TOPOLOGJA.

OPRACOWAŁ

ZYGMUNT JANISZEWSKI.

---

1. *Topologia*, zwana także *Analysis situs*, jest nauką o takich własnościach utworów gieometrycznych, które nie znikną, gdy utwory przekształcimy w dowolny sposób ciągły i jedno-jednoznaczny [1]), czyli takich, które nie znikną po dowolnym wygięciu i rozszerzeniu lub skurczeniu się figury (bez rozdarcia i bez zlepienia w jakimkolwiek miejscu) [2]). W pierwszej chwili

[1]) t. j. taki, że każdemu punktowi danej figury odpowiada jeden i tylko jeden punkt figury przekształconej (*jednoznaczność*), oraz parze zbliżających się nieskończenie punktów — para punktów, również nieskończenie zbliżających się (*ciągłość*), i odwrotnie. Wyrażenie *jedno-jednoznaczny* (*ein-eindeutig*) oznacza to samo, co odwracalnie jednoznaczny. W tym samym znaczeniu bywa używany po polsku niezbyt udatny wyraz *dwujednoznaczny* (z francuskiego *biunivoque*).

[2]) Poglądowo możemy sobie tak wyobrazić przedmiot naszych badań: jeśli mamy jakiś przedmiot z gnącego się materjału, np. kawałek sznurka ze zszytemi ze sobą końcami, to opisując jego kształt nie będziemy mówili o chwilowych jego własnościach (czy jest on kołem, elipsą lub trójkątem, co zależy od tego, jak go ułożymy), lecz o tych stałych, istotnych własnościach kształtu, które się nie zmieniają wraz ze zmianą warunków; a więc: że nie ma on końców, że jest linją zamkniętą, że posiada taką

25*

można mieć wrażenie, że żadna własność figury przy tak dowolnych przekształceniach nie zostanie zachowana (bo rzeczywiście, prawie żadna z tych, których badaniem zajmują się inne działy gieometrji, zachowaną nie zostaje): możemy trójkąt przekształcić np. na kwadrat, na koło i t. p. i to na dowolnie wielkie lub małe. Jednak po zastanowieniu się staje się oczywistym — co można (i naturalnie trzeba) ściśle udowodnić — że odcinka prostej nie można przekształcić [1]) w sposób ciągły na okrąg koła; należało by chyba zlepić końce odcinka, a to, jak wiemy, nie jest dozwolone. Zamkniętość linji jest więc taką własnością niezmienną, której badaniem zajmuje się topologja.

a taką długość. Gdybyśmy jednak w dodatku sobie wyobrazili, że jest on zrobiony z materjału, który rozciąga się i kurczy dowolnie (częściowo własności te posiada guma), to musielibyśmy przestać mówić o jego długości, ograniczając się przy jego opisie do takich własności, jak zamkniętość, t. j. do własności rozpatrywanych właśnie przez topologję. Podobnie, gdy mówimy o kształcie pewnego człowieka, mamy na myśli tylko pewne niezmienne własności tego kształtu (niezmienne wobec przekształceń innych, niż w topologji), gdyż człowiek siedzący ma — w zwykłym znaczeniu, ze stanowiska gieometrji elementarnej — kształt inny, niż człowiek stojący, inny przy zgięciu ręki, a inny przy jej wyprostowaniu (por. przypisek na str. 398).

Tu musimy odrazu rozstrzygnąć jedną mogącą się nasunąć wątpliwość: nasze określenie ciągłości przekształcenia jest niezupełnie zgodne z podanym jego objaśnieniem poglądowym. Gdybyśmy chcieli otrzymać takie przekształcenie zupełnie ogólne, należałoby przyjąć obok giętkości i rozszerzalności jeszcze przenikalność figury. O ile przenikalność odrzucamy, to otrzymamy specjalny dział topologji (*Connexus*), w którym nie rozważa się figury samej w sobie, lecz w stosunku do reszty przestrzeni i rozpatruje tylko przekształcenia całej przestrzeni wraz z daną figurą. Tak np. posiadanie węzła przez linję zamkniętą (model takiej linji otrzymamy zawiązawszy węzeł na kawałku sznurka i potym połączywszy jego końce; p. fig. 24) nie jest jej własnością niezmienną, jeśli będziemy rozpatrywali tę linję samą w sobie; będzie zaś, gdy ją będziemy rozważali w łączności z przestrzenią trójwymiarową, w której się ta linja znajduje.

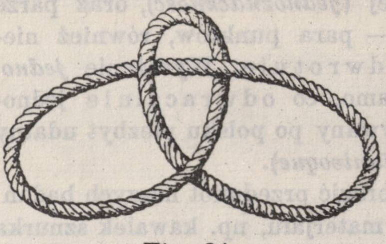

Fig. 24.

