ZYGMUNT JANISZEWSKI

Conclusion

Table des matières

1. Les mathématiques sont aujourd'hui en plein épanouissement. Nous avançons avec une vitesse énorme. Bien entendu, la valeur de la production fournie par notre génération ne pourra être estimée objectivement que par les générations futures, mais l'abondance de cette production est visible aujourd'hui.

Ces paroles ne concernent point les conquêtes mathématiques du XIX^{me} siècle. Nous ne voulons reculer dans nos considérations ni de cent, ci même de cinquante ans: en ce qui concerne la valeur durable des conquêtes de cette époque, aucun doute n'est plus possible. Presque toutes les branches des mathématiques dont nous nous occupons aujourd'hui ont alors ou bien pris naissance, ou bien subi une métamorphose fondamentale: elles se sont enrichies de nouvelles notions essentielles et ont été refondées conformément aux exigences de la rigueur mathématique (ABEL, CAUCHY), contre laquelle le XVIII^{me} siècle avait souvent péché. De nouveaux problèmes se sont présentés ou les anciens ont été posés d'une nouvelle manière. Bref, tout pouce du sol mathématique, toute manière actuelle de penser se sont pénétrés des éléments extrêmement féconds que cette époque nous a laissés. Pour s'en rendre compte, il suffit de rappeler les noms de GAUSS, CAUCHY, GALOIS, ABEL, PONCELET, DIRICHLET, RIEMANN, KUMMER et WEIERSTRASS, l'activité de ces mathématiciens appartenant entièrement ou en partie à l'époque du siècle passé.

Ici, nous allons nous borner à la période plus récente, en entendant par *aujourd'hui* les dernières trois ou quatre dizaines d'années. C'est à cette période qu'appartient la nouvelle révision critique des mathématiques, cette fois celle de leurs fondements. Elle a eu pour but d'en éliminer non seulement les faux raisonnements, comme à la période précédente, mais aussi tout recours à l'intuition, et de ne baser les mathématiques que sur des notions et des raisonnements purement logiques. Cette tâche a été accomplie dans l'analyse par DEDEKIND, WEIERSTRASS et CANTOR, et dans la géométrie par PASCH, l'initiateur de ces recherches, et finalement par HILBERT, qui les couronna de son oeuvre *Grundlagen der Geometrie*.

2. En même temps, plusieurs théories mathématiques ont été créées — pour n'en mentionner que celles des équations intégrales (VOLTERRA, FREDHOLM), des fonctions automorphes (KLEIN, POINCARÉ) — et même deux nouvelles branches des mathématiques se sont formées: la théorie des groupes de transformations, due à LIE, et la théorie des ensembles, une des disciplines mathématiques les plus originales et merveilleuses, la grand-oeuvre du génie de Georges CANTOR. Accueillie d'abord à contre-coeur et même avec raillerie, elle a commencé à exercer une énorme influence sur les mathématiques aussitôt après avoir gagné une reconnaissance partielle. On a basé sur la théorie des ensembles avant tout les fondements de l'analyse infinitésimale et de la géométrie — et c'est là un des traits caractéristiques des mathématiques d'aujourd-hui.

L'influence de la théorie des ensembles a contribué au nouvel épanouissement de diverses branches des mathématiques. Dès qu'on a commencé à exprimer les théories connues en termes de la théorie des ensembles, on s'est trouvé amené, grâce aux notions, méthodes et découvertes de cette théorie, à se poser bien de problèmes nouveaux et féconds. Prenons un exemple: tout le monde savait qu'une fonction analytique a des points singuliers, donc qu'il existe un ensemble des points singuliers, mais il n'est venu à l'esprit de personne d'étudier cet ensemble comme tel, en lui-même; d'ailleurs, on ne disposait pas des moyens nécessaires pour le faire. Cette idée a dû cependant s'imposer lors de l'emploi du mot *ensemble*, ensemble des points singuliers. On s'est posé alors la question: quelles sont les propriétés que cet ensemble doit avoir (puisqu'il est évident que les points singuliers d'une fonction ne peuvent pas former un ensemble quelconque) — et la théorie des ensembles en a défini et analysé diverses propriétés. Autre problème: quels sont les rapports entre les propriétés de cet ensemble et celles de la fonction ?

