ZYGMUNT JANISZEWSKI

Sur le réalisme et l'idéalisme en mathématiques

Cet essai est ma leçon d'agrégation prononcée le 11 juillet 1913 à la séance de la Faculté de philosophie de l'Université de Lwów; cf. l'article de POINCARÉ en même matière dans ses *Dernières pensées* posthumes, ayant aussi un caractère de renseignement et dont je n'ai pris connaissance qu'après avoir fait cette conférence.

Au cours de la dernière dizaine d'années, une controverse s'est élevée parmi les mathématiciens et les a divisés en deux camps: *réalistes* et *idéalistes*.

Les premières ébauches de cette controverse ont suivi la naissance de la *Théorie des ensembles* (vers l'année 1870 environ). Cette grande oeuvre, due au génie de George CANTOR, a été acceuillie avec un scepticisme général, car tant l'objet même que le mode de le traiter y étaient tout à fait nouveaux et essentiellement différents de tout ce qui a été connu antérieurement. Cependant, grâce à de nombreuses applications dans l'analyse mathématique, la théorie des ensembles s'est conquise bientôt une reconnaissance universelle, mais incomplète. Pour les anciens adversaires de cette théorie, dits aujourd'hui *réalistes*, à savoir qui en ont accepté une partie, sans l'accepter toute entière, le temps est venu de soumettre leur scepticisme à une revision. Ils ont été contraints de préciser leurs opinions, dire clairement ce qu'ils n'acceptent pas de la théorie des ensembles, et pourquoi.

D'autre part, on a vu revivre la méfiance envers la théorie de CANTOR lors de la découverte des *antinomies* liées à la notion d'ensemble. La question est devenue pressante et a contraint également les partisans de CANTOR, dits aujord'hui *idéalistes*, à introduire certaines restrictions dans l'emploi de la notion d'ensemble.

En conséquence, les deux camps ont dû réfléchir plus profondément sur les fondements des raisonnements mathématiques. Car les antinomies étaient déjà impuissantes à faire rejeter la théorie des ensembles toute entière: dans l'entretemps, toute l'analyse mathématique s'était fondée sur elle.

Une occasion pour les deux partis de se prononcer leur a été offerte par la publication (en 1904) du théorème de Zermelo (dit *Wohlordnungssatz*) „sur la possibilité de bien ordonner tout ensemble" et dont la démonstration est basée sur un axiome formulé pour la première fois par ZERMELO et appelé *principe du choix arbitraire* (*Auswahlsprinzip*). Cet axiome est rejeté par les réalistes.

C'est BOREL et, à un certain degré, POINCARÉ qui peuvent être regardés comme les représentants des réalistes. Du côté des idéalistes se sont rangé deux des mathématiciens les plus grands de nos jours: HADAMARD et HILBERT.

*

Au fond de la controverse se trouve la question: qu'est-ce que veut dire exister? C'est donc le grand et ancien *problème de l'existence*.

On donne d'habitude la réponse suivante à cette question: existher, en mathématique, veut dire être exempt de contradiction. Envisageons cette réponse de plus près.

Pour „être exempt de contradiction", il faut d'abord être d'une manière ou d'une autre. Nous ne pouvons pas décréter sur une chose qui ne nous est donnée en aucune manière si elle est contradictoire ou ne l'est pas. Or la chose qui nous est donnée, qui existe, est bien la définition. En fait, tout le monde entend la réponse envisagée en ce sens que c'est la définition qui doit être exempte de contradiction.

L'absence de contradiction ne peut être regardée que comme une condition nécessaire de l'existence en mathématiques. „Tout ce qui existe est exempt de contradiction" — telle est l'hypothèse ou l'axiome. Renverser cette proposition et dire „tout ce qui est exempt de contradiction existe" n'a, à vrai dire, pas de sens.

Nous pouvons en tirer le critérium suivant: une définition à laquelle correspond un objet (c'est-à-dire quelque chose qui existe) doit ne pas contenir de contradiction. Mais cette proposition ne se laisse renverser non plus. L'absence de contradiction dans une définition est bien une condition nécessaire, mais pas suffisante pour la bonté de cette définition. Une bonne définition doit satisfaire à d'autres conditions encore: elle doit, par exemple, ne pas contenir de cercle vicieux. Elle doit avant tout avoir un sens.

POINCARÉ a proposé deux nouvelles conditions auxquelles une bonne définition doit satisfaire: elle doit être *prédicative* et *se laisser exprimer à l'aide d'un nombre fini de mots*. La première condition n'entre pas directement dans le cadre de la controverse entre réalistes et idéalistes; notons toutefois que cette condition est également contestable. Quant à la seconde, elle peut étonner de prime abord d'avoir été posée: la question s'impose si quiconque a jamais formulé des définitions composées d'une infinité de mots.