[1]) Mówiąc o przekształceniu w tym rozdziale, mamy zawsze na myśli przekształcenie ciągłe i jedno-jednoznaczne.

2. Nauka ta powstała dość późno, w połowie w. XIX. Pierwszą pracą w tym kierunku, napisaną ze świadomością, że mamy tu do czynienia z nauką nową, była praca LISTINGA: Vorstudien zur Topologie (w Göttinger-Studien 1847 r.). Od niej zwykle datuje się powstanie topologji. Jednak znacznie wcześniej zajmował się różnemi należącemi tu zagadnieniami EULER (1707—1783) (p. niżej).

Prawie jednocześnie z LISTINGIEM zajął się, zmuszony do tego swemi badaniami z teorji funkcji analitycznych, zagadnieniami topologicznemi RIEMANN (1826—1866) w swej pracy doktorskiej[1]) (1851) oraz w Theorie der ABEL'schen Funktionen (1857). Prace RIEMANNA mają to historyczne znaczenie dla topologji, że pierwsze wykazują jej związek z resztą matematyki (z teorją funkcji analitycznych), co było konieczne do zainteresowania nią ogółu matematyków. Pomimo to jednak topologja pozostała zawsze na uboczu od głównego prądu matematyki w. XIX, gdyż była mu obcą swemi zagadnieniami, metodami i ogólnością przedmiotu, do jakiej prowadziło pojęcie dowolnego ciągłego jedno-jednoznacznego przekształcenia, ogólnością, z którą nie umiano sobie w owym czasie dać rady, a która i dziś jeszcze przy nowych metodach i pojęciach nastręcza poważne trudności. Skutkiem tego rozwój jej był powolny.

Początkowe odkrycia i teorje wyrosły z obserwacji, drogą indukcyjną, empiryczną niemal, jak to było i w innych gałęziach matematyki, które nie są tylko przedłużeniami i rozgałęzieniami już istniejących, lecz wyrastają wprost z podstaw (np. gieometrja elementarna, teorja liczb). Dowody podawane przez pierwszych autorów (EULER, LISTING, po części RIEMANN, MÖBIUS) — o ile oni je wogóle podają — są zupełnie niewystarczające. Pierwsze rozpatrywane tematy były zaczerpnięte z gier i zabaw matematycznych. Jednym np. z tematów EULERA było *zagadnienie o 7-miu mostach w Królewcu:* mosty, rozmieszczone jak na fig. 25, należało przejść jednym ciągiem, przez każdy

[1]) Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Grösse (Inaugural dissertation).

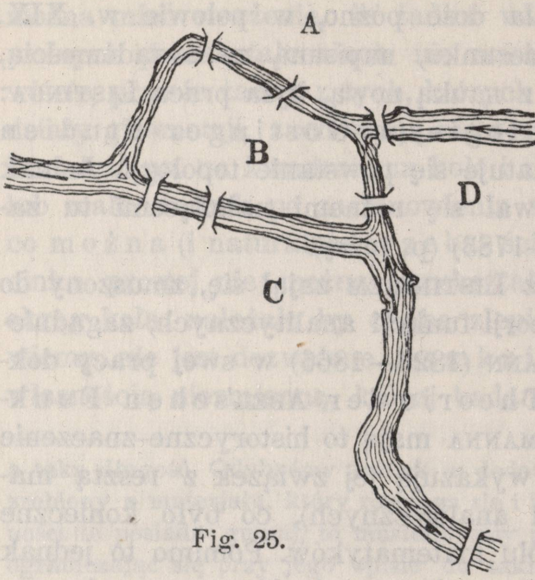

Fig. 25.

raz i tylko raz jeden. EULER wykazał, że zadanie to jest niemożliwe i podał warunek wystarczający i konieczny do tego, aby można było przejść w sposób ciągły po wszystkich odcinkach linji, złożonej ze skończonej liczby łuków, łączących skończoną liczbę punktów danych, nie przechodząc po żadnym łuku dwa razy. Warunkiem tym jest, aby nie było wcale punktów, z których wychodzi nieparzysta ilość odcinków lub było ich tylko dwa. Zagadnienie to należy do topologji, gdyż własność linji, że można przejść w sposób ciągły wszystkie jej odcinki, nie zniknie, gdy linję będziemy giąć, kurczyć i rozszerzać, byleby połączenie poszczególnych jej odcinków ze sobą nie uległo zmianie; zagadnienie o 7-miu mostach w Królewcu sprowadzi się zatym do rozważania linji, przedstawionej na fig. 26.

