WSTĘP OGÓLNY.

OPRACOWAŁ

ZYGMUNT JANISZEWSKI.

Treść: 1. Charakter metody i przedmiotu matematyki; próba określenia matematyki. 2. Jej przedmiot. 3. Charakter jej zagadnień. 4. Jej cel. 5. Niezależność od innych nauk. 6. Zastosowania. 7. Znaczenie matematyki przy studjowaniu filozofji. 8. Układ treści w niniejszym tomie Poradnika; stosunek wzajemny trzech stopni i odpowiadające im kategorje czytelników. 9. Rola matematyki w wykształceniu ogólnym.

10. Podział matematyki (objaśnienia do tablicy). 10,1. Charakter tablicy. 10,2. Gieometrja a analiza; przedmiot gieometrji matematycznej. 10,3. Inne podziały matematyki. 10,4. Matematyka elementarna a wyższa.

---

1. Matematyka zajmuje zupełnie odrębne stanowisko śród ogółu nauk. Jest to jedyna (przynajmniej dzisiaj) nauka, zmuszająca z koniecznością do wiary w swe wyniki i w swych dowodach nie odwołująca się nigdy do doświadczenia [1]). Przyj-

[1]) Nie zajmujemy tu — o ile to możliwe — żadnego stanowiska filozoficznego. Nie chcemy więc rozstrzygać, czy różnica ta między matematyką a innemi naukami jest absolutna, czy też jest różnicą stopnia tylko Opisujemy tu jedynie cechy matematyki tak, jak się one bezpośrednio przedstawiają, nie wdając się w filozoficzną analizę i krytykę tych danych obserwacji. Chcemy więc tylko powiedzieć, że prawdy matematyczne narzucają się z koniecznością, że nie możemy uznać za prawdziwe zdań sprzecznych z niemi; i że przy ich uzasadnianiu nie potrzebujemy się powoływać na świadome doświadczenia (są to właśnie cechy, które posiada jedynie matematyka). Przez to nie stajemy w sprzeczności z żadnym z poglądów filozoficznych na matematykę, w szczególności z poglądami empiryków; bo to nie wyklucza jakichś możliwych wątpliwości co do prawd matematycznych ze stanowiska metafizyki czy teorji poznania, ani twierdzenia, że pojęcia i pewniki matematyczne pochodzą z doświadczenia (por. rozdział: Zagadnienia filoz. mat.).

Również nie twierdzimy tu, że żadna inna nauka nie może uzarzyjmy się na przykładzie oznaczania długości okręgu koła, czym różni się badanie matematyczne od badania doświadczalnego pod względem metody, przedmiotu i rezultatu.

Badanie doświadczalne będzie polegać na mierzeniu, możliwie dokładnym, obwodu kół materjalnych, zrobionych z różnych materjałów i mających różne średnice; przekonamy się, że w granicach dokładności doświadczenia stosunek długości obwodu do długości średnicy będzie dla wszystkich kół mierzonych ten sam. Stąd wnioskujemy, że wszystkie wogóle koła będą posiadały tę samą własność, czego jednak absolutnie pewni być nie możemy. Inaczej postąpi matematyk: poda on najprzód ścisłe określenie koła i za pomocą samego rozumowania, nic nie mierząc i, że tak powiemy, »zamknąwszy oczy«, wywnioskuje z tego określenia, jako konieczną własność koła, tę stałość stosunku obwodu do średnicy; rezultat, w ten sposób otrzymany, jest oczywiście bezwzględnie pewny.

Przypuśćmy, że ktoś chce sprawdzić słuszność naszego twierdzenia w ten sposób, że rysuje koło i wykonywa pomiary. Przypuśćmy, że otrzymał rezultat różny od obliczenia matematycznego. Cóż my na to? Powiemy po prostu, że źle narysował, lub źle zmierzył; że jeżeli figura narysowana własności danych nie posiada, to nie jest kołem.

Ta różnica metod i charakteru rezultatów badania doświadczalnego w porównaniu z matematycznym wynika z różnicy między badanemi przedmiotami, gdyż tylko pozornie wydawało się, że przedmiot badań tych jest wspólny. Koło materjalne a koło matematyczne — to dwa zupełnie różne przedmioty, pozostające w tym stosunku do siebie, że pierwsze posiada z pewnym przybliżeniem cechy drugiego. Jednak koło materjalne — to przedmiot, który możemy poznać tylko za pośrednictwem

---

sadnić swych rezultatów z absolutną pewnością i drogą niedoświadczalną. Stwierdzamy tylko, że żadna tego nie uczyniła, lub przynajmniej próby, podjęte w tym kierunku, nie uzyskały powszechnego uznania. Tak np. starano się przedstawić, jako naukę apodyktyczną i aprioryczną, metafizykę (Spinoza), etykę, mechanikę (Descartes, Euler).

zmysłów, gdy tymczasem koło matematyczne jest naszym własnym, świadomym wytworem umysłowym.

Weźmy inny przykład. Wrzucamy do skarbonki raz 3 groszaki, drugi raz 5. Wiele wrzuciliśmy groszaków do skarbonki? Empiryczny sposób — to rozbić skarbonkę i przeliczyć monety. Jednak każdy przełoży sposób matematyczny: nie zaglądając do skarbonki, »zamknąwszy oczy«, doda 3 do 5. Operację tę wykona w myśli, w myśli swej zobaczy wynik 8. I nie będzie miał żadnej wątpliwości, że zgodny jest on z rzeczywistością: sprawdzanie empiryczne (jeżeli tylko dobrze pamięta, co wrzucił) każdy uzna za najzupełniej zbyteczne, za nierozsądne nawet. I gdyby nawet kto, rozbiwszy skarbonkę, przeliczył nasze groszaki i znalazł ich np. tylko 7, to i to nie zachwiałoby naszej wiary w wynik matematycznego rozumowania: powiedzielibyśmy bez wahania, że jakiś groszak musiał wypaść, czy stało się co innego, lecz nigdy nie przyznamy, że $3 + 5$ nie jest równe 8 [1]). To jest fakt wewnętrzny — to, że

---

[1]) Możliwość teoretyczna niezgodności między wynikiem matematycznym a wynikiem doświadczenia tłumaczy się tym, że i tu także przedmioty badania matematyki i doświadczenia nie są identyczne. Twierdzenie matematyki dotyczy sumy matematycznej 3 wrzuconych groszaków i 5 wrzuconych groszaków (w matematyce wprawdzie mowa jest o liczbach abstrakcyjnych 3, 5, 8, a nie o »3 wrzuconych groszakach« i t. d., lecz wiemy z logiki, że co jest prawdziwe dla pojęć ogólnych, to jest prawdziwe dla przedmiotów, podpadających pod nie); sprawdzamy zaś doświadczalnie, ile jest groszaków w skarbonce po ich wrzuceniu. Otóż wrzucenie w jedno miejsce, połączenie fizyczne przedmiotów nie jest dodawaniem matematycznym; odpowiada mu tylko w razie, gdy uczynimy założenie fizyczne: że rozpatrywane przedmioty nie zmienią się przy tym połączeniu. Jesteśmy tak przyzwyczajeni do tego założenia, że nie uświadamiamy sobie, że je czynimy; a jednak łatwo podać przykłady, w których ono nie sprawdza się: np. gdybyśmy wrzucali zamiast groszaków krople rtęci. Albo wlejmy do naczynia 1 litr wody i 1 litr spirytusu. Matematyka mówi tylko, że wleliśmy 2 litry płynu; i tyle tylko jest — abstrahując od możliwości pomyłki — absolutnie pewne. Czy jednak w naczyniu będzie 2 litry płynu? — o tym już matematyka nic orzec nie może; w naczyniu mogłoby wcale płynu nie być, a np. ciało stałe. Po odpowiedź na to pytanie musimy się zwrócić do doświadczenia, które poucza nas, że w naczyniu będzie płyn, w objętości mniejszej niż dwa litry.

możemy badanie matematyczne przeprowadzić w myśli i że czujemy przymus bezwzględnej wiary w wynik tego badania — fakt, który tu tylko stwierdzamy, nie wdając się w dyskusję nad nim.