On peut en dire autant de la notion de *groupe* (1), introduite à la même période et qui a gagné bientôt une influence prédominante dans

(1) La notion de groupe étant plus difficile, nous nous bornons ici à la signaler. Pour le détail, cf. le chapitre *Théorie des groupes de transformations* de ce „Conseiller" et, pour le rôle de la notion de groupe, le mémoire de F. KLEIN, *Vergleichende Betrachtungen über neue geometrische Forschungen*, Erlangen 1872, réimprimé dans Mathematische Annalen 43, 1893 (dit *Erlanger Programm*).

presque toutes les branches des mathématiques, à savoir en formant l'un des principaux liens qui les unissent toutes en un système. La notion de groupe caractérise les mathématiques de nos jours pas moins que celle d'ensemble.

3. Un autre trait dominant des mathématiques d'aujourd'hui est la méthode dite *axiomatique* (voir le chapitre *Fondements de la géométrie*). Amenée à l'état florissant par HILBERT dans ses recherches sur les fondements de la géométrie, cette méthode a été ensuite appliquée à d'autres disciplines mathématiques. On a choisi pour plusieurs théories (pour la topologie, la théorie des groupes, la théorie des ensembles par exemple) les systèmes d'axiomes nécessaires et suffisants pour y baser ces théories. La tendance à concevoir d'une telle manière les théories mathématiques en général est en train de se développer de plus en plus. Cela tient d'une part au besoin de l'économie: on sait en effet que la méthode axiomatique permet de passer avec des théories tout entières d'un domaine des mathématiques dans un autre toutes les fois que les deux domaines ont le même système d'axiomes — et cela nous épargne la peine de démontrer les théorèmes du second domaine. D'autre part, la méthode axiomatique permet de pénétrer plus profondément dans la nature d'une théorie donnée et d'indiquer parmi les propriétés des objets de cette théorie celles sur lesquelles elle s'appuie.

Aujourd'hui, la méthode axiomatique est employée en outre d'une autre manière, pour ainsi dire à rebours, à savoir comme un mode d'introduire de nouvelles notions; par là, elle contribue directement au développement des mathématiques. Ce qui est cherché dans ces cas, ce n'est plus un système d'axiomes liant les notions données et qui suffise pour y baser la théorie, mais, bien au contraire, un système de notions nouvelles satisfaisant à certaines conditions regardées comme autant de postulats ou axiomes définissant les notions cherchées. C'est ainsi par exemple que LEBESGUE a introduit son intégrale ([2]).

La méthode axiomatique est en ce moment la cime de ce qui a été atteint par la voie de l'abstraction croissante (mentionnée dans l'*Introduction générale* de ce „Conseiller"). On y fait en effet abstraction de toutes

([2]) L'introduction de cette méthode, qui a fait époque en mathématiques, est liée en fait au nom de Riemann et ce n'est que plus récemment qu'elle s'est transformée en *méthode axiomatique*. Elle consiste à définir de nouvelles notions indirectement, à savoir en postulant que la notion cherchée satisfasse à certaines conditions (axiomes) au lieu de la définir directement par une formule ou une construction (cf. H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, Paris 1904, p. 99 et 100; voir aussi le chapitre *Fondements de la géométrie*). Un exemple de la méthode axiomatique est donné par un joli article de H. STEINHAUS, *Der Begriff der Grenze*, Mathematische Annalen 71, 1912, p. 88-96.

les propriétés individuelles des objets à étudier, de manière qu'il n'en reste que la *forme logique* des raisonnements constituant la théorie de ces objets (3).