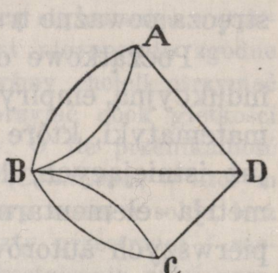

Fig. 26.

3. Do topologji należy także *twierdzenie* EULERA, orzekające, że suma liczby wierzchołków (w) i liczby ścian (s) wielościanu (wypukłego) równa się liczbie krawędzi (k) powiększonej o 2:

$$w + s = k + 2,$$

gdyż stosuje się nietylko do wielościanów. W twierdzeniu tym bowiem chodzi o krawędzie nie jako linje proste i nawet nie jako linje załamania — te ich własności mogą po przekształceniu zniknąć, nie mogłyby zatym być przedmiotem topologji — lecz o krawędzie, jako o linje podziału prowadzone na powierzchni zamkniętej (wielościanu); tak samo wierzchołki rozpatrujemy tu tylko jako punkty, w których schodzą się różne łuki wspomnianych linji (które są dla wielościanów krawędziami), a ściany — jako obszary, na które te linje podzieliły rozpatrywaną powierzchnię zamkniętą. Jakkolwiek przekształcimy wielościan, to liczby tych łuków, punktów i obszarów nie zmienią się i pozostaną w tym samym związku, chociaż krawędzie i ściany mogą się powykrzywiać, kanty i kąty pozaokrąglać; związek więc między temi liczbami należy do prawd topologicznych. Przedmiotem badania jest tu wzajemny stosunek 3 rodzai figur gieometrycznych: powierzchni, leżącej na niej siatki linji i leżącego na tej ostatniej zbioru punktów (DEHN nazywa dział topologji, który zawiera takie badania, *Complexus*).

Twierdzenie EULERA nie jest ogólnym: stosuje się tylko do wielościanów [1]), które dadzą się przekształcić na kulę (ten warunek jest spełniony dla wszystkich wielościanów wypukłych). Istnieją jednak powierzchnie zamknięte, które są topologicznie różne od kuli (t. j. nie dadzą się na kulę przekształcić); taką przedstawia np. wielościan na fig. 27, do którego też nie stosuje się twierdzenie EULERA, co czytelnik może sprawdzić, przeliczając wierzchołki, krawędzie i ściany [2]).

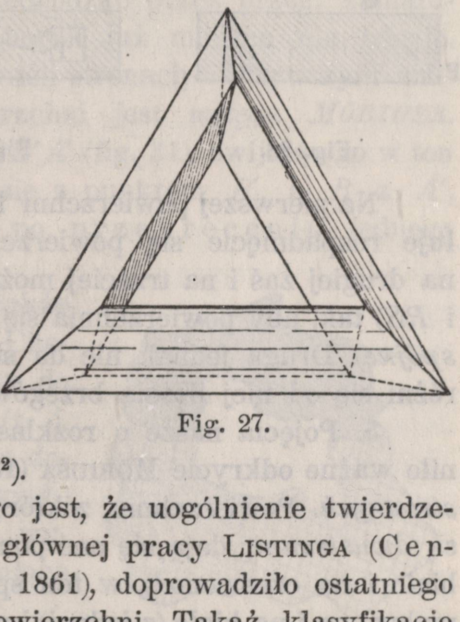

Fig. 27.

4. Zrozumiałym wobec tego jest, że uogólnienie twierdzenia EULERA, które było celem głównej pracy LISTINGA (Census räumlicher Complexe, 1861), doprowadziło ostatniego do rozklasyfikowania powierzchni. Takąż klasyfikację przeprowadzili RIEMANN i MÖBIUS (1790—1868). Jest to najważ-

[1]) Ogólniej: do powierzchni przekształcalnych na kulę, podzielonych łukami na obszary, dające się przekształcić na powierzchnię koła.

[2]) Wymienimy tu wyczerpujące dzieło o teorji wielościanów:

M. BRÜCKNER. Vielecke und Vielfache. Theorie und Geschichte. Mit 7 lithographierten und 5 Lichtdruck-Doppeltafeln. Lipsk, 1900; stronic VIII + 227. Cena w oprawie m. 16.

niejszy dział topologji ze względu na zastosowania w teorji funkcji analitycznych, w szczególności funkcji wieloznacznych, które klasyfikujemy według rodzaju odpowiadających im t. zw. *powierzchni RIEMANNA*[1]). Powierzchnie klasyfikujemy według liczby brzegów i według t. zw. spójności. *Spójność* mierzymy maksymalną ilością przecięć, łączących brzegi powierzchni[2]), które można przeprowadzić na powierzchni, nie wywołując jej rozpadnięcia się. Własności te nie znikają przy przekształcaniu. Jako przykład, rozważamy: 1) powierzchnię prostokąta (fig. 28), 2) powierzchnię prostokąta z dwoma otworami (fig. 29) i 3) powierzchnię utworzoną z poprzedniej przez połączenie otworów rurką (fig. 30).

