NOTIONS

SUR LA

THÉORIE DES QUATERNIONS.

NOTIONS

SUR LA

THÉORIE DES QUATERNIONS

PAR

E. SARRAU,

Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1889

NOTIONS

SUR LA

THÉORIE DES QUATERNIONS.(*)

Dans son *Traité d'Électricité et de Magnétisme,* Maxwell emploie assez fréquemment quelques notations et formes de calcul appartenant à la théorie des quaternions. Bien que l'usage qui est ainsi fait de cette théorie soit, au fond, très secondaire, et bien que le lecteur puisse, sans grands efforts, ramener les démonstrations à la forme ordinaire de l'enseignement français, il a paru utile, pour l'intelligence complète de l'Ouvrage, de présenter dans une Note le résumé très succinct d'une théorie qui occupe aujourd'hui, en Angleterre, une place importante dans l'enseignement.

I. — Notions générales sur les quantités complexes.

1. *Quantités imaginaires.* — La considération des symboles désignés sous le nom de *quaternions* peut être considérée comme une extension de la théorie des quantités imaginaires.

La théorie de ces quantités, qui a si profondément transformé l'Analyse, a son point de départ dans l'Algèbre, où la résolution des équations du second degré introduit des expressions de la forme $a + b\sqrt{-1}$. Sans attacher aucune idée de quantité au symbole $\sqrt{-1}$, que l'on peut représenter par la lettre i, il suffit, pour

(*) Ces *Notions* ont paru d'abord comme Appendice à l'édition française du *Traité d'Électricité et de Magnétisme* de J.-C. MAXWELL. Nous avons demandé au savant Auteur, M. Sarrau, l'autorisation de les publier sous forme de brochure séparée, car ce résumé clair et concis est appelé à rendre un réel service à ceux des jeunes physiciens et géomètres qui sont encore peu familiarisés avec la lecture des Quaternions. (*Note des Éditeurs.*)

établir toute la théorie, d'appliquer aux quantités $a + bi$ les opérations ordinaires de l'Algèbre, en traitant i comme un facteur ordinaire, et en convenant seulement de remplacer, après tous les calculs effectués, les puissances i, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, ... par i, -1, $-i$, $+1$, i, -1, ..., ce qui revient simplement à remplacer i^2 par -1 dans le produit de deux expressions de la forme $a + bi$.

De plus, on pose *a priori* que les deux termes d'une quantité imaginaire sont irréductibles entre eux, en sorte que, toutes les fois qu'un calcul conduit à une équation de la forme $a + bi = 0$, cette équation se décompose en ces deux équations $a = 0$, $b = 0$.

La généralisation de ces principes conduit, comme il suit, à la théorie des *quantités complexes*.

2. *Définition des quantités complexes.* — On appelle *quantité complexe* une expression linéaire par rapport à *n unités imaginaires*, i_1, i_2, ..., i_n, de la forme

$$a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots + a_n i_n,$$

a_0, a_1, a_2, ..., a_n désignant des quantités réelles.

On pose *a priori* que tous les termes d'une quantité complexe sont irréductibles entre eux, de sorte qu'une relation linéaire ne peut exister entre les unités imaginaires sans que tous les coefficients en soient nuls séparément, c'est-à-dire que, si, par une suite de calculs, on est amené à une relation

$$\alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \ldots + \alpha_n i_n = 0,$$

on a nécessairement

$$\alpha_0 = 0, \qquad \alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \alpha_n = 0.$$

On convient, d'ailleurs, d'appliquer aux quantités complexes les opérations ordinaires de l'Algèbre, en traitant les unités i comme des facteurs ordinaires, et, comme pour les quantités imaginaires, c'est dans la multiplication que s'introduisent les conventions qui définissent les différents systèmes de quantités complexes.

3. *Addition des quantités complexes.* — La somme de deux quantités complexes est le résultat que l'on obtient en ajoutant

leurs parties similaires. Par exemple, ayant

$$A = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots + a_n i_n,$$
$$B = b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + \ldots + b_n i_n,$$

on appellera, par définition, A + B la quantité complexe

$$a_0 + b_0 + (a_1 + b_1) i_1 + (a_2 + b_2) i_2 + \ldots + (a_n + b_n) i_n.$$

4. *Multiplication des quantités complexes.* — Étant données les deux quantités complexes

$$A = a_0 + a_1 i_1 + \ldots + a_r i_r + \ldots\ldots\ldots + a_n i_n,$$
$$B = b_0 + b_1 i_1 + \ldots\ldots\ldots + b_s i_s + \ldots + b_n i_n,$$

on peut multiplier la première par la seconde, suivant la règle ordinaire de la multiplication algébrique, ce qui donne

$$AB = \Sigma a_r b_s i_r i_s,$$

le Σ du second membre s'étendant à tous les termes obtenus, en attribuant à r et s toutes les valeurs entières de o à n, et en remplaçant i_0 par 1.

Dans cette opération, on ne considère pas, en général, comme égaux les deux produits $i_r i_s$ et $i_s i_r$ obtenus par la permutation des indices dans le produit de deux unités, d'où il résulte qu'on ne peut réduire ensemble les termes $a_r b_s i_r i_s$ et $a_s b_r i_s i_r$, de sorte qu'*un produit de deux facteurs change avec l'ordre des facteurs*.

5. *Clefs algébriques.* — Chaque système de quantités complexes est caractérisé par la valeur que l'on attribue conventionnellement aux produits $i_r i_s$.

Par exemple, dans un système particulier d'unités imaginaires, considéré d'abord par Grassmann, puis par Cauchy sous le nom de *clefs algébriques,* on ne suppose pas de parties réelles dans A et B, de sorte que

$$a_0 = 0, \qquad b_0 = 0$$

et, dans la multiplication, le produit de deux unités change de signe quand on intervertit l'ordre des facteurs,

$$i_r i_s = - i_s i_r,$$

d'où il résulte que le produit d'une unité par elle-même est égal à zéro,

$$i_r^2 = 0.$$

Dans ce système, l'annulation d'un produit n'entraîne pas celle de l'un des facteurs.

L'emploi des clefs algébriques permet de présenter, sous une forme simple, la théorie des déterminants.

6. *Règles particulières de multiplication.* — On suppose en général, notamment dans la théorie des quaternions, que le produit de deux quantités complexes est une quantité complexe de même espèce, ce qui exige que les carrés et les produits des unités imaginaires soient exprimés par des fonctions linéaires de ces mêmes unités.

On conserve, en outre, une propriété importante de la multiplication algébrique ordinaire, en faisant des conventions telles que, pour multiplier une quantité complexe par un produit de quantités complexes, il suffise de la multiplier par chacun des facteurs de ce produit.

Pour trouver la condition qui assure ce résultat, considérons trois quantités complexes

$$\begin{aligned}
A &= a_0 + a_1 i_1 + \ldots + a_r i_r + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_n i_n,\\
B &= b_0 + b_1 i_1 + \ldots\ldots\ldots + b_s i_s + \ldots\ldots\ldots + b_n i_n,\\
C &= c_0 + c_1 i_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + c_t i_t + \ldots + c_n i_n.
\end{aligned}$$

Multipliant B par C, formons le produit

$$BC = \Sigma\, b_s c_t i_s i_t.$$

Multipliant ensuite A par BC, on a

$$A(BC) = \Sigma\, a_r b_s c_t i_r (i_s i_t).$$

Au lieu d'opérer ainsi, commençons par multiplier A par B,

$$AB = \Sigma\, a_r b_s i_r i_s;$$

puis AB par C,

$$(AB)C = \Sigma\, a_r b_s c_t (i_r i_s) i_t.$$

On aura, évidemment,

$$A(BC) = (AB)C,$$

si l'on suppose que les unités satisfassent à la condition

$$i_r(i_s i_t) = (i_r i_s) i_t.$$

Les unités des quantités complexes dites *quaternions* satisfont à cette condition.

II. — Principes du Calcul des quaternions.

7. *Définitions.* — Hamilton a donné le nom de *quaternion* à une quantité complexe à quatre termes

$$A = s + xi + yj + zk,$$

qui se décompose en une partie réelle s et une partie symbolique $xi + yj + zk$, où i, j, k sont trois unités imaginaires dont les carrés et les produits deux à deux sont assujettis aux conditions

$$(1) \qquad \begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\ jk = -kj = i, \\ ki = -ik = j, \\ ij = -ji = k. \end{cases}$$

Hamilton désigne les deux parties, réelle et symbolique, d'un quaternion respectivement par les noms de *scalaire* et de *vecteur*, et il les représente par les caractéristiques S et V placées devant la lettre qui désigne le quaternion, de sorte que l'on a

$$A = SA + VA.$$

8. Le *tenseur* d'un quaternion est la racine carrée de la somme des carrés des quatre quantités réelles qui figurent dans ce quaternion; on le représente par la caractéristique T,

$$(2) \qquad TA = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

Dans ce qui va suivre, nous substituerons au mot *tenseur* le mot *module*, qui est déjà usité pour représenter la quantité analogue dans la théorie des imaginaires.

