ZAKOŃCZENIE.

NAPISAŁ

ZYGMUNT JANISZEWSKI.

Treść: 1. Współczesny rozwój matematyki. Rewizja podstaw matematyki. 2. Powstanie nowych gałęzi matematyki. Teorja mnogości. Pojęcie grupy. 3. Metoda aksjomatyczna. 4. Badania funkcji zmiennych rzeczywistych. 5. Przyszłość matematyki. Antynomje teorji mnogości. 6. Znaczenie matematyki.

---

1. Matematyka jest dziś w pełni swego rozwoju. Posuwamy się naprzód z szybkością olbrzymią. Wartość plonu pracy naszego pokolenia ocenić krytycznie będą mogły wprawdzie dopiero pokolenia przyszłe, obfitość jednak tego plonu widzimy już dzisiaj.

Nie mamy tu na myśli zdobyczy matematyki w XIX stuleciu, nie cofamy się o lat 100 lub nawet 50: co do trwałej wartości zdobyczy tego okresu wątpliwości już być nie może. Prawie wszystkie działy matematyki, któremi dziś się zajmujemy, albo w tym czasie powstały, albo uległy gruntownemu przeobrażeniu: wzbogaciły się nowemi, zasadniczemi pojęciami; zostały ugruntowane według wymagań matematycznej ścisłości (Abel, Cauchy), przeciw której grzeszył często wiek XVIII; zagadnienia bądź powstały nowe, bądź w nowy sposób zostały postawione. Jednym słowem, każda piędź matematyki, nasz cały sposób myślenia przesiąknięte są twórczemi pierwiastkami, pochodzącemi z tego okresu. Aby sobie to uprzytomnić, dość wspomnieć nazwiska: Gauss i Cauchy, Galois, Abel, Poncelet, Dirichlet, Riemann, Kummer, Weierstrass, — których część lub całość działalności na ten przypada okres.

Tutaj ograniczamy się do doby świeższej i, mówiąc »dziś«, mamy na myśli tylko ostatnie mniej więcej lat czterdzieści. Do tego okresu już można zaliczyć nową krytyczną rewizję matematyki — tym razem samych jej podstaw, mającą na celu wyrugowanie nietylko błędnych rozumowań, jak w okresie poprzednim, lecz wogóle powoływania się na intuicję, i oparcia całej matematyki na podstawach wyłącznie logicznych i wyłącznie logicznych rozumowaniach. Dzieło to dokonane zostało przez Dedekinda, Weierstrassa, Cantora — w analizie, a w gieometrji zaczęte przez Pascha i uwieńczone dziełem Hilberta Grundlagen der Geometrie[1]).

2. W tym ostatnim okresie czasu powstało też wiele nowych teorji matematycznych, że wspomnę tylko równania całkowe (Volterra, Fredholm), funkcje automorficzne (Klein, Poincaré), a nawet całe gałęzie matematyki: teorja grup przekształceń Lieego i jedna z najwspanialszych i najoryginalniejszych teorji matematyki, wielkie dzieło gienjuszu Jerzego Cantora — teorja mnogości. Ta ostatnia, przyjmowana zrazu niechętnie, nawet wyśmiewana, gdy tylko zdobyła sobie choć częściowe uznanie, wywarła ogromny wpływ na całą matematykę; przedewszystkim zaś na niej oparto podstawy analizy nieskończonostkowej i gieometrji. I to jest jedna z najbardziej charakterystycznych cech matematyki dzisiejszej.

Wpływ ten przyczynił się do nowego rozwoju różnych działów matematyki. Odkąd zaczęto znane teorje wyrażać w języku teorji mnogości, dzięki skojarzonym z temi terminami pojęciom, metodom i odkryciom tej teorji, zaczęto też stawiać sobie nowe, płodne pytania. Weźmy przykład: każdy wiedział, że dowolna funkcja analityczna posiada punkty osobliwe, — że więc istnieje zbiór punktów osobliwych. Nikomu jednak nie przychodziło na myśl badać ten zbiór, jako taki, sam w sobie; zresztą brakło do tego środków. Myśl ta jednak nasunąć się musiała, gdy użyto tu wyrazu mnogość: mnogość punktów osobliwych. Wtedy postawiono pytanie: jakie własności musi posiadać taka mnogość (oczywistym jest, że punkty osobliwe nie mogą tworzyć dowolnej mnogości) — a teorja mnogości określiła i zanalizowała różne własności zbiorów — oraz:

[1]) Por. Arytmetyka, str. 178 i Podstawy gieometrji.

jaki zachodzi związek między własnościami tej mnogości z jednej strony, a innemi własnościami funkcji z drugiej. To samo można powiedzieć i o pojęciu »grupy«[1]), które w tym dopiero okresie zostało wprowadzone i uzyskało wielkie, dominujące znaczenie we wszystkich niemal gałęziach matematyki, stając się jednym z węzłów, który je łączy w jedną całość. Cechuje też ono matematykę współczesną niemniej od pojęcia mnogości.