I to właśnie odnajdywanie prawd w sobie i niemożliwość wyobrażenia ich sobie inaczej jest najbardziej znamiennym dla prawd matematycznych [1]). Najlepszym więc sprawdzianem dla odróżnienia matematyki od innych nauk jest jej dedukcyjność, zakładająca abstrakcyjność jej przedmiotu i pociągająca za sobą bezwzględną pewność jej rezultatów; sprawdzianem najlepszym dzisiaj, choć niezupełnie dobrym, gdyż daje określenie trochę za szerokie. Nauki doświadczalne wprawdzie posługują się też w większym, lub mniejszym stopniu dedukcją, tak, że mogą wiele rezultatów otrzymać na tej drodze, jednak opierają się przy tym na poprzednich rezultatach, otrzymanych drogą doświadczalną. Matematyka zaś posługuje się wyłącznie rozumowaniem bez zwracania się do doświadczenia [2]).

2. Dedukcyjność matematyki jest to jednak tylko jej forma; prawda, że dla niej tak istotna, z jej najgłębszych właściwości wynikająca. Jednak pozostaje pytanie: jaka jest treść matematyki, co jest jej przedmiotem? Zwykła odpowiedź na to brzmi, że matematyka jest nauką o wielkościach, czy liczbach. Określenie to jednak ścisłe nie jest: jest ono za ciasne.

Lecz nie kuśmy się o wyczerpanie treści matematyki w jednym zdaniu, określeniu. Rozwija się ona, żyje: dziedzina jej rozszerza się; zakreślić z góry jej granic nie możemy. Lepiej ją poznamy, wykazując kierunek jej rozwoju.

Matematyka zaczęła się od badania liczb [3]). Liczby, jak-

---

[1]) Fakt ten pozostanie, choćbyśmy doń dodali empirystyczne jego wytłumaczenie (por. Zagad. filoz. matem.).

[2]) W kwestji, mogącej tu nasunąć wątpliwości, co do pochodzenia i charakteru pewników matematycznych por. niżej Podstawy gieometrji i Zagadnienia filoz. matem.

[3]) Całkowitych; potym dopiero wprowadzono ułamki, liczby niewymierne, ujemne i urojone i t. d. (np. nadskończone, idealne), przez co oddalano się coraz bardziej od pierwotnego pojęcia liczby, od pierwotnego przedmiotu matematyki. Więcej jeszcze oddalamy się odeń w kierunku rozwoju, który jest przedstawiony poniżej.

kolwiek pojęcia proste, są już abstrakcją; badamy je, abstrahując od tego, czego one są liczbami. Zrazu mówiono o liczbach indywidualnych: 3, 5, 6,... Potym zauważono — doszło to do pełnej świadomości dopiero w czasach nowożytnych — że najciekawszemi własnościami liczb, są to własności ogólne, t. j. takie, które posiada każda liczba [1]). Własności te można więc poznać, badając liczby po zabstrahowaniu od ich własności indywidualnych, t. j. badając liczby 2, 5, 8, abstrahując od tego, że to jest właśnie 2, albo 5, albo 8, a nie jaka inna liczba — przez co jesteśmy w możności oznaczyć każdą z nich jednym i tym samym znakiem, np. literą a. Cóż wtedy jeszcze pozostanie z liczby? Co pozostanie z liczby 2, jeśli zabstrahujemy od tej jej własności, że jest ona liczbą 2, a nie liczbą 3, lub 7? Zostanie z niej to, że jest *jakąś liczbą*. Oznaczając liczby ogólnie przez litery a, b, c, i nie troszcząc się, jakie mianowicie liczby litery te przedstawiają — są to »jakieś« liczby — wstępujemy na drugi stopień abstrakcji. Przykładem tego niech służy twierdzenie

$$a \times b = b \times a.$$

Takie prawdy, jak wyrażona przez wzór powyższy, można równie dobrze uważać za wyrażenie własności liczb, jak i za własności działań (w danym razie mnożenia). Możemy więc traktować również te ostatnie jako przedmiot badań matematycznych.

Działanie jest to przedmiot bardziej abstrakcyjny niż liczba. Rozpatrując określone działanie, np. mnożenie, abstrahujemy od tego, na jakich (określonych) liczbach jest ono wykonane: mnożenie jest tym samym działaniem, czy mnożymy 2 przez 5, czy 3 przez 7, i możemy je przedstawić przez $a \times b$. Przechodząc od poszczególnych, określonych działań, jak dodawanie, mnożenie, do *działania wogóle*, wznosimy się na stopień abstrakcji wyższy od poprzedniego. Pokrewnym pojęciu działania jest pojęcie *funkcji* [2]), pojęcie szczególniej ważne, które dominuje w wyż-

---

[1]) Przynajmniej każda liczba danego rodzaju. Podobnych zastrzeżeń należy się domyślać i w dalszym ciągu.

[2]) Objaśnienie elementarne tego pojęcia znajdzie czytelnik w Stopniu II, § 16; zaś ścisłe i abstrakcyjne określenie w rozdziale: Teorja funkcji zmiennych rzeczywistych, § 1.

szej matematyce dzisiejszej i jest główną może jej treścią (a zaczyna też przenikać i do matematyki elementarnej). Także w badaniach nad funkcjami abstrahujemy zazwyczaj od indywidualnych cech danej funkcji, badając ogólnie pewne rodzaje funkcji. I znów utrwalamy dokonaną abstrakcję, oznaczając ogólnie funkcję przez literę; i operujemy tą literą, nie pytając, jaką mianowicie funkcję (danego rodzaju) oznacza.

Tutaj przestaniemy śledzić matematykę w jej śmiałym wdzieraniu się na coraz zawrotniejsze wyżyny abstrakcji — z tego miejsca, gdzie stoimy, wzrok nasz już nie sięgnie jej dalszych dróg [1]).

Widzieliśmy, jak w rozwoju matematyki przybywają jej nowe pojęcia, jako przedmioty badania. Przybywają jej one i dzięki innym jeszcze kierunkom rozwojowym. Jednym z pojęć najważniejszych, w ostatnich czasach wciągniętych w zakres badań matematycznych, jest pojęcie z b i o r u (w matematyce mówimy *mnogość*) jakichś przedmiotów, wszystko jedno jakich. Jest ono elementarniejsze od pojęcia liczby, bo dopiero do zbioru przedmiotów można zastosować pytanie: i l e? w jakiej l i c z b i e? t. j. liczbę możemy uważać, jako w ł a s n o ś ć z b i o r u. Pojęcie to stało się podłożem badań nad funkcjami (jako odpowiedniości między elementami dwu z b i o r ó w liczb) [2]); może być też uważane za podstawowe i w gieometrji, do której zaraz się zwrócimy, gdyż przestrzeń i każda figura gieometryczna jest z b i o r e m punktów. To też znany filozof matematyki Couturat pisze: »jeżeli więc istnieje w matematyce pojęcie pierwsze i zasadnicze, to nie jest nim pojęcie liczby, lecz właśnie pojęcie zbioru«.

Jednocześnie z pierwszemi badaniami nad liczbami, najdawniejszą dziedziną matematyki, zaczęła się d o ś w i a d-

---

[1]) Stąd też nie dziw, że nauka matematyki jest tak trudna dla wielu; o ile bowiem z początku przedmiot matematyki jest prosty i dla każdego zrozumiały — jeden, dwa, trzy... — potym staje się, dzięki abstrakcjom i matematycznemu opracowaniu, tak subtelnym, a tak złożonym, że specjalnej trzeba zdolności, którąbym nazwał *intelektualną wyobraźnią*, by go sobie o d t w o r z y ć, u t r z y m a ć w umyśle i o p e r o w a ć nim.