9. Le *verseur* d'un quaternion est le *quaternion-unite* que l'on obtient en divisant ce quaternion par son module; on le représente

par la caractéristique U,

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{UA} = \frac{s + xi + yj + zk}{\sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2}}.$$

10. Deux quaternions sont dits *conjugués* quand ils ont le même scalaire et des vecteurs égaux et de signe contraire. Le conjugué d'un quaternion est représenté par la caractéristique K,

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{KA} = s - xi - yj - zk.$$

11. *Multiplication des quaternions.* — Soient deux quaternions

$$\mathrm{A} = s + xi + yj + zk,$$
$$\mathrm{A}' = s' + x'i + y'j + z'k.$$

Multipliant le premier par le second, suivant la règle ordinaire de l'Algèbre, observant l'ordre des facteurs dans les produits partiels et tenant compte des conditions (1), on trouve un produit qui est lui-même un quaternion

$$\text{(5)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{AA}' = ss' - xx' - yy' - zz' & \\ + [(sx' + s'x) + (yz' - zy')]i & \\ + [(sy' + s'y) + (zx' - xz')]j & \\ + [(sz' + s'z) + (xy' - yx')]k. & \end{aligned} \right.$$

On obtient le produit de A′ par A en permutant s, x, y, z avec s', x', y', z',

$$\text{(6)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{A}'\mathrm{A} = ss' - xx' - yy' - zz' & \\ + [(sx' + s'x) - (yz' - zy')]i & \\ + [(sy' + s'y) - (xz' - xz')]j & \\ + [(sz' + s'z) - (xy' - yx')]k. & \end{aligned} \right.$$

Ces deux produits ne sont pas, en général, identiques; donc, dans le Calcul des quaternions, *la valeur d'un produit change avec l'ordre de ses facteurs*.

D'ailleurs, les unités i, j, k satisfont, par suite des relations (1), à la condition particulière du n° 6; donc, *pour multiplier un quaternion par un produit de quaternions, il suffit de le multiplier par les facteurs de ce produit*.

12. *Produit de deux quaternions conjugués.* — En faisant

$$s' = s, \qquad x' = -x, \qquad y' = -y, \qquad z' = -z,$$

on a

$$A' = KA,$$

et la formule (5) donne

$$A.KA = s^2 + x^2 + y^2 + z^2 = (TA)^2;$$

donc *le produit de deux quaternions conjugués est égal au carré de leur module.*

D'ailleurs, le produit KA.A a la même valeur, de sorte que, dans ce cas, on peut intervertir les facteurs sans changer le produit.

13. Théorème. — *Le quaternion conjugué du produit de deux quaternions est égal au produit des conjugués de ces facteurs multipliés en ordre inverse,* c'est-à-dire que l'on a

$$K(AA') = KA'.KA.$$

En effet, on a K(AA') en changeant les signes des coefficients de i, j, k dans l'expression (5) du n° 11; d'autre part, on a KA'.KA en changeant les signes de x, y, z; x', y', z', dans l'expression (6); on voit immédiatement que ces deux opérations donnent le même résultat.

Ce théorème s'étend sans difficulté à un nombre quelconque de facteurs.

14. Théorème. — *Le module d'un produit de quaternions est égal au produit des modules des facteurs.*

Il suffit de démontrer que le théorème est vrai pour deux facteurs, c'est-à-dire que l'on a

$$T(AA') = TA.TA'.$$

Or, d'après la remarque du n° 12, on peut écrire

$$T(AA')^2 = AA'.K(AA')$$

ou bien, d'après le théorème du n° 13,

$$T(AA')^2 = AA'.KA'.KA;$$

mais les deux produits A.KA et A'.KA' sont algébriques et égaux respectivement aux carrés des modules de A et A'; on a donc

$$T(AA')^2 = TA^2.TA'^2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

15. *Produit de deux vecteurs.* — Soient deux vecteurs

$$\alpha = xi + yj + zk,$$
$$\alpha' = x'i + y'j + z'k.$$

En faisant $s = 0$, $s' = 0$, la formule (5) donne, pour le produit $\alpha\alpha'$,

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha\alpha' = &-(xx' + yy' + zz') \\ &+ (yz' - zy')i + (zx' - xz')j + (xy' - yx')k. \end{aligned} \right.$$

On a donc

$$(8) \qquad S(\alpha\alpha') = -(xx' + yy' + zz'),$$

$$(9) \qquad V(\alpha\alpha') = (yz' - zy')i + (zx' - xz')j + (xy' - yx')k.$$

En changeant l'ordre des facteurs, suivant la formule (5), il vient

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha'\alpha = &-(xx' + yy' + zz') \\ &-(yz' - zy')i - (zx' - xz')j - (xy' - yx')k. \end{aligned} \right.$$

On voit que, dans ce cas, *l'interversion des facteurs conserve la partie scalaire du produit et change le signe de sa partie vectorielle.*

16. En ajoutant et retranchant successivement les deux équations qui donnent les valeurs de $\alpha\alpha'$ et $\alpha'\alpha$, on obtient les deux relations suivantes, qui sont souvent utiles,

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} S(\alpha\alpha') &= \tfrac{1}{2}(\alpha\alpha' + \alpha'\alpha), \\ V(\alpha\alpha') &= \tfrac{1}{2}(\alpha\alpha' - \alpha'\alpha). \end{aligned} \right.$$

17. *Produit de trois vecteurs.* — Soient les trois vecteurs

$$\alpha = xi + yj + zk,$$
$$\alpha' = x'i + y'j + z'k,$$
$$\alpha'' = x''i + y''j + z''k.$$

Il s'agit de calculer le produit $\alpha\alpha'\alpha''$; on forme d'abord le produit $\alpha\alpha'$, qui est un quaternion donné par la formule (7), et l'on multiplie ce quaternion par α'', en appliquant la formule (5) du n° **10**. On trouve ainsi, pour les parties scalaire et vectorielle du produit,

$$(12)\qquad S(\alpha\alpha'\alpha'') = -\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix},$$

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} -V(\alpha\alpha'\alpha'') = \; & [x(x'x''+y'y''+z'z'') - x'(x''x+y''y+z''z) \\ & \qquad + x''(xx'+yy'+zz')]\,i \\ & +[y(x'x''+y'y''+z'z'') - y'(x''x+y''y+z''z) \\ & \qquad + y''(xx'+yy'+zz')]\,j \\ & +[z(x'x''+y'y''+z'z'') - z'(x''x+y''y+z''z) \\ & \qquad + z''(xx'+yy'+zz')]\,k. \end{aligned}\right.$$

D'après la relation (8), on peut écrire

$$(14)\qquad V(\alpha\alpha'\alpha'') = \alpha S(\alpha'\alpha'') - \alpha' S(\alpha''\alpha) + \alpha'' S(\alpha\alpha').$$

18. On peut arriver directement à cette dernière expression par le calcul suivant, qui donne une idée de la forme usuelle du Calcul des quaternions.

On a, par définition des symboles S et V,

$$\alpha\alpha' = S(\alpha\alpha') + V(\alpha\alpha')$$

et, en multipliant par α'',

$$\alpha\alpha'\alpha'' = S(\alpha\alpha')\alpha'' + V(\alpha\alpha')\alpha''.$$

Telle est l'expression dont nous cherchons la partie vectorielle. Le premier terme, produit d'un scalaire par un vecteur, est un vecteur, de sorte que l'on a

$$V(\alpha\alpha'\alpha'') = S(\alpha\alpha')\alpha'' + V[V(\alpha\alpha')\alpha'']$$

ou bien, d'après la deuxième des relations (11) du n° **16**,

$$2V(\alpha\alpha'\alpha'') = 2S(\alpha\alpha')\alpha'' + V(\alpha\alpha')\alpha'' - \alpha'' V(\alpha\alpha'),$$

ce que l'on peut écrire

$$2V(\alpha\alpha'\alpha'') = [S(\alpha\alpha') + V(\alpha\alpha')]\alpha'' + \alpha''[S(\alpha\alpha') - V(\alpha\alpha')].$$

On a d'ailleurs, d'après la remarque finale du n° **15**,

$$S(\alpha\alpha') - V(\alpha\alpha') = \alpha'\alpha.$$

Il en résulte

$$2V(\alpha\alpha'\alpha'') = \alpha\alpha'\alpha'' + \alpha''\alpha'\alpha$$

et, par suite,

$$2V(\alpha\alpha'\alpha'') = \alpha(\alpha'\alpha'' + \alpha''\alpha') - \alpha\alpha''\alpha' + \alpha''(\alpha'\alpha + \alpha\alpha') - \alpha''\alpha\alpha',$$
$$2V(\alpha\alpha'\alpha'') = \alpha(\alpha'\alpha'' + \alpha''\alpha') - (\alpha\alpha'' + \alpha''\alpha)\alpha' + \alpha''(\alpha'\alpha + \alpha\alpha').$$

Enfin, en tenant compte des relations (11), on retrouve ainsi la formule (14).

19. *Formule usuelle.* — On a souvent à considérer le produit des parties vectorielles de deux quaternions, dont chacun est le produit de deux vecteurs; la partie vectorielle de ce produit est donnée par la formule suivante :

$$(15) \qquad V[V(\alpha\alpha')V(\alpha''\alpha''')] = \alpha S(\alpha'\alpha''\alpha''') - \alpha' S(\alpha\alpha''\alpha''').$$

En effet, si l'on remplace $\alpha\alpha'$ par $S(\alpha\alpha') + V(\alpha\alpha')$, le premier membre de l'équation (14) devient

$$V[S(\alpha\alpha')\alpha'' + V(\alpha\alpha')\alpha''].$$

D'ailleurs, $S(\alpha\alpha')$ étant un scalaire, on a

$$V[S(\alpha\alpha')\alpha''] = S(\alpha\alpha')V\alpha'',$$

ce qui se réduit à $\alpha'' S(\alpha\alpha')$, puisque α'' est un vecteur. La relation (14) peut donc s'écrire

$$V[V(\alpha\alpha')\alpha''] = \alpha S(\alpha'\alpha'') - \alpha' S(\alpha''\alpha).$$

En remplaçant α'' par $V(\alpha''\alpha''')$, il vient

$$(16) \qquad V[V(\alpha\alpha')V(\alpha''\alpha''')] = \alpha S[\alpha' V(\alpha''\alpha''')] - \alpha' S[\alpha V(\alpha''\alpha''')].$$

Cela posé, on a identiquement

$$\alpha'\alpha''\alpha''' = \alpha' S(\alpha''\alpha''') + \alpha' V(\alpha''\alpha''').$$

Le premier terme du second membre est un vecteur, dont le scalaire est nul; il en résulte

$$S(\alpha'\alpha''\alpha''') = S[\alpha' V(\alpha''\alpha''')]$$

et, de même,

$$S(\alpha\alpha''\alpha''') = S[\alpha V(\alpha''\alpha''')].$$

Par suite, la relation (16) se confond avec la relation (15) qu'il s'agissait d'établir.

