaczali linie, złożone z odcinków prostych, przez wielkie litery greckie.

[2]) Jak się przekonamy w końcu § 3, warunek, aby linia łącząca była łamana, nie jest ograniczeniem; moglibyśmy powiedzieć: „dadzą się połączyć kontinuum“, t. j. istnieje kontinuum, zawierające oba punkty, bez punktów wspólnych z Π.

[3]) Ponieważ określenie słowami mnogości $\overline{\mathfrak{W}}(\Pi)$ jest długie, będziemy tam, gdzie następujące wzory myśl dostatecznie objaśnią, nazywali ją poprostu wnętrzem, tak samo, jak i mnogość $\mathfrak{W}(\Pi)$; gdzie będzie zaś potrzebne wyrażenie ścisłe, tam będziemy ją nazywać: wnętrzem w szerszem znaczeniu.

Opieramy się przytem na twierdzeniu [1], że Π jest ograniczeniem jednej i drugiej z dwóch części swego uzupełnienia:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{W}(\Pi)) = \mathfrak{F}(\mathfrak{W}^{\infty}(\Pi)) = \Pi.$$

Będzie nam potrzebne następujące

Twierdzenie II. Jeśli punkt A i wielokąt Π_1 leżą po *różnych* stronach wielokąta Π_2, to Π_2 i A leżą po *jednej* stronie wielokąta Π_1.

Połączmy punkt A odcinkiem prostej z najbliższym do niego punktem P_1 na Π_1; odcinek AP_1 nie zawiera więc prócz P_1 żadnego punktu wielokąta Π_1. Według założeń twierdzenia, AP_1 musi przeciąć Π_2 przynajmniej w jednym punkcie, P_2. Odcinek AP_2, będący częścią odcinka AP_1, nie zawiera żadnego punktu wielokąta Π_1; t. j. punkt P_2 — a więc i całe Π_2 — leży po tej samej stronie wielokąta Π_1, co i A, co należało udowodnić.

Biorąc A dostatecznie daleko, otrzymujemy

Wniosek. Jeżeli Π_1 leży po stronie *wewnętrznej* wielokąta Π_2, to Π_2 leży po stronie *zewnętrznej* wielokąta Π_1.

Uwaga. Gdy A i Π_1 leżą po jednej stronie wielokąta Π_2, to stąd nic o położeniu A i Π_2 względem Π_1 wywnioskować nie można.

§ 2. Pokryjmy płaszczyznę równemi foremnemi szościokątami o boku a tak, aby każdy punkt płaszczyzny, nie leżący na żadnym sześciokącie, leżał wewnątrz jednego i tylko jednego z nich. Wiadomo, że to uczynić można: każdego boku pierwszego zbudowanego sześciokąta używamy za podstawę do zbudowania nowego sześciokąta; boki tych nowych sześciokątów, o ile nie są już wspólne dwóm zbudowanym sześciokątom, służą nam znowu za podstawy do budowy dalszych sześciokątów i t. d.

Tak zbudowaną linię będziemy nazywali siatką sześciokątów o boku a i oznaczali przez Σ_a.

Zauważmy, że dwa sześciokąty siatki albo nie mają wcale punktów wspólnych, albo mają wspólny jeden bok.

Punkty siatki, leżące wewnątrz boków sześciokątów, należą do dwóch, a punkty będące wierzchołkami — do trzech sześciokątów. Te ostatnie tylko są punktami rozgałęzienia rzędu 3 (t. j. są one wspólnemi końcami trzech odcinków, nie mających więcej punktów wspólnych); punkty siatki, leżące wewnątrz odcinków, są zwykłemi (t. j. rzędu dwa) [2].

Twierdzenie III. Ograniczenie mnogości wszystkich punktów leżących we wnętrzach (w szerszem znaczeniu) danych

[1] P. Schoenflies, Bericht, t. II, Kap. IV.

[2] Por. Thèse, Chap. IV § I.

n sześciokątów siatki składa się ze skończonej ($\leqslant n$) liczby wielokątów, zawartych w siatce, bez punktów wspólnych.

Oznaczmy tę mnogość przez $\mathfrak{A}$.

Ograniczenie mnogości $\mathfrak{A}$ musi być, według wzoru (3) rozdziału I, zawarte w sumie ograniczeń wnętrz sześciokątów, z których punktów się składa, t. j. w sumie samych sześciokątów siatki:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \subset \Sigma_a .$$

Mnogość $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ więc jest linią łamaną, składającą się ze skończonej liczby ($\leqslant 6\,n$) odcinków prostych. Pozostaje nam dowieść, że te odcinki tworzą wielokąty. Wystarczy do tego udowodnić, że wszystkie punkty $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ są zwykłe (t. j. rzędu 2). Jest to widoczne dla tych punktów $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$, które leżą wewnątrz boków sześciokątów. Punkty, będące wierzchołkami (t. j. punkty rozgałęzienia siatki rzędu trzeciego), należą do trzech sześciokątów; jeżeli więc taki punkt należy do ograniczenia mnogości $\mathfrak{A}$, to muszą w jego sąsiedztwie znajdować się wnętrza sześciokątów, należące i nie należące do $\mathfrak{A}$. Więc wnętrze jednego z trzech sześciokątów, zawierających dany punkt siatki rzędu trzeciego, musi należeć do $\mathfrak{A}$, a jednego—nie należeć; trzeci może należeć, lub nie—zawsze dwa wnętrza należą do jednej, a trzecie należy do drugiej mnogości. Stąd wniosek, że jeden z trzech odcinków siatki, wychodzących z rozpatrywanego punktu rozgałęzienia, rozgranicza dwa sześciokąty, należące do jednej i tej samej mnogości ($\mathfrak{A}$ lub jej uzupełnienia) i wobec tego nie należy do ograniczenia $\mathfrak{A}$; należą zaś do niej dwa pozostałe odcinki siatki, wychodzące z rozpatrywanego punktu; jest więc on punktem zwykłym dla $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$.

Ograniczenie mnogości $\mathfrak{A}$ może się rozpaść na skończoną tylko liczbę kontinuów bez punktów wspólnych; mniejszą w każdym razie, niż liczba składających ją odcinków. Każde zaś kontinuum, składające się z samych punktów zwykłych, jest linią zwykłą zamkniętą [1]. A że kontinua, składające $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$, są liniami łamanemi, więc są wielokątami (nie przecinającemi siebie samych); c. n. u.

Twierdzenie IV. Wśród wielokątów, stanowiących ograniczenie *spójnej* mnogości punktów $\mathfrak{A}$, wypełniającej wnętrza (w szerszem znaczeniu) skończonej liczby sześciokątów siatki, jeden jest *zewnętrzny* (t. j. taki, że $\mathfrak{A}$ leży po jego wewnętrznej stronie); wszystkie pozostałe leżą *wewnątrz* niego, a *nazewnątrz* siebie.

---

[1]) Por. Thèse. Ch. IV. th. VII.

Niech będzie

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{A}) = \Pi_1 + \Pi_2 + \ldots + \Pi_k,$$

gdzie Π oznacza wielokąt. Każdy z tych wielokątów rozcina płaszczyznę na dwie części; $\mathfrak{A}$, będąc kontinuum, może należeć tylko do jednej z tych części (po domknięciu). A więc do jednej z nich tylko może również należeć i $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$, czyli wszystkie pozostałe wielokąty Π leżą po jednej stronie rozpatrywanego.

Jeżeli więc istnieją na $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ dwa wielokąty Π_i i Π_j, z których jeden, np. Π_j leży wewnątrz drugiego,

$$\mathfrak{W}(\Pi_i) \supset \Pi_j,$$

to wszystkie pozostałe na $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ wielokąty leżą wewnątrz Π_i, a zewnątrz Π_j, czyli może istnieć na $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ tylko jeden wielokąt, wewnątrz którego leży inny wielokąt ograniczenia $\mathfrak{A}$. Pozostaje nam tylko udowodnić, że taki jeden wielokąt rzeczywiście istnieje. To jednak będziemy mogli uskutecznić po udowodnieniu następującego lemmatu:

Lemmat. Jeżeli zbiór wielokątów, zawartych w siatce

$$\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_n,$$

rozcina płaszczyznę między dwoma punktami M i N, to istnieje wśród nich jeden przynajmniej, który czyni toż samo (to znaczy, że M i N leżą po różnych jego stronach).

Wśród danego zbioru wielokątów musi istnieć zbiór, rozcinający płaszczyznę między M i N i składający się z najmniejszej liczby [1]) wielokątów. Liczbę wielokątów tego zbioru oznaczmy przez k. Lemmat nasz orzeka, że powinno być

$$k = 1.$$

Przypuśćmy, że k jest większe od jedności. Niech będą

$$\Pi_{p_1}, \Pi_{p_2}, \ldots \Pi_{p_k},$$

te k wielokątów. Według znaczenia liczby k, zbiór $k-1$ pierwszych wielokątów tego ciągu,

$$\Pi_{p_1}, \Pi_{p_2}, \ldots \Pi_{p_{k-1}},$$

nie rozcina płaszczyzny między punktami M i N. Można więc znaleść kontinuum $\mathfrak{K}$, o własnościach

(a) $$\mathfrak{K} \supset M + N$$

(b) i $$\mathfrak{K} \times (\Pi_{p_1} + \Pi_{p_2} + \ldots + \Pi_{p_{k-1}}) = 0.$$

---

[1]) Jest to zasada indukcji zupełnej; może być zbiór ten identyczny z danym.

Z tejże samej przyczyny oba punkty M i N leżą po jednej stronie wielokąta Π_{p_k} — inaczej Π_{p_k} rozcinałoby płaszczyznę między M i N i k byłoby równe 1. Mamy jednak

(c) $$\mathfrak{K} \times \Pi_{p_k} \mp 0,$$

co wynika stąd, że $\mathfrak{K}$ posiada punkty wspólne z sumą k wielokątów Π_{p_i}, (ponieważ według założenia suma ta rozcina płaszczyznę między punktami M i N, które kontinuum $\mathfrak{K}$ łączy (a), a nie posiada żadnego punktu wspólnego z sumą $k-1$ pierwszych z nich, (b)).

Niech będzie r liczba, spełniająca nierówności

$$r < \rho(M, \Pi_{p_k}),$$

$$r < \rho(N, \Pi_{p_k})$$

(d) i $$r < \frac{a}{2},$$

gdzie a oznacza długość boku sześciokątów rozpatrywanej siatki.

Weźmy wewnątrz Π_{p_k} punkt P i zbudujmy wielokąt Π_0 podobny do Π_{p_k}, o bokach równoległych do boków wielokąta Π_{p_k} i o środku podobieństwa P tak, aby odległość najdalszego punktu wielokąta Π_0 od wielokąta Π_{p_k} była nie większa od r; wreszcie budujemy Π_0 po tej stronie wielokąta Π_{p_k}, po której leżą punkty M i N.

Tak skonstruowane Π_0 nie posiada punktów wspólnych z żadnym z k rozpatrywanych wielokątów Π_{p_i}.

(e) $$\Pi_0 \times \Pi_{p_i} = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots k),$$

(co wynika z nierówności (d)), oraz rozcina płaszczyznę między Π_k a $M+N$. Kontinuum $\mathfrak{K}$ musi więc, ze względu na wzory (a) i (c), przecinać Π_0:

(f) $$\mathfrak{K} \times \Pi_0 \mp 0.$$

Rozpatrzmy mnogość [1])

$$\mathfrak{K}_1 = \overline{\mathfrak{S}}_s^s(M, \mathfrak{K} - \Pi_0) + \Pi_0 + \overline{\mathfrak{S}}_s^s(N, \mathfrak{K} - \Pi_0).$$

Powiadam: $\mathfrak{K}_1$ jest kontinuum, łączącem punkty M i N, bez punktów wspólnych z mnogością

$$\Pi_{p_1} + \Pi_{p_2} + \ldots + \Pi_{p_k},$$

co przeczy założeniu.

---

[1]) Albo po prostu mnogość

$$\mathfrak{K} - \mathfrak{W}^{\Pi_{p_k}}(\Pi_0) + \Pi_0,$$

t. j. sumę wielokąta Π_0 z tą częścią kontinuum $\mathfrak{K}$, która leży po tej stronie wielokąta Π_0, co punkty M i N; nie udowodniłem jednak tutaj, że ta mnogość jest kontinuum, a dowód opiera się na rozumowaniu, podanem w tekście.

Rzeczywiście:

Po pierwsze, $\mathfrak{K}_1$ jest kontinuum, gdyż wszystkie trzy jego składniki są kontinuami, oraz pierwszy i ostatni składnik, ze względu na związek (f), posiadają punkty wspólne z Π_0 (p. str. 22, 4)); więc otrzymana suma musi być kontinuum [1].

Powtóre, $\mathfrak{K}_1$ zawiera M i N, bo pierwszy jego składnik zawiera punkt M, a ostatni — punkt N.

Po trzecie, $\mathfrak{K}_1$ nie posiada żadnego punktu wspólnego ani z Π_{p_k} według konstrukcyi każdego z jego składników; ani też z mnogością

$$\Pi_{p_1} + \Pi_{p_2} + \ldots + \Pi_{p_{k-1}},$$

gdyż mamy $\mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{K} + \Pi_0,$

a ani $\mathfrak{K}_1$ ani Π_0 nie posiadają z nią punktów wspólnych (według wzorów (b) i (e)).

Niemożliwe więc jest, by k było większe od 1, co udowadnia nasz lemmat.

Teraz możemy przystąpić do dowodu ostatniej części twierdzenia IV, mianowicie, że na $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ istnieje wielokąt zewnętrzny, we wnętrzu którego leżą punkty mnogości $\mathfrak{A}$.