[2]) Por. rozdz. T e o r j a f u n k c j i z m i e n n y c h r z e c z y w i s t y c h.

czalnie rozwijać gieometrja. Po przeniesieniu egipskiej gieometrji doświadczalnej na grunt grecki, spostrzeżono, że do niej można zastosować metodę dedukcyjną: że doświadczenie jest zbyteczne i że oparszy się na paru jasnych faktach (*pewnikach*), można wszystkie inne prawdy gieometryczne z nich wysnuć, z absolutną ścisłością i pewnością je udowodnić. Stała się ona przez to częścią matematyki, chociaż przedmiot jej w tym stadjum rozwoju (gieometrja grecka jest to w zasadzie nasza gieometrja elementarna, szkolna) — był zupełnie różny od pierwszego przedmiotu: liczb.

Matematyka jednak nie zniosła takiej dwoistości przedmiotu; wykazywaliśmy wprawdzie, że matematyka zajmuje się różnemi przedmiotami, lecz są to przedmioty, stojące ze sobą w ścisłym związku i jednego rodzaju, wszystko czysto myślowe [1]). Musiała ona wyrugować ten element obcy jej i jej dedukcyjnej metodzie, jaki tworzył przedmiot gieometrji: przestrzeń (pomimo jej zidealizowania) i jej podstawy: pewniki.

Najpierw uskuteczniono połączenie tych dwu dziedzin przez podporządkowanie gieometrji analizie matematycznej [2]) (gieometrja analityczna); w najnowszych czasach jednak gieometrja znalazła swą własną drogę: wchodząc w ścisłą łączność z analizą, zachowała swą odrębność. Stało się to dzięki t. zw. metodzie aksjomatycznej: przez uznanie aksjomatów za określenia, a przedmiotów gieometrycznych — za utwory myślowe, określone jedynie przez obrane aksjomaty. Stosowanie tej metody nie ograniczyło się jednak do gieometrji: tak samo zaczęto traktować i analizę (określając jej poszczególne przedmioty, np. liczby, jako coś, co spełnia pewną grupę aksjo-

---

[1]) Nie wszyscy zgodzą się na odmówienie przestrzeni charakteru czysto racjonalnego (np. nie zgodzą się racjonaliści i neokantyści); jednak zgodzą się pewno na to, że przestrzeń i pojęcia analizy są to rzeczy różnorodne.

[2]) Mówimy tu o analizie w szerszym znaczeniu, zaliczając do niej cały ten dział matematyki, który nie jest gieometrją, więc arytmetykę teoretyczną, teorję liczb, algiebrę i t. zw. analizę nieskończonostkową (por. niżej tablicę). W ciaśniejszym znaczeniu rozumiemy przez analizę tylko analizę nieskończonostkową.

matów i uważając ją za teorję formalnych rachunków)[1]. To przekształcenie się gieometrji wprowadza nową trudność w określeniu przedmiotu i dziedziny matematyki: wydaje się, że do niej należy — tym samym prawem, co i gieometrja — każda teorja czysto dedukcyjna. A więc powróciliśmy do podanego na początku określenia (za szerokiego). Nie chcąc więc wdawać się tu dłużej w poszukiwania tej subtelnej granicy matematyki, poprzestaniemy na tym pierwszym określeniu, szerszym i jaśniejszym, oraz dogodniejszym dla celów Poradnika, włączając do matematyki dwie nauki jej pokrewne: rachunek prawdopodobieństwa i logistykę.

Rachunek prawdopodobieństwa zwykle nawet zalicza się do matematyki. Jednak z większą słusznością możnaby go uważać za naukę odrębną, gdyż przedmiotem jego jest »prawdopodobieństwo« — pojęcie obce właściwej matematyce. Logistyka, czyli logika matematyczna, bywa również zaliczana do matematyki, a nawet sporna jest kwestja zasadniczej różnicy między matematyką a logiką. Tak np. znany filozof współczesny Husserl pisze (Logische Untersuchungen, t. I, str. 252—253):

»Nikt nie może zabronić matematykom zagarnąć tego wszystkiego, co należy opracowywać według formy i metody matematycznej. Tylko ten, kto nie zna matematyki, jako nauki nowoczesnej, zwłaszcza formalnej matematyki, i sądzi ją tylko według Euklidesa i Adama Riese, może jeszcze trzymać się powszechnego przesądu, jakoby istota matematyki leżała w liczbie i ilości. Nie matematyk, lecz filozof przestępuje swą naturalną sferę prawną, gdy się opiera »matematyzującym« teorjom logiki i nie chce swych tymczasowych wychowańców oddać ich naturalnym rodzicom«.

---

[1]) Dla objaśnienia ostatniego ustępu por. dalsze ustępy w Poradniku, a mianowicie: o różnicy między gieometrją a analizą — niżej w objaśnieniu do tablicy; o metodzie aksjomatycznej i dzisiejszym ujmowaniu matematycznej gieometrji — w Podstawach gieometrji; o znaczeniu metody aksjomatycznej, jako najwyższego stopnia omawianego wyżej procesu abstrakcji — w Zakończeniu; o stosunku gieometrji do przestrzeni (fizycznej czy psychologicznej) — w Zagadnieniach filozoficznych matematyki; o ujmowaniu analizy czysto formalnie z filozoficznego punktu widzenia (nominalistycznie) — tamże.

Dla dalszej charakterystyki matematyki — do zorjentowania się w aktualnym jej terenie badań oraz w jego podziale — służą podana niżej tablica i objaśnienia do niej. Tu dodamy jeszcze dla charakterystyki jej zagadnień słów kilka, uzupełniających rozwinięcia poprzednie.

3. Niejeden pewno wyobraża sobie, że matematyk zajmuje się ciągłym rachunkiem, otoczony jest liczbami, które dodaje i mnoży (i może nawet, że »wyższa« matematyka polega na zajmowaniu się *większemi* liczbami!) Niechże się ci zdziwią wiadomością, że w książkach matematycznych nie spotykamy prawie innych liczb całkowitych, jak 1, 2, 3, 4, 5. Możnaby powiedzieć, że 5 jest największą liczbą, jaką zna matematyk [1]).

W jaki sposób ten dziwny napozór fakt jest możliwy, objaśnia nam omówiona wyżej dążność matematyki do abstrakcji i do ogólności, oraz następująca cecha matematyki: matematykę interesuje nie *wielkość*, lecz *jakość* [2]).

Przyjrzyjmy się, jakie pytania stawia sobie dziś matematyka. Najczęściej pytamy o własności przedmiotu matematycznego (liczby, równania, funkcji, figury gieometrycznej i t. p.) tak, że możemy odpowiedzieć przez »tak« lub »nie«. Pytamy

---

[1]) Jest to w zgodzie (a pewno i w związku) z tym faktem psychologicznym, że my naprawdę, bezpośrednio, znamy tylko pierwszych parę liczb. 5 jest pewno największą z nich: przy dużym wysiłku uwagi może jeszcze odróżnimy, bez przeliczenia i bez pomocy jakichkolwiek innych środków (np. ułożenia — choćby w myśli — tych danych przedmiotów w figurę jakiegoś znanego nam kształtu, np. takiego, jaki posiadają grupy oczek na kartach do gry), czy zbiór dany zawiera 4 czy 5 przedmiotów; wątpić należy, czy to jest możliwe dla liczb większych.

To, cośmy powiedzieli w tekście, objaśni nam możliwość innego faktu (z psychologji matematyków): wielu wielkich matematyków było bardzo złemi rachmistrzami — »nie umieli dodawać«; do nich należą Newton, Poisson, Kummer (p. Ahrens, Scherz u. Ernst i. d. Mathem.).