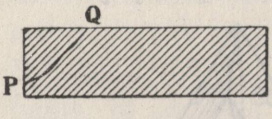

Fig. 28.

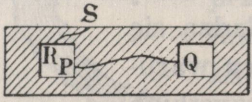

Fig. 29.

Fig. 30.

Na pierwszej powierzchni każde cięcie (np. linja *PQ*) wywołuje rozpadnięcie się powierzchni (powierzchnia *jednospójna*), na drugiej zaś i na trzeciej można zrobić po dwa cięcia (np. *PQ* i *RS*) tak, aby powierzchnia się nie rozpadła (powierzchnie *trójspójne*). Druga jednak nie da się przekształcić w trzecią, która różni się od niej ilością brzegów.

5. Pojęcia nasze o rozklasyfikowaniu powierzchni uzupełniło ważne odkrycie MÖBIUSA (1858) istnienia *powierzchni jednostronnych*. Powierzchnie, z któremi zwykle mamy do czynienia, są *dwustronne:* dają się one pomalować dwiema farbami, np. na biało i na czerwono[3]), w ten sposób, iż każdy punkt będzie pomalowany i na biało (z jednej) i na czerwono (z drugiej strony powierzchni) i barwy te nigdzie nie będą się ze sobą stykały; chcąc

---

[1]) *Powierzchnia RIEMANNA* jest to forma (lub, jeśli kto woli, uzmysłowienie) rozłożenia wartości funkcji wieloznacznych.

[2]) Na powierzchni bez brzegów, t. j. zamkniętej, za pierwsze przecięcie używana jest linja zamknięta (t. j. linja, która jest przekształceniem koła).

[3]) Podajemy tu poglądowe określenie dwu i jednostronności powierzchni. Naturalnie istnieje określenie ścisle, zupełnie abstrakcyjne.

przejść od jednej barwy do drugiej, trzeba przejść przez brzeg. Tak np. można rozróżniać dwie strony powierzchni koła; podobnie »stronę wewnętrzną« i »zewnętrzną« kuli. Na powierzchni jednostronnej takie pomalowanie na dwie barwy jest niemożliwe: zacząwszy malować np. na czerwono w jednym miejscu, ma-

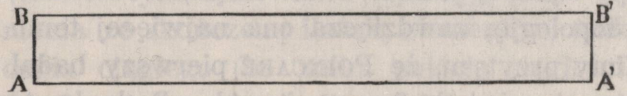

Fig. 31.

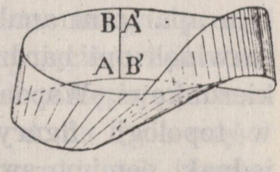

Fig. 32.

lując w sposób ciągły i nie przechodząc przez brzeg, zamalujemy ją całą tak, że na drugą barwę już miejsca nie będzie. Nie można tu więc mówić o »dwuch stronach«. Pierwszym znanym przykładem takiej powierzchni jest *wstęga* MÖBIUSA. Otrzymujemy ją z prostokąta $ABB'A'$ (fig. 31), zwijając go w ten sposób, aby punkt A połączył się z punktem B', a B z A', czyli łącząc bok AB z $A'B'$ po przekręceniu jednego z nich (fig. 32).

6. Do topologji należy także t. zw. *zagadnienie czterech barw*. Chodzi w nim o rozstrzygnięcie, czy do pokolorowania każdej »mapy« (t. j. części płaszczyzny podzielonej na dowolną ilość obszarów częściowych) wystarczą 4 barwy, przyczym wymagamy, aby każde dwa sąsiadujące obszary miały barwy różne [1]).

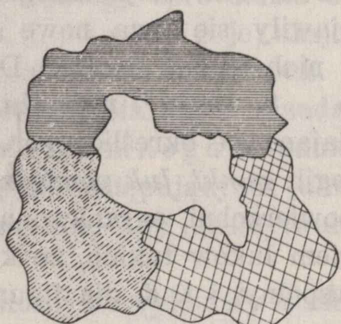

Fig. 33.

Nie znamy żadnego podziału płaszczyzny na obszary, aby takie pokolorowanie z pomocą 4 barw miało być niemożliwe. (Że to może być niemożliwe przy pomocy 3 barw, to wykazuje już fig. 33). Wydaje się bardzo prawdopodobnym, że 4 barwy

[1]) Zadowalamy się i tu sformułowaniem poglądowym.

zawsze wystarczą, dowodu jednak na to dotychczas znaleźć nie udało się [1]).