20. *Division des quaternions.* — Dans le calcul des quantités réelles, la division consiste, étant donnés un produit et l'un de ses facteurs, à trouver l'autre facteur.

Si l'on étend cette définition au Calcul des quaternions, la valeur d'un produit changeant avec l'ordre des facteurs, le résultat de la division dépendra de la place attribuée, dans le produit, au facteur inconnu. En désignant par A le produit donné, par B le facteur connu et par Q le facteur inconnu, suivant que l'on écrira

$$A = B \times Q$$

ou bien

$$A = Q \times B,$$

il en résultera pour Q deux valeurs différentes.

Ces deux valeurs s'obtiennent immédiatement d'après la proposition suivante :

Étant donné un quaternion, il en existe un autre et un seul qui, multiplié par le premier, donne un produit égal à 1.

En effet, le produit d'un quaternion par son conjugué étant égal, quel que soit l'ordre des facteurs, au carré du module (n° 12), on a

$$A.KA = KA.A = (TA)^2,$$

ce que l'on peut écrire

$$A.\frac{KA}{(TA)^2} = \frac{KA}{(TA)^2}.A = 1.$$

Il en résulte que l'inverse d'un quaternion a une valeur unique que l'on obtient *en divisant le conjugué par le carré du module.*

On représente l'inverse d'un quaternion A par A^{-1}, de sorte que

(17) $$A^{-1} = \frac{KA}{(TA)^2},$$

et les deux valeurs du quotient de deux quaternions A et B sont AB^{-1} et $B^{-1}A$.

Pour éviter toute ambiguïté, c'est le deuxième de ces produits que l'on conviendra d'appeler quotient de A par B et de désigner par $\frac{A}{B}$. On a ainsi

$$Q = \frac{A}{B} = B^{-1}A. \tag{18}$$

Il en résulte

$$BQ = BB^{-1}A = A;$$

de sorte que, par suite de cette convention, *le dividende est égal au diviseur multiplié par le quotient.*

III. — Interprétation géométrique du Calcul des quaternions.

21. *Représentation d'un vecteur.* — Soit le vecteur

$$\alpha = xi + yj + zk.$$

On le représente, dans un système de coordonnées rectangulaires, par le segment de droite joignant l'origine O au point A dont les coordonnées sont (x, y, z).

En désignant par (a, b, c) les cosinus directeurs de la droite OA et par r sa longueur, égale au module du vecteur, on a

$$x = ra, \qquad y = rb, \qquad z = rc.$$

22. *Somme de vecteurs.* — Soient des vecteurs, en nombre quelconque,

$$\alpha = xi + yj + zk, \qquad \alpha' = x'i + y'j + z'k, \qquad \ldots.$$

Leur somme est un vecteur $Xi + Yj + Zk$, et l'on a

$$X = \Sigma x, \qquad Y = \Sigma y, \qquad Z = \Sigma z.$$

Il en résulte que *la somme de plusieurs vecteurs se représente par le vecteur qui forme le contour polygonal construit en portant les vecteurs, bout à bout, parallèlement à eux-mêmes.*

23. *Rappel d'une formule de Géométrie analytique.* — Considérons deux directions OM, OM′ dont les cosinus directeurs sont (a, b, c) et (a', b', c'). Soient (l, m, n) les cosinus directeurs de la perpendiculaire commune à ces directions; on a les équations

$$\begin{aligned} al + bm + cn &= 0, \\ a'l + b'm + c'n &= 0, \\ l^2 + m^2 + n^2 &= 1; \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\frac{l}{cb'-cb'}=\frac{m}{ca'-ac'}=\frac{n}{ab'-ba'}=\pm\frac{1}{D},$$

en posant

$$D^2=(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2+(ab'-ba')^2.$$

La valeur de D^2 pouvant être mise sous la forme

$$(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2,$$

on voit qu'elle est égale à $1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$, en désignant par θ l'angle des deux directions. On a donc les formules

$$\frac{l}{bc'-cb'}=\frac{m}{ca'-ac'}=\frac{n}{ab'-ba'}=\pm\frac{1}{\sin\theta}.$$

Le double signe correspond aux directions opposées que présente, à partir de l'un de ses points, la perpendiculaire commune aux directions OM, OM'; on détermine ce signe en définissant, comme il suit, l'*axe de deux directions*.

24. On appelle axe de deux directions (OM, OM') celle des deux directions perpendiculaires au plan MOM' suivant laquelle un observateur, ayant les pieds sur ce plan, doit se placer pour voir s'effectuer *de droite à gauche* [1] la rotation d'un rayon partant de la direction OM pour se rapprocher de la direction OM'.

D'après cette convention, la direction OZ est opposée à l'axe des directions (OX, OY); donc le signe des formules précédentes doit être tel que l'on trouve

$$l=0,\qquad m=0,\qquad n=-1,$$

quand on suppose

$$a=1,\qquad b=0,\qquad c=0,$$
$$a'=0,\qquad b'=1,\qquad c'=0,$$

ce qui exige que l'on prenne le signe $+$. On a donc

$$\frac{l}{bc'-cb'}=\frac{m}{ca'-ac'}=\frac{n}{ab'-ba'}=-\frac{1}{\sin\theta}. \tag{19}$$

---

[1] Cette convention, sur le *sens direct* des rotations, est conforme à celle que Maxwell a adoptée (*Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. I, p. 26).

25. *Produit de deux vecteurs.* — Soient deux vecteurs

$$\alpha = xi + yj + zk,$$
$$\alpha' = x'i + y'j + z'k.$$

Leur produit est donné par les formules (8) et (9) du n° **15**; en désignant par r, r' leurs modules et par (a, b, c), (a', b', c') leurs cosinus directeurs, ces formules deviennent

$$S(\alpha\alpha') = -rr'(aa' + bb' + cc'),$$
$$V(\alpha\alpha') = rr'[(bc' - cb')i + (ca' - ac')j + (ab' - ba')k],$$

ou bien, en désignant par θ l'angle des deux vecteurs et, en introduisant, d'après les relations (19), les cosinus directeurs (l, m, n) de l'axe des vecteurs (α, α')

$$S(\alpha\alpha') = -rr'\cos\theta, \tag{20}$$

$$V(\alpha\alpha') = -rr'\sin\theta(li + mj + nk). \tag{21}$$

Donc, *le scalaire du produit $\alpha\alpha'$ de deux vecteurs est égal à la projection de l'un d'eux sur le prolongement de l'autre et le vecteur de ce produit s'obtient en portant sur le prolongement de l'axe des vecteurs (α, α') une longueur égale à l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs.*

26. En posant

$$\lambda = li + mj + nk,$$

le vecteur-unité λ représente l'axe des vecteurs (α, α') et l'on a, d'après les formules (20) et (21),

$$\alpha\alpha' = -rr'(\cos\theta + \lambda\sin\theta). \tag{22}$$

27. *Quotient de deux vecteurs.* — On a, d'après la formule (17),

$$\alpha^{-1}\alpha' = \frac{K\alpha.\alpha'}{(T\alpha)^2}.$$

Le conjugué d'un vecteur étant ce vecteur pris avec le signe contraire, il vient, en posant $T\alpha = r$,

$$\alpha^{-1}\alpha' = -\frac{\alpha\alpha'}{r^2};$$

mais, par définition (n° **20**), $\alpha^{-1}\alpha'$ représente le quotient $\frac{\alpha'}{\alpha}$ de α'

par α; par suite, la relation (22) donne

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{r'}{r}(\cos\theta + \lambda\sin\theta), \tag{23}$$

λ représentant, comme précédemment, l'axe des vecteurs (α, α').

28. En supposant $r' = r$, on a

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \cos\theta + \lambda\sin\theta; \tag{24}$$

d'où l'on déduit (nº 20)

$$\alpha' = \alpha(\cos\theta + \lambda\sin\theta).$$

Ce dernier résultat s'interprète comme il suit :

Le produit d'un vecteur α *par le quaternion* $\cos\theta + \lambda\sin\theta$ *représente le vecteur obtenu en faisant tourner* α *de droite à gauche, d'un angle* θ, *autour d'un axe* λ *perpendiculaire à* α.

29. *Représentation d'un quaternion.* — Soit un quaternion

$$A = s + xi + yj + zk.$$

En désignant par (l, m, n) et par r les cosinus directeurs et le module de son vecteur, on a d'abord

$$A = s + r(li + mj + nk).$$

En posant ensuite

$$s = \rho\cos\theta, \qquad r = \rho\sin\theta, \qquad \lambda = li + mj + nk,$$

il vient

$$A = \rho(\cos\theta + \lambda\sin\theta).$$

Telle est la forme à laquelle est réductible un quaternion. La quantité ρ représente le *module* du quaternion, puisque l'on a

$$\rho^2 = s^2 + r^2 = s^2 + x^2 + y^2 + z^2.$$

L'angle θ est l'*argument* du quaternion; λ est son *vecteur-unité* qui s'obtient en portant sur la direction (l, m, n) une longueur égale à l'unité.

30. Un quaternion étant réduit à cette forme, son *verseur*

(n° 9) est

$$UA = \cos\theta + \lambda \sin\theta.$$

D'après la formule (23), cette valeur peut s'identifier à celle qui représente le quotient de deux vecteurs dont les modules sont égaux à l'unité; il en résulte que tout verseur est le quotient de deux vecteurs suivant cette règle :

Étant donné un quaternion quelconque, si l'on mène dans un plan perpendiculaire à son vecteur-unité OL, *deux autres vecteurs-unités* OM, OM′, *faisant entre eux un angle égal à l'argument du quaternion et tels que l'on puisse appliquer* OM *sur* OM′ *par une rotation directe, autour de* OL, *égale à cet argument, le verseur du quaternion est égal au quotient de* OM′ *par* OM.