Weźmy punkt dostatecznie daleki, D, i punkt A wewnętrzny mnogości $\mathfrak{A}$. Według własności ograniczenia, $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ rozcina płaszczyznę między A i D. A więc musi istnieć, według poprzedzającego lemmatu, przynajmniej jeden wśród wielokątów składających $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$, który też rozcina płaszczyznę między A i D. Oczywiście punkt D będzie leżał po stronie zewnętrznej tego wielokąta (według obioru punktu D i określenia strony zewnętrznej wielokąta). Punkt A więc musi leżeć po stronie wewnętrznej tego wielokąta; a więc po jego stronie wewnętrznej leżą wszystkie punkty wewnętrzne $\mathfrak{A}$ i wszystkie pozostałe wielokąty ograniczenia $\mathfrak{A}$, c. n. u.

Zauważmy jeszcze, że dla dwóch jakichkolwiek wielokątów siatki bez punktów wspólnych, Π_1 i Π_2,

$$\Pi_1 + \Pi_2 \subset \Sigma_a$$

i $$\Pi_1 \times \Pi_2 = 0,$$

(8) mamy $$\rho(\Pi_1, \Pi_2) \geqslant a.$$

Rzeczywiście, zekreślmy z dowolnego punktu P na Π_1 koło o promieniu a. Jeżeli P nie jest punktem rozgałęzienia siatki, to koło zakreślone przetnie tylko cztery odcinki, sąsiednie odcinkowi, na którym leży punkt P. Otóż

[1]) P. Thèse, chap. I, § III, XIV (str. 14).

żaden z tych czterech odcinków nie może oczywiście należeć do Π_2, a więc i żaden punkt wewnątrz koła lub na jego okręgu. Pozostaje przypadek, gdy P jest punktem rozgałęzienia siatki; wtedy koło powyższe przechodzi przez koniec dalszych odcinkow, który może należeć do Π_2. I w tym więc przypadku wewnątrz zakreślonego koła żadnego punktu wielokąta Π_2 niema, a może być tylko na okręgu tego koła. Nierówność (8) jest więc udowodniona.

§ 3. Dla danej mnogości $\mathfrak{M}$ budujemy wielokąty aproksymujące w następujący sposób:

Sporządzamy siatkę Σ_a sześciokątów o boku a. Sześciokąty, po których stronie wewnętrznej leżą punkty mnogości $\mathfrak{M}$, oraz sześciokąty, sąsiadujące z niemi (t. j. mające z niemi bok wspólny), nazywamy sześciokątami, n a l e ż ą c e m i d o $\mathfrak{M}$. Mnogość punktów, leżących we wnętrzach sześciokątów należących do $\mathfrak{M}$ i na nich, będziemy oznaczali przez $\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a)$ [1].

Zbiorem wielokątów, aproksymujących daną mnogość $\mathfrak{M}$, będzie

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a)).$$

Z określenia mnogości $\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a)$ wynikają bezpośrednio następujące jej własności:

1) (9) $\mathfrak{P}(\mathfrak{M} + \mathfrak{N}, a) \equiv \mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a) + \mathfrak{P}(\mathfrak{N}, a)$;

2) (10) $\mathfrak{P}(\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}, a) \subset \mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a) \times \mathfrak{P}(\mathfrak{N}, a)$;

(tożsamość może tu nie zachodzić, bo wnętrze jednego sześciokąta może zawierać i punkty mnogości $\mathfrak{M}$ i punkty mnogości $\mathfrak{N}$, choć mnogości $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ mogą wcale nie posiadać punktów wspólnych).

3) Gdy mnogość $\mathfrak{M}$ jest spójna, to i mnogość $\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a)$ jest spójna, a więc kontinuum, bo $\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a)$ jest według określenia domknięte.

4) Mnogość $\mathfrak{F}(\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a))$ składa się, według twierdzenia III paragrafu poprzedzającego, ze skończonej liczby wielokątów

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a)) \equiv \Pi_1 + \Pi_2 + \ldots . \Pi_n,$$

gdzie, według wzoru (8),

$$\rho(\Pi_i, \Pi_j) \geqslant a.$$

Twierdzenie V O d l e g ł o ś ć d o w o l n e g o p u n k t u w i e l o k ą t a a p r o k s y m u j ą c e g o m n o g o ś ć $\mathfrak{M}$ o d t e j m n o g o ś c i j e s t z a w a r t a w g r a n i c a c h a i $4a$, t. j. dla

$$F \subset \mathfrak{F}(\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a))$$

(11) mamy $a \leqslant \rho(F, \mathfrak{M}) < 4a.$

[1]) Mnogość $\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a)$ nie jest wprawdzie zdeterminowana przez same $\mathfrak{M}$ i a: zależy jeszcze od siatki, która przy danem a może być jeszcze rozmaicie zbudowana. Jednak możemy tę mnogość uważać za określoną, ponieważ nigdy nie będziemy mieli do czynienia z dwiema siatkami o jednakowej długości boku.

Niech będzie F punkt ograniczenia mnogości $\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a)$; musi on leżeć na jakimś sześciokącie siatki należącym do $\mathfrak{M}$; nazwijmy ten sześciokąt Φ [1]. Φ znajduje się w następującym stosunku z mnogością $\mathfrak{M}$:

1) (a) $$\overline{\mathfrak{W}}(\Phi) \times \mathfrak{M} = 0.$$

Inaczej bowiem wszystkie sześciokąty siatki sąsiednie z Φ należałyby do $\mathfrak{M}$ (według określenia sześciokątów „należących" do danej mnogości); więc wszystkie punkty Φ byłyby wewnętrznemi dla mnogości $\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a)$ i punkt F nie leżałby na granicy tej ostatniej, wbrew założeniu.

2) Wśród sześciokątów siatki, sąsiadujących z Φ, musi istnieć jeden Φ_1 taki, że

(b) $$\overline{\mathfrak{W}}(\Phi_1) \times \mathfrak{M} \neq 0;$$

w przeciwnym razie bowiem Φ, w którego wnętrzu niema punktów $\mathfrak{M}$, według (a), nie byłby sześciokątem, należącym do $\mathfrak{M}$.

Teraz możemy znaleść największą i najmniejszą możliwą odległość punktów, zawartych w $\mathfrak{F}(\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a))$, od mnogości $\mathfrak{M}$.

Niech będą $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ kolejne wierzchołki sześciokąta Φ, oraz $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ środki jego boków, a mianowicie B_1 środek boku $A_1 A_2$ i t. d. Oznaczenia te obieramy tak, żeby punkt F leżał na odcinku $A_1 B_1$

Gdy F jest różne od A_1, sześciokąty, w których wnętrzach (w szerszem znaczeniu) leżą punkty mnogości $\mathfrak{M}$, mogą mieć z Φ wspólny tylko jeden z boków $A_3 A_4$, $A_4 A_5$, $A_5 A_6$. Gdyby bowiem który z nich miał wspólny z Φ bok $A_2 A_3$ lub $A_6 A_1$, nie mówiąc już o boku $A_1 A_2$ to sześciokąt, posiadający wspólnie z Φ bok $A_1 A_2$, byłby sąsiednim względem sześciokąta, zawierającego we wnętrzu punkty mnogości $\mathfrak{M}$; czyli sam należałby do $\mathfrak{M}$. A więc bok $A_1 A_2$, będąc wspólnym dwóm sześciokątom należącym do $\mathfrak{M}$, składałby się cały—z wyjątkiem może jednego z końców, A_1 lub A_2—z punktów wewnętrznych mnogości $\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a)$. To jest jednak sprzeczne z założeniem, według którego na boku $A_1 A_2$ leży punkt F, różny od A_1 i A_2, i należący do ograniczenia mnogości $\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a)$.

Gdy F jest identyczne z A_1, to sześciokąty, zawierające we wnętrzu punkty $\mathfrak{M}$, mogą mieć wspólny z Φ jeszcze bok $A_2 A_3$ (oczywiście zaś żaden z boków $A_1 A_2$ i $A_1 A_6$).

Szukajmy teraz na tych trzech, względnie czterech, sześciokątach [2], mogących zawierać we wnętrzu punkty $\mathfrak{M}$ i posiadających jeden bok wspólny

---

[1]) W razie gdyby punkt F był punktem rozgałęzienia siatki, mogłyby istnieć dwa takie sześciokąty; przez Φ oznaczamy wtedy jeden z nich.

[2]) Punkt tak najbliższy, jak i najdalszy, mnogości $\overline{\mathfrak{W}}(\Phi_1)$ od mnogości, nie posiadającej z nią punktów wspólnych, musi, jak wiadomo, leżeć na ograniczeniu pierwszej mnogości, to jest na Φ_1.

z Φ, punktu najbliższego od odcinka $A_1 B_1$, względnie od punktu A_1; w ten sposób znajdziemy kres dolny dla $\rho(F, \mathfrak{M})$. Tym punktem będzie punkt A_6 [1]. Jego odległość od $A_1 B_1$, t. j. od punktu A_1, jest równa długości boku sześciokąta, t. j. a.

Ażeby następnie znaleść kres górny dla $\rho(F, \mathfrak{M})$, szukamy pary punktów najbardziej od siebie odległych, z których jeden leżałby na jednym z wyżej rozpatrywanych trzech (względnie czterech) sześciokątów, sąsiadujących z Φ, a drugi na $A_1 B_1$.

Taką parą punktów będzie: punkt A_1 i wierzchołek sąsiedniego sześciokąta, leżący na przedłużeniu odcinka $A_1 B_4$ (lub, co na jedno wychodzi, wierzchołek na przedłużeniu odcinka $A_1 B_3$), wspólny koniec boków równoległych do $A_1 A_2$ i $A_1 A_6$. Nazwijmy ten punkt A_1'. Mamy

$$\rho(A_1, A_1') = \sqrt{\rho(A_1 A_2)^2 + \rho(A_2, A_1')^2} = \sqrt{a^2 + (2\sqrt{3}\,a)^2} = \sqrt{13}\,.\,a < 4a.$$

Ponieważ

$$\rho(A_1, A_6) \leqslant \rho(F, \mathfrak{M}) \leqslant \rho(A_1, A_1'),$$

więc

$$a \leqslant \rho(F, \mathfrak{M}) < 4a, \qquad \text{c. n. u.}$$

Stąd wynika bezpośrednio, że

$$a \leqslant \rho(\mathfrak{F}(\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a)), \mathfrak{M}) < 4a,$$

ten wzór jednak mniej mówi niż poprzedni.

Gdy pozostawimy punktowi F szersze pole zmienności, rozumiejąc go jako d o w o l n y punkt mnogości $\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a)$, to otrzymamy, co jest odrazu widoczne, ten sam kres górny na jego odległość od $\mathfrak{M}$. Więc

(12) $$\rho(P, \mathfrak{M}) < 4a$$

dla $$P \subset \mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a);$$

(dolnym kresem odległości $\rho(P, \mathfrak{M})$ jest oczywiście zawsze zero).

Gdy, przeciwnie, zamiast punktu F we wzorze (11), będziemy rozpatrywali dowolny punkt mnogości uzupełniającej poprzednią, t. j. mnogości $\mathfrak{Z} - \mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a)$, to kres d o l n y na jego odległość od $\mathfrak{M}$ pozostanie ten sam. Niech będzie bowiem

$$Z_0 \subset \mathfrak{Z} - \mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a)$$

i punkt $$M_0 \subset \overline{\mathfrak{M}},$$

[1] Punkt A_6 nie może wprawdzie sam należeć do $\mathfrak{M}$, lecz może być punktem skupienia mnogości $\mathfrak{M}$, gdy $\mathfrak{M}$ jest niedomknięte.

ten punkt, dla którego $\rho(Z_0, M)$

(gdzie M jest punktem $\overline{\mathfrak{M}}$) osiąga wartość najmniejszą, t. j.

$$\rho(Z_0, M_0) = \rho(Z_0, \mathfrak{M}).$$

Połączmy M_0 z Z_0 odcinkiem prostej, $M_0 Z_0$. Ten odcinek przetnie $\mathfrak{F}(\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a))$, bo M_0 jest punktem wewnętrznym, a Z_0 punktem zewnętrznym dla mnogości $\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a)$ (p. Rozdział I, § 8, 3)).

Mamy więc

$$M_0 Z_0 \times \mathfrak{F}(\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a)) \supset F_0,$$

skąd oczywiście

$$\rho(M_0, Z_0) > \rho(M_0, F_0);$$

lecz według wzoru (11) mamy:

$$\rho(M_0, F_0) \geqslant a,$$

więc

$$\rho(M_0, Z_0) \geqslant a.$$

Ostatecznie zatem

(13) $$\rho(\mathfrak{M}, Z) > a$$

dla $$Z \subset \mathfrak{Z} - \mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a);$$

(górnego kresu $\rho(\mathfrak{M}, Z)$ oczywiście nie posiada, t. j. jest nim ∞).

Ponieważ tu mamy do czynienia z kresem dolnym, więc rezultat otrzymany możemy napisać prościej:

(13′) $$\rho(\mathfrak{M}, \mathfrak{Z} - \mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a)) \geqslant a.$$

Każdy więc punkt, znajdujący się w odległości od $\mathfrak{M}$ mniejszej niż a, należy do mnogości $\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a)$, co możemy napisać

(13a) $$\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a) \supset \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, a).$$

Wzór (12) możemy też napisać analogicznie w formie

(12a) $$\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a) \subset \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, 4a).$$

§ 4. Gdy mamy dwie mnogości $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$, o odległości wzajemnej większej od zera, to, biorąc

$$a \leqslant \tfrac{1}{5}\rho(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}),$$

otrzymujemy:

$$4a > \rho(\mathfrak{M}, \mathfrak{F}(\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a))) \geqslant a$$

oraz (p. wzór (4′))

$$\rho(\mathfrak{N}, F) \geqslant \rho(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) - \rho(\mathfrak{M}, F) > 5a - 4a = a,$$

gdzie $$F \subset \mathfrak{F}(\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a)),$$

więc i $$\min \rho(\mathfrak{N}, F) = \rho(\mathfrak{N}, \mathfrak{F}(\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a))) > a.$$

Streszczając te dwie nierówności w jednę, otrzymujemy

(14) $$\rho\,(\mathfrak{M} + \mathfrak{N},\ \mathfrak{F}\,(\mathfrak{P}\,(\mathfrak{M}, a))) \geqslant a.$$

dla $a < \frac{1}{5}\,\rho\,(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.