[2]) Mówimy tu ogólnie; zdarza się, że trzeba pewną wielkość wyliczyć, ale wyliczenie to uważamy zwykle tylko jako środek do odpowiedzenia na inne pytanie, dotyczące jakości. Mówimy też tylko o właściwej czystej matematyce na stopniu największego rozwoju. Inaczej przedstawi się matematyka tym, którzy zajmują się nią dla jej zastosowań, inaczej także tym, którzy się uczą jej początków (szczególniej w zakresie stopnia I) i nie mogą jeszcze wznieść się na wyżyny abstrakcji.

np., czy jakiś zbiór ma skończoną czy nieskończoną ilość elementów (np. zbiór pierwiastków danego równania, lub punktów osobliwych funkcji), czy coś istnieje czy też nie istnieje (np. wspólny dzielnik dwu liczb całkowitych, pierwiastek równania), lecz nie o określone wielkości [1]).

Te ostatnie oznaczamy zwykle ogólnym znakiem, np. a, nawet w przypadkach, gdy liczba ta jest oznaczoną i gdy moglibyśmy ją obliczyć.

Gdy w szczególności chodzi nam o zbadanie jakiejś liczby (np. pierwiastku danego równania), to zazwyczaj nie pytamy, czy jest ona zawarta między 10 a 20, czy też jest większą od 1000; wielkość jej jest nam obojętna. Pytamy, jakie ona posiada własności, do jakiego należy rodzaju. A liczb nie dzielimy na rodzaje według ich wielkości, lecz zgoła inaczej, przyczym liczby bardzo mało różniące się wielkością zaliczamy do różnych rodzajów, podczas gdy do jednego rodzaju mogą należeć liczby jak najbardziej pod względem wielkości różne.

Pierwszym takim podziałem na rodzaje jest podział na liczby całkowite i niecałkowite. Liczby te mają różne bardzo własności; i nic nam nie pomoże np. wiadomość, że badana liczba a jest mniejsza od $2\frac{1}{10}$, a większa od $1\frac{9}{10}$, bo to nas nie objaśnia, czy ona jest równą 2, a więc całkowitą, czy też jest różną od 2, więc (przy powyższych nierównościach) liczbą niecałkowitą; wtedy, o jakkolwiek małą liczbę różniłaby się od 2, różni się swemi własnościami od 2 bardziej, niż np. liczba 1000.

To objaśnia nam znaczenie i potrzebę ścisłości *(dokład-*

---

[1]) Na przykładzie równania możemy bliżej jeszcze przyjrzeć się charakterowi zagadnień matematycznych: gdy więc odpowiemy w sposób twierdzący na pytania, czy pierwiastki istnieją i czy jest ich ilość skończona, to stawiamy sobie czasem pytanie: ile ich jest, lecz interesuje nas ta liczba tylko wtedy, gdy jest małą (1, 2, 3); w przeciwnym razie szukamy tylko jej związku z innemi liczbami (zazwyczaj nieokreślonemi), wchodzącemi do równania; tak w wypadku równania algiebraicznego, dowodzimy, że ilość pierwiastków jest równa stopniowi równania. Nigdy zaś prawie nie pytamy o wielkość samych pierwiastków: możemy tylko pytać o ich związek z innemi liczbami zagadnienia, lub o ich rodzaj, o czym patrz niżej. Tendencja ta dałaby się i dalej śledzić, co wytłumaczyłoby nam pozorne od niej odstępstwa.

ności) matematycznej w rezultatach (nie mówię tu o potrzebie ścisłości (*poprawności)* w dowodzeniach, co rozumie się samo przez się): i to nam objaśnia, dla czego matematyka nie zadowala się rezultatami przybliżonemi i dla czego wyliczenia »dokładnych« w znaczeniu fizyków przybliżeń nie mają dla matematyków żadnego znaczenia.

Widoczniejsze jest to jeszcze przy podziale na liczby wymierne (t. j. całkowite i ułamki) i niewymierne. Do rozstrzygnięcia bowiem, czy dana liczba nie jest całkowitą (nigdy jednak do stwierdzenia, że dana liczba jest całkowitą!) wystarcza często przybliżenie, bo np. gdy mamy: $a > 2$ i $a < 3$, to a nie może być liczbą całkowitą. Do rozstrzygnięcia zaś, czy dana liczba jest wymierną, czy nie, żadne przybliżenie wystarczyć nie może, bo między każdemi dwiema liczbami znajduje się nieskończenie wiele wymiernych i nieskończenie wiele niewymiernych.

W badaniach matematycznych w pewnych razach zadowalamy się nierównościami; lecz jest to tylko pozorny wyjątek od tego, co zaobserwowaliśmy wyżej: i wtedy chodzi nam nie o przybliżenia, nie o wielkość, lecz o pewną własność badanej liczby, o podział liczb na dwa rodzaje (mniejszych i niemniejszych od pewnej liczby), tak, że na postawione pytanie możemy odpowiedzieć przez »tak« lub »nie«. Np., gdy mamy dany postęp gieometryczny

$$1 + a + a^2 + a^3 + \ldots,$$

którego suma dla $|a| < 1$ równa się $\frac{1}{1-a}$, a który przy $|a| \geqslant 1$ jest rozbieżny i wcale o jego sumie mówić nie można, ważną jest dla nas tylko wiadomość, do którego z dwu rodzajów liczb należy $|a|$: do mniejszych, czy niemniejszych od 1? Przyczym do jednego rodzaju zaliczamy liczby 1 i 1000000, a do różnych 1 i $\frac{999999}{1000000}$ (i wogóle dowolnie mało mniejsze od 1). I tu więc nie wystarczy przybliżona ocena wielkości do dokonania zupełnego podziału.

Zauważymy tu, dla uniknięcia nieporozumień, jeszcze jedno: w matematyce mówi się często o przybliżeniach. Jest to jednak zupełnie co innego, niż przybliżenia w zwykłym znaczeniu.

Pojęcie matematyczne przybliżeń może właśnie służyć za przykład doskonałości i subtelności matematycznej (np.: pojęcie granicy; przybliżenia liczb niewymiernych za pomocą wymiernych).

---

4. Nie-matematykom nasuwa się często pytanie: jakiemu celowi służy ten cały gmach wiedzy tak abstrakcyjnej, jaką jest matematyka? Wtedy zazwyczaj, jako na rację bytu matematyki, wskazuje się na jej zastosowania, szczególniej na rozwój techniki, który stał się możliwym jedynie dzięki matematyce nowożytnej. Odpowiedź ta jednak traci swą wartość, gdy zwrócimy uwagę, jak drobną jest ta część matematyki, która ma zastosowania; większa zaś jej część »czeka na zastosowanie« i to, jak się wyraża A. PRINGSHEIM [1]), »czeka napróżno«. Wprawdzie nie możemy twierdzić o żadnej teorji matematycznej, że nigdy nie znajdzie zastosowania, lecz usprawiedliwiać rację bytu tych teorji takim mało prawdopodobnym zastosowaniem byłoby to samo, mówi dalej PRINGSHEIM, co uzasadniać żądania środków pieniężnych na ekspedycję polarną mogącemi stąd wyniknąć korzyściami handlowemi. Tego usprawiedliwienia należy — jak świadczą o tym zgodnie wyznania różnych matematyków — szukać gdzieindziej: w matematyce samej w sobie. Dobitnie wypowiada to POINCARÉ: »gdy pracujemy, to nie tyle dla rezultatów pozytywnych, do których, jak tłum przypuszcza, jedynie przywiązujemy wagę, ile dla odczuwania wzruszeń estetycznych i komunikowania ich tym, którzy są zdolni je odczuwać« [2]), oraz wyraźniej jeszcze w książce: La Valeur de la Science (str. 82, a w tłum. polskim 88): »nie waham się powiedzieć, że matematyka zasługuje, aby uprawiać ją dla niej

---

[1]) Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik (Festrede), (Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, t. 13, 1904, str. 357—382), str. 380; także w tłum. ros. »Wiestnik Znanija«, Nr. 7 i 12, r. 1904. Ciekawa ta mowa zawiera odparcie zarzutów, czynionych matematyce przez W. HAMILTONA i SCHOPENHAUERA.