D'après cette règle, on peut représenter un verseur, sur une sphère de rayon égal à l'unité, par un arc de grand cercle MM′ égal à θ, ayant pour pôle le point L extrémité du vecteur-unité λ et tel que le chemin MM′ soit décrit, sur la sphère, d'un mouvement direct par rapport à ce pôle. Cet arc représente d'ailleurs, quelle que soit la position qu'il occupe sur son cercle, le verseur du même quaternion.

31. On peut établir maintenant la signification géométrique du produit de deux et, par suite, d'un nombre quelconque de verseurs.

Les verseurs de deux quaternions (A, B) étant donnés par leurs arcs, ces arcs peuvent être déplacés sur leurs cercles respectifs de manière à avoir une extrémité commune et à former, par conséquent, un triangle sphérique MNP, tel que les deux côtés MN, NP représentent les deux verseurs.

Désignons par α, β, γ les vecteurs menés du centre aux sommets M, N, P; on aura, d'après ce qui précède,

$$UA = \alpha^{-1}\beta, \qquad UB = \beta^{-1}\gamma;$$

d'où il résulte, en faisant la multiplication,

$$UA.UB = \alpha^{-1}\beta\beta^{-1}\gamma = \alpha^{-1}\gamma$$

et, par suite, l'arc représentatif du verseur-produit est le troisième côté MP du triangle sphérique.

On voit que la multiplication des verseurs s'opère, sur la sphère, avec les arcs de grand cercle suivant la même règle que l'addition des imaginaires, sur le plan, avec les vecteurs.

32. Pour déterminer un produit de plusieurs verseurs, on multipliera, suivant cette règle, le premier par le deuxième, puis le produit par le troisième et ainsi de suite, de manière à obtenir un dernier arc de grand cercle qui représente le produit.

Enfin, pour multiplier des quaternions, il suffira de multiplier d'abord leurs verseurs et de multiplier ensuite le résultat par le produit des modules.

33. *Analogie des quaternions et des imaginaires.* — Il résulte des formules de la multiplication des vecteurs (n° 15) que *le carré d'un vecteur-unité est égal à* — 1.

Si donc A et A′ sont deux quaternions, ayant le même vecteur-unité λ, sous la forme

$$A = \rho(\cos\theta + \lambda\sin\theta), \qquad A' = \rho'(\cos\theta' + \lambda\sin\theta'),$$

on trouvera, en faisant la multiplication,

$$AA' = \rho\rho'[\cos(\theta+\theta') + \lambda\sin(\theta+\theta')],$$

et l'on en tire, par le procédé connu, quel que soit l'exposant n,

$$A^n = \rho^n(\cos n\theta + \lambda\sin n\theta).$$

34. Ce résultat, qui généralise la formule de Moivre, permet de définir une fonction $F(z)$ de la variable z, lorsque celle-ci est un quaternion. Supposons, en effet, que l'on puisse définir cette fonction, lorsque z est imaginaire, par un développement en série convergente ordonnée suivant les puissances de la variable; le même développement pourra s'appliquer en remplaçant z par un quaternion et l'imaginaire i, qui entre dans z, par le symbole λ.

IV. — Différentiation des fonctions de quaternions.

35. *Différentielle d'un quaternion.* — Quand les termes d'un quaternion $A = s + xi + yj + zk$ sont variables, sa différentielle s'obtient en différentiant ses termes constituants; elle a pour

valeur

$$dA = ds + dx\,i + dy\,j + dz\,k.$$

Il en résulte que l'on a

$$S\,dA = d\,SA, \qquad V\,dA = d\,VA,$$

de sorte que la caractéristique d est commutative avec chacune des caractéristiques S et V.

Étant donné un quaternion, il est souvent utile de différentier séparément son module et son verseur; les formules suivantes, qui donnent le résultat général de cette opération, sont d'un usage fréquent dans les applications.

36. *Différentielle d'un module.* — Soit

$$TA = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2};$$

on en tire

$$d\,TA = \frac{s\,ds + x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Le numérateur est le scalaire du produit de dA par le conjugué KA; donc

$$(25) \qquad d\,TA = \frac{S(dA.KA)}{TA}$$

ou, puisque $KA = A^{-1}(TA)^2$ (n° 20),

$$(26) \qquad d\,TA = S(dA.A^{-1})\,TA.$$

Si le quaternion se réduit à un vecteur α, on a

$$K\alpha = -\alpha,$$

et la formule (25) devient

$$(27) \qquad d\,T\alpha = -\frac{S(\alpha\,d\alpha)}{T\alpha}.$$

Il en résulte que, si un vecteur varie de manière que son module reste constant, on a

$$(28) \qquad S(\alpha\,d\alpha) = 0,$$

ce qui exprime, d'après la relation (20), que les vecteurs α, $d\alpha$ sont perpendiculaires entre eux.

37. *Différentielle d'un verseur.* — Le verseur d'un quaternion A est, par définition,

$$UA = \frac{A}{TA}.$$

Il en résulte

$$dUA = \frac{dA.TA - dTA.A}{(TA)^2}$$

ou, en remplaçant dTA par sa valeur (25),

$$dUA = \frac{dA.(TA)^2 - S(dA.KA)A}{(TA)^3};$$

mais on a

$$(TA)^2 = KA.A \qquad (\text{n}^\circ\ 12);$$

par suite, le numérateur devient

$$[dA.KA - S(dA.KA)]A = V(dA.KA)A,$$

et l'on a, par conséquent,

$$(29) \qquad dUA = \frac{V(dA.KA).UA}{(TA)^2}$$

ou bien, en remplaçant KA par $A^{-1}(TA)^2$,

$$(30) \qquad dUA = V(dA.A^{-1})UA.$$

Pour un vecteur α, la formule (29) devient

$$(31) \qquad dU\alpha = \frac{V(\alpha\, d\alpha)\alpha}{(T\alpha)^3}.$$

Quand le module du vecteur reste constant, on a, d'après la relation (28),

$$V(\alpha\, d\alpha) = \alpha\, d\alpha$$

et, par conséquent,

$$dU\alpha = -\frac{\alpha^2\, d\alpha}{(T\alpha)^3}$$

ou simplement, puisque $\alpha^2 = -(T\alpha)^2$,

$$(32) \qquad dU\alpha = \frac{d\alpha}{T\alpha}.$$

38. *Différentielle d'une fonction de quaternions.* — Pour une fonction d'une variable z, réelle ou imaginaire, l'existence de la fonction dérivée résulte de la possibilité de mettre sous la forme

$\varphi(z)\,dz$ l'accroissement de la fonction correspondant à un accroissement infiniment petit, dz de la variable. Lorsque z est un quaternion, les règles spéciales du calcul ne permettent pas, en général, d'attribuer cette forme à l'accroissement de la fonction.

Considérons, par exemple, la fonction $f(z) = z^2$; son accroissement, pour l'accroissement dz de la variable, est

$$(z + dz)^2 - z^2 = z.dz + dz.z + dz^2.$$

On a, en négligeant le second ordre,

$$df(z) = z.dz + dz.z,$$

et cette forme est irréductible.

Cette absence des dérivées, dans le cas général d'une fonction de quaternions, ne permet pas d'appliquer la règle ordinaire de la différentiation d'une fonction composée $f(u, v, w, \ldots)$, lorsque $u, v, w, \ldots$ sont des quaternions. Cette règle, d'après laquelle on a, pour des quantités $u, v, w, \ldots$ réelles ou imaginaires,

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv + \frac{\partial f}{\partial w} dw + \ldots,$$

perd alors toute signification. Mais on doit remarquer que, si l'on attribue à $u, v, w, \ldots$ des accroissements infiniment petits, les règles particulières du Calcul des quaternions donneront, en général, pour l'accroissement correspondant de f réduit au premier ordre, c'est-à-dire pour sa différentielle, une expression linéaire et homogène par rapport aux différentielles des variables, de sorte que, comme dans le calcul ordinaire, pour différentier une fonction composée de quaternions variables, il suffira de différentier par rapport à chacune des variables, comme si elle était seule, et de faire la somme des résultats.

39. *Différentielle d'un produit.* — En appliquant cette règle à un produit $f = uv$, on trouve

$$df = du.v + u.dv.$$

Le résultat est le même que celui que donne la différentiation d'un produit de fonctions algébriques, avec l'obligation d'observer l'ordre des facteurs.

V. — Applications géometriques.

40. On se bornera à indiquer comment le Calcul des quaternions permet de présenter les éléments de la théorie des lignes courbes.

Les points et les directions étant rapportés à un système de coordonnées rectangulaires, on représentera :

1° Le point dont les coordonnées sont (x, y, z) par le vecteur

$$u = xi + yj + zk;$$

2° La direction dont les cosinus directeurs sont (a, b, c) par le vecteur-unité

$$\alpha = ai + bj + ck.$$

Si l'on suppose que (x, y, z) soient des fonctions d'une variable indépendante t, u sera une fonction de la même variable et donnera, par la variation continue de t, tous les points d'une *ligne courbe* dont cette fonction symbolique unique servira à faire connaître les propriétés.