7. Późniejsi badacze chwycili się ściślejszych środków badania. Tam, gdzie nie wystarczała prosta kombinatoryka (jak w zadaniach, podobnych do zagadnienia o 7-miu mostach), prowadzono badania przy pomocy gieometrji analitycznej z całym aparatem analizy wyższej (Betti, Van Dyck, Poincaré); rozwinęli oni bardzo topologję; zawdzięcza ona najwięcej temu kierunkowi. Wspomnimy przytym, że Poincaré pierwszy badał w topologji figury o więcej niż 3 wymiarach. Badania te jednak, pomimo swych rezultatów, nie wszystkich zadowoliły, gdyż było to badanie nie bezpośrednie, lecz za pośrednictwem pojęć obcych topologji, a o wiele bardziej złożonych niż właściwe pojęcia topologiczne (np. pojęcie całki).

Estetyczne i poznawcze względy wymagały, aby narzędzie badania odpowiadało przedmiotowi badanemu i było odeń prostsze. Możliwym to jednak stało się dopiero w czasach najnowszych, w naszym wieku, gdy uzyskały większą popularność: »metoda aksjomatyczna« (p. Podstawy gieometrji; por. też Zakończenie) i teorja mnogości. Odpowiednio do tych dwuch metod zjawiły się dwa nowe kierunki; za przedstawiciela jednego z nich można uważać Dehna, drugiego — Schoenfliesa.

8. Dehn [2]) rozważa jako przedmioty pierwsze (t. j. nie dające się określić; por. Podstawy gieometrji) w topologji: *punkt, łuk* pomiędzy dwoma punktami [3]), *czaszę*, t. j. część powierzchni, ograniczoną linją zamkniętą (t. j. zamkniętym ciągiem łuków takich, że każde dwa przyległe mają jeden koniec wspólny) i t. d. dla figur więcej wymiarowych.

---

[1]) Zapoznać się bliżej z tym zagadnieniem można z pracy (w której jest też podana dotycząca go literatura):

P. Wernicke. Über den kartographischen Vierfarbensatz. Mat. Ann., t. 58 (1904).

[2]) Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, t. III, zesz. 1.

[3]) Możemy przyjąć takie założenie, gdyż, jak wiemy, dwa odcinki (linji prostych czy krzywych) — bez względu na różnice ich długości i krzywizny — są dla topologji tak samo jednakowe, jak dwa punkty lub dwie proste dla gieometrji zwykłej.

Co do tych, nie dających się określić, przedmiotów, topologja stawia szereg założeń (*aksjomatów*; por. Podstawy gieometrji), podzielonych na dwie grupy: postulaty istnienia (istnieje nieskończenie wiele punktów, między dwoma punktami istnieje nieskończenie wiele łuków i t. d.) i postulaty rozkładu (każdy łuk PQ można »rozłożyć« na dwa PR i RQ i t. d.).

W tym ujmowaniu topologji, gdzie zawsze mamy do czynienia ze skończoną ilością elementów, znika pojęcie przekształcenia ciągłego (bo znika pojęcie ciągłości), a zastępuje je *rozkład* należących do figury łuków, czasz i t. d. na dwie części i więcej; topologja staje się częścią kombinatoryki, jak to sam Dehn zaznacza. Należy tu podnieść, że zasługą takiego traktowania rzeczy jest uchwycenie istotnych dla topologji cech figur gieometrycznych i oczyszczenie jej od wszelkich elementów obcych.

9. Lecz jeśli się stoi przy określeniu topologji podanym na początku, jeśli się chce utrzymać związek tej nauki z resztą gieometrji, a nie tworzyć nauki niezależnej o nowych pojęciach pierwszych i nowych aksjomatach, to trzeba odpowiedzieć na pytania: jaka figura jest »łukiem«, jaka »czaszą«; innemi słowy, należy pojęcia pierwsze topologji sprowadzić do pojęć pierwszych dla całej gieometrji, t. j. określić je; aksjomaty zaś nowe udowodnić za pomocą ogólnie przyjętych.

Teorja mnogości daje nam możność zajęcia się tym zadaniem: każda bowiem figura jest to zbiór czyli mnogość punktów. Pytania poprzednie sprowadzają się do następujących: jakie własności musi posiadać mnogość punktów, aby zasługiwała na nazwę łuku i t. d.

Badania te przyniosły inną jeszcze korzyść: wykazały istnienie takich figur gieometrycznych, które nie są ani łukami, ani czaszami i t. d., ani też ich zbiorem w skończonej liczbie, czyli nie dają się sprowadzić do pojęć pierwszych, przyjętych przez Dehna, dla których więc niema miejsca w jego teorji.