[2]) Notice sur Halphen. Journal de l'École Politechnique, cah. 60, 1890.

samęj i że działy, nie dające się stosować do fizyki, powinny być uprawiane na równi z innemi« [1]).

Zadając sobie pytanie, gdzie szukać właściwego celu dążeń naszych, przyznamy, że przedewszystkim w Prawdzie i Pięknie; tym właśnie wyższym duchowym potrzebom matematyka czyni zadość.

Prawda ta, którą podaje matematyka, dotyczy bezpośrednio nie przedmiotów materjalnych, lecz naszych konstrukcji umysłowych. Czy dlatego ma mieć mniejszą wartość? Czyż prawa myśli naszych, naszego wewnętrznego świata nie są również interesujące, jak i prawa świata zewnętrznego?

Często tak rozumianą matematykę porównywają z szachami, nazywając ją pogardliwie zabawką, a przedmiot jej urojeniem. Jest to niesłuszne porównanie. Teorja gry w szachy nie jest nauką nie dlatego, że przedmiot jej przez nas jest wymyślony, że jest konstrukcją umysłową, jak i przedmioty matematyczne — i w dziedzinie faktów materjalnych istnieją p r a w d y, nie posiadające wartości naukowej (np. dokładna waga stołu, na którym piszę) i z b i o r y prawd, nie tworzące nauki — lecz, że przedmiot ten nie jest ani ogólny, ani powiązany z innemi. Wogóle wartość poznanej prawdy jest tym większa, im bardziej ta prawda rozszerza lub pogłębia nasze poznanie, t. j. im bardziej jest ogólna i powiązana z resztą naszych wiadomości. Te właśnie cechy posiadają w wysokim stopniu prawdy matematyczne.

Nie mniej, a może więcej jeszcze, celem zajmowania się matematyką jest jej piękno. Dowodów na to pełno w wypowiedzeniach się różnych matematyków. Oto jak charakteryzuje dzieło matematyczne Mittag Leffler: »najlepsze dzieło matematyka jest dziełem sztuki, sztuki wzniosłej, doskonałej, śmiałej jak najbardziej skryte marzenia wyobraźni, jasnej i przezroczej jak myśl oderwana« [2]). Prawda, że tylko garstka jednostek odczuwa to; lecz »nie masz się czemu dziwić«, pisze Gauss w liście do Zofji Germain, »czar tej subtelnej nauki objawia się w ca-

---

[1]) Por. Ahrens, S c h e r z u n d E r n s t i n d e r M a t h e m a t i k, skąd czerpiemy większość przytoczonych tu cytat.

[2]) »S o p h i e K o w a l e w s k y«, Acta math., 16, 1892/1893, str. 388—389.

łym swym pięknie tylko tym, którzy mają odwagę ją zgłębić«[1]).

Rozumie się, kto piękna tego sam nie odczuł, temu wskazać go nie można; powinien uwierzyć świadectwu innych i musi zadowolić się wiadomością, że porównać da się ono najlepiej z pięknem muzyki lub architektury (z harmonją tonów i linji)[2]).

Na pytanie więc, na co są te abstrakcyjne teorje matematyczne, ta »zabawka«, odpowiemy również pytaniem: »na co są symfonje muzyczne?« Czy muzykę też nazwiemy zabawką?[3])

---

5. Matematyka, jako nauka aprioryczna, nic nie zapożycza od innych nauk, wyjąwszy chyba od logiki: znajomość (i to

---

[1]) Sophie Germain, Oeuvres philosoph., ed. 1896, str. 275. Gauss pisze tu głównie o Teorji liczb.

[2]) Por. Poincaré, La Valeur de la Science, str. 82, (tłumacz. pol. str. 88). Minkowski, Diophantische Approximationen (1907), przedmowa, i Boltzmann, Gustav Robert Kirchhoff (Akad. Festrede, Graz, 15. XI. 1887, str. 28—30). — J. W. A. Young (The teaching of matematics, Londyn, 1911), cytując Goethego, który nazwał tum gotycki »muzyką stężałą«, powiada, że lepiej nazwaćby go można »skamieniałą matematyką« (petrified mathematics). Inaczej sądzi Kummer, dla którego właściwe piękno matematyki jest podobne raczej do piękna przyrody (Über einige math. und philos. Grundanschauungen Leibnizens, Festrede, Berlin, Akademie, 1867).

Nie chcąc poprzestać na świadectwie samych matematyków, przytaczamy tu jeszcze ustęp z książki F. Rudio, Über den Antheil der math. Wiss. an der Kultur der Renaissance, str. 19, (Sammlung gemeinverst. wiss. Vortr., Virchov-Holtzendorff, H. 142): »To, co z nieprzepartą siłą pociągało do nauk matematycznych wielkich mistrzów Odrodzenia, takich jak Brunellesco, Lionardo da Vinci, Rafael, Michelangelo i w szczególności także Albrecht Dürer, nie było wyłącznie dążeniem do wszechstronnego wykształcenia. Mieli oni świadomość, że, przy całej swobodzie indywidualnej wyobraźni, sztuka także zna prawo konieczności i odwrotnie, przy całej niewzruszoności logicznej budowy, i matematyka rozwija się według praw piękna«.

[3]) Porównanie z szachami i tu jest płytkie: szachy mogą dać zadowolenie estetyczne, które da się porównać z eleganckim i dowcipnym rozwiązaniem poszczególnego zagadnienia matematycznego, ale nigdy z tą harmonją przedmiotów i związków matematycznycb, odkrywanych przez twierdzenia i teorje, ani z artystycznym planem i budową samej teorji.

praktyczną tylko) zasad poprawnego rozumowania. To też jedna tylko logistyka może być wymieniona, jako jej nauka pomocnicza. Poza logistyką mogą interesować matematyków specjalnie jeszcze filozofja matematyki i historja matematyki. Wszystkie te nauki zaliczamy jednak ze względów praktycznych do matematyki i traktujemy o nich w niniejszym dziale, w odpowiednim więc miejscu będzie mowa o ich znaczeniu dla matematyka (por. też W s t ę p do stop. III).

6. Matematyka natomiast jest nauką pomocniczą dla bardzo licznych, coraz liczniejszych nauk. KANT scharakteryzował nawet ogólną tendencję ujmowania naszych wiadomości w formy matematyczne w tych słowach: twierdzę, że w każdej z nauk przyrodniczych tyle tylko można znaleźć właściwej nauki, ile w niej znajdzie się matematyki [1]). Szczególniej w badaniu przyrody martwej jest ona nieocenionym narzędziem, tym bardziej i skuteczniej stosowalnym, im dokładniej przedmiot jej da się zanalizować i zmierzyć. Mechanika np. daje się prawie całkowicie napisać, że tak powiemy, w języku matematycznym, z pomocą wzorów. To też fizyka i astronomja wymagają gruntownego wykształcenia matematycznego (szczególniej równań różniczkowych, szeregów Fourier'a, rachunku warjacyjnego, rachunku prawdopodobieństwa). Inne nauki przyrodnicze nie wymagają tyle matematyki, lecz zawsze co najmniej algiebry i gieometrji w zakresie szkolnym, początków gieometrji analitycznej i rachunków różniczkowego i całkowego. Nauki techniczne wymagają jeszcze znajomości gieometrji wykreślnej. Z nauk humanistycznych wymienię tylko ekonomję i statystykę (i ich praktyczne zastosowania, głównie naukę o ubezpieczeniach), jako te, w których matematyka zdobywa coraz szersze zastosowanie. W niektórych dziełach ekonomicznych używane są nawet równania różniczkowe [2]).