En supposant que u et α représentent un point et une direction variables avec t, nous désignerons par des accents leurs dérivées, de sorte que l'on aura

$$u' = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j + \frac{dz}{dt} k,$$

$$\alpha' = \frac{da}{dt} i + \frac{db}{dt} j + \frac{dc}{dt} k.$$

Nous rappellerons enfin que, si l'on considère une direction α variant continûment avec t et si l'on appelle $d\varphi$ l'angle infiniment petit compris entre les deux directions qui correspondent aux valeurs t, $t + dt$, on a, d'après une formule connue de Géométrie,

$$d\varphi = \sqrt{da^2 + db^2 + dc^2},$$

ce que l'on peut écrire, avec la notation des quaternions,

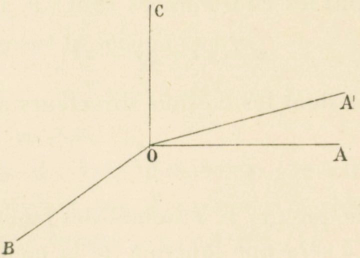
$$d\varphi = \mathrm{T}\alpha'.dt. \tag{33}$$

41. *Système trirectangle.* — En un point d'une ligne courbe, trois droites sont à considérer : la tangente, la perpendiculaire au plan osculateur, la normale principale.

Par un point quelconque O, menons deux parallèles OA, OA′ aux tangentes correspondant aux valeurs t, $t+dt$ de la variable; nous appellerons *axe du plan osculateur* l'axe OB des deux directions (OA, OA′).

Sur la normale principale, nous considérerons, sous le nom de

Fig. 1.



direction du *rayon de courbure,* l'axe OC des deux directions (OB, OA).

Les trois directions OA, OB, OC, formant un système trirectangle, seront respectivement représentées par trois vecteurs-unités (α, β, γ) variables avec t.

La direction OA étant l'axe des directions (OC, OB), rectangulaires entre elles, les formules (20) et (21) se réduisent aux suivantes

$$S(\gamma\beta) = 0, \qquad V(\gamma\beta) = -\alpha.$$

On en conclut la première de ces trois équations

$$(34) \qquad \alpha = \beta\gamma, \qquad \beta = \gamma\alpha, \qquad \gamma = \alpha\beta,$$

et les deux autres s'obtiennent en permutant les lettres.

Telles sont les équations qui lient les vecteurs-unités d'un système trirectangle quelconque. Voici maintenant les formules qui donnent β, γ, ainsi que leurs dérivées β', γ', en fonction de α, α'.

42. *Valeurs de* β, γ. — La direction OB est l'axe des directions (OA, OA′) représentées par les vecteurs unités α, $\alpha + d\alpha$; par suite, en désignant par $d\varphi$ l'angle de contingence AOA′, on aura,

d'après la formule (21),

$$\beta\, d\varphi = -\mathrm{V}[\alpha(\alpha + d\alpha)] = -\mathrm{V}(\alpha\, d\alpha),$$

ce que l'on peut écrire

$$\beta\, d\varphi = -\alpha\, d\alpha,$$

puisque, d'après l'équation (28), on a

$$\mathrm{S}(\alpha\, d\alpha) = 0.$$

Si donc on remplace $d\alpha$ par $\alpha'\, dt$ et si l'on pose $\varepsilon = \frac{d\varphi}{dt}$, la direction de l'axe du plan osculateur est donnée par la formule

$$(35) \qquad \beta = -\frac{\mathrm{V}(\alpha\alpha')}{\varepsilon} \quad \text{ou} \quad \beta = -\frac{\alpha\alpha'}{\varepsilon}.$$

En substituant la deuxième de ces valeurs dans la troisième des équations (34), il vient

$$\gamma = -\frac{\alpha^2\alpha'}{\varepsilon}$$

et, puisque $\alpha^2 = -1$,

$$(36) \qquad \gamma = \frac{\alpha'}{\varepsilon}.$$

43. *Valeurs de* β', γ'. — D'après la valeur (35), on peut écrire

$$\beta = \mathrm{U\,V}(\alpha'\alpha).$$

En différentiant suivant la formule (31) et remarquant que la dérivée de $\mathrm{V}(\alpha'\alpha)$ est $\mathrm{V}(\alpha''\alpha + \alpha'^2) = \mathrm{V}(\alpha''\alpha)$, on trouve

$$\beta' = \frac{\mathrm{V}[\mathrm{V}(\alpha'\alpha)\,\mathrm{V}(\alpha''\alpha)]}{[\mathrm{T\,V}(\alpha'\alpha)]^3}\,\beta.$$

Mais, d'après la formule (15),

$$\mathrm{V}(\alpha'\alpha)\,\mathrm{V}(\alpha''\alpha) = -\alpha\,\mathrm{S}(\alpha'\alpha''\alpha) = \alpha\,\mathrm{S}(\alpha\alpha'\alpha'').$$

On a de plus

$$\mathrm{T\,V}(\alpha'\alpha) = \mathrm{T}(\alpha'\alpha) = \mathrm{T}\alpha'.\mathrm{T}\alpha$$

avec $\mathrm{T}\alpha = 1$, $\mathrm{T}\alpha' = \frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon$. En tenant compte enfin de la relation $\alpha\beta = \gamma$, il vient

$$(37) \qquad \beta' = \frac{\mathrm{S}(\alpha\alpha'\alpha'')}{\varepsilon^3}\,\beta.$$

L'angle de torsion $d\psi$ est donné par l'expression $d\psi = \mathrm{T}\beta' dt$ et, par suite, en posant $\eta = \frac{d\psi}{dt}$, on a, d'après (37),

$$\eta = \frac{\mathrm{S}(\alpha\alpha'\alpha'')}{\varepsilon^3}, \tag{38}$$

de sorte que l'on peut écrire simplement

$$\beta' = \eta\gamma. \tag{39}$$

Cette dernière formule, qui, d'après (36), se réduit aussi à la suivante

$$\beta' = \frac{\eta}{\varepsilon}\alpha',$$

correspond à un théorème de Serret.

44. La troisième des équations (34) donne, par différentiation,

$$\gamma' = \alpha'\beta + \alpha\beta'.$$

En remplaçant β et β' par leurs valeurs (35) et (39) et en remarquant que l'on a

$$\alpha'^2 = -\varepsilon^2,$$

on trouve immédiatement

$$\gamma' = -\alpha\varepsilon - \beta\eta, \tag{40}$$

ce qui équivaut aux formules de Frenet et au théorème de Lancret sur l'angle de deux normales principales infiniment voisines.

45. *Courbure et torsion.* — En introduisant le vecteur u d'un point de la courbe au lieu du vecteur-unité α, on retrouve les formules ordinaires de la courbure et de la torsion où figurent les dérivées des coordonnées.

Remarquons d'abord que, si l'on désigne par ds la longueur d'un arc infiniment petit de la courbe, on a

$$ds = \mathrm{T}u'.dt.$$

Cela posé, α étant, comme précédemment, le vecteur-unité de la tangente, on a

$$\alpha = \mathrm{U}u';$$

d'où, en différentiant suivant la formule (31),

$$\alpha' = \frac{V(u'u'')u'}{(Tu')^3}.$$

Donc l'angle de contingence est donné par la formule

$$d\varphi = \frac{TV(u'u'')}{(Tu')^2}dt,$$

et la courbure a pour expression

$$(41)\qquad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{TV(u'u'')}{(Tu')^3},$$

ce qui équivaut à

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{[(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2]^{\frac{1}{2}}}{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dans le cas où s est la variable indépendante, on a

$$Tu' = 1;$$

il en résulte, d'après (28),

$$S(u'u'') = 0 \qquad \text{et} \qquad V(u'u'') = u'u''.$$

On a alors

$$(42)\qquad \frac{d\varphi}{ds} = Tu'',$$

ce qui équivaut à

$$\frac{d\varphi}{ds} = \left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

46. Pour calculer la torsion, on partira de la formule

$$\beta = UV(u''u');$$

d'où l'on tire, par un calcul analogue à celui du n° 43,

$$\beta' = \frac{V[V(u''u')V(u'''u')]}{[TV(u''u')]^2}\beta.$$

On a d'ailleurs

$$V(u''u')V(u'''u') = u'S(u'u''u'''), \qquad Vu' = u'$$

et, par suite,

$$\beta' = \frac{S(u'u''u''')}{[TV(u'u'')]^2}u'\beta.$$

L'angle de torsion $d\psi$, égal à $T\beta' dt$, est donc donné par la formule

$$d\psi = \frac{S(u'u''u''')}{[T V(u'u'')]^2} T u'.dt,$$

et la torsion a pour expression

$$(43) \qquad \frac{d\psi}{ds} = \frac{S(u'u''u''')}{[T V(u'u'')]^2}.$$

D'après la formule (12), cette expression équivaut à la suivante :

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{dx(dy\,d^2z - dz\,d^2y) + dy(dz\,d^2x - dx\,d^2z) + dz(dx\,d^2y - dy\,d^2x)}{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}.$$

VI. — Applications cinématiques.

A. — Rotation d'un solide autour d'un axe fixe.

47. *Déplacement d'un solide autour d'un axe.* — Supposons qu'un solide tourne autour d'une droite LL'. A partir d'un point O de cette droite existent deux directions opposées OL, OL'; nous appellerons *axe de la rotation* la direction OL suivant laquelle un observateur, ayant les pieds en O, doit se déplacer pour voir la rotation s'effectuer de droite à gauche.

Soient (a, b, c) les cosinus directeurs de la direction OL rapportée à un système de trois axes rectangulaires; l'axe de la rotation sera représenté par le vecteur-unité

$$\lambda = ai + bj + ck,$$

et, en désignant par θ l'angle de la rotation, le déplacement du solide sera défini par les données (λ, θ).

48. Considérons un point M du solide; après la rotation, ce point vient en M_1. L'origine des coordonnées étant au point O de 'axe fixe, désignons par (x, y, z) et (x_1, y_1, z_1) les coordonnées s points M et M_1 ; les positions respectives de ces points seront résentées par les vecteurs

$$u = xi + yj + zk,$$
$$u_1 = x_1 i + y_1 j + z_1 k,$$

et, pour déterminer la position finale du solide, il suffira d'exprimer u_1 en fonction de u, λ, θ; on y parvient à l'aide du théorème suivant, dû à Hamilton.