Pierwszym i zarazem najbardziej znanym przykładem badań z tej dziedziny jest twierdzenie Jordana (Cours d'Analyse, wyd. 2-ie, 1893 lub 3-ie, 1909 r., t. I, str. 90—100), że każda linja *zwykła* (*simple, einfach*) *zamknięta* (t. j. będąca przekształceniem koła) położona na płaszczyźnie dzieli nie należące do niej punkty tej płaszczyzny na dwie grupy: leżące wewnątrz i zewnątrz linji. Przedtym matematycy przyjmowali to twierdzenie za oczywiste, bez dowodu [1]).

---

10. Jak widać z powyższego przedstawienia treści topologji, jest ona niezbyt jednolita; wynikło to prawdopodobnie z dorywczości, z jaką była zazwyczaj traktowana przez swych twórców; dlatego też różne jej działy wymagają różnego przygotowania.

Traktaty starsze nie wymagają żadnego przygotowania i czytają się łatwo.

Z nowych żadnego również przygotowania nie wymagają prace kierunku DEHNA, prace zaś kierunku SCHOENFLIESA wymagają tylko jednej części teorji mnogości (t. zw. teorji mnogości punktów) oraz pewnego obznajmienia się z podstawami gieometrji. Pomimo to prace, należące tak do jednego, jak i do drugiego z tych dwuch nowych kierunków, wymagają dużego wyrobienia matematycznego i dużej zdolności myślenia abstrakcyjnego.

Wreszcie prace, posiłkujące się przedstawieniem analitycznym, wymagają dosyć dużo wiadomości z analizy wyższej (np. całek krzywolinjowych, wyznacznika funkcyjnego i t. p.), głównie znajomości rachunku całkowego i teorji funkcji zmiennej rzeczywistej.

11. Stojąc sama u podstaw matematyki i tylko na nich się wspierając (na kombinatoryce, teorji mnogości, podstawach gieometrji), topologja znajduje zastosowanie w matematyce jedynie do teorji funkcji analitycznych, nauki najbardziej rozwiniętej (głównie przy całce CAUCHY'EGO i funkcjach wieloznacznych: *powierzchniach RIEMANNA*). Wytłumaczyć to można tym, że klasy, na które topologja dzieli figury gieometryczne, są tak obszerne, iż wszystkie inne działy matematyki, mniej rozwinięte od teorji funkcji, nie wyszły poza obręb najpro-

[1]) Najprostszy dowód twierdzenia JORDANA podaje L. E. J. BROUWER: Beweis des Jordanschen Kurvensatzes. Math. Ann., t. 69 (1910); str. 169—175.

stszych z nich, a więc i nie miały potrzeby oddzielnego ich badania [1]).

Zwykle w większych podręcznikach teorji funkcji analitycznych podawane są potrzebne do ich czytania wiadomości

[1]) Poza ten obręb wychodzą niedawno zaczęte i bardzo nieliczne badania nad *krzywemi dowolnemi*, przez co zbliżają się do topologji. Polegają one na badaniu klas krzywych takich, że część ich — w przeciwieństwie do krzywych analitycznych — nie określa całej krzywej. W analizie podobnie ogólne badania rozwinęły się (p. Rozwinięcia na szeregi, § 5) już oddawna. Najbardziej zbadane są krzywe zamknięte wypukłe, t. j. takie, które dowolna prosta przecina najwyżej w dwu punktach; znalazły one bowiem różne zastosowania, np. w teorji liczb, w teorji funkcji.

Najważniejszemi pracami z tej dziedziny są:

H. Brunn. Ueber Ovale und Eiflächen. Inaugural-Dissertation, Monachjum, Ackermann, 1887; str. 42.

H. Brunn. Ueber Curven ohne Wendepunkte. Habilitationsschrift, Monachjum, Ackermann, 1889; str. 74. Są to najpierwsze prace w tej dziedzinie, łatwe i interesujące.

H. Minkowski. Geometrie der Zahlen. Lipsk, Teubner, 1896; drugie wydanie pośmiertne, uzupełnione, 1910; str. 256. Cena m. 9.

Jest to jedno z głównych dzieł z teorji liczb zmarłego niedawno (1909) uczonego niemieckiego, profesora w Gietyndze, w znacznej części poświęcone zajmującym nas badaniom gieometrycznym; napisane bardzo abstrakcyjnie i bardzo trudne, aczkolwiek przygotowania nie wymaga żadnego. (Zastosowania teorji ciał wypukłych do teorji liczb — co jest podstawową ideą »Gieometrji liczb« — znajdują się także w wykładzie przystępnym w ładnej książce Minkowskiego: Diophantische Approximationen; p. Teorja liczb, str. 200.)