3. Inną wybitną cechą dzisiejszej matematyki jest t. zw. metoda aksjomatyczna (p. Podstawy gieometrji, str. 411). Doprowadzona przez Hilberta do swego rozkwitu w badaniach nad podstawami gieometrji, zaczęła być potym stosowaną i do innych gałęzi matematyki; dla całego szeregu teorji (np. topologji, teorji grup, teorji mnogości) wyszukujemy układu aksjomatów koniecznych i wystarczających do ugruntowania tych teorji. Dążenie do takiego sposobu ujmowania teorji matematycznych rozwija się coraz bardziej. Pochodzi to z jednej strony z potrzeby ekonomji: wiemy bowiem, że metoda aksjomatyczna pozwala na przeniesienie całych teorji z jednej dziedziny do drugiej, gdy tylko każda z tych dziedzin ma tę samą grupę aksjomatów; zaoszczędza więc pracy dowodzenia twierdzeń tej drugiej teorji. Z drugiej strony metoda ta pozwala wniknąć głębiej w istotę teorji, wyszukując te własności przedmiotów, na których się ta teorja opiera.

Metoda aksjomatyczna używana bywa jeszcze w inny sposób — rzec by można: w odwrotnym kierunku — jako metoda wprowadzania nowych pojęć; przyczynia się więc w sposób bezpośredni do rozwoju matematyki. Mianowicie szuka się wtedy nie dla danych pojęć układu aksjomatów (któreby wystarczyły do zbudowania danej teorji), lecz, przeciwnie, szuka się nowych pojęć, czyniących zadość pewnym warunkom: te warunki traktuje się jako układ postulatów, czyli aksjomatów i przez ten

---

[1]) Ponieważ pojęcie grupy jest trudniejszym, ograniczamy się tylko do wymienienia go. Por. wyżej: Teorja grup przekształceń, a o roli pojęcia grupy: F. Klein. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Erlangen, 1872; przedrukowane w Math. Ann., t. 43 (1893) (tak zwany Erlanger Programm).

układ określa się szukane pojęcie. Tak np. wprowadza swoją całkę Lebesgue [1]).

Metoda aksjomatyczna jest najwyższym osiągniętym punktem na drodze tego rozwoju abstrakcji, który zaznaczyliśmy we Wstępie ogólnym. Abstrahujemy tu bowiem od wszystkich własności indywidualnych badanych przedmiotów, tak, że pozostaje tylko logiczna forma rozumowań, tworzących daną teorję [2]).

4. Kierunek dzisiejszy rozwoju matematyki zdaje się być nacechowanym także większym rozwojem badań funkcji zmiennych rzeczywistych wogóle (do których należy i teorja równań całkowych). Może główną tu przyczyną jest, że w tej dziedzinie można badać ogólniejsze funkcje, gdy tymczasem przy zmiennych urojonych musimy zazwyczaj ograniczać się do funkcji analitycznych [3]). To rozszerzenie zakresu badań na funkcje prawie dowolne — a w gieometrji na figury prawie dowolne (por. Topologja, str. 397, przypisek) — nastąpić mogło dopiero dziś, dzięki teorji mnogości i badaniom nad podstawowemi pojęciami analizy, których wynikiem było wprowadzenie tak subtelnych pojęć, niezbędnych w badaniach o charakterze ogólniejszym, jak całka Le-

---

[1]) Jest to właściwie metoda, której wprowadzenie, stanowiące epokę w matematyce, wiąże się z nazwiskiem Riemanna, — dziś tylko przeistoczona w formę metody aksjomatycznej. Metoda ta polega na określaniu nowych pojęć nie wprost (t. j. za pomocą wzoru lub metody konstrukcji), lecz za pomocą postulatu, aby szukane pojęcie spełniało pewne warunki. (Por. Lebesgue, Leçons sur l'intégration, str. 99—100, oraz Podstawy gieometrji, str. 413).