49. Théorème. — *La position d'un vecteur* u, *après une rotation égale à* θ *autour d'un axe* λ, *est représentée par le produit*

$$u_1 = p^{-\frac{1}{2}} u p^{\frac{1}{2}},$$

où l'on désigne par p *le verseur* $\cos\theta + \lambda\sin\theta$.

En effet, décomposons le vecteur u en deux autres (β, α) suivant l'axe de rotation et suivant une direction perpendiculaire à cet axe, de sorte que $u = \beta + \alpha$. La rotation conserve la composante β et multiplie α par le verseur p (n° 28); d'où il résulte

$$u_1 = \beta + \alpha p. \tag{44}$$

Cela posé, on a identiquement

$$u = -\lambda^2 u,$$

c'est-à-dire

$$u = -\lambda\,S(\lambda u) - \lambda\,V(\lambda u);$$

mais, d'après la formule (20) du n° 25, le scalaire $S(\lambda u)$, pris avec le signe contraire, représente la projection de u sur λ; donc on a

$$-\lambda\,S(\lambda u) = \beta$$

et, par suite,

$$-\lambda\,V(\lambda u) = \alpha.$$

Par conséquent, la relation (44) devient

$$u_1 = -\lambda\,S(\lambda u) - \lambda\,V(\lambda u)p. \tag{45}$$

Cette formule résout le problème: voici comment on en déduit l'expression transformée qui figure dans l'énoncé.

50. On a, identiquement,

$$u_1 = -\lambda\left[S(\lambda u)p^{-\frac{1}{2}} + V(\lambda u)p^{\frac{1}{2}}\right]p^{\frac{1}{2}}$$

et, d'après le n° 33,

$$p^{\frac{1}{2}} = \cos\frac{\theta}{2} + \lambda\sin\frac{\theta}{2},$$

$$p^{-\frac{1}{2}} = \cos\frac{\theta}{2} - \lambda\sin\frac{\theta}{2}.$$

Substituant ces valeurs, il vient

$$u_1 = -\lambda \left\{ \cos\frac{\theta}{2}[S(\lambda u) + V(\lambda u)] - \sin\frac{\theta}{2}[S(\lambda u) - V(\lambda u)]\lambda \right\} p^{\frac{1}{2}}.$$

On a enfin

$$S(\lambda u) + V(\lambda u) = \lambda u,$$
$$S(\lambda u) - V(\lambda u) = u\lambda.$$

Par suite,

$$u_1 = -\lambda\left(\cos\frac{\theta}{2}\lambda u + \sin\frac{\theta}{2} u\right)p^{\frac{1}{2}} = \left(\cos\frac{\theta}{2} - \lambda\sin\frac{\theta}{2}\right)up^{\frac{1}{2}};$$

c'est-à-dire, conformément à l'énoncé,

$$(46) \qquad u_1 = p^{-\frac{1}{2}} u p^{\frac{1}{2}}.$$

51. *Formules d'Euler.* — On peut déduire de cette formule les coordonnées (x_1, y_1, z_1) du point M_1 où vient le point M après la rotation. En désignant, en effet, par (a, b, c) les cosinus directeurs de l'axe de rotation et, en posant

$$a \operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = l, \qquad b \operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = m, \qquad c \operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = n,$$
$$v = li + mj + nk,$$

la formule (46) peut s'écrire

$$u_1 = \cos^2\frac{\theta}{2}(1 - v)u(1 + v) = \cos^2\frac{\theta}{2}(u - vu + uv - vuv)$$

ou bien, en appliquant la règle établie (n° 17) pour un produit de trois vecteurs,

$$(47) \qquad u_1 = \cos^2\frac{\theta}{2}[u + 2V(uv) - 2vS(uv) + uS(v^2)].$$

On a, d'ailleurs,

$$V(uv) = (ny - mz)i + (lz - nx)j + (mx - ly)k,$$
$$S(uv) = -(lx + my + nz), \qquad S(v^2) = -(l^2 + m^2 + n^2).$$

Enfin, en posant

$$(48) \qquad h = 1 + l^2 + m^2 + n^2,$$

on a

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{1 + \operatorname{tang}^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{1 + l^2 + m^2 + n^2} = \frac{1}{h}.$$

En remplaçant les diverses quantités qui figurent dans (47) par leurs valeurs et en identifiant les coefficients de i, j, k dans les deux membres, on trouve

$$(49)\quad \begin{cases} hx_1 = (1 + l^2 - m^2 - n^2)x + 2(lm + n)y + 2(ln - m)z, \\ hy_1 = 2(ml - n)x + (1 - l^2 + m^2 - n^2)y + 2(mn + l)z, \\ hz_1 = 2(nl + m)x + 2(nm - l)y + (1 - l^2 - m^2 + n^2)z. \end{cases}$$

L'équation unique (46) équivaut au système des trois équations (49); on a donc un exemple remarquable de la concision que l'algorithme des quaternions est susceptible d'introduire dans les formules.

52. *Mouvement d'un point.* — Le mouvement d'un point est déterminé quand on connaît les fonctions du temps t qui expriment les coordonnées (x, y, z) de ce point. En représentant le point par le vecteur $u = xi + yj + zk$, on n'a plus à considérer qu'une seule fonction $u = f(t)$.

Les dérivées première et seconde de u par rapport à t sont deux vecteurs, v et w, qui représentent respectivement, en grandeur et en direction, la vitesse et l'accélération du mobile.

53. *Mouvement d'un solide autour d'un point.* — Supposons que le point M appartienne à un solide mobile autour d'un point fixe pris pour origine des vecteurs. Pendant un temps infiniment petit dt, le mouvement du solide peut être considéré comme une rotation d'un angle $d\varphi$ autour d'un vecteur unité λ. En négligeant les infiniment petits du second ordre, le verseur p de la rotation devient

$$p = 1 + \lambda\, d\varphi$$

et, en désignant par du l'accroissement que reçoit, pendant le temps dt, le vecteur u du point M, on a, d'après la formule (46),

$$u + du = (1 - \tfrac{1}{2}\lambda\, d\varphi)\, u\, (1 + \tfrac{1}{2}\lambda\, d\varphi);$$

d'où, en développant et en négligeant toujours les infiniment petits du second ordre,

$$du = \tfrac{1}{2}\, d\varphi(u\lambda - \lambda u) = d\varphi\, \mathrm{V}(u\lambda).$$

En divisant les deux membres par dt et désignant par ε la *vitesse angulaire* $\frac{d\varphi}{dt}$, on a, pour la vitesse du point M,

$$v = \varepsilon \mathrm{V}(u\lambda).$$

On peut encore écrire

$$v = \mathrm{V}(u.\varepsilon\lambda),$$

et le facteur $\varepsilon\lambda$ est un vecteur obtenu en portant sur l'axe de la rotation une longueur égale à la vitesse angulaire de cette rotation ; c'est le *vecteur représentatif* ou, simplement, *le vecteur de la rotation instantanée*. En le désignant par ω, on a

$$v = \mathrm{V}(u\omega). \tag{50}$$

En prenant la dérivée de v par rapport à t, on a, pour l'accélération,

$$w = \mathrm{V}(u'\omega + u\omega')$$

ou, en remplaçant u' par sa valeur,

$$w = \mathrm{V}[\mathrm{V}(u\omega)\omega + u\omega']. \tag{51}$$

En désignant cette dernière expression par $\mathrm{V}'(u\omega)$, la vitesse et l'accélération d'un point quelconque d'un solide tournant autour d'un centre fixe sont représentées par les formules

$$v = \mathrm{V}(u\omega), \qquad w = \mathrm{V}'(u\omega). \tag{52}$$

B. — Théorie des mouvements relatifs.

54. *Théorème de Coriolis*. — Connaissant le mouvement (relatif) d'un point M par rapport à un système mobile autour d'un centre fixe, ainsi que le mouvement de ce système par rapport à un système fixe, on se propose de déterminer le mouvement (absolu) du point M par rapport au système fixe.

Prenant le centre fixe pour origine des vecteurs, soit u le vecteur qui définit la position du point M par rapport au système fixe.

Le *mouvement d'entraînement* du point M à l'instant t est le mouvement que prendrait ce point si, à partir de cet instant, il restait en repos relatif ; il résulte de cette définition que, si l'on désigne par ω le vecteur de la rotation instantanée du système mobile, la vitesse et l'accélération d'entraînement sont, d'après les relations (52), données par les formules

$$v_e = \mathrm{V}(u\omega), \qquad w_e = \mathrm{V}'(u\omega). \tag{53}$$

55. Cela posé, imaginons que, le système mobile étant réduit au repos pendant le temps dt, le point M accomplisse son mouvement relatif. La valeur finale de son vecteur sera

$$u_1 = u + v_r\,dt + \tfrac{1}{2} w_r\,dt^2 + \ldots, \tag{54}$$

en désignant par v_r et w_r les vecteurs qui définissent, par rapport aux axes fixes, la vitesse et l'accélération relatives.