H. Minkowski. Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs, w Gesammelte Abhandlungen, wydanych przez D. Hilberta, t. 2, Lipsk, Teubner, 1911; str. 131—229. Napisane łatwiej; także i inne prace w tym zbiorze dotyczą tegoż przedmiotu.

A. Hurwitz. Sur quelques applications géometriques des séries de Fourier. Annales de l'École Normale, serja 3, t. 19, str. 357—408. Praca ta wymaga znajomości teorji szeregów trygonometrycznych. Bogata w rezultaty i wyróżniająca się elegancją, czyta się z prawdziwą rozkoszą estetyczną.

C. Juel. Inledning i Laeren om de grafiske Kurver (avec résumé en français). Kjöbenhavn Skrift, 1899; str. 1—90.

C. Juel. Om ikke-analytiske Kurver. Tamże, 1906; str. 296—355.

Prace te, zawierające dużo rezultatów, są niestety napisane po duńsku. Obszerne sprawozdania podaje Jahrbuch über Fortschritte der Mathematik z r. 1900 i 1907 (t. 31 i 38).

z topologji, w niektórych dość obszernie (np. P. Appel et É. Goursat, Théorie des fonctions algébriques. C. Neumann, Riemanns Theorie der Abelschen Integrale), lecz zazwyczaj nie ściśle, metodą starszych autorów.

Zbudowaną z matematyczną ścisłością teorję topologiczną powierzchni z zastosowaniem do powierzchni Riemanna znajdzie czytelnik w książce, bardzo godnej czytania:

H. Weyl. Die Idee der Riemannschen Fläche (tom V zbioru Math. Vorlesungen a. d. Universität Göttingen). Lipsk, Teubner, 1913; str. X + 169. Cena m. 7.

Poza matematyką topologja zastosowań nie ma [1]).

Kto jednak szuka w matematyce wiedzy czystej, temu — mówimy tu także o niematematykach, mając na myśli szczególniej filozofów — można bardzo polecić zaznajomienie się z topologją w ogólnych zarysach w celu wykształcenia ogólnego. Wykryte bowiem przez topologję paradoksalne własności prostych figur (np. powierzchnia jednostronna) uczą, jak rozumować nie można i jak często poczucie oczywistości polega na przyzwyczajeniu. Nowsze zaś badania, oparte na teorji mnogości, nad intuicyjnemi, zdawałoby się, pojęciami gieometrycznemi, jak np. pojęciem »linji«, wykazują, jak chwiejne są one i jak błędne są określenia, które często są podawane dla tych pojęć.

Niestety krótki i przystępny wykład topologji nie istnieje. Kto nie chce włożyć w poznanie jej wiele pracy, ten musi poprzestać na artykułach o charakterze encyklopedycznym. Najlepiej w takim razie przeczytać artykuł Mangoldta i Zorettiego w wyd. francuskim Encykl. nauk matem. (lub przynajmniej rozdział o topologji, str. 126—142, w Couturata, Les principes des Mathématiques, 1905; tłum. niem., 1910) i artykuł Dehna w wyd. niem. Repertorjum Pascala (p. niżej).

---

[1]) Można przypuścić, że w przyszłości nauki przyrodnicze (głównie opisowe), których przedmioty nie posiadają kształtów ściśle określonych lecz są zmienne w pewnych granicach, zapożyczą właśnie od topologji i od wspomnianej w poprzednim przypisku teorji krzywych dowolnych sposoby opisywania i badania tych kształtów. Dotychczas stoi temu na przeszkodzie mały rozwój powyższych działów matematyki. W każdym razie możnaby zwrócić na nie uwagę przyrodników, którzy szukają dróg nowych.

12. Kto szuka w matematyce rozrywki, znajdzie w topologji więcej może, niż w którymkolwiek innym dziale matematyki, ciekawych zadań i łamigłówek (należą tu i zadania konikowe). Do tego celu polecamy dzieło:

W. AHRENS. Mathematische Unterhaltungen und Spiele. Lipsk, Teubner, 1901; str. 428. Cena m. 10.

Wykład przystępny dla każdego czyni zarazem zadość wymaganiom naukowym. Podana wyczerpująca bibljografja. Do topologji należą tematy gier i zabaw, opisanych w rozdziałach: XI (zadanie konikowe) i XVI—XIX. W drugim, dwutomowym wydaniu tego dzieła ukazał się dopiero tom I (Teubner, 1910; str. 400. Cena m. 7.50), zawierający rozdziały I—XI, więc topologji trzeba szukać w pierwszym wydaniu.