Dans les considérations qui précèdent, nous n'avons trouvé qu'une condition nécessaire pour l'existence en mathématique. Nous pouvons cependant en donner aussi une qui est suffisante. La voici: *il existe tout ce qui est défini par une bonne définition.* On peut objecter à cette proposition que nous ne possédons pas de critères de la bonté pour les définitions (ne connaissant à peine que quelques conditions nécessaires, mais insuffisantes); nous ne pouvons donc entendre par le terme „bonne définition" qu'une *définition définissant au moins une chose*, ce qui semble cependant vouloir dire „dont l'objet existe". La condition serait donc tautologique. En supposant toutefois que nous sachions discerner directement une bonne définition d'une mauvaise, ces objections s'évanouiraient.

Les réalistes font un pas plus loin: ils adoptent la condition suffisante comme étant à la fois nécessaire. Ils obtiennent par là une définition de l'existence, une réponse à la question posée par nous au début: qu'est-ce que veut dire exister? Ils renversent donc la proposition „ce qui a une définition existe" et ils affirment: „ce qui existe a une définition". Ils en exceptent évidemment quelques notions primitives qu'ils considèrent comme indéfinissables. Ainsi, pour les réalistes, *exister (en mathématique)* veut dire *avoir une (bonne) définition.*

Envisageons de plus près cette définition de l'existence. Passons outre sur les difficultés signalées plus haut et qui sont liées à la notion de „bonne définition" (il résulterait par exemple du caractère tautologique de la condition suffisante envisagée que la définition en question contient un cercle vicieux). Pour que cette définition ne contienne un autre cercle nettement vicieux („il existe — en mathématique — ce dont la définition existe"), il faut que l'„existence" dans la seconde partie de la proposition veuille dire autre chose que dans la première, c'est-à-dire pas l'existence en mathématique. Et, en effet, les réalistes entendent l'existence de définition comme celle d'un *phénomène psychique*, comme l'acte de penser une définition. C'est bien dans la réduction de l'existence mathématique à des phénomènes psychiques qu'ils voient une explication de cette existence.

Une correction à cette explication est pourtant nécessaire. Jusqu'à présent, l'humanité n'a pu penser qu'un nombre fini de définitions. Il n'existerait donc qu'un nombre fini d'objets mathématiques. Or même les réalistes avouent qu'il y a une infinité de nombres entiers par exemple. Aussi entendent-ils par les mots „une définition existe" qu'elle est *possible*, qu'elle *peut* exister. Mais „peut exister" ne se laisse pas réduire entièrement à des états psychiques, ce qui prive la réduction de l'existence à la présence d'une définition de sa valeur mentionnée plus haut. Par ailleurs, „peut" n'est pas plus clair qu'„existe", même dans le cas de son irréductibilité à l'existence (mathématique).

Les idéalistes ne s'efforcent pas de définir l'existence. „Exister" c'est exister! C'est une notion la plus simple, ne se laissant pas réduire à des éléments psychiques ni expliquer par une notion moins claire et plus complexe, comme celle de définition (sous-entendu „bonne" et „possible").

Pour simplifier, cessons d'attribuer à la proposition des réalistes „exister = peut être défini" le sens d'une définition de l'existence et entendons-la comme une relation entre l'existence et la possession d'une définition. Ainsi conçue, la proposition en question pourrait être approuvée aussi par les idéalistes, mais en interprétant autrement le mot „peut".

Nous voilà au fond de la question. La différence entre les deux camps se manifeste dans l'interprétation de la notion de possibilité. Pendant que pour l'idéaliste „possible" est synonyme d'„existant" (mathématiquement), les réalistes (conformément à leur tendance de s'appuyer en fin de compte sur les états psychiques) entendent par „possible" ce qui est possible *pour l'homme*.

Donc, selon les réalistes, existe tout ce que l'homme peut définir. La condition de POINCARÉ devient ainsi compréhensible; une définition possible pour l'homme doit être composée d'un nombre fini de mots.

Quelques considérations sur la notion d'*exception* vont éclairer le mode dont les réalistes conçoivent l'existence.