Supposons maintenant que le point M reste en repos relatif et que l'on imprime au système mobile le mouvement dont il est réellement animé pendant le temps dt. D'après les formules du n° 53, le vecteur u_1 deviendra

$$u_2 = u_1 + \mathrm{V}(u_1\omega)\,dt + \tfrac{1}{2}\mathrm{V}'(u_1\omega)\,dt^2 + \ldots. \tag{55}$$

Par ces deux mouvements successifs, le mobile vient à la position qu'il occupe, après l'intervalle de temps dt, dans son mouvement absolu; par suite, en désignant par Δu l'accroissement du vecteur u correspondant à l'accroissement dt du temps, on a

$$u + \Delta u = u_2 \qquad \text{et} \qquad \Delta u = u_2 - u.$$

En remplaçant, dans u_2, u_1 par sa valeur (54), il vient

$$\Delta u = [v_r + \mathrm{V}(u\omega)]\,dt + \tfrac{1}{2}[w_r + 2\mathrm{V}(v_r\omega) + \mathrm{V}'(u\omega)]\,dt^2 + \ldots.$$

En prenant les coefficients de dt et dt^2 et en ayant égard aux formules (53), on a, pour la vitesse et l'accélération absolues,

$$\left\{\begin{aligned} v &= v_r + v_e, \\ w &= w_r + w_e + 2\mathrm{V}(v_r\omega). \end{aligned}\right. \tag{56}$$

Par suite :

1° La vitesse absolue est la résultante de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement;

2° L'accélération absolue est la résultante de l'accélération relative, de l'accélération d'entraînement et d'une accélération complémentaire. D'après la règle du n° 25, l'accélération complémentaire s'obtient en portant sur l'axe des deux vecteurs (ω, v_r) le double produit du sinus de l'angle compris entre ces deux vecteurs par la grandeur de la vitesse relative et par la vitesse angulaire de la rotation instantanée du système mobile.

VII. — Applications mécaniques et physiques.

55. On peut représenter par un vecteur toute grandeur, mécanique ou physique, présentant à la fois une quantité et une direction (vitesse, force, flux de chaleur ou d'électricité à travers un plan, etc.). Au lieu de trois notations nécessaires pour représenter les trois composantes de cette grandeur, il suffit d'en introduire une seule sur laquelle on peut généralement opérer suivant les règles du Calcul des quaternions. On trouve ainsi, dans un grand nombre de cas, une équation unique qu'il suffit de décomposer en trois autres pour retrouver, sous leur forme usuelle, les résultats de l'analyse ordinaire. Voici quelques notions se rapportant à ce genre d'applications.

56. *Fonctions vectorielles.* — Soit un vecteur variable

$$\rho = xi + yj + zk.$$

Si l'on désigne par X, Y, Z trois fonctions réelles quelconques des variables (x, y, z), l'expression

$$\sigma = Xi + Yj + Zk$$

peut être considérée comme une fonction de ρ; car à chaque valeur de ρ, c'est-à-dire à chaque système de valeurs de (x, y, z), correspondent un système de valeurs de (X, Y, Z) et, par conséquent, une valeur de σ. On dit alors que σ est une *fonction vectorielle* de ρ [1].

Cette définition est une extension de celle que Cauchy a proposée pour les fonctions d'une variable imaginaire.

57. Lorsque (X, Y, Z) sont des fonctions linéaires et homogènes de (x, y, z), on dit que σ est une fonction vectorielle et linéaire de ρ [2]; on a, dans ce cas,

$$\begin{aligned} X &= a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z, \\ Y &= a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z, \\ Z &= a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z, \end{aligned}$$

en désignant par $a_{r,s}$ des coefficients constants.

---

(1) *Traité d'Électricité et de Magnetisme,* t. I, p. 30.

(2) *Ibid.*, p. 152.

La forme la plus générale d'une fonction vectorielle linéaire comprend donc neuf coefficients arbitraires. Si ces coefficients satisfont à la condition $a_{r,s} = a_{s,r}$, leur nombre se réduit à six et la fonction est dite *autoconjuguée*. Dans ce cas, (X, Y, Z) sont de la forme

$$\begin{aligned} X &= a_1 x + b_3 y + b_2 z, \\ Y &= b_3 x + a_2 y + b_1 z, \\ Z &= b_2 x + b_1 y + a_3 z, \end{aligned}$$

et on peut les écrire

$$X = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

en posant

$$2\varphi = a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + 2 b_1 yz + 2 b_2 zx + 2 b_3 xy.$$

58. *Opérateur* ∇. — Dans le cas, souvent réalisé, où (X, Y, Z) sont les dérivées partielles d'une fonction φ de (x, y, z), on a l'expression

$$\sigma = \frac{\partial \varphi}{\partial x} i + \frac{\partial \varphi}{\partial y} j + \frac{\partial \varphi}{\partial z} k;$$

Hamilton et Tait l'écrivent sous la forme

$$\sigma = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi$$

ou simplement

$$\sigma = \nabla \varphi$$

en posant symboliquement

$$(57) \qquad \nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}.$$

L'*opérateur* ∇ est alors appliqué à une quantité scalaire $\varphi(x, y, z)$. Dans le cas où ce même opérateur est appliqué à un vecteur $\sigma = Xi + Yj + Zk$, on fait le produit

$$\left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) (Xi + Yj + Zk)$$

suivant la règle du produit de deux vecteurs ; on obtient ainsi l'expression

$$-\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) k,$$

que l'on représente par $\nabla\sigma$, de sorte que, suivant la notation ordinaire des quaternions, on peut écrire

$$\text{(58)} \qquad S(\nabla\sigma) = -\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right),$$

$$\text{(59)} \qquad V(\nabla\sigma) = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)k.$$

L'introduction de l'opérateur ∇ permet d'écrire sous une forme assez simple plusieurs formules usuelles de Mécanique et de Physique mathématique; nous allons en donner quelques exemples.

59. *Paramètres différentiels.* — On sait, et l'on peut d'ailleurs vérifier aisément que, φ étant une fonction des coordonnées (x, y, z) d'un point, les deux expressions différentielles

$$\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

conservent les mêmes formes pour tous les systèmes d'axes coordonnés rectangulaires.

Lamé a proposé d'appeler ces expressions *paramètres différentiels du premier et du second ordre* de la fonction φ, et il les a désignées par $\Delta^1\varphi$, $\Delta^2\varphi$.

Ces paramètres jouent un rôle important dans un grand nombre de théories; celui du second ordre, notamment, figure dans les théories de l'attraction, de la conductibilité, de l'électricité, de l'élasticité, etc. Voici les notations qui servent à les représenter dans le système d'Hamilton.

60. En posant, suivant la notation adoptée,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}i + \frac{\partial\varphi}{\partial y}j + \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \nabla\varphi,$$

le paramètre différentiel du premier ordre est le module de $\nabla\varphi$, de sorte que l'on a

$$\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2} = T(\nabla\varphi).$$

En second lieu, suivant une propriété rappelée par Maxwell [1], le symbole d'opération ∇, répété deux fois, devient

$$\nabla^2 = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}\right)^2,$$

ou bien, en appliquant la règle ordinaire de la multiplication des vecteurs,

$$\nabla^2 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right). \tag{60}$$

Il en résulte que, dans ce système de notations, le paramètre différentiel du second ordre d'une fonction φ est représenté par $-\nabla^2\varphi$, de sorte que

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\nabla^2\varphi.$$

61. *Dérivée d'une fonction suivant une direction.* — En désignant par (a, b, c) les cosinus directeurs d'une direction quelconque, on a souvent à considérer l'expression

$$a \frac{\partial\varphi}{\partial x} + b \frac{\partial\varphi}{\partial y} + c \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

On peut assigner à cette expression une signification très simple. En effet, on a, en général,

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz.$$

Supposons qu'à partir du point (x, y, z) et dans la direction (a, b, c) on porte une longueur infiniment petite ds, les projections de cette longueur sur les axes sont

$$dx = a\,ds, \qquad dy = b\,ds, \qquad dz = c\,ds,$$

et la valeur correspondante de $d\varphi$ est

$$d\varphi = \left(a \frac{\partial\varphi}{\partial x} + b \frac{\partial\varphi}{\partial y} + c \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) ds.$$

---

(1) *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. I, p. 33.

On peut donc écrire

$$a\frac{\partial\varphi}{\partial x}+b\frac{\partial\varphi}{\partial y}+c\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{d\varphi}{ds},$$

$\frac{d\varphi}{ds}$ étant *la dérivée de la fonction* φ *suivant la direction* (a, b, c). Cette dérivée peut encore s'écrire symboliquement

$$\frac{d\varphi}{ds}=\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi,$$

et, si l'on désigne par α le vecteur-unité de la direction (a, b, c), c'est-à-dire si l'on pose

$$\alpha=a\imath+b\jmath+ck,$$

on a évidemment

$$a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\frac{\partial}{\partial z}=-\mathrm{S}(\alpha\nabla), \tag{61}$$

de sorte que $-\mathrm{S}(\alpha\nabla)$ est la caractéristique de la dérivation suivant la direction α.

62. *Dilatation cubique d'un système déformé.* — Considérons un système de points infiniment rapprochés rapporté à trois axes rectangulaires. Concevons ce système déplacé de telle manière que les projections (ξ, η, ζ) du déplacement d'un point quelconque M du système soient des fonctions continues des coordonnées primitives (x, y, z) de ce point.

Pour un point N $(x+h, y+k, z+l)$ infiniment voisin de M, les projections du déplacement sont

$$\xi'=\xi+\frac{\partial\xi}{\partial x}h+\frac{\partial\xi}{\partial y}k+\frac{\partial\xi}{\partial z}l,$$

$$\eta'=\eta+\frac{\partial\eta}{\partial x}h+\frac{\partial\eta}{\partial y}k+\frac{\partial\eta}{\partial z}l,$$

$$\zeta'=\zeta+\frac{\partial\zeta}{\partial x}h+\frac{\partial\zeta}{\partial y}k+\frac{\partial\zeta}{\partial z}l.$$

Imaginons, par le point M, des axes parallèles à OX, OY, OZ. Par rapport à ces axes, les coordonnées de N sont h, k, l avant le déplacement; après le déplacement, ces coordonnées relatives deviennent

$$
\begin{aligned}
h' &= h + \xi' - \xi,\\
k' &= k + \eta' - \eta,\\
l' &= l + \zeta' - \zeta,
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire, d'après les formules précédentes,

$$
(62)\qquad \left\{
\begin{aligned}
h' &= \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) h + \frac{\partial \xi}{\partial y} k + \frac{\partial \xi}{\partial z} l,\\
k' &= \frac{\partial \eta}{\partial x} h + \left(1 + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) k + \frac{\partial \eta}{\partial z} l,\\
l' &= \frac{\partial \zeta}{\partial x} h + \frac{\partial \zeta}{\partial y} k + \left(1 + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) l.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces expressions sont linéaires en h, k, l; par suite, les points N situés, dans le voisinage de M, sur une surface $F(h, k, l) = 0$, seront, après le déplacement, sur une surface du même degré. Ainsi, les points d'une sphère viendront sur un ellipsoïde; les points d'un plan sur un plan. De même, les points d'une droite restent sur une droite.