Często będzie nam potrzebny wzór innej postaci, mniej mówiący:

(14 a) $$\rho\,(\mathfrak{P}\,(\mathfrak{M}, a), \mathfrak{N}) > a.$$

Otrzymujemy go, udowadniając przez rozumowanie identyczne z użytym wyżej, że

$$\rho\,(\mathfrak{N}, P) > a$$

dla $P \subset \mathfrak{P}\,(\mathfrak{M}, a)$,

skąd wynika wzór (14 a).

Jeżeli chcemy otoczyć obie mnogości $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ aproksymującemi je wielokątami, tak, aby te wielokąty nie posiadały punktów wspólnych, to trzeba wziąć

$$a \leqslant \tfrac{1}{8}\,\rho\,(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}).$$

Wtedy mnogości $\mathfrak{P}\,(\mathfrak{M}, a)$ i $\mathfrak{P}\,(\mathfrak{N}, a)$ nie mają punktów wspólnych, gdyż

$$\rho\,(\mathfrak{N}, P) \geqslant \rho\,(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) - \rho\,(\mathfrak{M}, P) > 8a - 4a = 4a,$$

gdzie $P \subset \mathfrak{P}\,(\mathfrak{M}, a)$.

Z drugiej zaś strony wiemy, że

$$\rho\,(Q, \mathfrak{N}) < 4a$$

dla $Q \subset \mathfrak{P}\,(\mathfrak{N}, a)$.

Stąd wynika, że żaden punkt Q nie może być identyczny żadnemu punktowi P, czyli

15) $$\mathfrak{P}\,(\mathfrak{M}, a) \times \mathfrak{P}\,(\mathfrak{N}, a) = 0$$

dla $a \leqslant \frac{1}{8}\,\rho\,(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.

§ 5. Z nierówności (12) wynika bezpośrednio

$$\mathfrak{D}\,(\{\mathfrak{P}\,(\mathfrak{M}, a)\})_{a>0} \subset \overline{\mathfrak{M}}$$ [1].

[1]) Przez $\mathfrak{D}$ oznaczamy mnogość punktów, wspólnych wszystkim mnogościom, zawartym w nawiasie ( ), więc w danym razie wszystkim mnogościom $\mathfrak{P}\,(\mathfrak{M}, a)$.

a że ze wzoru $\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a) \supset \overline{\mathfrak{M}}$,

wynika $\mathfrak{D}(\{\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a)\}) \supset \overline{\mathfrak{M}}$,

mamy więc ostatecznie

(16) $$\mathfrak{D}(\{\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a)\}) = \overline{\mathfrak{M}}.$$

Z nierówności (12) i (13') wynika jeszcze wzór

(17) $$\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a) \supset \mathfrak{P}\left(\mathfrak{M}, \frac{a}{4}\right).$$

Mamy bowiem: $\rho(\mathfrak{Z} - \mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a), \mathfrak{M}) \geqslant a$,

jest zaś $\rho(P, \mathfrak{M}) < 4\frac{a}{4} = a$

dla $P \subset \mathfrak{P}\left(\mathfrak{M}, \frac{a}{4}\right)$.

Z porównania tych dwóch nierówności otrzymujemy, że żaden punkt P mnogości $\mathfrak{P}\left(\mathfrak{M}, \frac{a}{4}\right)$ nie może należeć do mnogości $\mathfrak{Z} - \mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a)$, t. j.

$$\mathfrak{P}\left(\mathfrak{M}, \frac{a}{4}\right) \times (\mathfrak{Z} - \mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a)) = 0,$$

czyli ostatecznie

$$\mathfrak{P}\left(\mathfrak{M}, \frac{a}{4}\right) \subset \mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a)$$

c. n. u.

§ 6. Przez *rozcinanie płaszczyzny* przez mnogość domkniętą $\mathfrak{D}$ *między dwiema mnogościami* $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$, bez punktów wspólnych z $\mathfrak{D}$, rozumiemy, że żadnego punktu mnogości $\mathfrak{M}$ nie można połączyć z żadnym punktem mnogości $\mathfrak{N}$ przez kontinuum bez punktów wspólnych z $\mathfrak{D}$. Więc $\mathfrak{D}$ rozcina płaszczyznę między M i N, gdy przy

$$\mathfrak{D} \supset \mathfrak{F}(\mathfrak{D}),$$

oraz $$\mathfrak{D} \times (\mathfrak{M} + \mathfrak{N}) = 0,$$

dla każdego kontinuum $\mathfrak{K}$, takiego, że

$$\mathfrak{K} \times \mathfrak{M} \neq 0$$

i $$\mathfrak{K} \times \mathfrak{N} \neq 0,$$

mamy $$\mathfrak{K} \times \mathfrak{D} \neq 0.$$

Wyrażenie: $\mathfrak{D}$ rozcina płaszczyznę oznacza, że istnieje para punktów M i N, nie należących do $\mathfrak{D}$, między któremi $\mathfrak{D}$ rozcina płaszczyznę. Fakt więc rozcinania płaszczyzny przez $\mathfrak{D}$ (między M i N) można wyrazić symbolicznie przez wzór

$$(18) \qquad \mathfrak{W}^M(\mathfrak{D}) \times N = 0,$$

nie rozcinania zaś przez

$$(18') \qquad \mathfrak{W}^M(\mathfrak{D}) = \mathfrak{Z} - \mathfrak{D}.$$

Twierdzenie VI. Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby dana domknięta mnogość $\mathfrak{D}$ *nie rozcinała* płaszczyzny jest, by

$$(19) \qquad \mathfrak{M}\left(\{\overline{\mathfrak{W}^P(\mathfrak{P}(\mathfrak{D}, a))}\}\right)_{a>0} = \mathfrak{Z} - \mathfrak{D}^{1)}$$

gdy $\qquad P \subset \mathfrak{Z} - \mathfrak{D}.$

Dostateczność tego warunku jest oczywista, gdyż z wzoru (19) wynika wzór (18'). Pozostaje nam udowodnić jego konieczność.

Niech bowiem $\mathfrak{D}$ nie rozcina płaszczyzny. Wtedy można znaleść dla dwóch dowolnych punktów M i N, zawartych w uzupełnieniu $\mathfrak{D}$, kontinuum łączące je i nie posiadające punktów wspólnych z $\mathfrak{D}$. Niech będzie $\mathfrak{C}$ takie kontinuum:

$$(a) \qquad \mathfrak{C} \supset M + N$$

i $\qquad \mathfrak{C} \times \mathfrak{D} = 0.$

Odległość wzajemna tych dwóch mnogości $\mathfrak{C}$ i $\mathfrak{D}$, jako domkniętych i bez punktów wspólnych, jest większa od zera (Rozdział I, § 7, II). Możemy więc znaleść liczbę a, spełniającą nierówność:

$$a < \tfrac{1}{5}\rho(\mathfrak{C}, \mathfrak{D}).$$

Według wzoru (14a)

$$(b) \qquad \mathfrak{P}(\mathfrak{D}, a) \times \mathfrak{C} = 0.$$

Wzory (a) i (b) w połączeniu wyrażają (zauważmy, że $\mathfrak{P}(\mathfrak{D}, a)$ jest zawsze mnogością domkniętą), iż mnogość $\mathfrak{P}(\mathfrak{D}, a)$ nie rozcina płaszczyzny między punktami M i N. Ponieważ jednak punkty M i N są dowolnemi punktami uzupełnienia mnogości $\mathfrak{D}$, więc możemy wypowiedzieć otrzymany rezultat w ten sposób: dla każdej pary punktów uzupełnienia danej mnogości $\mathfrak{D}$, nie rozcinającej płaszczyzny, można znaleść takie a, że mnogość $\mathfrak{P}(\mathfrak{D}, a)$ nie rozcina płaszczyzny między temi dwoma punktami.

Rozważajmy teraz mnogość

$$\overline{\mathfrak{W}^P(\mathfrak{P}(\mathfrak{D}, a))} = \mathcal{W}_a.$$

---

[1]) Przez $\mathfrak{M}$ oznaczamy sumę wszystkich mnogości zawartych w nawiasie ( ), w danym przypadku wszystkich $\mathfrak{W}^P(\mathfrak{D}, a)$, gdzie a jest zmienna, $\mathfrak{D}$ i P stałe.

Mnogość ta zawiera według swego określenia wszystkie punkty, które można połączyć z P przez kontinuum bez punktów wspólnych z $\mathfrak{P}(\mathfrak{D}, a)$. Ponieważ, według powyższego, dla każdego punktu Z mnogości $\mathfrak{Z} - \mathfrak{D}$ można znaleść takie a, że $\mathfrak{P}(\mathfrak{D}, a)$ nie rozcina P od Z, więc dla dostatecznie małego a mnogość $\mathfrak{W}_a$ będzie zawierała dowolnie z góry oznaczony punkt Z na $\mathfrak{Z} - \mathfrak{D}$.

Zwróćmy się teraz do mnogości wszystkich punktów, zawartych w mnogościach $\mathfrak{W}_a$, zbudowanych dla wszystkich dodatnich a.

Ze względu, że

$$\mathfrak{W}_a \subset \mathfrak{Z} - \mathfrak{D},$$

jest też oczywiście (według określenia sumy)

(c) $$\mathfrak{M}(\{\mathfrak{W}_a\}) \subset \mathfrak{Z} - \mathfrak{D}.$$

Z drugiej strony mamy

(d) $$\mathfrak{M}(\{\mathfrak{W}_a\}) \supset \mathfrak{Z} - \mathfrak{D}.$$

Weźmy bowiem dowolny punkt Z_0 mnogości $\mathfrak{Z} - \mathfrak{D}$. Dla tego punktu istnieje takie a_0, że

$$\mathfrak{W}_{a_0} \supset Z_0,$$

a więc tembardziej

$$\mathfrak{M}(\{\mathfrak{W}_a\}) \supset Z_0;$$

ponieważ zaś Z_0 jest dowolnym punktem mnogości $\mathfrak{Z} - \mathfrak{D}$, więc wzór (d) jest udowodniony.

Łącząc wzory (c) i (d) razem, otrzymujemy

$$\mathfrak{M}(\{\mathfrak{W}_a\}) \equiv \mathfrak{Z} - \mathfrak{D}. \qquad \text{c. n. u.}$$

Uwaga. Pomimo, że dla każdych dwóch punktów mnogości $\mathfrak{Z} - \mathfrak{D}$ można znaleść, gdy $\mathfrak{D}$ nie rozcina płaszczyzny, takie a, że $\mathfrak{P}(\mathfrak{D}, a)$ nie rozcina płaszczyzny między temi punktami, to jednak mnogość $\mathfrak{P}(\mathfrak{D}, a)$ może rozcinać płaszczyznę (rozumie się, między innemi punktami uzupełnienia mnogości $\mathfrak{D}$, niż dwa obrane), i to każde $\mathfrak{P}(\mathfrak{D}, a)$, dla a dowolnie małego.

Jako przykład takiej mnogości domkniętej $\mathfrak{D}$ nie rozcinającej płaszczyzny, że jej odpowiadająca mnogość $\mathfrak{P}(\mathfrak{D}, a)$, dla każdego a, rozcina płaszczyznę, może służyć kontinuum, zbudowane w sposób następujący [1]:

Bierzemy nieskończony ciąg okręgów kół dotykających się

$$\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n \ldots,$$

[1]) Dla prostszego opisu wprowadzamy osi spółrzędnych prostokątne.

których środkami są odpowiednio punkty osi x-ów: (1,0), $\left(\frac{1}{2}, 0\right), \ldots \left(\frac{1}{2^n}, 0\right), \ldots$ a promienie mają odpowiednio długość $\frac{1}{3}, \frac{1}{2\,.\,3}, \ldots \frac{1}{2^n\,.\,3} \ldots$

Poprowadźmy z punktu (0, 0) dwa promienie, przechodzące odpowiednio przez punkty $\left(1\frac{1}{3}, \frac{1}{3\,.\,8}\right)$ i $\left(1\frac{1}{3}, -\frac{1}{3\,.\,8}\right)$. Kontinuum szukane $\mathfrak{D}$ składa się z części okręgów kół zbudowanego ciągu, leżących nazewnątrz (po obu stronach) kąta $\left(1\frac{1}{3}, \frac{1}{24}\right)$ (0, 0) $\left(1\frac{1}{3}, -\frac{1}{24}\right)$, oraz z tych części odcinków (0, 0) $\left(1\frac{1}{3}, \frac{1}{24}\right)$ i (0, 0) $\left(1\frac{1}{3}, -\frac{1}{24}\right)$, które leżą nazewnątrz wszystkich kół. Oczywiste jest, że tak otrzymane kontinuum $\mathfrak{D}$ płaszczyzny nie rozcina. O tem zaś, że rozcina płaszczyznę każde $\mathfrak{P}\,(\mathfrak{D}, a)$, przekonywa nas następujące rozważanie:

Dla każdego a mniejszego od $\frac{1}{12}$ można znaleść takie n, że

(a) $$\frac{1}{2^n\,.\,3} > 4\,a > \frac{1}{2^{n+1}\,.\,3},$$

t. j. takie, że $\mathfrak{K}_n$ jest ostatniem kołem w zbudowanym ciągu, którego promień jest większy od $4\,a$. Niech będzie Q dowolny punkt leżący na jednym z dwóch łuków rozpatrywanego koła, które leżą wewnątrz kąta utworzonego przez dwa rozpatrywane promienie, wychodzące z (0, 0) (t. j. z łuków, które nie należą do mnogości $\mathfrak{D}$). Oczywista jest nierówność:

(b) $$\rho\,(Q, \mathfrak{D}) < \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2^n\,.\,3}.$$

Po porównaniu wzoru (b) z drugą częścią nierówności (a), otrzymujemy

$$\rho\,(Q, \mathfrak{D}) < a,$$

czyli

$$Q \subset \mathfrak{S}\,(\mathfrak{D}, a),$$

a więc według wzoru (12a)

$$Q \subset \mathfrak{P}\,(\mathfrak{D}, a).$$

Ostatecznie, ponieważ pozostałe punkty $\mathfrak{K}_n$ należą do $\mathfrak{D}$, a więc tembardziej do $\mathfrak{P}\,(\mathfrak{D}, a)$, mamy

$$\mathfrak{K}_n \subset \mathfrak{P}\,(\mathfrak{D}, a).$$

Środek tego koła, t. j. punkt $\left(\frac{1}{2^n}, 0\right)$, oznaczmy przez O_n. Odległość jego od $\mathfrak{K}_n$ jest równa promieniowi koła, t. j.

$$\rho(\mathfrak{K}_n, O_n) = \frac{1}{2^n \cdot 3},$$

więc według (a)

$$\rho(\mathfrak{K}_n, O_n) > 4a.$$

Wewnątrz rozpatrywanego koła niema punktów mnogości $\mathfrak{D}$. Wszystkie zatem punkty $\mathfrak{D}$, nie należące do $\mathfrak{K}_n$, są odległe od O_n więcej niż na $\frac{1}{2^n \cdot 3}$;

więc $$\rho(\mathfrak{D}, O_n) = \rho(\mathfrak{K}_n, O_n)$$

i $$\rho(\mathfrak{D}, O_n) > 4a;$$

$$O_n \times \mathfrak{S}(\mathfrak{D}, 4a) = 0.$$

Porównywując ten wzór z wzorem (13a), otrzymujemy

$$O_n \times \mathfrak{P}(\mathfrak{D}, a) = 0.$$

Ponieważ $\mathfrak{K}_n$ rozcina płaszczyznę między punktem dostatecznie dalekim D, a punktem O_n, więc musi też rozcinać płaszczyznę między temi dwoma punktami, których nie zawiera, i mnogość domknięta $\mathfrak{P}(\mathfrak{D}, a)$, zawierająca $\mathfrak{K}_n$, c. n. u.