---

[1]) V o r r e d e z u d e n m e t a p h y s i s c h e n A n f a n g s g r ü n d e n d e r N a t u r w i s s e n s c h a f t.

[2]) Głównym przedstawicielem tego kierunku matematycznego w ekonomji politycznej jest PARETO, obecnie profesor w Lozannie; z dzieł jego wymienimy: C o u r s d'é c o n o m i e p o l i t i q u e, Lozanna, t. I, 1896, t. II, 1897, por. też jego artykuł w t. I, cz. II-giej Encykl. der Math. Wiss.,

7. Studjowanie filozofji — choć tu matematyka zastosowań w ciaśniejszym znaczeniu nie ma — wymaga znajomości matematyki w niemniejszym stopniu. Wyszkolenie bowiem w logicznym, ścisłym rozumowaniu i krytycyzm, które daje matematyka, wykrywająca często fałsz i w prostych, oczywistych napozór, sądach, komuż są tak niezbędnie potrzebne, jak filozofowi? Dalej filozofja zajmuje się podstawami i zasadniczemi pojęciami nauk, a więc przedewszystkim matematyki, bo te są podstawą dla wszystkich (przynajmniej przyrodniczych) nauk. Zresztą i bez tego w filozofji używa się wciąż pojęć, na które właściwe światło rzuca matematyka: ilość, ciągłość, nieskończoność. W poszczególnych działach filozofji ta potrzeba poznania matematyki występuje jeszcze wyraźniej: jeśli kto się zajmuje logiką, ten powinien się zapoznać z rozumowaniami matematycznemi, z tworzeniem się pojęć, jako z materjałem do badań; jeśli teorją poznania — to ważną dlań jest wartość poznawcza matematyki, podstawy matematyki; jeśli historją nauk, metodologją nauk, lub t. zw. filozofją przyrody, to potrzeba znajomości matematyki nawet nie wymaga objaśnienia. Jak ważną rolę w systematach filozoficznych odgrywają zapatrywania na matematykę, dość wspomnieć Kanta. Przypomnijmy tu sobie też, ilu śród największych filozofów było matematykami: Pytagoras, Platon, Descartes, Leibniz; to nie pozostało bez wpływu na ich pisma filozoficzne. Z dzisiejszych szkół filozoficznych w większości matematyka odgrywa ważną rolę: wymienię tu szkołę Husserla, (którego zasadnicze poglądy filozoficzne ukształtowały się pod wpływem studjów nad matematyką i filozofją matematyki, jak sam to zaznacza w przedmowie do swego dzieła »Logische Untersuchungen«), empirjo-krytycyzm (historja mechaniki Macha), szkołę marburską i szkołę Friesa; aby się o tym przekonać, dość zajrzeć do wydawanych przez nie pism. Z tego względu matematyka staje się przy studjowaniu filozofji w pewnym znaczeniu praktycznie

---

p. t. Anwendungen der Mathematik auf Nationalöconomie, 1902, stronic 27; w wydaniu francuskim tej encyklopedji artykuł ten znajduje się w t. I, cz. (volume) IV, zeszyt 4, 1911.

potrzebną: dla swobodnego rozumienia i krytycznej oceny wydawanych dziś pism filozoficznych. Zauważyć tylko trzeba, że ponieważ filozofja w poszczególne wyniki matematyki prawie nie wchodzi, można więc bez znajomości matematyki czytać książki filozoficzne, powołujące się na matematykę, lub ją analizujące i mieć wrażenie, że się je rozumie; lecz pamiętajmy, że rozumieć a rozumieć — to duża różnica.

To też i dziś należy wstępującym na drogę filozofji powtórzyć te słowa, które przed wiekami PLATON umieścił u wejścia do swej akademji:

»Bez znajomości gieometrji niech tu nikt nie wchodzi« [1]).

---

8. Jako nauka o ogólnych formach wszystkich zjawisk (pozostających po zabstrahowaniu od wszelkich cech jakościowych przedmiotu), oraz jako jedyna ścisła nauka dedukcyjna, matematyka ma olbrzymią wartość kształcącą: rozwija wyobraźnię, uczy rozumować ściśle i wyrabia zdolności, które ułatwiają orjentowanie się w zjawiskach złożonych. Dlatego też od każdego wykształconego człowieka wymaga się nie tyle wiadomości, ile pewnego wyszkolenia matematycznego. Stopień II-gi matematyki w Poradniku (czyli mniej więcej kurs szkoły średniej) odpowiada zakresowi koniecznych do tego celu wiadomości. Stopień I-szy nie powinien być uważany za konieczny wstęp do stopnia II-go. Obejmuje on część tych samych przedmiotów, co i stopień II-gi, wyłożonych tylko w sposób łatwiejszy, bardziej poglądowo, praktycznie, w bezpośrednim związku z zastosowaniami do życia codziennego. Jest to kurs propedeutyczny, nie zaś właściwa, czysta teorja; korzystać z niego mogą samoucy, którzy nie nabyli znikąd zdolności ścisłego myślenia, albo którym chodzi tylko o osiągnięcie bezpośrednich korzyści praktycznych, potrzebnych w życiu codziennym, gospodarstwie i rze-

---

[1]) Wyraz »gieometrja« jest tu oczywiście użyty, jako synonim wyrazu »matematyka« (toż samo spotykamy u pisarzy francuskich).

O planie i sposobie prowadzenia studjów matematycznych dla filozofa por. W s t ę p do III stopnia.

2*

miośle, którzy więc mogą poprzestać na stopniu I. Ci, co uczą dzieci w początkowym okresie nauczania, znajdą w stopniu I spis poleconych podręczników, inne wskazówki — w rozdziale, zatytułowanym: M e t o d y k a n a u c z a n i a.

Trochę wyrobiony czytelnik, pragnący zdobyć średnie wykształcenie ogólne, powinien zacząć od stopnia II-go. Nie zrobi on żadnego skoku, opuszczając stopień I-szy, wszelkie bowiem wiadomości od najelementarniejszych (lecz w układzie systematyczniejszym, niż w stopniu I-szym) znajdzie w podręcznikach stopnia II-go. Tylko w razie, gdyby te podręczniki okazały się dlań za trudne, winien pomagać sobie bardziej poglądowemi podręcznikami stopnia I-go.

Znający algiebrę, gieometrję (elementarną) i trygonometrję w zakresie stopnia II-go, może zacząć odrazu od stopnia III-go. Radzimy tylko przeczytać w każdym razie Wstęp do stopnia II-go. Zbytniej jednak skrupulatności w opanowywaniu matematyki elementarnej trzeba się także wystrzegać: nie na zapamiętaniu bowiem wszystkich szczegółów, lub poznaniu większej ilości wzorów polegają postępy w matematyce, lecz na zdobyciu i zgłębieniu nowych pojęć i metod. Właściwe też pogłębienie wiadomości z matematyki elementarnej (»p o g ł ę b i e n i e«, nie zaś »r o z s z e r z e n i e«) można osiągnąć dopiero na poziomie stopnia III-go, z jednej strony przez studjowanie podstaw gieometrji i arytmetyki, z drugiej zaś przez ujęcie jej z pomocą pojęć wyższej matematyki, spoglądając na nią z wysoko obranego punktu widzenia.