Jako przykład metody aksjomatycznej może służyć ładny artykuł: H. Steinhaus. Der Begriff der Grenze, Math. Ann. t. 71, str. 88—96.

[2]) Teorje takie, które abstrahują od konkretnego znaczenia swego przedmiotu i tylko zajmują się formą logiczną rozumowania, wnioskowania z jednego faktu o drugim, nazywamy *formalnemi.* W szczególności rachunek nazywamy formalnym, gdy, zapominając, co oznaczają symbole, któremi operujemy, pamiętamy tylko reguły samego rachunku, t. j. aksjomaty. Por. Logistyka, str. 452.

[3]) Pozostaje to także w związku z wymaganiami fizyki, która nie może ograniczać się do funkcji analitycznych, natomiast w przeważającej liczbie przypadków operuje tylko wielkościami rzeczywistemi.

BESGUE'A. Skoro zaś te badania ogólniejsze stały się możliwe, zwrócono się do nich, raz dla tego, że ogólność znajdowanych prawd ma wartość sama w sobie, po wtóre — że przy rozwiązywaniu zagadnień, dotyczących funkcji bardzo regularnych i prostych, natrafiamy na zagadnienia pomocnicze, których rozwiązanie jest koniecznym warunkiem rozwiązania pierwszych, a które dotyczą utworów mniej prostych, często bardzo nieregularnych. Ażeby fakt ten nie wydał się nam zbyt dziwnym, przypomnimy, że np. pochodna funkcji ciągłej może być nieciągłą, że funkcja analityczna na linji osobliwej (gdy funkcja jest na niej określona) może być bardzo »kapryśną« (np. być nieciągłą, lub nigdzie nie posiadać pochodnej).

Jako przykład badań w tym kierunku wymienię prace BAIRE'A o funkcjach nieciągłych.

5. Oto kilka rysów matematyki dzisiejszej; nasuwa się pytanie, czego oczekiwać możemy od jutra? Nie chcemy przepowiadać; jedno można jednak o tej matematyce jutra powiedzieć: musi ona rozwiązać w sposób zadowalający wszystkich niepokojące dziś pytanie: czym są antynomje teorji mnogości. A że kwestja ta stoi na pograniczu matematyki i logiki, więc można się spodziewać bliższego zetknięcia się tych dwuch nauk [1]).

6. Zastosowania matematyki są coraz większe i szersze: granica ich obejmuje już dzisiaj nawet takie np. nauki, jak gieologję, nauki biologiczne i społeczne.

Naogół stosowane są wciąż te same, co i dawniej, działy i metody matematyki, które zdobywają tylko dalej idące zastosowanie głównie za pośrednictwem fizyki. Jednak i tu odkryto

---

[1]) O najważniejszych zagadnieniach z różnych gałęzi matematyki, czekających rozwiązania, traktuje znany odczyt HILBERTA: Mathematische Probleme, wypowiedziany na II międzynarodowym kongresie matematyków w Paryżu, w r. 1900, ogłoszony w oryginale, po niemiecku, w Gött. Nach. (1900) i w Archiv. f. Math. u. Phys., serja 3, t. 1 (1901), a w tłumaczeniu francuskim (z małemi uzupełnieniami) w Comptes Rendus du Congrès. Część tych zagadnień została już rozwiązana.

Popularniejszym jest artykuł POINCARÉGO p. t. L'avenir des mathématiques, stanowiący rozdział II jego książki: Science et Méthode (str. 19—42).

nowe drogi: zastosowano teorję grup do krystalografji i chemji; rachunek prawdopodobieństwa do fizyki (do teorji kinetycznej gazów), biologji i psychologji; stworzono rachunek wektorów, niezbędny do ekonomicznego i przejrzystego opisu całego szeregu zjawisk fizycznych. Z nowopowstałych teorji matematycznych bardzo ważne zastosowania znalazła teorja równań całkowych.

Wobec tego rozwoju swych zastosowań matematyka rozpowszechnia się coraz bardziej, stając się coraz to niezbędniejszym narzędziem dla coraz to szerszych kół. Matematyka jednak nie zadowala ten wzrost jej znaczenia. Chciałby dla niej miejsca godniejszego: pragnąłby, aby matematyka zrozumiana była wreszcie jako cel, jako bezpośrednie, niewyczerpane źródło szczęścia, które jest udziałem niewielu Jej poświęconych. Oby ono choć w części stało się dostępne kołom szerszym, a matematyka stawała się potrzebą duchową coraz bardziej ogólną i coraz bardziej niezbędną!