4. La direction actuelle du développement des mathématiques semble se distinguer, en outre, par un essor des recherches sur les fonctions de variables réelles en général (auxquelles appartient aussi la théorie des équations intégrales). La principale raison en est peut-être celle-ci: il est possible d'envisager dans ce domaine les fonctions fort générales, tandis que, dans celui des variables complexes, on est contraint d'habitude à se borner aux fonctions analytiques (4). L'extension du domaine de recherches à des fonctions presque arbitraires — et, dans la géométrie, à des figures presque arbitraires (cf. le chapitre *Topologie*, p. 282, renvoi 18) — n'est devenue possible qu'aujourd'hui grâce à la théorie des ensembles et grâce aussi aux recherches sur les notions fondamentales de l'analyse, recherches qui ont conduit à l'introduction des notions si fines, et si indispensables pour des investigations généralisées, que celle d'intégrale de Lebesgue par exemple. Or dès que les investigations généralisées étaient devenues possibles, on s'est adressé à elles, en premier lieu parce que la généralité des vérités trouvées est d'une valeur scientifique particulière, et en second lieu parce que les solutions des problèmes sur les fonctions simples et régulières comportent souvent des problèmes auxiliaires dont la solution préalable est nécessaire pour résoudre ceux-là, mais qui concernent des fonctions parfois fort compliquées. Pour que ce fait ne nous paraisse par trop étonnant, rappelons que, par exemple, la dérivée d'une fonction continue peut être discontinue et qu'une fonction analytique peut être fort „capricieuse" sur une ligne singulière (lorsque cette fonction est définie sur elle): elle peut y être, en effet, discontinue ou dépourvue partout de dérivée. Notons dans cet ordre d'idées, à titre d'exemple, les travaux de Baire sur les fonctions discontinues.

5. Tels sont les quelques traits envisagés des mathématiques d'aujourd'hui. La question s'impose, qu'est ce que le lendemain peut nous apporter. Je ne veux pas prophétiser, mais on peut en dire en tout cas que les mathématiques du lendemain auront à résoudre d'une manière satisfaisante la question qui inquiète actuellement tout le monde: qu'est ce que sont

---

(3) Les théories qui font abstraction du sens concret de leur objet et ne s'occupent que de la forme logique du raisonnement, du mode de conclure à partir d'une propriété sur une autre, s'appellent *formelles*. En particulier, un calcul est formel lorsque, oubliant ce que veulent dire les symboles dont on opère, l'on ne retient que les *règles* de ce calcul, c'est-à-dire ses axiomes (cf. le chapitre *La logistique*).

(4) Cela tient aussi aux exigences de la physique, qui ne peut se contenter des fonctions analytiques, mais doit opérer dans la plupart des cas avec des grandeurs réelles.

les antinomies de la théorie des ensembles? Et, cette question appartenant aux confins des mathématiques et de la logique, on peut s'attendre à un contact plus serré de ces deux domaines de la science ([5]).

6. Les applications des mathématiques sont de plus en plus étendues et nombreuses: elles embrassent déjà les disciplines telles que la géologie, les sciences biologiques et les sciences sociales. Pour la plupart, on continue à appliquer les mêmes branches et méthodes des mathématiques qu'antérieurement, mais elles gagnent de nouvelles applications surtout par l'intermédiaire de la physique. Or on a découvert même ici des voies nouvelles: on a appliqué la théorie des groupes à la cristallographie et à la chimie, le calcul des probabilités à la physique (théorie cinétique des gaz), à la biologie et à la psychologie, le calcul des vecteurs à la description plus nette et plus simple d'une série de phénomènes physiques. Parmi les théories mathématiques récentes, celle des équations intégrales a trouvé des applications bien importantes.

En face des applications croissantes, les mathématiques se propagent de plus en plus et deviennent un outil de plus en plus indispensable pour tout le monde. Cependant cet accroissement de leur importance ne suffit pas pour contenter le mathématicien. Il désire pour les mathématiques une place encore plus digne et élevée: il voudrait que les mathématiques soient enfin comprises par elles-mêmes, comprises comme une source directe et inépuisable du bonheur. Que ce bonheur, dont ne bénéficie aujourd'hui que la poignée de ceux qui se sont voués aux mathématiques, soit accessible, au moins en partie, aux vastes cercles des autres. Que les mathématiques deviennent un besoin de l'esprit de plus en plus universel et indispensable!

([5]) Les problèmes les plus importants de diverses disciplines mathématiques ont fait l'objet de la fameuse conférence de D. HILBERT, *Mathematische Probleme*, tenue par lui au II Congrès International des Mathématiciens à Paris en 1900. L'original allemand de cette conférence a été publié dans Göttinger Nachrichten en 1900 et dans Archiv für Mathematik und Physik, série 3, volume 1, en 1901. La traduction française (avec quelques suppléments) a paru dans les Comptes rendus de ce congrès. Une partie des problèmes dont il y est question est déjà résolue.

Plus populaire est l'article de H. POINCARÉ, *L'avenir des mathématiques*, constituant le chapitre II de son livre *Science et Méthode* (p. 19-42).