13. Podręczników do topologji — poza wymienionemi w § 11, a zawierającemi tylko topologję powierzchni — niema; całokształt jej przedstawiony jest w pracy:

III AB 3. M. DEHN und P. HEEGAARD. Analysis situs. Encykl. der mathem. Wissensch., t. III, z. 1 (1907).

Praca ta jest bardzo nieprzystępna. Czytanie jej wymaga wielkiego wyrobienia zdolności myślenia abstrakcyjnego; przytym nie jest to wykład, lecz raczej zbiór rezultatów.

Jasny, ale bardzo krótki (21 str.) jest artykuł DEHNA p. t. Topologie w dziele (por. str. 140):

E. PASCAL. Repertorium der höheren Mathematik; 2-ie wyd. niem. T. II, cz. 1: Grundlagen und ebene Geometrie. Lipsk, Teubner, 1910. Cena m. 10. W oryginale i w innych wydaniach (także w polskim DICKSTEINA) artykułu tego niema; w rozdziale o topologji podany jest tylko szereg określeń i rezultatów, oraz obszerna literatura.

W pracach powyższych nie jest uwzględniony ten dział topologji, któryśmy związali z nazwiskiem SCHOENFLIESA; co do tego działu, patrz:

A. SCHOENFLIES. Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Bericht von... Część 2-a. Lipsk, Teubner, 1908; str. 431.. Cena m. 12.

Do topologji można zaliczyć całą treść tego tomu, z wyjątkiem dwuch pierwszych rozdziałów i ostatniego, więc str. 72—263.

Dzieło to napisane bardzo trudno, metodą, odpowiadającą wszystkim wymaganiom ścisłości, nie jest jednak wolne od błędów, wynikających z niedość ścisłego zastosowania tej metody wskutek wielkiej ilości traktowanego materjału. Dlatego należy tę pracę porównać z artykułem:

L. E. J. Brouwer. Zur Analysis situs. Math. Ann., t. 68, 1910, w którym wykazane są błędy, oraz odpowiedź:

A. Schoenflies. Bemerkung zu dem Aufsatz des Herrn L. E. J. Brouwer, tamże.

Praca Schoenfliesa nie uwzględnia najnowszych rezultatów; szukać ich należy w artykule:

III 2. H. Mangoldt-L. Zoretti. Les notions de ligne et de surface. Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Édition française, Tome III, vol. 1, fascicule 1, 2. Wyszedł dopiero początek tego artykułu w z. 1-m

Polecamy porównać tę pracę z rozdziałami 19—23 zawartego w tym samym zeszycie Encyklopedji (albo w wyd. niemieckim w tym samym zeszycie, co wspomniany artykuł Dehna i Heegaarda; rozdziały: 12—16) artykułu:

III 1. F. Enriques. Principes de la Géometrie.

We wszystkich tych pracach znajdujemy bibljografję przedmiotu.

Ze starszych dzieł, mających prawie tylko historyczne znaczenie, wymienimy:

J. B. Listing. Census räumlicher Complexe. Göttinger Abhandlungen X, 1861; Göttinger Nachrichten, 1867.

A. F. Möbius. Theorie der elementaren Verwandschaft. Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, math.-physik. Klasse, t. 15, 1863: str. 18—57, przedrukowane w Gesammelte Werke, wydanych przez F. Kleina, Lipsk, 1886, t. 2, str. 435—471; oraz:

A. F. Möbius. Zur Theorie der Polyëder und der Elementarverwandschaft (Nachlass), w tym samym tomie dzieł, str. 519—559.

Do najważniejszych prac należą:

W. v. Dyck. Beiträge zur Analysis situs: I Aufsatz. Ein- und zweidimensionale Mannigfaltigkei-

ten. Math. Annalen 32; stronic 56. II Aufsatz. Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen. Math. Ann. 37; str. 44.

H. Poincaré. Analysis situs. Journal de l'École Polytechnique. Série 2, cahier 1, 1895; stronic 121.

— Complément à l'Analysis situs. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo; t. XIII, 1899; stronic 59.

— Second complément à l'Analysis situs. Proceedings of the London Mathematical Society; t. XXXVII.

— Troisième complément à l'Analysis situs. Bulletin de la Société Mathématique de France, 1901.

— Quatrième complément à l'Analysis situs. Journal de Liouville, 1901.

— Cinquième complément à l'Analysis situs. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1904; stronic 66.

Najważniejszemi są: pierwsza praca, oraz pierwszy i piąty »complément«.

Wiele twierdzeń zasadniczych i ci dwaj ostatni autorowie podają bez dowodu, powołując się tylko na ich oczywistość gieometryczną.