Tworząc mnogość $\mathfrak{D}$ z samych tylko powyżej określonych łuków kół (t. j. nie dołączając do nich odcinków dwóch promieni wychodzących z punktu (0, 0)), otrzymamy mnogość niespójną o tej samej własności.

§ 7. *Twierdzenie VII.* Jeżeli istnieje kontinuum $\mathfrak{K}$, zawierające dwa dane punkty A i B, nie posiadające punktów wspólnych z daną mnogością domkniętą $\mathfrak{D}$, to istnieje i linia łamana AB [1]) bez punktów wspólnych z $\mathfrak{D}$.

Ponieważ mamy

$$\rho(\mathfrak{D}, \mathfrak{K}) > 0,$$

więc możemy znaleść takie a, że

$$\tfrac{1}{5}\rho(\mathfrak{D}, \mathfrak{K}) > a.$$

Tworzymy siatkę sześciokąta o boku a i rozważamy mnogość

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{K}, a).$$

Ponieważ $$\mathfrak{K} \supset A + B,$$

[1]) Przez wyrażenie: linia łamana AB rozumiemy linię

$$AB = AM_1 + M_1 M_2 + \ldots + M_{n-1} M_n + M_n B,$$

gdzie AM_1, $M_i M_{i+1}$, $M_n B$ oznaczają odcinki, z których każdy posiada z sąsiednim po jednym końcu wspólnym, zaś poza tem żadnych punktów wspólnych z żadnym odcinkiem.

więc także

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{K}, a) \supset A + B;$$

ponieważ $\mathfrak{K}$ jest kontinuum, więc i $\mathfrak{P}(\mathfrak{K}, a)$ jest kontinuum.

Poprowadźmy odcinek prostej AB; będzie on albo cały należał do mnogości $\mathfrak{P}(\mathfrak{K}, a)$, albo będzie posiadał z mnogością $\mathfrak{F}(\mathfrak{P}(\mathfrak{K}, a))$ punkty wspólne, których mnogość jest oczywiście domknięta (jako część wspólna dwóch mnogości domkniętych).

Postępujemy teraz tak: bierzemy pierwszy, licząc od A, punkt przecięcia odcinka AB z $\mathfrak{F}(\mathfrak{P}(\mathfrak{K}, a))$. Nazwijmy go P_1. Nazwijmy Π_1 ten wielokąt należący do $\mathfrak{F}(\mathfrak{P}(\mathfrak{K}, a))$, na którym leży punkt P_1. Nazwijmy punkt przecięcia się wielokąta Π_1 z AB, najdalej leżący od A, przez Q_1 [1]. Zastąpmy odcinek $P_1 Q_1$, zawarty w odcinku AB przez jednę z dwóch linij łamanych $P_1 Q_1$, na które punkty P_1 i Q_1 dzielą Π. Linia $P_1 Q_1$ nie przecina ani AP_1, ani $Q_1 B_1$, bo wszystkie punkty wspólne odcinka AB z Π_1 leżą na $P_1 Q_1$, części odrzuconej odcinka AB.

Przez P_2 oznaczamy pierwszy od Q_1 na odcinku $Q_1 B$ punkt wspólny z $\mathfrak{F}(\mathfrak{P}(\mathfrak{K}, a))$; wielokąt zaś, na którym leży P_2, oznaczamy przez Π_2. W taki sam sposób, jak Q_1 wyznaczamy Q_2, potem P_3 i Q_3 i t. d., aż dojdziemy do takiego punktu Q_n, że $Q_n B$ nie zawiera (prócz Q_n) żadnych punktów wspólnych z $\mathfrak{F}(\mathfrak{P}(\mathfrak{K}, a))$. Szukaną linią łamaną AB będzie linia:

$$AP_1 + P_1 Q_1 + Q_1 P_2 + P_2 Q_2 + \ldots + \ldots + \ldots + P_n Q_n + Q_n B,$$

gdzie linie AP_1, $Q_1 P_2$, $Q_2 P_3 \ldots Q_{n-1} P_n$, $Q_n B$ są odzinkami zawartemi w AB i w $\mathfrak{P}(\mathfrak{K}, a)$, zaś $P_1 Q_1$, $P_2 Q_2 \ldots P_n Q_n$ są to linie łamane, zawarte w $\mathfrak{F}(\mathfrak{P}(\mathfrak{K}, a))$. Linia ta więc nie może posiadać punktów wspólnych z $\mathfrak{D}$.

ROZDZIAŁ III.

O ograniczeniu kontinuum.

§ 1. Przypomnijmy tutaj najpierw podane w Rozdziale I własności ograniczenia, stosując je odrazu do kontinuów. Oznaczając więc kontinuum przez $\mathfrak{C}$, mamy

1) Ograniczenie kontinuum istnieje:

(20) $$\mathfrak{F}(\mathfrak{C}) \neq 0.$$

---

[1]) Punkt Q_1 może być identyczny z P_1, jeżeli Π_1 posiada tylko jeden punkt wspólny z AB. Wtedy przez linię łamaną $P_1 Q_1$ rozumiemy punkt P_1.

2) Ograniczenie kontinuum jest **domknięte**:

(21) $$\mathfrak{F}(\mathfrak{C}) \supset \mathfrak{F}(\mathfrak{F}(\mathfrak{C})),$$

co możemy napisać jeszcze w formie:

(21′) $$\mathfrak{F}(\mathfrak{C}) \supset (\mathfrak{F}(\mathfrak{C}))'.$$

3) Ograniczenie kontinuum **nie posiada punktów wewnętrznych**:

(22) $$\mathfrak{F}(\mathfrak{C}) \subset \mathfrak{F}(\mathfrak{F}(\mathfrak{C})).$$

Wzory (21) i (22) możemy połączyć w jeden, mianowicie:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{C}) \equiv \mathfrak{F}(\mathfrak{F}(\mathfrak{C}))$$ [1].

Twierdzenie VIII. **Ograniczenie kontinuum nie zawiera punktów odosobnionych**[2].

(23) $$\mathfrak{F}(\mathfrak{C}) \subset (\mathfrak{F}(\mathfrak{C}))'.$$

[Wzory (21′) i (23) można połączyć w jeden, mianowicie

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{C}) \equiv (\mathfrak{F}(\mathfrak{C}))',$$

to znaczy: **ograniczenie kontinuum jest mnogością doskonałą**].

Weźmy dowolny punkt F na ograniczeniu danego kontinuum

$$F \subset \mathfrak{F}(\mathfrak{C});$$

udowodnimy, że jest on punktem skupienia punktów $\mathfrak{F}(\mathfrak{C})$, t. j. że w kole o dowolnie małym promieniu a i o środku F znajduje się punkt, należący do $\mathfrak{F}(\mathfrak{C})$, różny od F.

Rzeczywiście, ponieważ F należy do ograniczenia, można znaleść punkty C i Z takie, że

(a) $$\mathfrak{S}(F, a) \times \mathfrak{C} \supset C,$$

(b) $$\mathfrak{S}(F, a) \times (\mathfrak{Z} - \mathfrak{C}) \supset Z.$$

---

[1]) Na tem kończą się własności ograniczenia, prawdziwe dla każdej klasy (E) Frécheta, compacte i spójnej. Twierdzenia następujące, jakkolwiek prawdziwe dla ogólniejszych przestrzeni, niż płaszczyzna, wymagają już założeń bardziej specyalnych.

[2]) Twierdzenie to jest przypadkiem szczególnym ogólniejszego twierdzenia Mazurkiewicza (które autor wraz z eleganckim dowodem opartym na wprowadzonym przez się pojęciu rozcięcia nieprzywiedlnego zakomunikował mi ustnie w r. 1911); my otrzymamy tu to twierdzenie na innej drodze, jako wniosek z ogólniejszego jeszcze twierdzenia, do którego dowodu jest nam jednak potrzebny podany wyżej przypadek specyalny twierdzenia Mazurkiewicza.

Weźmy teraz liczbę b, czyniącą zadość nierównościom

$$b < \rho(F, C),$$

$$b < \rho(F, Z).$$

Mamy oczywiście $b < a$

i $\mathfrak{S}(F, b) \times (C + Z) \equiv 0.$

Oznaczmy mnogość punktów, zawartych w pierścieniu, otrzymanym z większego koła po odjęciu punktów wewnętrznych mniejszego koła, przez Q,

$$\mathfrak{S}(F, a) - \mathfrak{S}(F, b) \equiv Q.$$

Z obioru C, Z i b wynika

(c) $$Q \supset C + Z.$$

(d) $$Q \times F \equiv 0.$$

Mnogość Q jest kontinuum; więc z wzorów (a), (b) i (c) wynika, według wiadomego twierdzenia (Rozdział I, § 8, 3)),

(e) $$Q \times \mathfrak{F}(\mathfrak{C}) \supset F_a.$$

Z wzorów (d) i (e) wynika, że

$$F_a \not\equiv F.$$

Więc ostatecznie otrzymaliśmy

$$\mathfrak{S}(F, a) - F \supset F_a$$

dla każdego $a > 0$,

czyli F jest punktem skupienia punktów F_a, należących do $\mathfrak{F}(\mathfrak{C})$:

$$F \subset (\mathfrak{F}(\mathfrak{C}) - F)', \quad \text{c. n. u.}$$

Jako szczególny przypadek tego twierdzenia, który jedynie będzie nam potrzebny, zanotujmy:

Wniosek: Ograniczenie kontinuum nie może redukować się do jednego punktu.

Twierdzenie IX. Ograniczenie każdego nasyconego semikontinuum uzupełnienia danego kontinuum $\mathfrak{C}$ jest podmnogością ograniczenia tego kontinuum:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C})) \subset \mathfrak{F}(\mathfrak{C}),$$

gdzie $Z \subset \mathfrak{Z} - \mathfrak{C}$ [1].

---

[1]) Wiemy (Rozdział I, § 8), że takie semikontinuum nasycone istnieje dla każdego punktu uzupełnienia danego kontinuum.

Przypuśćmy bowiem, że punkt F na $\mathfrak{F}$ nie jest zawarty w $\mathfrak{F}(\mathfrak{C})$,

(a) $$\mathfrak{F}(\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C})) - \mathfrak{F}(\mathfrak{C}) \supset F.$$

Ponieważ $\mathfrak{F}(\mathfrak{C})$ jest mnogością domkniętą i nie zawiera F, więc można uczynić zadość nierówności:

(b) $$a < \rho(F, \mathfrak{F}(\mathfrak{C})).$$

Rozważajmy koło $\mathfrak{S}(F, a)$; ponieważ F jest, według wzoru (a), punktem ograniczenia mnogości $\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C})$, więc [1]

(c) $$\mathfrak{S}(F, a) \times \mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C}) \neq 0.$$

Ponieważ, według (b),

$$\mathfrak{S}(F, a) \times \mathfrak{F}(\mathfrak{C}) = 0,$$

a $\mathfrak{S}(F, a)$ jest kontinuum i zawiera punkty, nie należące do $\mathfrak{C}$ (wzór *(c)), więc

(d) $$\mathfrak{S}(F, a) \times \mathfrak{C} = 0.$$

Według określenia mnogości $\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C})$, wzory (c) i (d) znaczą, że

$$\mathfrak{S}(F, a) \subset \mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C}),$$

co jest niedorzecznością, bo znaczy, że punkt F jest wewnętrzny dla mnogości $\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C})$, gdy tymczasem według założenia F jest jej punktem ograniczenia.

§ 2. *Twierdzenie X.* Ograniczenie każdego nasyconego semikontinuum uzupełnienia danego kontinuum C, t. j. mnogości

$$\mathfrak{C}_s^s(Z, \mathfrak{Z} - \mathfrak{C}) = \mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C}),$$

gdzie $$Z \subset \mathfrak{Z} - \mathfrak{C}$$

jest *kontinuum.*

Aby udowodnić, że jakaś mnogość jest kontinuum, trzeba dowieść, że jest ona:

1) domknięta,

2) spójna,

3) nie redukuje się do jednego punktu.

O mnogości $\mathfrak{F}(\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C}))$ wiemy (21), że jest domknięta, następnie, ponieważ (Rozdz. I, § 8 (7)).