En admettant qu'il y a dans le développement des théories mathématiques une continuité et certaines voies „naturelles" (1), nous qualifions *formées d'une façon naturelle* les notions qui se présentent au cours de ce développement. On rencontre à côté d'elles des notions construites *artificiellement*, c'est-à-dire contrairement aux tendances générales et aux besoins de la science. Il est clair que les notions rencontrées d'une façon naturelle ne constituent qu'une partie infime de la totalité des notions possibles. On pourrait donc dire que ces notions „naturelles" sont *exceptionnelles*, tandis que la totalité des notions se compose de notions „artificielles". Cependant, si l'on se borne aux notions dont il est question dans la science, ce sont, au contraire, les notions „naturelles" qui en constituent la totalité, tandis que les „artificielles" font exception.

Prenons une exemple: les courbes *en général* („en général" voulant dire ici: parmi celles que l'on rencontre dans la littérature mathématique) possèdent une tangente (tout au moins en un point de tout arc arbitrairement petit). Nous ne rencontrons dans la littérature mathématique

(1) et sans nous occuper de la question si elles appartiennent à la nature de l'objet examiné, ou à celle du sujet examinant, ou enfin aux conditions historiques de l'époque.

que quelques courbes ne possédant nulle part une tangente: ce sont des exemples de Weierstrass ou de Peano, construits artificiellement dans le seul but de démontrer ces possibilités „pathologiques" (comme les mathématiciens les appellent) et ne jouant par ailleurs aucun autre rôle en mathématiques. Nous savons pourtant que parmi toutes les courbes possibles (même en entendant ce mot au sens plus restreint, celui des réalistes), ce sont justement les courbes sans tangente qui forme le cas général, celles qui en possèdent étant des exceptions.

Si nous insistons — comme le fait Borel — sur cette existence des objets, pour ainsi dire, dans la „pratique" mathématique, sur leur présence réelle dans la littérature de cette science, et encore sous une forme qui n'est pas indéfinie, comme „un nombre entier n" ou „une fonction $f(x)$", mais qui est celle des individus parfaitement déterminés, comme „les nombres 2 et 7" ou „les fonctions $3x^2$, ou e^x", si nous insistons sur la connaissance concrète de tels individus, il est clair que nous serons portés à considérer comme non-existantes les classes d'objets qui ne sont représentées dans la littérature mathématique par aucun individu et dont nous ne savons définir sur demande aucun individu.

Il faut donc, de ce point de vue, refuser à plus forte raison l'existence aux classes d'objets dont nous savons par avance que nous ne pourrons jamais en connaître aucun individu. Il faudrait donc refuser l'existence aux objets dont une définition individuelle exigerait une infinité de mots. Pour l'illustrer, nous pouvons nous servir des paroles de Borel prononcées par lui au dernier congrès international des mathématiciens à Cambridge (en 1912). Il a dit que, pour lui, la définition donnée par Riemann à la notion de fonction n'est pas plus vaste que celle donnée par Cauchy, car nous ne connaissons, et ne connaîtrons probablement jamais, aucun exemple de fonction au sens de Riemann qui ne soit en même temps une fonction au sens de Cauchy. Il est vrai que l'on peut démontrer (en réduisant à l'absurde l'hypothèse contraire) que de telles fonctions existent, mais est-ce une existence — vu que nous ne pouvons, et probablement ne pourrons jamais (bien que nous ne possédions aucune démonstration mathématique de cette impossibilité) en nommer un exemple?

De là le postulat de Borel: ne s'occuper d'une classe d'objets avant de pouvoir indiquer une *méthode de construction* d'un objet de cette classe. Ce n'est que l'indication d'une méthode de construction qui est selon lui une réelle démonstration de l'existence. Par contre, les théorèmes sur des objets que l'on ne peut pas définir individuellement sont qualifiés par les réalistes de propositions métaphysiques et dépourvues de toute influence sur les théorèmes mathématiques (les mathématiques étant naturellement entendues ici à leur manière, c'est-à-dire comme une science ne s'occupant que des objets définissables individuellement).

Nous avons parlé des objets mathématiques qui ne peuvent pas être définis à l'aide d'un nombre fini de mots. Comment parvient-on à la notion de tels objets ? Considérons les nombres réels et représentons-les par des fractions décimales, composées en général d'une infinité de chiffres. On pourrait donc croire qu'il soit en général nécessaire, pour définir un nombre réel, d'en donner une infinité de chiffres et employer, par conséquent, une infinité de mots. Il s'avère par fortune que, pour de nombreuses fractions, il existe une loi de la succession des chiffres qui se laisse exprimer à l'aide d'un nombre fini de mots. En donnant une telle *loi*, nous définissons tous les chiffres de la fraction.