63. Cela posé, considérons un élément de volume renfermant le point M. La déformation du système change le volume de cet élément et le rapport de l'accroissement de ce volume à sa valeur primitive est ce que l'on appelle la *dilatation cubique* au point M. Tout volume étant décomposable en tétraèdres, il suffit de chercher la dilatation d'un tétraèdre.

A cet effet, considérons, avec le point M, trois points infiniment voisins N_1, N_2, N_3. Désignons leurs coordonnées relatives par les lettres (h, k, l) affectées des indices 1, 2, 3. Le volume du tétraèdre dont ces quatre points sont les sommets est, avant la déformation du système,

$$
V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} h_1 & k_1 & l_1 \\ h_2 & k_2 & l_2 \\ h_3 & k_3 & l_3 \end{vmatrix}.
$$

En désignant par (h', k', l') les valeurs de (h, k, l) après la déformation, le volume devient

$$
V' = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} h'_1 & k'_1 & l'_1 \\ h'_2 & k'_2 & l'_2 \\ h'_3 & k'_3 & l'_3 \end{vmatrix}.
$$

En ayant égard aux formules qui expriment (h', k', l') en fonction de (h, k, l), on voit immédiatement, par la règle de multiplication des déterminants, que V' est le produit de V par le déterminant

$$(63)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1+\frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} & \frac{\partial\xi}{\partial z} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & 1+\frac{\partial\eta}{\partial y} & \frac{\partial\eta}{\partial z} \\ \frac{\partial\zeta}{\partial x} & \frac{\partial\zeta}{\partial y} & 1+\frac{\partial\zeta}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

On a donc $V' = V\Delta$ et la dilatation cubique, égale à $\frac{V'-V}{V}$, est donnée par la formule

$$\theta = \Delta - 1.$$

Cette expression, ne dépendant pas de l'orientation du tétraèdre, s'étend à un volume quelconque. Elle s'applique à des déplacements quelconques (ξ, η, ζ), sans aucune restriction relative à l'ordre de grandeur des neuf dérivées partielles qui figurent dans le déterminant Δ.

64. Considérons, en particulier, des déplacements tels que les différences $h'-h$, $k'-k$, $l'-l$ soient très petites par rapport à h, k, l. Dans cette hypothèse, les neuf dérivées partielles ont des valeurs très petites; en les traitant comme des quantités infiniment petites et en réduisant le déterminant Δ à sa partie principale, l'expression de la dilatation cubique, dans le cas d'une petite déformation, se réduit à la valeur

$$\theta = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}.$$

Si donc on désigne par σ le vecteur qui représente, en grandeur et en direction, le déplacement du point M, c'est-à-dire si l'on pose

$$\sigma = \xi\iota + \eta j + \zeta k,$$

on a, dans la notation des quaternions [1],

$$(64)\qquad \theta = -S(\nabla\sigma).$$

[1] *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. I, p. 150.

65. *Rotations élémentaires.* — Considérons, comme précédemment, un système de points infiniment rapprochés. Concevons que les points de ce système soient en mouvement, de telle sorte que les composantes rectangulaires (u, v, w) de la vitesse d'un point quelconque M soient des fonctions continues des coordonnées (x, y, z) de ce point.

Pour un point $N(x+h, y+k, z+l)$ infiniment voisin de M, les composantes de la vitesse sont

$$(65)\qquad \begin{cases} u' = u + \dfrac{\partial u}{\partial x} h + \dfrac{\partial u}{\partial y} k + \dfrac{\partial u}{\partial z} l, \\ v' = v + \dfrac{\partial v}{\partial x} h + \dfrac{\partial v}{\partial y} k + \dfrac{\partial v}{\partial z} l, \\ w' = w + \dfrac{\partial w}{\partial x} h + \dfrac{\partial w}{\partial y} k + \dfrac{\partial w}{\partial z} l. \end{cases}$$

Ces formules montrent que, pendant un temps infiniment petit dt, le mouvement d'un élément entourant le point M est déterminé par les valeurs que présentent en ce point les neuf dérivées partielles de (u, v, w) par rapport à (x, y, z).

66. On peut substituer à ces dérivées neuf nouveaux coefficients dont l'interprétation est plus facile. En posant

$$\begin{array}{lll} a_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}, & a_2 = \dfrac{\partial v}{\partial y}, & a_3 = \dfrac{\partial w}{\partial z}; \\ 2b_1 = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}, & 2b_2 = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}, & 2b_3 = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ 2p_1 = \dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial y}, & 2p_2 = \dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial z}, & 2p_3 = \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x}, \end{array}$$

les valeurs (65) peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} u' &= u + p_3 k - p_2 l + a_1 h + b_3 k + b_2 l, \\ v' &= v + p_1 l - p_3 h + b_3 h + a_2 k + b_1 l, \\ w' &= w + p_2 h - p_1 k + b_2 h + b_1 k + a_3 l. \end{aligned}$$

On en conclut que la vitesse (u', v', w') du point N est la résultante :

1° De la vitesse (u, v, w) identique à celle du point M;

2° De la vitesse dont les composantes sont

$$(66)\qquad \begin{cases} u_1 = p_3 k - p_2 l, \\ v_1 = p_1 l - p_3 h, \\ w_1 = p_2 h - p_1 k, \end{cases}$$

correspondant à une rotation, aux composantes (p_1, p_2, p_3), autour d'un axe passant par le point M;

3° De la vitesse dont les composantes sont

$$(67)\qquad \begin{cases} u_2 = a_1 h + b_3 k + b_2 l, \\ v_2 = b_3 h + a_2 k + b_1 l, \\ w_2 = b_2 h + b_1 k + a_3 l, \end{cases}$$

que l'on peut représenter comme il suit.

67. Soit la série des surfaces homothétiques ayant pour équation

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + 2 b_1 yz + 2 b_2 zx + 2 b_3 xy = \lambda.$$

Supposons le centre au point M et considérons celle de ces surfaces qui passe par le point N, ce qui détermine λ par la condition

$$a_1 h^2 + a_2 k^2 + a_3 l^2 + 2 b_1 kl + 2 b_2 lh + 2 b_3 hk = \lambda.$$

D'après les valeurs (67), le plan tangent à cette surface, au point N, a pour équation

$$u_2 x + v_2 y + w_2 z = \lambda.$$

Par suite, la vitesse (u_2, v_2, w_2) est normale à la surface qui passe par le point N. De plus, si l'on désigne par δ la grandeur de cette vitesse et par ϖ la perpendiculaire abaissée du point M sur le plan tangent, on a

$$\varpi = \frac{\lambda}{\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}} = \frac{\lambda}{\delta};$$

d'où il résulte que la grandeur de la troisième vitesse composante est donnée par la formule

$$\delta = \frac{\lambda}{\varpi}.$$

68. En résumé, on peut dire que, pendant un temps infiniment petit dt, le mouvement d'un élément environnant le point M se

compose d'une translation, d'une rotation autour d'un axe et d'un troisième mouvement que l'on peut appeler *déformation,* parce qu'il modifie les distances mutuelles des points compris dans l'élément considéré.

69. La *rotation élémentaire* en un point M du système est déterminée par les quantités

$$(68)\qquad \begin{cases} p_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ p_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) \\ p_3 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x}\right), \end{cases}$$

et le *vecteur de la rotation élémentaire* est un vecteur obtenu en portant sur l'axe de la rotation une longueur égale à la vitesse angulaire de cette rotation. En le désignant par ω, on a

$$\omega = p_1 i + p_2 j + p_3 k$$

ou bien, en remplaçant p_1, p_2, p_3 par leurs valeurs,

$$(69)\qquad \omega = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) i + \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) j + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) k\right].$$

On voit, d'après les valeurs (68), que lorsque les composantes de la vitesse sont les dérivées partielles

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

d'une fonction $\varphi(x, y, z)$ des coordonnées, le mouvement du système de points s'effectue sans rotation ([1]).

70. D'après la formule (59) du n° 68, si l'on désigne par σ le vecteur de la vitesse du point M, c'est-à-dire si l'on pose

$$\sigma = ui + vj + wk,$$

le vecteur de la rotation élémentaire est représenté par le symbole

$$(70)\qquad \omega = -\tfrac{1}{2} \mathrm{V}(\nabla\sigma).$$

([1]) *Traité d'Électricité et de Magnétisme,* t. I, p. 20.

71. On vient de voir, dans ce qui précède, comment les notations du *Calcul des quaternions* s'introduisent lorsqu'on veut représenter les quantités les plus fréquemment rencontrées dans les recherches de Mécanique ou de Physique mathématique. De nombreuses conséquences de ces principes se trouvent dans des Ouvrages récents, notamment dans le Traité de M. Tait. Les limites imposées à cette Note ne permettaient pas de les présenter ici; mais le lecteur trouvera, croyons-nous, dans les indications qui viennent d'être données, tout ce qui est nécessaire pour l'intelligence complète des applications faites par Maxwell.

(Extrait du *Traité d'Électricité et de Magnétisme* de Maxwell, t. II.)

14846 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.