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C})) \supset \mathfrak{F}(\overline{\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C})}),$$

[1] Punkt bowiem F albo sam należy do mnogości $\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C})$, albo, jeżeli F nie należy do niej, to jest jej punktem skupienia, w każdym razie $\mathfrak{S}(F, a)$ zawiera przynajmniej jeden punkt mnogości $\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C})$.

a mnogość $\overline{\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C})}$ jest kontinuum (Rozdz. I, § 8), na mocy tedy wniosku z twierdzenia VIII $\mathfrak{F}(\overline{\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C})})$, a więc i $\mathfrak{F}(\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C}))$ nie redukuje się do jednego punktu [1].

Wobec tego warunki 1) i 3) są spełnione dla $\mathfrak{F}(\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C}))$ i pozostaje nam udowodnić 2), t. j. spójność rozpatrywanej mnogości.

Przypuśćmy, że jest ona niespójna:

(a) $$\mathfrak{F}(\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C})) = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2,$$

gdzie $$\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 = 0.$$

Rozważajmy mnogość
$$\mathfrak{P}(\mathfrak{F}_1, a) = \mathfrak{S}_1,$$

gdzie $$a < \tfrac{1}{5}\rho(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2).$$

Mnogość $\mathfrak{F}(\mathfrak{S}_1)$, jak wiemy, składa się:

1) ze skończonej liczby wielokątów (tw. III);

2) nie posiada punktów wspólnych ani z F_1, ani z F_2 (wzór (14)):

(b) $$\mathfrak{F}(\mathfrak{S}_1) \times (\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2) = 0;$$

3) rozcina płaszczyznę między każdą parą punktów, z których jeden należy do $\mathfrak{F}_1$, a drugi do $\mathfrak{F}_2$ (Rozdz. I, § 8, 3)).

Weźmy taką parę punktów:

(c) $$F_1 \subset \mathfrak{F}_1,$$

(d) $$F_2 \subset \mathfrak{F}_2.$$

Według lemmatu Rozdz. II § 2, musi istnieć na $\mathfrak{F}(\mathfrak{S}_1)$ przynajmniej jeden wielokąt taki, że F_1 i F_2 leżą po jego różnych stronach. Niech będzie Φ takim wielokątem:

(e) $$\Phi \subset \mathfrak{F}(\mathfrak{S}_1),$$

gdzie (p. wzór (18))

(f) $$\mathfrak{W}^{F_1}(\Phi) \times F_2 = 0.$$

Według określenia mnogości domkniętej, oraz wzorów (a), (c) i (d) mamy

$$\overline{\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C})} \supset F_1 + F_2,$$

---

[1]) Nie można stąd jednak wnioskować, że $\mathfrak{F}(\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C}))$ nie posiada punktów odosobnionych (choć w tym szczególnym przypadku jest to prawdziwe, co wynika z udowodnionej niżej jej spójności). Ograniczenie bowiem semikontinuum naogół może zawierać punkty odosobnione (np. koło z odjętym środkiem, będąc semikontinuum, ma punkt ograniczenia odosobniony, a mianowicie środek); nie może tylko redukować się do punktu, jako zawierające ograniczenie kontinuum. Zauważmy jeszcze, że dla otrzymania tego rezultatu nie można stosować twierdzenia VIII do $\mathfrak{F}(\mathfrak{C})$, choć $\mathfrak{F}(\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C}))$ jest jej częścią, gdyż $\mathfrak{F}(\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C}))$ nie musi być częścią odosobnioną mnogości $\mathfrak{F}(\mathfrak{C})$.

a że $\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C})$ jest kontinuum, a Φ rozcina płaszczyznę między $F_1 + F_2$ (p. wzór (f)), więc

(g) $$\overline{\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C})} \times \Phi \neq 0.$$

Lecz z drugiej strony, według wzorów (a), (b) i (c), mamy

(h) $$\mathfrak{F}(\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C})) \times \Phi = 0.$$

Jeżeli zaś Φ posiada punkty wspólne z kontinuum, będące s u m ą rozpatrywanego semikontinuum i jego ograniczenia, a nie posiada punktów wspólnych z tem ograniczeniem, to musi posiadać punkty wspólne z pierwszym składnikiem semikontinuum.

Czyli, odejmując od (g) wzór (h):

$$[\overline{\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C})} - \mathfrak{F}(\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C}))] \times \Phi \neq 0,$$

tembardziej więc

(i) $$\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C}) \times \Phi \neq 0.$$

Z wzorów (i) i (h) wypływa

(j) $$\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C}) \supset \Phi,$$

bo gdyby Φ zawierało punkt nie należący do mnogości $\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C})$, to musiałoby posiadać i punkt ograniczenia tej mnogości, czemu przeczy wzór (h).

Z drugiej strony wiemy (twierdzenie IX), że

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{C}) \supset \mathfrak{F}(\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C})),$$

a więc, ponieważ C, jako kontinuum, zawiera swe ograniczenie

$$\mathfrak{C} \supset \mathfrak{F}(\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C}));$$

więc z wzorów (a), (c) i (d) wynika

(k) $$\mathfrak{C} \supset F_1 + F_2.$$

Ponieważ Φ rozcina płaszczyznę między punktami F_1 i F_2 (wzór (f)), a kontinuum $\mathfrak{C}$ łączy te punkty (wzór (k)), przeto

$$\mathfrak{C} \times \Phi \neq 0,$$

więc, z wzoru (j): $$\mathfrak{C} \times \mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C}) \neq 0,$$

co jest n i e d o r z e c z n o ś c i ą. Założenie więc niespójności $\mathfrak{F}(\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C}))$ jest niemożliwe; c. n. u.

Teraz możemy z łatwością określić, jaki jest ogólny kształt ograniczenia dowolnego kontinuum.

§ 3. *Twierdzenie XI.* O g r a n i c z e n i e k a ż d e g o k o n t i n u u m s k ł a d a s i ę a l b o z e s k o ń c z o n e j l i c z b y k o n t i n u ó w, b ę d ą c y c h o g r a n i c z e n i a m i n a s y c o n y c h s e m i k o n t i n u ó w u z u p e ł n i e n i a, albo z nieskończonej, przeliczalnej liczby takich kontinuów i ich punktów skupienia.

Najpierw udowodnimy, że, jeżeli jaki punkt ograniczenia danego kontinuum $\mathfrak{C}$ nie należy do ograniczenia żadnego z semikontinuów $\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C})$, to jest punktem skupienia sumy ograniczeń tych semikontinuów, t. j. pisząc to krótko w formie symbolicznej:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{C}) \equiv \overline{\mathfrak{M}}(\{\mathfrak{F}(\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C}))\}),$$

gdzie Z przebiega wszystkie puukty uzupełnienia $\mathfrak{C}$.

Niech bowiem będzie

(a) $$F \subset \mathfrak{F}(\mathfrak{C}) - \mathfrak{M}(\{\mathfrak{F}(\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C}))\}).$$

W każdem kole, o dowolnie małym promieniu, o środku F musi istnieć punkt uzupełnienia mnogości $\mathfrak{C}$, gdyż F jest punktem ograniczenia mnogości $\mathfrak{C}$

$$\mathfrak{S}(F, \varepsilon) \times (\mathfrak{Z} - \mathfrak{C}) \supset Z_\varepsilon.$$

Punkt Z_ε, należąc do uzupełnienia $\mathfrak{C}$, jest zarazem zewnętrzny dla $\mathfrak{C}$, bo punkty ograniczenia $\mathfrak{C}$ są zawarte w $\mathfrak{C}$. Utwórzmy semikontinuum $\mathfrak{W}^{Z_\varepsilon}(\mathfrak{C})$ i poprowadźmy odcinek prostej, łączący F z Z_ε: FZ_ε. Według założenia (a) $F \subset \mathfrak{F}(\mathfrak{C})$, mamy więc

(b) $$F \times \mathfrak{W}^{Z_\varepsilon}(\mathfrak{C}) \equiv 0;$$

według tegoż założenia (a),

(c) $$F \times \mathfrak{F}(\mathfrak{W}^{Z_\varepsilon}(\mathfrak{C})) \equiv 0.$$

Wzory (b) i (c) znaczą, że F jest punktem zewnętrznym dla $\mathfrak{W}^{Z_\varepsilon}(\mathfrak{C})$; a, że Z_ε jest punktem wewnętrznym tej mnogości, mamy więc wzór

$$FZ_\varepsilon \times \mathfrak{F}(\mathfrak{W}^{Z_\varepsilon}(\mathfrak{C})) \supset F_\varepsilon,$$

przyczem musi być

$$\rho(F, F_\varepsilon) < \rho(F, Z_\varepsilon).$$

A że $$Z_\varepsilon \subset \mathfrak{S}(F, \varepsilon),$$

t. j. $$\rho(F, Z_\varepsilon) \leqslant \varepsilon,$$

więc $$\rho(F, F_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Ponieważ zaś ε jest dowolnie małe, przeto

$$\lim_{\varepsilon=0} F_\varepsilon \equiv F,$$

gdzie $$F_\varepsilon \subset \mathfrak{F}(\mathfrak{W}^{Z_\varepsilon}(\mathfrak{C})),$$

a $$Z_\varepsilon \subset \mathfrak{Z} - \mathfrak{C}; \qquad \text{c. n. u.}$$

Że liczba różnych mnogości $\mathfrak{F}(\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C}))$ może być tylko przeliczalna, wynika stąd, iż każdej z nich odpowiada jedna (przynajmniej) mnogość $\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C})$, te zaś nie mają ze sobą punktów wspólnych i każda z nich zawiera koło $\mathfrak{S}(Z, \frac{1}{2}a)$, gdzie zakładamy:

$$a = \rho\,\{Z, \mathfrak{F}(\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C}))\} > 0,$$

liczba zaś kół takich może być na płaszczyznie tylko przeliczalna.

Pozostaje nam tylko jeszcze wykazać, że jeżeli istnieją na $\mathfrak{F}(\mathfrak{C})$ punkty, nie należące do żadnego kontinuum $\mathfrak{F}(\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C}))$, to tych ostatnich kontinuów jest nieskończenie wiele. Gdyby liczba ich była tylko skończona, to z nieskończonego ciągu punktów F_ε (którego F jest punktem skupienia) nieskończenie wiele punktów znajdowałoby się na jednem z tych kontinuów, niech będzie na kontinuum

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{W}^{Z_1}(\mathfrak{C})) = \mathfrak{F}_1.$$

Ta nieskończoność punktów na tem kontinuum $\mathfrak{F}_1$ musi mieć punkt skupienia (twierdzenie Bolzano-Weierstrassa), a nie może mieć innego punktu skupienia, aniżeli F, bo jest podmnogością ciągu, posiadającego F jako jedyny punkt skupienia; wreszcie ten ich punkt skupienia musi leżeć na $\mathfrak{F}_1$, gdyż wszystkie one leżą na $\mathfrak{F}_1$, a $\mathfrak{F}_1$ jest mnogością domkniętą. A więc F musiałoby leżeć na $\mathfrak{F}_1$ wbrew założeniu. Punkty przeto, nie należące do żadnego kontinuum $\mathfrak{F}(\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C}))$, mogą istnieć tylko wtedy, gdy tych ostatnich jest nieskończenie wiele.

Z twierdzenia tego wynika odrazu twierdzenie Mazurkiewicza, brzmiące tak:

Twierdzenie XII. Mnogość punktów ograniczenia kontinuum, wspólnych z mnogością punktów wewnętrznych dowolnego koła, nie może być *punktowa* [1].

Każdy bowiem punkt F ograniczenia kontinuum $\mathfrak{F}(\mathfrak{C})$, jeśli sam nie leży na kontinuum, należącem do $\mathfrak{F}(\mathfrak{C})$, jest punktem skupienia punktów leżących na kontinuach, zawartych w $\mathfrak{F}(\mathfrak{C})$. Jakiekolwiek więc koło będzie zawierało F, jako punkt wewnętrzny, to będzie również zawierało jako punkt wewnętrzny punkt leżący na kontinuum, zawartem w $\mathfrak{F}(\mathfrak{C})$. Stąd wynika (p. Thèse, Ch. I, th. IV, str. 22), że koło to będzie zawierało kontinuum, zawarte w $\mathfrak{F}(\mathfrak{C})$ i złożone z punktów wewnętrznych koła; a więc mnogość punktów wspólnych $\mathfrak{F}(\mathfrak{C})$ z mnogością punktów wewnętrznych koła nie jest punktowa.

Uwaga. O własnościach ograniczenia kontinuum łatwo sobie wyrobić fałszywe wyobrażenie, wyczytując w podanem wyżej twierdzeniu XI to, czego ono wcale nie głosi. Dlatego robimy tu trzy uwagi:

[1]) Punktową nazywamy mnogość, nie zawierającą żadnego kontinuum.

1) Punkty ograniczenia $\mathfrak{F}(\mathfrak{C})$, nie zawarte w żadnem z kontinuów $\mathfrak{F}(\mathfrak{W}^z(\mathfrak{C}))$, mogą lecz nie muszą nie leżeć na żadnem kontinuum, zawartem w $\mathfrak{F}(\mathfrak{C})$. Innemi słowy, mnogość

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{C}) - \mathfrak{M}(\{\mathfrak{F}(\mathfrak{W}^z(\mathfrak{C}))\})$$

może zawierać kontinua i to w ilości nieprzeliczalnej.

2) Dla dwóch różnych semikontinuów $\mathfrak{W}^{z_1}(\mathfrak{C})$ i $\mathfrak{W}^{z_2}(\mathfrak{C})$, gdzie więc

$$\mathfrak{W}^{z_1}(\mathfrak{C}) \times \mathfrak{W}^{z_2}(\mathfrak{C}) = 0,$$

ograniczenia ich mogą posiadać punkty wspólne, może nawet jedna być całkowicie zawarta w drugiej, lub mogą być identyczne. Liczba więc różnych części, na które dane kontinuum rozcina płaszczyznę, jest równa liczbie *lub większa* od liczby różnych ich ograniczeń. W szczególności: ograniczenie kontinuum, nie rozcinającego płaszczyzny, jest samo kontinuum.