La question s'impose: une telle loi de la succession des chiffres, existe-t-elle pour chaque nombre réel ? Nous répondons: non. Une telle loi (composée d'un nombre fini de mots) n'existe pas pour chaque nombre: *il existe des nombres qu'il est impossible de définir d'aucune manière à l'aide d'un nombre fini de mots.* Et nous entendons cette „impossibilité" au sens absolu: non pas que c'est impossible à l'état actuel de la science, que nous ne le pouvons pas, mais que c'est impossible en toute généralité, l'hypothèse contraire conduisant à une contradiction. Nous allons donner tout à l'heure la démonstration de ce théorème. Mais notons d'abord que la réponse „non", à savoir qu'il existe des nombres ne se laissant pas définir à l'aide d'un nombre fini de mots, est une réponse de l'idéaliste. Pour le réaliste, de tels nombres n'existent pas en vertu de la définition même de l'existence, et la démonstration de l'existence de ces nombres est pour lui une antinomie. C'est l'ainsi dite *antinomie de Richard.*

Richard part de la même hypothèse que Poincaré: il n'existe que ce qui peut être défini à l'aide d'un nombres fini de mots. Or il est facile de montrer que l'ensemble des propositions composées d'une nombre fini de mots d'une langue est infini, mais dénombrable (²). A plus forte raison, l'ensemble des nombres définis à l'aide de telles propositions, c'est-à-dire selon Richard et les réalistes celui de tous les nombres, est donc dénombrable. D'autre part, Cantor a démontré que l'infinité des nombres réels est indénombrable, c'est-à-dire plus grande que dénombrable. Nous arrivons donc à une contradiction.

Cette contradiction n'existe, naturellement, que pour les réalistes. Pour les idéalistes, ce raisonnement n'est qu'une démonstration que l'hypothèse des idéalistes est fausse, c'est-à-dire une démonstration de l'existence des nombres indéfinissables à l'aide d'un nombre fini de mots.

Richard et Poincaré expliquent cette antinomie à l'aide de la notion de „définition non prédicative" et par une interprétation réaliste du thé-

---

(²) C'est-à-dire qu'il y en a autant que des nombres naturels.

orème de Cantor sur l'infinité indénombrable de l'ensemble des nombres réels, que nous ne pouvons pas discuter ici ([3]).

Les nombres qui ne se laissent pas définir par un nombre fini de paroles semblent donc être exclus à jamais — comme des individus — du domaine de nos connaissances. Néanmoins, leur situation n'est pas pire que celle des nombres dont la définition exige plus d'un million de paroles: probablement, nous ne les connaîtrons jamais non plus.

On peut toutefois les étudier non pas comme des individus, mais comme des éléments d'une classe. En définissant une classe (espèce, genre), nous définissons en partie les objets qui la compose; seulement, que nous ne pouvons pas les discerner entre eux. Cela permet d'admettre que l'on peut définir un ensemble sans en avoir défini au préalable les éléments. C'est précisément le principe que Cantor avait formulé à la tête de sa théorie des ensembles: l'ensemble se trouve défini lorsqu'on a donné un critérium d'appartenance à cet ensemble.

Les réalistes n'admettent pas ce principe. Ils ne considèrent un ensemble comme défini que lors d'en avoir donné — lorsqu'on ne sait pas définir individuellement tous ses éléments — au moins une *loi de contruction d'un élément arbitraire* de cet ensemble. Les idéalistes rejettent cette condition, mais eux aussi n'acceptent pas le principe tout entier de Cantor et proposent certaines restrictions, qui varient d'ailleurs selon les auteurs ([4]). Ils y ont été contraints par diverses antinomies dont je vais citer une: celle de Russell.

L'antinomie de Russell repose sur le partage de tous les ensembles en deux genres: ceux qui sont leurs propres éléments et ceux qui ne le sont pas. Existe-t-il des ensembles du premier genre ? ([5]). On peut le mettre en doute, mais leur existence n'est pas nécessaire pour la démonstration qui suit.

([3]) On a objecté à tort à l'antinomie de Richard que tout nombre peut être nommé d'un seul mot. *Nommé* ou *désigné* — si, mais pas *défini*. Pour nommer un nombre, il faut l'avoir donné. Cependant les objets mathématiques ne peuvent pas être donnés par des perceptions sensorielles, par „faire les voir". Pour qu'ils soient donnés, il faut en avoir une définition, ce qui ne peut pas être fait à l'aide du mot „celui-ci" et, en général, par aucun mot occasionnel (d'après la terminologie d'Husserl) ou par n'importe quel nom nouveau, mais uniquement à l'aide des noms préalablement connus. Seules les notions primitives font exception, car elles nous sont données directement et n'exigent pas de définition — à moins que quiconque veuille affirmer que tout nombre individuel peut nous être également donné par une connaissance directe et intuitive.