Kto zaczyna studjowanie wyższej matematyki, powinien po przeczytaniu Wstępu do stopnia III-go, czytać tylko rozdziały o naukach, od których ma zacząć, bez względu na porządek tych rozdziałów. Poszczególne rozdziały bowiem stopnia III-go nie są przeznaczone do odczytania po kolei jednym ciągiem, lecz raczej do użytku podobnego, jak encyklopedje (co ułatwia skorowidz rzeczowy). Niektóre rozdziały mają charakter popularyzacyjny i mogą służyć np. czytelnikom stop. II-go do uzupełnienia swych wiadomości (szczególniej Arytmetyka, Teorja mnogości, Teorja liczb, Gieometrja analityczna i syntetyczna, Podstawy gieometrji, Topologja, Logistyka, Rachunek prawdopodobieństwa i Zagadnienia filozoficzne matematyki; por. Wstęp do stopnia II-go, § 2). Obeznany już nieco z matematyką wyższą może czytać którykolwiek interesujący go rozdział, bo są one zwykle niezależne od siebie; w przeciwnym razie cytaty ułatwiają odnalezienie innych miejsc w Poradniku, potrzebnych do zrozumienia czytanego rozdziału. Naogół wystarcza do ich zrozumienia znajomość matematyki elementarnej (stopień II-gi), (co nie wyklucza, że niektóre w nich zdania, a nawet ustępy mogą nie być zrozumiałe przy tym minimalnym przygotowaniu). Wyjątek stanowią rozdziały: Teorja funkcji analitycznych, Równania różniczkowe zwyczajne, Równania funkcyjne i całkowe, Rozwinięcia na szeregi, Równania różniczkowe o pochodnych cząstkowych, Teorja grup, Gieometrja różniczkowa, Rachunek warjacyjny, do których zrozumienia potrzebne są przynajmniej początkowe wiadomości o szeregach, funkcjach zmiennej rzeczywistej, z rachunku różniczkowego i całkowego, oraz gieometrji analitycznej.

9. Pożądaną jest rzeczą, aby i ci, których przyszła specjalność nie wymaga znajomości matematyki, wyjrzeli trochę poza zakres stopnia II-go w interesie swego wykształcenia ogólnego [1]), a to ze względu na nieproporcjonalność między ilością materjału stopnia II-go a III-go. Jak to już widać bowiem z podanej niżej tablicy, matematyka elementarna jest znikomą częścią całości matematyki. »Elementy Euklidesa są taką samą małą częścią całej matematyki, jak Iljada — literatury, lub rzeźby Fidjasza — całej sztuki wszechświatowej«, trafnie porównywa C. J. Keyser (Mathematics, N. York, 1907, str. 8). A zdarza się często, że kończący szkołę mają wrażenie, iż elementarna algiebra i gieometrja wyczerpują zakres zagadnień matematyki i że cała dzisiejsza matematyka wyższa, pozostając w ciasnym kole tych, sięgających starożytności zagadnień, polega na znajdowaniu większej liczby podobnych, tylko bardziej skomplikowanych wzorów. Pogląd zaś taki — gdy się zważy, jak wspaniale matematyka rozwinęła się w czasach nowo-

[1]) Książek, popularyzujących zagadnienia wyższej matematyki, niestety prawie niema (por. stop. II-gi). W jaki mianowicie sposób należy uzupełnić stop. II-gi w kierunku powyższym, p. Wstęp do stop. II-go i III-go.

żytnych i najnowszych — jest tak dalekim od prawdy, że musimy go uznać za błąd zgoła niedopuszczalny, szczególniej wobec tego znaczenia, jakie rozwój matematyki miał i ma dla kultury dzisiejszej.

Złudzenie, że taki zastój istnieje w matematyce, powstaje stąd, że jest ona nauką najbardziej zachowawczą [1]), mało co z jej zdobyczy zostało później odrzucone, bo wszystkie prawie tak są solidnie ugruntowane, że wytrzymują próbę czasu. Nie z bezkrytycznego pietyzmu dla tego, co stare, wynika ta zachowawczość, gdyż matematyka jest przedewszystkim krytyczna i nie zatrzymuje swej krytyki przed najprostszemi, najoczywistszemi prawdami.

To jednak, że nowe badania nie zmieniają wyników matematyki elementarnej, nie powinno nam zasłaniać faktu, że matematyka jednocześnie należy do najbardziej postępowych — rozwija się niezmiernie szybko, krocząc różnemi drogami, zdobywa coraz to nowe dziedziny, nie bojąc się najśmielszych, najparadoksalniejszych nowych teorji; wspominamy tylko liczby urojone, gieometrje nieeuklidesowskie, odrzucające dawne pewniki gieometryczne i teorję mnogości, która dowiodła, że część może się równać całości.

Bliższe wskazówki co do studjów w zakresie każdego stopnia podane są w odpowiednich wstępach.

W szczególności we wstępie do stopnia III-go uwzględnione są potrzeby tych wszystkich, którzy z jakiegokolwiekbądź względu chcą posiąść wykształcenie matematyczne, wyższe od średniego, i to w jakimkolwiek zakresie aż do specjalności ostatecznej i przygotowania się do pracy twórczej.

---

10. PODZIAŁ MATEMATYKI (objaśnienia do tablicy). **10,** 1. Podana tu tablica[2]) służy dwojakiemu celowi. Cel pierwszy jest

---

[1]) ...»tak zachowawcza, jak matematyka, która nie burzy prac okresów poprzedzających, by w ich miejsce wznosić nowe budowle«. (HANKEL, Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten, 1885, str. 7). [2]) p. str. 235.

teoretyczny, poznawczy: chcemy dać pewne wyobrażenie o ogromie i rozgałęzieniu matematyki oraz uporządkować znane już czytelnikowi teorje.

Drugi cel tablicy jest praktyczny: ma ona być niejako katalogiem rzeczowym gałęzi matematyki, tak, aby czytelnik, odszukując na tablicy nazwę jakiegoś nieznanego mu zupełnie działu, mógł się zorjentować do jakiej dziedziny badań on należy, co ułatwi szukanie wiadomości o nim. Dlatego staramy się osiągnąć w tablicy możliwą zupełność i wyszczególniamy w niej nawet takie działy matematyki, które z większą może słusznością należałoby uważać jako części innych teorji, niż jako teorje samoistne.

Tablica ta jest tylko bardzo niedokładnym przybliżeniem istotnego stanu rzeczy. Nie można bowiem myśleć o dokładności podziału tam, gdzie się ma do czynienia z tak żywym, rozwijającym się i tak niepodzielnym materjałem, jaki przedstawia matematyka. Matematyka tworzy tak organiczną całość, że niepodobna jej rozczłonkować bez pewnego zniekształcenia. Tymbardziej przy porównywaniu różnych działów ze sobą, wobec braku jakichś ustalonych umów co do mierzenia ważności działów, stopnia ich rozwoju i ścisłości związku z innemi, trzeba się zadowolić oceną bardzo przybliżoną.

Nadmieniamy w szczególności, że uwidoczniliśmy na tablicy tylko te związki między odrębnemi działami, które nam się wydały ważniejsze, lub specjalnie ciekawe, abstrahując od reszty. Stąd już wynika, że tablica ta, oprócz tego, że jest niedokładna, musi być w znacznym stopniu subjektywną: kto inny ułożyłby ją inaczej; my sami moglibyśmy zmienić ten układ na inny. Czytelnik też powinien ją traktować jako próbę, której celem dać mu możność orjentacji w pierwszych chwilach studjów, a w dalszych — tło do tworzenia własnego poglądu (tło może być i kontrastem), materjał do zastanowienia.

Związki pomiędzy działami matematyki są różnego charakteru: wspólność przedmiotu, wspólność metody i charakteru badań, posiłkowanie się rezultatami jednej gałęzi przez inną i wreszcie związek często polega na tym, że jedna nauka jest częścią innej. Tak np. teorja funkcji eliptycznych albo algiebraicznych należy do teorji funkcji analitycznych, a badania stożkowych należą do gieometrji analitycznej lub syntetycznej (zależnie od przyjętej metody badania). Nie uwidoczniamy tych różnic, nadmienię tylko, że przy rozmieszczaniu kierowaliśmy się pokrewieństwem przedmiotu, inne związki oznaczając tylko łączącemi linjami, naogół zaś kierowaliśmy się głównie względem praktycznym: o ile studjowanie jednej nauki jest przydatne lub konieczne do studjowania innej. Opuściliśmy też związki, rozumiejące się same przez się, wynikające z istnienia innych związków.