3) Gdy istnieje nieskończenie wiele różnych ograniczeń $\mathfrak{F}(\mathfrak{W}^z(\mathfrak{C}))$, to mogą, lecz nie muszą, istnieć na $\mathfrak{F}(\mathfrak{C})$ punkty, nie należące do żadnej z nich, t. j. i w przypadku, gdy mnogości $\mathfrak{F}(\mathfrak{W}^z(\mathfrak{C}))$ jest nieskończenie wiele (gdy jest ich liczba skończona, to to zachodzi zawsze) może być:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{C}) - \mathfrak{M}(\{\mathfrak{F}(\mathfrak{W}^z(\mathfrak{C}))\}) = 0.$$

W takim przypadku mnogości $\mathfrak{F}(\mathfrak{W}^z(\mathfrak{C}))$ skupiają się do swych własnych punktów.

ROZDZIAŁ IV.

O rozcinaniu płaszczyzny.

§ 1. *Twierdzenie A.* Suma dwóch kontinuów, z których żadne nie rozcina płaszczyzny i których mnogość punktów wspólnych jest *spójna* lub *próżna*, *nie rozcina* płaszczyzny.

Niech będzie A i B dowolna para punktów uzupełnienia sumy danych kontinuów, $\mathfrak{C}_1$ i $\mathfrak{C}_2$,

(a) $$A + B \subset \mathfrak{Z} - (\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2);$$

mamy udowodnić, że istnieje kontinuum AB bez punktów wspólnych z $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$. W tym celu poprowadźmy dwie linie łamane $(AB)_1$ i $(AB)_2$:

(b) $$(AB)_1 \times \mathfrak{C}_1 = 0,$$

(c) $$(AB)_2 \times \mathfrak{C}_2 = 0,$$

co można zrobić ze względu, że ani $\mathfrak{C}_1$, ani $\mathfrak{C}_2$ nie rozcina płaszczyzny (por. tw. VII). Można oczywiście zawsze tak wybrać $(AB)_1$ i $(AB)_2$, by nie miały innych punktów wspólnych prócz A i B,

(d) $$(AB)_1 \times (AB)_2 = A + B.$$

Z (b) i (c), mnożąc te wzory obustronnie pierwszy przez $\mathfrak{C}_2$, drugi przez $\mathfrak{C}_1$ i dodając, otrzymujemy:

(e) $$(\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) \times [(AB)_1 + (AB)_2] = 0.$$

Mnogość $(AB)_1 + (AB)_2$ jest to, wobec własności (d) składających ją linij łamanych, wielokąt. Nie posiada on, według (e), punktów wspólnych z mnogością $\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$. Ponieważ zaś ta jest spójna — a tembardziej, gdy jest próżna — jedna z mogości: $\overline{\mathfrak{W}}((AB)_1 + (AB)_2)$ i $\overline{\mathfrak{W}}^\infty((AB)_1 + (AB)_2)$, nie zawiera punktów $\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$. Niech będzie

$$\mathfrak{S} = \overline{\mathfrak{W}}^p((AB)_1 + (AB)_2),$$

tą mnogością; t. j.

(f) $$\mathfrak{S} \times (\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) = 0.$$

Weźmy liczbę a, spełniającą nierówności

(g) $$a < \tfrac{1}{5}\rho(\mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{S}, (AB)_2),$$

(h) $$a < \tfrac{1}{5}\rho(\mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{S}, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{S}),$$

i utwórzmy siatkę sześciokątów Σ_a. Mnogość punktów wspólnych mnogości $\mathfrak{S}$ i mnogości

(i) $$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}(\mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{S}, a)$$

składa się ze skończonej liczby wnętrz wielokątów (złożonych z części linij $(AB)_1$ i $\mathfrak{F}(\mathfrak{Q})$) i, ewentualnie, linij łamanych. Te ostatnie, jeśli wogóle istnieją, muszą należeć do $(AB)_1 \times \mathfrak{F}(\mathfrak{Q})$, czyli są częściami linii $(AB)_1$, na których nie leży żaden punkt $\mathfrak{C}_2$; możemy je więc traktować na równi z temi częściami linii $(AB)_1$, które nie są zawarte w $\mathfrak{Q}$. Rozpatrujemy więc

(j) $$\overline{\mathfrak{W}}(\Phi_1) + \overline{\mathfrak{W}}(\Phi_2) + \ldots + \overline{\mathfrak{W}}(\Phi_n) = \overline{(\mathfrak{Q} \times \mathfrak{S}) - \mathfrak{F}(\mathfrak{Q})},$$

gdzie oczywiście

(k) $$\Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_n \subset (AB)_1 + [\mathfrak{F}(\mathfrak{Q}) \times \mathfrak{S}].$$

Oznaczmy przez R_1 pierwszy, licząc od A, punkt na $(AB)_1$, należący do jednego z wieloboków Φ_i [1]; oznaczmy wskaźnik tego wielokąta przez k_1; mamy więc

[1] R_1 może nie istnieć; wtedy $(AB)_1$ jest już szukanem $\mathfrak{E}(A + B, \mathfrak{Z} - (\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2))$.

(l) $$(AR_1)_1 \subset (AB)_1$$

(m) $$(AR_1)_1 \times \Phi_i = 0 \qquad i \neq k_1$$

(n) $$(AR_1)_1 \times \Phi_{k_1} = R_1.$$

Oznaczmy następnie przez S_1 ostatni na $(AB)_1$ punkt, należący do Φ_{k_1}:

(o) $$(S_1 B)_1 \subset (AB)_1$$

(p) $$(S_1 B)_1 \times \Phi_{k_1} = S_1.$$

Jest widoczne: 1) że jedna z dwu linij $R_1 S_1$ na wielokącie Φ_{k_1} nie posiada, prócz R_1 i S_1, żadnych punktów wspólnych z $(AB)_1$; oznaczając ją przez $(R_1 S_1)_0$ mamy,

(q) $$(R_1 S_1)_0 \subset \Phi_{k_1} \times (\mathfrak{F}(\mathfrak{Q}) \times \mathfrak{G});$$

2) że

(r) $$((AR_1)_1 + (S_1 B)_1) \times \mathfrak{W}(\Phi_{k_1}) = R_1 + S_1,$$

oraz (z wzorów (g), (l), (m), (n), (j)), że

(s) $$(AR_1)_1 \times (\mathfrak{Q} - \mathfrak{F}(\mathfrak{Q})) = 0.$$

W linii $(AB)_1$ zastępujemy jej część, zawartą między punktami R_1 i S_1, przez $(R_1 S_1)_0$; otrzymujemy linię

$$(AR_1)_1 + (R_1 S_1)_0 + (S_1 B)_1.$$

Z $(S_1 B)_1$ postępujemy w ten sam sposób, jakeśmy postąpili z $(AB)_1$; znajdujemy więc dwa punkty, R_2 i S_2, takie, że

(l′) $$(S_1 R_2)_1 \subset (S_1 B)_1,$$

(m′) $$(S_1 R_2)_1 \times \Phi_i = 0 \qquad i \neq k_1, k_2,$$

(n′) $$(S_1 R_2)_1 \times \Phi_{k_2} = R_2;$$

(o′) $$(S_2 B)_1 \subset (S_1 B)_1,$$

(p′) $$(S_2 B)_1 \times \Phi_{k_2} = S_2.$$

Przez linię łamaną $(R_2 S_2)_0$ taką, że

(q′) $$(R_2 S_2)_0 \supset \Phi_{k_2} \times (\mathfrak{F}(\mathfrak{Q}) \times \mathfrak{G}),$$

zastępujemy część $(S_1 B)_1$, zawartą między punktami R_2 i S_2; otrzymujemy więc linię łamaną

$$(AR_1)_1 \times (R_1 S_1)_0 + (S_1 R_2)_1 + (R_2 S_2)_0 + (S_2 B)_1.$$

Z wzorów (m′) i (n′) jest widoczne, że

(s′) $$(S_1 R_2)_1 \times (\mathfrak{Q} - \mathfrak{F}(\mathfrak{Q})) = 0.$$

Postępując w ten sposób dalej, musimy dojść, ze względu na to, że liczba wielokątów Φ_i jest skończona, do takiego punktu S_m $(m \leqslant n)$, że $(S_m B)_1$ nie zawiera, prócz S_m, żadnego punktu należącego do $\Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_n$:

(l$^{(m)}$) $$(S_m B)_1 \subset (S_{m-1} B)_1 \subset (AB)_1,$$

(m$^{(m)}$) $$(S_m B)_1 \times \Phi_i = 0 \qquad i \neq k_m$$

(n$^{(n)}$) $$(S_m B)_1 \times \Phi_{k_m} = S_m.$$

skąd

(s$^{(m)}$) $$(S_m B)_1 \times (\mathfrak{Q} - \mathfrak{F}(\mathfrak{Q})) = 0.$$

Udowodnimy, że otrzymana linia łamana

$$(AB)_3 = (AR_1)_1 + (R_1 S_1)_0 + (S_1 R_2)_1 + (R_2 S_2)_0 + \ldots\ldots + (S_m B)_1$$

jest szukana. Rzeczywiście, mamy, według wzorów (q), (q′)

(t) $$(R_1 S_1)_0 + (R_2 S_2)_0 + \ldots + (R_m S_m)_0 \subset \mathfrak{F}(\mathfrak{Q}) \times \mathfrak{S},$$

więc, zważywszy, że (p. wzory (h), (i) i (14))

$$[\mathfrak{F}(\mathfrak{Q}) \times \mathfrak{S}] \times (\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2) = \mathfrak{F}(\mathfrak{Q}) \times [(\mathfrak{S} \times \mathfrak{C}_1) + (\mathfrak{S} \times \mathfrak{C}_2)] = 0,$$

otrzymujemy

(u) $$[(R_1 S_1)_0 + (R_2 S_2)_0 + \ldots (R_m S_m)_0] \times (\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2) = 0.$$

Z drugiej strony, według (l), (l′), ... (l$^{(m)}$),

(v) $$(AR_1)_1 + (S_1 R_2)_1 + \ldots + (S_m B)_1 \subset (AB)_1.$$

Stąd wynika najpierw (p. wzór (b))

(w) $$[(AR_1)_1 + (S_1 R_2)_1 + \ldots + (S_m B)_1] \times \mathfrak{C}_1 = 0;$$

ze względu zaś, iż $(AB)_1 \subset \mathfrak{S}$,

mamy

(x) $$[(AR_1)_1 + (S_1 R_2)_1 + \ldots + (S_m B)_1] \times (\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{S}) = 0.$$

Pozostaje udowodnić tylko, że lewa strona wzoru (v) nie posiada również punktów wspólnych z $\mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{S}$. W tym celu zauważmy, że według wzorów (s), (s′), ... (s$^{(m)}$)

$$[(AR_1)_1 + (S_1 R_2)_1 + \ldots + (S_m B)_1] \times [\mathfrak{Q} - \mathfrak{F}(\mathfrak{Q})] = 0,$$

czyli, ponieważ oczywiście

$$\mathfrak{Q} - \mathfrak{F}(\mathfrak{Q}) \supset \mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{S},$$

otrzymujemy

(y) $$[(AR_1)_1 + (S_1 R_2)_1 + \ldots + (S_m B)_1] \times (\mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{S}) = 0.$$

Dodając wzory (w), (x) i (y), znajdujemy

(z) $$[(AR_1)_1 + (S_1 R_2)_1 + \ldots + (S_m B)_1] \times (\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2) = 0;$$

dodając zaś (z) do (u), otrzymujemy ostatecznie

$$(AB)_3 \times (\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2) = 0, \qquad \text{c. n. u.}$$

§ 2. *Lemmat 1.* Gdy mnogość punktów wspólnych dwóch kontinuów, wypełniających skończoną liczbę wnętrz (w szerszem znaczeniu) sześciokątów siatki, jest niespójna, to suma tych kontinuów rozcina płaszczyznę.

Oznaczmy dane kontinua przez $\mathfrak{C}_1$ i $\mathfrak{C}_2$, a przez $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ ich część wspólną; mamy więc

$$\mathfrak{C}_1 = \overline{\mathfrak{W}}(\Gamma_1) + \overline{\mathfrak{W}}(\Gamma_2) + \ldots + \overline{\mathfrak{W}}(\Gamma_p)$$

$$\text{i} \qquad \mathfrak{C}_2 = \overline{\mathfrak{W}}(\Delta_1) + \overline{\mathfrak{W}}(\Delta_2) + \ldots + \overline{\mathfrak{W}}(\Delta_q),$$

gdzie Γ i Δ oznaczają sześciokąty; oraz

(a) $$\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2,$$

(b) $$\overline{\mathcal{E}}_1 \times \overline{\mathcal{E}}_2 = 0.$$

(Mnogości $\mathcal{E}_1$ i $\mathcal{E}_2$ składają się z wnętrz sześciokątów i oddzielnych boków).

Weźmy $$E_1 \subset \mathcal{E}_1$$

$$\text{i} \qquad E_2 \subset \mathcal{E}_2,$$

oraz na $\mathfrak{C}_1$ linię łamaną $E_1 E_2$:

(c) $$E_1 E_2 \subset \mathfrak{C}_1.$$

Pierwszy od E_1 na $E_1 E_2$ punkt, należący do $\mathcal{E}_2$, nazwijmy F_2 (może on być identyczny z E_2)

(d) $$E_1 F_2 - F_2 \subset E_1 E_2 - \mathcal{E}_2 \quad \text{i} \quad F_2 \subset \mathcal{E}_2,$$

przez F_1 zaś oznaczymy ostatni (licząc od E_1) punkt $\mathcal{E}_1$, leżący na $E_1 F_2$,

(e) $$F_1 F_2 - F_1 \subset E_1 F_2 - \mathcal{E}_1 \quad \text{i} \quad F_1 \subset \mathcal{E}_1.$$

Mamy więc linię łamaną $F_1 F_2$ o własnościach (p. wzory (c), (d), (e)):

(f) $$F_1 F_2 \subset \mathfrak{C}_1,$$

(g) $$F_1 F_2 \times \mathcal{E}_i = F_i \qquad (i = 1,2).$$

Weźmy teraz punkt

(h) $$C_1 \subset F_1 F_2 - F_1 - F_2 \subset \mathfrak{C}_1 - \mathfrak{C}_2$$

(p. wzory (f), (g), (a)), oraz ten wielokąt na $\mathfrak{F}(\mathfrak{C}_2)$, który odcina C_1 od punktów wewnętrznych $\mathfrak{C}_2$, t. j.