([4]) Certaines restrictions ont été introduites déjà par Cantor, qui parlait des ensembles *prêts* et *non-prêts*, excluant les derniers de sa théorie sans indiquer pourtant aucun critérium pour les distinguer les uns des autres.

([5]) Comme exemple d'un tel ensemble, on peut indiquer l'*ensemble de tous les ensembles*; étant lui-même un ensemble, il est son propre élément.

Par contre, l'existence des ensembles du second genre est tout à fait certaine. Tel est par exemple l'ensemble de tous les points d'un plan donné: il n'ést pas lui-même un point, donc un élément de lui-même, et appartient par conséquent au second genre. De même, l'ensemble de tous les hommes n'est pas un homme: il appartient donc aussi au second genre. Ainsi, les ensembles du second genre existent bien.

Envisageons à présent l'ensemble de tous les ensembles du second genre. Désignons-le par *Z*. Nous demandons: *Z* est-il ou n'est-il pas son propre élément ? Nous allons montrer que *Z* ne peut ni être, ni ne pas être son propre élément — résultat contraire au principe du tiers exclu. C'est en quoi consiste l'antinomie.

Supposons d'abord que l'ensemble *Z* soit un élément de lui-même, c'est-à-dire appartienne aux ensembles du premier genre. L'ensemble *Z* est donc un des éléments de l'ensemble *Z*. Mais d'après la définition de l'ensemble *Z*, tout élément de *Z* est un ensemble du second genre. En particulier, son élément *Z* devrait donc être un ensemble du second genre. La supposition que *Z* était du premier genre a conduit ainsi à une contradiction.

Reste à supposer que *Z* soit un ensemble du second genre. Alors, il se retrouve bien parmi les éléments de lui-même, car il comprend tous les ensembles du second genre. *Z* aurait ainsi la propriété des ensembles du premier genre, ce qui est de nouveau une contradiction.

L'ensemble *Z* ne peut par conséquent ni être un élément de lui-même, ni ne pas l'être. Cette contradiction avec le principe du tiers exclu se laisse supprimer soit en restreignant ce principe, soit — ce qui revient au même — en restreignant le principe de Cantor concernant les définitions d'ensembles.

Personne n'a levé d'une manière satisfaisante les difficultés liées aux antinomies; on le voit à ce que chacun les résout autrement et n'approuve pas les solutions des autres. Toutes les théories proposées dans ce but — celles d'Hilbert, de Russell ou de Zermelo par exemple — peuvent être caractérisées comme des mesures de précaution préservant des antinomies, mais des antinomies connues jusqu'à présent. Elles n'expliquent pas la faute des raisonnements et ne donnent aucune garantie contre de nouvelles antinomies qui pourraient se présenter malgré ces mesures de précaution (6). Elles ne disent que ceci: si nous nous bornons à certaines formes des définitions et des raisonnements, et si nous renonçons à certaines autres (dont elles ne démontrent pourtant pas la fausseté), nous

---

(6) C'est ainsi que Chwistek a construit une nouvelle antinomie, bien qu'il eut respecté dans son raisonnement toutes les conditions restrictives proposées par Russell.

éviterons probablement les antinomies. Puisque les réalistes restreignent plus que les autres le domaine des objets mathématiques et celui des formes du raisonnement, leur attitude en face des antinomies est la plus avantageuse. Ce n'est cependant pas ce qui peut décider de la valeur de leur théorie.

*

Nous voyons qu'en dépit de l'opinion répandue sur l'évidence et la certitude absolue des raisonnements mathématiques, on rencontre même ici des questions contestables. Ce phénomène n'est pas nouveau. L'histoire des mathématiques comporte souvent de telles divergences d'opinions. Ce qui, à une époque donnée, paraissait aux uns rigoureux et évident, semblait en même temps aux autres obscur ou erroné. Par bonheur, les mathématiques peuvent se vanter de leur développement qui arrivait toujours, avec le temps, à trancher ces différends tantôt en faveur de l'un des partis, tantôt en faveur de l'autre. Aussi, nous pouvons nous attendre à ce que le différend actuel au sein des mathématiques ne sera pas de longue durée: cette science disposera des moyens pour mettre d'accord les mathématiciens des deux camps opposés. Et de les mettre d'accord aussi en tant que philosophes ? On peut en douter. La différence des vues philosophiques, qui se manifeste dans la controverse en question et qui en est la source, est bien le même différend séculaire qui a causé la controverse entre les nominalistes et les platoniens, traînant à travers le moyen âge et qui continue de traîner aujourd-hui entre le positivisme et l'idéalisme.