10, 2. Matematykę dzieli się zwykle na dwa wielkie działy: analizę i gieometrję. Podział ten istnieje rzeczywiście, ale w wyższej matematyce nie jest tak wyraźny, jak się zrazu wydaje. Czy polega on na różnicy badanego przedmiotu? Gieometrja taka, która należy do czystej matematyki, nie bada przestrzeni fizycznej, lecz tylko własności matematyczne tej — i innych — przestrzeni (do nich np. należy czas)[1]). Kto ma chociaż pojęcie o gieometrji analitycznej, ten wie, że badać linję a badać funkcję, jest to w rezultacie prawie to samo; co więcej, w ujętej abstrakcyjnie wyższej gieometrji analitycznej linje i wszelkie inne figury gieometryczne nie są niczym innym, jak właśnie pewnemi równaniami lub innemi utworami analizy. I czy można poważnie twierdzić, że badania, dotyczące figur urojonych i przestrzeni wielowymiarowych, dotyczą widzialnej, czy choćby intuicyjnej przestrzeni?

To samo stosuje się i do nieanalitycznej, t. zw. czystej gieometrji, do której należą: gieometrja elementarna, topologja (w kierunkach DEHNA i SCHOENFLIESA) i gieometrja syntetyczna; dzisiejsze bowiem teorje podstaw gieometrji uniezależniły również i czystą gieometrję od wszelkiego — empirycznego, czy in-

---

[1]) POINCARÉ (Analysis Situs, Journal de l'École polytech., 1895, (2) **1**, str. 1) mówi: »gieometrja nie ma jako jedynej racji bytu opisu bezpośredniego ciał, które podpadają pod nasze zmysły: jest ona przedewszystkim studjum analitycznym grupy«. O pojęciu matematycznej przestrzeni, lepiej *rozmaitości*, będzie mowa w rozdziale: Podstawy gieometrji; o jej stosunku do przestrzeni fizycznej — w rozdziale: Zagadnienia filozoficzne matematyki.

tuicyjnego — elementu przestrzennego. Dla czystej gieometrji jednak można prędzej określić różnicę jej przedmiotu od przedmiotu analizy: gieometrja czysta zajmuje się utworami gieometrycznemi, określonemi przez pewniki bez pomocy l i c z b. Lecz jest to różnica zbyt niejasna.

Na czym więc polega różnica między temi dwiema gałęziami matematyki, szczególniej, gdy gieometrja jest traktowana analitycznie? Najczęściej usłyszymy odpowiedź, że różnią się j ę z y k i e m: jedna n a z y w a przedmioty swych badań linjami, prostemi i t. d., druga zaś funkcjami, równaniami I-go stopnia i t. d. Gdy wnikniemy głębiej w tę odpowiedź, to zobaczymy, że wskazana w niej różnica nie jest powierzchowną: w sposobie nazywania kryje się sposób u j ę c i a rzeczy.

U j ę c i e m przedmiotu i metodą badania — nie zaś przedmiotem — różnią się między sobą analiza i gieometrja. To też większość przedmiotów badań matematycznych bywa traktowana i gieometrycznie i analitycznie, jakby oglądane z dwu stron. Bo każdy fakt da się wypowiedzieć i w języku gieometrji i w języku analizy; tylko, że jeden fakt wyraża się p r o ś c i e j w jednym z tych języków, a inny w drugim. Stąd też powstaje różnica s t a w i a n i a z a g a d n i e ń w obu działach.

10, 3. Bardziej jednak zasadniczym podziałem matematyki wydaje nam się podział na matematykę utworów ciągłych i nieciągłych (discret). Do ostatniej zaliczamy teorję liczb i teorję grup nieciągłych wraz z algiebrą [1]). Do pierwszej — resztę analizy (analizę w znaczeniu ciaśniejszym) i prawie całą gieometrję [2]).

Różnica między temi dwoma działami matematyki jest bardzo znaczna, zarówno w metodzie badań, jak i w przedmiocie

---

[1]) Algiebra wprawdzie zajmuje się wielomianami, które są funkcjami ciągłemi; lecz nie bada ich jako funkcje, w swych dowodach użytku z ciągłości nie robi (wyjąwszy t. zw. *twierdzenie zasadnicze algiebry*), i tylko takie dowody uważamy za właściwie algiebraiczne.

[2]) Z gieometrji do matematyki form nieciągłych możnaby zaliczyć topologję (kierunek Dehna), a także gieometrję elementarną, o ile ta zajmuje się linjami łamanemi, szczególniej zaś dział gieometrji o wielokątach i wielościanach foremnych.

i w zagadnieniach (co nie wyklucza istnienia między niemi głębokiego związku). Zastosowań jednak rezultatów jednego z tych działów do drugiego jest stosunkowo mało.

Podobnym podziałem, ale dotyczącym tylko analizy w ciaśniejszym znaczeniu, jest podział na analizę wielkości zespolonych (funkcji analitycznych) i analizę wielkości rzeczywistych (funkcji dowolnych)[1].

Podział ten jest bardziej zasadniczy niż według przedmiotu, bowiem ze zmianą zakresu badania (ograniczeniem się do funkcji zmiennych rzeczywistych, lecz za to znosząc ograniczenie, że mają być one analitycznemi) zmieniają się i zagadnienia, zmieniają i metody, co zmienia cały charakter badania[2].

10, 4. Pozostaje nam powiedzieć słów parę o podziale matematyki na elementarną i wyższą; rozumie się jest to podział konwencjonalny; w praktyce matematyką elementarną nazywamy działy, wchodzące w zakres nauczania w szkole średniej i bezpośrednie ich rozwinięcia, bez wprowadzenia nowych pojęć, a więc całą gieometrję grecką i algiebrę średniowieczną.

Matematyka rozwija się, tworząc nowe, coraz bardziej złożone pojęcia, które coraz to dalsza droga dzieli od pojęć prostych, będących jej punktem wyjścia; wprowadzenie każdego takiego nowego pojęcia — każde wejście na nowy poziom abstrakcji — można uważać za przejście do »wyższego« szczebla matematyki. Ten podział na szczeble będzie oczywiście dla każdej gałęzi matematyki różny i scharakteryzowany przez wprowadzenie różnych nowych pojęć.

Jednak wprowadzenie pojęcia *granicy*, bardzo ważnego, tworzy przeskok najbardziej wydatny, tak, że możemy pojęcie to uważać za kamień graniczny, znaczący przejście do matematyki wyższej. Występuje ono wprawdzie już w gieometrji elementarnej przy obliczaniu pola koła i t. p., ale właściwie jest to już wkraczanie do matematyki wyższej, do rachunku całkowego.

---

[1]) Gdybyśmy chcieli rozciągnąć podział ten i na gieometrję, to do matematyki utworów dowolnych (rzeczywistych) zaliczyć należy topologję (kierunek Schoenfliesa) i teorję krzywych dowolnych.

[2]) O tym podziale por. Rozwiniecia na szeregi.

Wystarczającym jednak dla scharakteryzowania matematyki wyższej ono nie jest, gdyż nie w każdej gałęzi matematyki zostaje wprowadzone i nie odgranicza matematyki elementarnej np. od algiebry wyższej, ani od teorji liczb.

Znaczenie takie wyrazu »elementarny« utarło się także w analizie wyższej: nazywamy tam zwykle »elementarnym« każdy dowód, posługujący się tylko pojęciami teorji liczb i algiebry (choćby bardzo złożonemi i trudnemi) bez używania pojęcia granicy, co wcale zresztą nie oznacza, żeby on miał być łatwiejszy od dowodu analitycznego.