(i) $$\mathfrak{F}^{C_1}(\mathfrak{C}_2) = \Phi.$$

Oczywiście

(j) $$\mathfrak{W}^{C_1}(\mathfrak{C}_2) \supset F_1F_2 - F_1 - F_2,$$

(bo, według (h),

$$F_1F_2 - F_1 - F_2 \equiv (\mathfrak{S}^s(C_1, \mathfrak{C}_1 - \mathfrak{C}_2))_0 \equiv (\mathfrak{S}^s(C_1, \mathfrak{Z} - \mathfrak{C}_2))_0;$$

według określenia zaś

$$\mathfrak{W}^{C_1}(\mathfrak{C}_2) \equiv \mathfrak{S}^s_s(C_1, \mathfrak{Z} - \mathfrak{C}_2),$$

czyli, jako nasycone, zawiera wszystkie inne $\mathfrak{S}^s(C_1, \mathfrak{Z} - \mathfrak{C}_2)$, więc i $F_1F_2 - F_1 - F_2$); zatem według (i) i (j)

(k) $$\Phi \supset F_1 + F_2;$$

ze wzoru zaś (k), porównywając go z (j), otrzymujemy:

(l) $$\Phi \times F_1F_2 \equiv F_1 + F_2.$$

Linia $\Phi + F_1F_2$ oczywiście (p. wzory (j) i (l)) rozcina $\mathfrak{W}^{C_1}(\mathfrak{C})$. Ażeby udowodnić, że $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$, zawierające $\Phi + F_1F_2$, rozcina płaszczyznę, wystarczy wykazać, że $\mathfrak{W}^{C_1}(\mathfrak{C}_2)$ zawiera w obu częściach, na które zostaje rozcięte (t. j. ograniczonych wielokątami $F_1F_2 + (F_2F_1)_1$ i $F_1F_2 + (F_2F_1)_2$), punkty uzupełnienia mnogości $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$. Otóż mamy (p. wzory (i), (m))

$$(F_1F_2)_i \subset \mathfrak{C}_2 \qquad (i = 1,2)$$

skąd wynika, według wzorów (a), (b) i (g),

$$(F_1F_2)_i - \mathfrak{C}_1 \equiv (F_1F_2)_i - (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) \not\equiv 0$$

(inaczej bowiem k o n t i n u u m $(F_1F_2)_i$ byłoby zawarte w $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ i łączyłoby punkt F_1, należący do $\mathcal{E}_1$, z punktem F_2, należącym do $\mathcal{E}_2$ (p. wzór (g)), co jest w sprzeczności z założeniem (b)).

Niech będzie

(n) $$P_i \subset (F_1F_2)_i - \mathfrak{C}_1.$$

Ze wzorów (i) i (m) wynika

$$P_i \subset \Sigma_a,$$

gdzie Σ_a oznacza daną siatkę sześciokątów. Punkt P_i musi więc leżeć na boku jakiegoś sześciokąta [1]. Oznaczmy ten bok przez R_iS_i

$$R_iS_i \supset P_i,$$

[1] W przypadku, gdyby P_i było punktem rozgałęzienia siatki, a więc należało do trzech boków sześciokątów, to bierzemy jeden z pomiędzy tych dwóch, które należą do Φ

oraz przez Δ_{k_i} i Λ_i te dwa sześciokąty siatki, dla których $R_i S_i$ jest bokiem, t. j.

$$\Delta_{k_i} \times \Lambda_i \equiv R_i S_i .$$

Jeden z tych sześciokątów musi należeć do zbioru: $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_q$, t. j.

$$\overline{\mathfrak{W}}\,(\Delta_{k_i}) \subset \mathfrak{C}_2,$$

bo $$R_i\, S_i \subset \Phi \equiv \mathfrak{F}^{C_1}(\mathfrak{C}_2);$$

drugi zaś z tegoż powodu nie może być zawarty w $\mathfrak{C}_2$:

(o) $$\mathfrak{W}\,(\Lambda_i) \times \mathfrak{C}_2 \equiv 0,$$

a mianowicie

(p) $$\mathfrak{W}\,(\Lambda_i) \subset \mathfrak{W}^{C_1}(\mathfrak{C}_2).$$

Z drugiej strony, z (n) wynika

$$P_i \times \mathfrak{C}_1 \equiv 0,$$

a więc tak samo

$$(R_i\, S_i - R_i - S_i) \times \mathfrak{C}_1 \equiv 0$$

i $$(\mathfrak{W}\,(\Delta_{k_i}) + \mathfrak{W}\,(\Lambda_i)) \times \mathfrak{C}_1 \equiv 0;$$

porównywając ten wzór z (o), otrzymujemy:

(q) $$\mathfrak{W}\,(\Lambda_i) \times (\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2) \equiv 0 \qquad (i = 1,2).$$

Wzory (p) i (q) wykazują, że mnogości $\mathfrak{W}\,(\Lambda_1)$ i $\mathfrak{W}\,(\Lambda_2)$ są szukanemi częściami $\mathfrak{W}^{C_1}(\mathfrak{C})$, zawartemi w uzupełnieniu $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$. Między każdym punktem jednej z nich a każdym punktem drugiej, mnogość $\Phi + F_1 F_2$, a więc tembardziej $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$, rozcina płaszczyznę; c. n. u.

Lemmat 2. Jeżeli każda mnogość $\mathfrak{A}_n$ danego ciągu nieskończonego

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n \ldots$$

rozcina płaszczyznę między dwoma danemi punktami M i N, to i ich mnogość skupienia[1] $\mathfrak{A}_0$, jeżeli nie zawiera ani M, ani N, rozcina płaszczyznę między niemi.

Mamy więc następujące założenia:

$$M + N \subset \mathfrak{Z} - \mathfrak{A}_n \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

i dla dowolnego kontinuum $\mathfrak{K}$, gdzie

---

[1]) Mnogością skupienia danego ciągu mnogości nazywamy mnogość wszystkich punktów skupienia takich ciągów punktów, w których żadne dwa punkty nie należą do jednej i tej samej mnogości; por. Thèse, Ch. I, § IV.

$$\mathfrak{K} \supset M + N,$$

mamy

(a) $$\mathfrak{K} \times \mathfrak{A} \supset A_n \qquad (n = 1, 2 \ldots);$$

należy udowodnić, że ten ostatni wzór zachodzi i dla $n = 0$.

Niech będzie A_0 punktem skupienia ciągu punktów $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$

$$\lim_{n=\infty} \rho (A_0, A_n) = 0.$$

Ponieważ $$A_n \subset \mathfrak{A}_n,$$

więc, według określenia mnogości skupienia,

(b) $$A_0 \subset \mathfrak{A}_0.$$

Z drugiej zaś strony z (a) wynika

$$A_n \subset \mathfrak{K},$$

a że $\mathfrak{K}$ jest, jako k o n t i n u u m, domknięte, więc i punkt skupienia punktów A_n należy do $\mathfrak{K}$, czyli

(c) $$A_0 \subset \mathfrak{K}.$$

Mnożąc stronami wzory (b) i (c), otrzymujemy

$$A_0 \subset \mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{K}, \qquad \text{c. n. u}$$

§ 3. *Twierdzenie B.* S u m a d w ó c h k o n t i n u ó w, k t ó r y c h m n o g o ś ć p u n k t ó w w s p ó l n y c h j e s t *niespójna*, *rozcina* p ł a s z c z y z n ę.

Oznaczmy te dwa kontinua, na które się rozkłada dane kontinuum, przez $\mathfrak{C}_1$ i $\mathfrak{C}_2$; mamy

(a) $$\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2,$$

(b) $$\overline{\mathfrak{E}_1} \times \overline{\mathfrak{E}_2} = 0.$$

Mamy wykazać istnienie takich dwóch punktów M i N, między któremi $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$ rozcina płaszczyznę. Dowód ten przeprowadzamy, opierając się na prawdziwości analogicznego twierdzenia dla mnogości, będących sumą wnętrz sześciokątów siatki (lemmat 1); jest to ogólna metoda dla twierdzeń tego działu. Jednak tu zastosowanie tej metody jest o tyle bardziej złożone, że, pomijając potrzebę podwójnej aproksymacyi, by otrzymać mnogości, czyniące w pożądany sposób zadość warunkom lemmatu, nie wystarcza jednorazowe powołanie się na ten lemmat, lecz trzeba to uczynić dla nieskończonego ciągu przybliżeń i przejść do granicy (posiłkując się lemmatem 2).

Weźmy (p. wzór (b))

$$a < \tfrac{1}{8}\rho(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2),$$

wtedy, według (15),

(c) $$\mathfrak{P}(\mathcal{E}_1, a) \times \mathfrak{P}(\mathcal{E}_2, a) = 0.$$

Mnogość $\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_1, a) \times \mathfrak{P}(\mathfrak{C}_2, a)$ zawiera mnogość (p. wzory (a), (9)).

(d) $$\mathfrak{P}(\mathcal{E}_1, a) + \mathfrak{P}(\mathcal{E}_2, a) = \mathfrak{P}(\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2, a),$$

lecz nie musi być z nią identyczna (p. Rozdz. II, (10)). Mogłaby więc być spójna. Musimy przeto znaleść lepszą aproksymacyę, by módz zastosować lemmat 1. Niech będzie

(e) $$\mathfrak{C}_1^* = \mathfrak{C}_1 - \overline{\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2, a)}$$

(e′) i $$\mathfrak{C}_2^* = \mathfrak{C}_2 - \overline{\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2, a)}.$$

Mnogości $\mathfrak{C}_1^*$ i $\mathfrak{C}_2^*$ nie posiadają punktów wspólnych; rzeczywiście

(f) $$\mathfrak{C}_1^* \times \mathfrak{C}_2^* \subset \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$$

oraz $$\mathfrak{C}_i^* \times [\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2, a) - \mathfrak{F}(\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2, a))] = 0, \qquad (i = 1,2)$$

więc tembardziej (p. Rozdz. II, tw. V)

$$\mathfrak{C}_i^* \times (\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) = 0 \qquad (i = 1,2)$$

(g) i $$(\mathfrak{C}_1^* \times \mathfrak{C}_2^*) \times (\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) = 0;$$

porównywając (f) z (g) (mnożąc obie strony (f) przez $\mathfrak{C}_1^* \times \mathfrak{C}_2^*$), otrzymujemy

(h) $$\mathfrak{C}_1^* \times \mathfrak{C}_2^* = 0.$$

Weźmy liczbę b, czyniącą zadość trzem nierównościom (co jest możliwe według (h) i (c)):

(i) $$b < \frac{a}{4},$$

(j) $$b < \tfrac{1}{8}\rho(\mathfrak{C}_1^*, \mathfrak{C}_2^*)$$

(k) i $$b < \tfrac{1}{8}\rho(\mathfrak{P}(\mathcal{E}_1, a), \mathfrak{P}(\mathcal{E}_2, a))$$

i utwórzmy nową siatkę sześciokątów Σ_b. Mnogości $\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_1, b)$ i $\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_2', b)$ posiadają potrzebne nam własności, a mianowicie

(l) $$\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_1, b) \times \mathfrak{P}(\mathfrak{C}_2, b) = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2,$$

(m) gdzie: $$\overline{\mathcal{H}_1} \times \overline{\mathcal{H}_2} = 0,$$

(n) $$\mathcal{H}_1 \supset \mathcal{E}_1 \neq 0, \quad \mathcal{H}_2 \supset \mathcal{E}_2 \neq 0.$$

Mamy bowiem [(e) i (e′), (d), (9)]

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_i, b) = \mathfrak{P}(\mathfrak{C}_i^*, b) + \mathfrak{P}(\mathfrak{C}_i \times \mathfrak{P}(\mathfrak{E}_1, a), b)$$
$$+ \mathfrak{P}(\mathfrak{C}_i \times \mathfrak{P}(\mathfrak{E}_2, a), b) \qquad (i = 1,2)$$

a więc, zważywszy, że (według (10))

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_i \times \mathfrak{P}(\mathfrak{E}_k, a), b) \subset \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{E}_k, a), b), \qquad (i, k = 1,2)$$

mamy

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_i, b) \subset \mathfrak{P}(\mathfrak{C}_i^*, b) + \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{E}_1, a), b) + \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{E}_2, a), b) \quad (i = 1,2).$$

Pomnóżmy stronami te wzory dla $i = 1$ i $i = 2$, pamiętając, że według (15) i (j)

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_1^*, b) \times \mathfrak{P}(\mathfrak{C}_2^*, b) = 0,$$

oraz, według (15) i (k)

$$\text{(k')} \quad \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{E}_1, a), b) \times \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{E}_2, a), b) = 0;$$

otrzymamy:

$$\text{(o)} \quad \mathfrak{P}(\mathfrak{C}_1, b) \times \mathfrak{P}(\mathfrak{C}_2, b) \subset [\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_1^*, b) \times \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{E}_1, a), b)]$$
$$+ [\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_1^*, b) \times \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{E}_2, a), b)] + [\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_2^*, b) \times \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{E}_1, a), b)]$$
$$+ [\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_2^*, b) \times \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{E}_2, a), b)] + \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{E}_1, a), b) + \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{E}_2, a), b)$$
$$\subset \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{E}_1, a), b) + \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{E}_2, a), b).$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$\text{(p)} \quad [\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_1, b) \times \mathfrak{P}(\mathfrak{C}_2, b)] \times \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{E}_i, a), b) = \mathfrak{H}_i \qquad (i = 1,2)$$

Z wzoru (o) wnioskujemy prawdziwość wzoru (l), zaś z wzorów (k') i (p) prawdziwość wzoru (m); wreszcie, ponieważ

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{E}_i, a), b) \supset \mathfrak{P}(\mathfrak{E}_i, a) \supset \mathfrak{E}_i \qquad (i = 1,2),$$

a

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_1, b) \times \mathfrak{P}(\mathfrak{C}_2, b) \supset \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2,$$

więc z wzoru (p) wynika wzór (n).

Z wzorów (l), (m) i (n) wynika według lemmatu 1, że mnogość

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{P}(\mathfrak{C}_1, b) + \mathfrak{P}(\mathfrak{C}_2, b)$$

dla każdego b, spełniającego nierówności (i), (j) i (k), rozcina płaszczyznę. Ponieważ jest to mnogość, wypełniająca skończoną liczbę wnętrz sześciokątów siatki Σ_b, i, przeto, nie może rozcinać płaszczyzny ani między dwoma punktami wnętrza jednego sześciokąta, ani między dwoma punktami leżącemi oba dowolnie daleko; więc liczba części, na które mnogość $\mathfrak{S}$ rozcina płaszczyznę, jest skończona; niech będzie ich p.

$$\mathfrak{S} + \mathfrak{W}^{M_1}(\mathfrak{S}) + \mathfrak{W}^{M_2}(\mathfrak{S}) + \ldots + \mathfrak{W}^{M_p}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{Z}.$$

Weźmy teraz ciąg liczb b_n, określony tak:

$$b_1 = \frac{b}{4}, \ldots, b_n = \frac{b_{n-1}}{4} = \frac{b}{4^n}, \ldots$$

Każda z tych liczb b_n, będąc mniejsza od b, musi spełniać nierówności (i), (j), (k); więc wszystko, cośmy powiedzieli o $\mathfrak{S}$, stosuje się i do

$$\mathfrak{S}_n \equiv \mathfrak{P}(\mathfrak{C}_1, b_n) + \mathfrak{P}(\mathfrak{C}_2, b_n) \qquad (n = 1,2,\ldots),$$

przyczem, według wzoru (17),

$$\mathfrak{S} \supset \mathfrak{S}_n \supset \mathfrak{S}_{n+i} \qquad \text{dla } i > 0.$$

Mnogości $\mathfrak{S}_n$ mogą rozcinać płaszczyznę między takiemi punktami, między któremi $\mathfrak{S}$ nie rozcina płaszczyzny, lecz oczywiście o tyle tylko, o ile te należą do $\mathfrak{S}$. Jeżeli więc ograniczymy się do punktów, zawartych w $\mathfrak{Z} - \mathfrak{S}$, to między temi punktami żadne $\mathfrak{S}_n$ nie może wprowadzić nowych rozcięć. Natomiast może się liczba rozcięć zmniejszyć. Udowodnimy, że $\mathfrak{Z} - \mathfrak{S}$ nie przestanie być rozciętą, t. j. że liczba rozcięć może się co najwyżej zmniejszyć do 2, dla n nieskończenie wzrastającego.

Rozpatrzmy

$$\mathfrak{W}_n \equiv \mathfrak{W}^{M_1}(\mathfrak{S}_n) + \mathfrak{W}^{M_2}(\mathfrak{S}_n) + \ldots + \mathfrak{W}^{M_p}(\mathfrak{S}_n);$$

mamy $\mathfrak{Z} - \mathfrak{S} \subset \mathfrak{W}_n \subset \mathfrak{Z} - \mathfrak{S}_n$

czyli $\mathfrak{S} \supset \mathfrak{Z} - \mathfrak{W}_n \supset \mathfrak{S}_n$,

gdzie $\mathfrak{Z} - \mathfrak{W}_n$ jest mnogością, wypełniającą skończoną liczbę wnętrz (w szerszym znaczeniu) sześciokątów siatki Σ_{b_n}. Te $\mathfrak{W}^{M_i}(\mathfrak{S}_n)$ nie muszą być wszystkie między sobą różne; niech będzie

$$\mathfrak{W}_n \equiv \mathfrak{W}^{M_1}(\mathfrak{S}_n) + \mathfrak{W}^{M_{k_2}}(\mathfrak{S}_n) + \ldots + \mathfrak{W}^{M_{k_q}}(\mathfrak{S}_n),$$

gdzie $q \leqslant p$. Mamy udowodnić, że $q \geqslant 2$.

Gdyby dla pewnego n było $q = 1$, t. j.

$$\mathfrak{W}^{M_1}(\mathfrak{S}_n) \equiv \mathfrak{W}_n,$$

to mnogość domknięta $\mathfrak{Z} - \mathfrak{W}_n$ nie rozcinałaby płaszczyzny, bo jej uzupełnienie, $\mathfrak{W}_n$, jest semikontinuum (według określenia symbolu $\mathfrak{W}$). To jest jednak niemożliwe, bo mnogość $\mathfrak{Z} - \mathfrak{W}_n$ spełnia warunki lemmatu 1.

Rzeczywiście, mnogość tę, złożoną z wnętrz sześciokątów o boku b_n, można przedstawić jako sumę dwóch takichże mnogości, a mianowicie zaliczając do jednej wszystkie wnętrza sześciokątów (z pomiędzy zawartych w $\mathfrak{Z} - \mathfrak{W}_n$), posiadające punkty wspólne z $\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_1, b)$, a do drugiej—posiadające punkty wspólne z $\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_2, b)$. Oznaczmy te dwie mnogości przez $\mathfrak{V}_1$ i $\mathfrak{V}_2$; mamy:

$$\mathfrak{Z} - \mathfrak{W}_n \equiv \mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2,$$

(q) $$\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2 \supset \mathfrak{P}(\mathfrak{C}_1, b_n) \times \mathfrak{P}(\mathfrak{C}_2, b_n),$$

gdyż $\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_i, b_n)$ jest zawarte w $\mathfrak{S} - \mathfrak{W}_n$ i w $\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_i, b)$, a $\mathfrak{V}_i$, składające się z takich samych sześciokątów, co i $\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_i, b_n)$, zawiera właśnie wszystkie te, które są zawarte w $\mathfrak{S} - \mathfrak{W}_n$ i w $\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_i, b)$. Wreszcie, według określenia,

$$\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2 \subset \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_1, b) \times \mathfrak{P}(\mathfrak{C}_2, b), b_n),$$

więc, z wzoru (o) wynika

(r) $\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2 \subset \mathfrak{P}\{\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{E}_1, a), b), b_n\} + \mathfrak{P}\{\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{E}_2, a), b), b_n\} = \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2$,

(przez $\mathfrak{G}_1$ i $\mathfrak{G}_2$ oznaczamy odpowiednio składniki sumy po prawej stronie). Jeżeli dla jakiegoś n liczba q stała się równa 1, t. j. $\mathfrak{S} - \mathfrak{W}_n$ nie rozcina płaszczyzny, to nie będzie również rozcinała płaszczyzny i $\mathfrak{S} - \mathfrak{W}_{n+i}$ $(i > 0)$, gdyż liczba q może się, jakeśmy wyżej zauważyli—przy wzrastającem n—tylko zmniejszać, lecz nie zwiększać. Możemy więc wziąć w naszym wzorze n dowolnie wielkie; wybieramy je tak, aby

$$\frac{b}{4^n} = b_n < \tfrac{1}{8}\rho\,\{\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{E}_1, a), b),\ \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{E}_2, a), b)\},$$

co zrobić można, według (k′). Więc (p. wzór (15))

(s) $$\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 = 0.$$

Zauważymy teraz, że

(t) $$\mathfrak{G}_i \supset \mathfrak{E}_i \qquad (i = 1,2)$$

i że, według dwóch ostatnich wzorów,

(u) $$\mathfrak{G}_i \times \mathfrak{E}_k = 0 \quad \text{gdy } i \neq k \ (i, k = 1,2).$$

Według (q) i (a) mamy

$$\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2 \supset \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2.$$

Mnożąc ten wzór obustronnie raz przez $\mathfrak{G}_1$, drugi raz przez $\mathfrak{G}_2$, i stosując wzory (t) i (u), otrzymujemy:

(v) $$\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2 \times \mathfrak{G}_1 \supset \mathfrak{E}_1 \neq 0,$$

(w) $$\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2 \times \mathfrak{G}_2 \supset \mathfrak{E}_2 \neq 0.$$

Mnogości po lewych stronach tych nierówności są oczywiście domknięte, jako iloczyny mnogości domkniętych. Mnożąc teraz obustronnie (r) przez $\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2$, otrzymujemy

(x) $$\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2 = (\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2 \times \mathfrak{G}_1) + (\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2 \times \mathfrak{G}_2).$$

Wreszcie ze względu na (s)

(y) $$(\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2 \times \mathfrak{G}_1) \times (\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2 \times \mathfrak{G}_2) = 0.$$

Wzory (v), (w), (x) i (y) wskazują, że $\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2$ jest mnogością niespójną. A więc $\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2$, t. j. $\mathfrak{S} - \mathfrak{W}_n$, rozcina płaszczyznę i nasze założenie jest niemożliwe. Więc $q \geqslant 2$, czyli istnieją dla każdego n przynajmniej dwa różne semikontinua $\mathfrak{W}^{M_i}(\mathfrak{F}_n)$:

$$\mathcal{W}_n \;)\; \mathfrak{W}^{M}(\mathfrak{F}_n) + \mathfrak{W}^{N}(\mathfrak{F}_n) \qquad (n = 1,2\ldots)$$

Istnieją zatem dwa stałe punkty, M i N, między któremi każde $\mathfrak{F}_n$ rozcina płaszczyznę. Możemy zatem zastosować tu *lemmat 2*. Wiemy (p. wzór (16)), że mnogością skupienia mnogości $\mathfrak{F}_n$, t. j. (p. wzór (9)) mnogości $\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2, b_n)$ jest mnogość $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$. A więc $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$ rozcina płaszczyznę, c. n. u.

Objaśnienie znaków.

1)	$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$	oznacza:	mnogości $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są identyczne (t. j. składają się z tych samych punktów).
2)	$\mathfrak{A} \not\equiv \mathfrak{B}$	—	mnogości $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ nie są identyczne.
3)	$\left.\begin{matrix}\mathfrak{A} \;)\; \mathfrak{B} \\ \mathfrak{B} \;(\; \mathfrak{A}\end{matrix}\right\}$	—	mnogość $\mathfrak{A}$ zawiera wszystkie punkty mnogości $\mathfrak{B}$.
4)	$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$	—	mnogość, złożoną z punktów mnogości $\mathfrak{A}$ i mnogości $\mathfrak{B}$.
5)	$\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$	—	mnogość, złożoną z tych punktów mnogości $\mathfrak{A}$, które nie należą do $\mathfrak{B}$.
6)	$\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$	—	mnogość punktów wspólnych mnogościom $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$.
7)	0	—	(we wzorach ze znakami $\equiv$, $\not\equiv$, $(\;)$ mnogość próżną, t. j. nie zawierającą żadnego punktu.
8)	$\mathfrak{Z}$	—	mnogość wszystkich punktów rozpatrywanej przestrzeni (od § 7 Rozdz. I—euklidesowej płaszczyzny).
9)	$\overline{\mathfrak{A}}$	—	mnogość $\mathfrak{A}$ po domknięciu, t. j. mnogość punktów $\mathfrak{A}$ i punktów skupienia $\mathfrak{A}$.
10)	$\{\mathfrak{A}_\alpha\}_\lambda$	—	mnogość mnogości $\mathfrak{A}_\alpha$, które spełniają pewien warunek λ.
11)	$\mathfrak{M}(\{\mathfrak{A}_\alpha\}_\lambda)$	—	sumę mnogości $\mathfrak{A}_\alpha$, spełniających warunek λ.
12)	$\mathfrak{D}(\{\mathfrak{A}_\alpha\}_\lambda)$	—	mnogość punktów wspólnych wszystkim mnogościom $\mathfrak{A}_\alpha$, spełniającym warunek λ.
13)	$\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$	—	ograniczenie mnogości $\mathfrak{A}$.
14)	$\mathfrak{C}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$	—	kontinuum } (lub punkt) zawierające $\mathfrak{A}$ i zawarte w $\mathfrak{B}$.
15)	$\mathfrak{C}^s(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$	—	semikontinuum } (lub punkt) zawierające $\mathfrak{A}$ i zawarte w $\mathfrak{B}$.
16)	$\mathfrak{C}_s(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$	—	$\mathfrak{C}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ nasycone (t. j. maksymalne).
17)	$\mathfrak{C}^s_s(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$	—	$\mathfrak{C}^s(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ nasycone.
18)	$\mathfrak{S}(\mathfrak{A}, a)$	—	mnogość punktów o odległości od $\mathfrak{A}$ nie większej niż a. W szczególności $\mathfrak{S}(A, a)$ oznacza koło o środku A i promieniu a.
19)	$\mathfrak{P}(\mathfrak{A}, a)$	—	mnogość punktów, leżących po stronie wewnętrznej tych sześciokątów siatki o boku a, lub na nich, które albo zawierają we wnętrzu (w szerszem znaczeniu) punkty $\mathfrak{A}$, albo z takiemi sześciokątami sąsiadują.
20)	$\mathfrak{W}^A(\mathfrak{A})$	—	mnogość wszystkich punktów, dających się połączyć z punktem A zapomocą kontinuum bez punktów wspólnych z $\mathfrak{A}$ (włączając w to i punkt A); t. j. $\mathfrak{W}^A(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{C}^s_s(A, \mathfrak{Z} - \mathfrak{A})$.

21) $\bar{\breve{\mathfrak{F}}}^{A}(\mathcal{A}) \equiv \mathfrak{F}(\mathfrak{W}^{A}(\mathcal{A}))$.

22) $\rho(A, B)$ oznacza: odległość między punktami A i B;

$\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -- odległość między mnogościami $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, t. j najmniejszą liczbę, nie mniejszą od odległości żadnej pary punktów, z których jeden należy do $\mathcal{A}$, a drugi do $\mathcal{B}$.

Litery wielkie zwykłe używane są wyłącznie dla oznaczenia punktów; litery wielkie rondo—dla oznaczenia mnogości punktów; wielkie litery greckie—dla oznaczenia linij łamanych; litery małe łacińskie od i do q—dla oznaczenia liczb całkowitych.