DIEKMANN. ANWENDUNG DER NEUERN ALGEBRA

Anwendung der Determinanten

und

Elemente der neuern Algebra

auf dem

Gebiete der niedern Mathematik.

Zum Gebrauche

beim Unterricht an höheren Lehranstalten

sowie

zum Selbstunterricht

herausgegeben

von

Prof. Dr. Jos. Diekmann,

Rektor des Realprogymnasiums zu Viersen.

Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1889.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Den

Manen seines unvergesslichen Lehrers

A. Clebsch

in pietätvoller Erinnerung

der Verfasser.

Vorwort.

Seit O. Hesse zum ersten Male in seiner kleinen Schrift für Einführung der Determinanten in den mathematischen Unterricht an unseren höheren Schulen eintrat, sind fast zwei Decennien verflossen, und der anfänglich so heftig entbrannte Streit über die Frage der Einführung ist einer ruhigeren Erwägung, nämlich die Sache sich aus sich selbst heraus entwickeln zu lassen, gewichen. Dabei ist aber als eine erfreuliche Thatsache zu konstatieren, dass, während die Direktorenkonferenz zu Hannover im Jahre 1878 sich vollständig ablehnend gegenüber dieser Frage verhielt, die westfälische Direktorenkonferenz vom Jahre 1884 den Gebrauch der Determinanten mit gewissen Einschränkungen an unseren höheren Lehranstalten für wünschenswert erachtete. Aus allen diesen Verhandlungen treten uns hauptsächlich zwei Einwürfe entgegen. Erstlich nämlich habe die Schule für eine gründliche und wissenschaftliche Behandlung der Lehre von den Determinanten keine Zeit, eine ungründliche oder oberflächliche Behandlung aber widerspreche dem wissenschaftlichen Charakter unserer Disciplin und den didaktischen Forderungen, die an den Unterricht unserer höheren Lehranstalten gestellt werden müssten. Aber gesetzt auch, es gelänge die Schüler in die Lehre von den Determinanten einzuführen, so stehe doch — und das ist der zweite Einwurf — der praktische Wert und ihre Verwendbarkeit in keinem Verhältnis zu der aufgewandten Zeit und Mühe.

Was den ersten Einwurf angeht, so sei bemerkt, dass man bis zur Mitte der fünfziger Jahre eine eigentliche Lehre der Determinanten, welche dieselbe im systematischen Zusammenhang behandelte und ihre Eigenschaften entwickelte, kaum kannte. Der erste, der eine solche Darstellung, eine eigentliche Theorie der Determinanten gab, war A. Cauchy, dessen Abhandlung 1815 erschien; allein sie wurde fast gar nicht beachtet, so dass es erst einer neuen Bearbeitung dieser Theorie durch Jacobi (Crelle, XXII) bedurfte, um die Mathematiker auf diese Erscheinung aufmerksam zu machen. Allein auch durch diese ausgezeichnete Abhandlung konnte eine weitere Verbreitung, da sie keine selbständige Publikation bildete, nicht erreicht werden. Diese trat erst ein mit der Erscheinung der Bücher von Spottiswoode (1851), Brioschi (1854) und namentlich in Deutschland durch das vorzügliche Buch Baltzers (1857). Eine solche selbständige Theorie kannten aber Leibniz, Cramer, Bézout, Laplace, Binet und Gauss nicht, und dennoch haben diese ausgezeichneten Mathematiker Determinanten sowohl auf algebraischem als arithmetischem und geometrischem Gebiete angewendet, wobei die Determinante zur Erleichterung der Operation nur als abgekürzter Ausdruck fungiert.

Auf diesen einfachsten Begriff der Determinante und Unterdeterminante wird sich auch die Schule zu beschränken haben und daran die wenigen Sätze knüpfen, welche sie für ihre Zwecke bedarf. Das aber erfordert so wenig Zeit und kann in so einfacher Weise zum Verständnis gebracht werden, dass für Einführung der Determinanten in diesem Umfange und diesem Sinne irgend welche Schwierigkeit nicht existiert. Aber auch dieses Wenige würde noch zu viel sein, wenn damit weiter nichts erreicht werden könnte, als aus einem System von linearen Gleichungen die Werte der Unbekannten zu berechnen.

Das kann auch durch die gewöhnlichen Methoden, soweit es sich um einfache Formen handelt, erreicht werden. Vielmehr ist es das bei Anwendung der Determinanten auftretende Verfahren der Elimination, was unser Interesse in hohem Grade in Anspruch nimmt. In der That liegt der Hauptwert für die Schule bei Anwendung von Determinanten in der durch sie ermöglichten Art der Elimination und der Durchsichtigkeit der Eliminationsresultate. Letztere treten uns entweder als Resultanten oder Diskriminanten entgegen und diese beiden Formen sind es ja auch, welche bei dem heutigen Stande der Wissenschaft den Kernpunkt der Lehre von den Gleichungen, namentlich der vier ersten Grade, bilden. Und das ist es, was Hesse mit Einführung der Determinanten unserer Ansicht nach hat bezwecken wollen, nämlich auch für unsere Schulen, die sich mehr oder weniger auf diesem Gebiete noch im Geleise von Diophant und Descartes befinden, den Anschluss an den heutigen wissenschaftlichen Stand der Algebra möglich und erreichbar zu machen. Zweck der nachstehenden kleinen Arbeit war es, die Mannigfaltigkeit der Anwendung der Determinanten auf fast allen Gebieten der niederen Mathematik und die Bedeutung der dabei gewonnenen Resultate für unsere Disciplin in etwas darzulegen. In diesem Sinne wird das Werkchen vielleicht auch für den jüngeren Kollegen und angehenden Lehrer als Bindemittel zwischen Universität und Schule nicht ohne Anregung und Interesse sein.

Viersen, im Oktober 1889.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Durch Auflösung der Gleichungen:

$$ax + by = c,$$
$$a_{,}x + b_{,}y = c_{,}$$

erhält man

$$x = \frac{cb_{,} - bc_{,}}{ab_{,} - ba_{,}} \quad \text{und} \quad y = \frac{ac_{,} - ca_{,}}{ab_{,} - ba_{,}};$$

der gemeinsame Nenner $ab_{,} - ba_{,}$ entsteht aus dem Koeffizienten der Unbekannten, wenn man sie gemäss ihrer ursprünglichen Stellung ohne die Unbekannten in nachstehender Form

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_{,} & b_{,} \end{vmatrix}$$

ordnet, kreuzweise multipliziert und die Produkte subtrahiert. In derselben Weise entstehen auch die Zähler aus den Formen

$$\begin{vmatrix} c & b \\ c_{,} & b_{,} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} a & c \\ a_{,} & c_{,} \end{vmatrix}.$$

Eine solche Form dient daher als symbolische Bezeichnung für die Differenz der Produkte, welche, wie angegeben, aus ihnen gebildet sind. Diese Differenz heisst eine Determinante 2. Grades aus den vier Elementen $aa_{,}bb_{,}$ bezw. $aa_{,}cc_{,}$; $cbc_{,}b_{,}$.

In gleicher Weise kann eine solche Form aus 9, 16 … n^2 Elementen mit je 3, 4, … n Horizontal- und Vertikalreihen (Zeilen und Kolonnen) gebildet und als symbolische Bezeichnung für gewisse daraus zu bildende Summen von Produkten eingeführt werden.

Erklärung. 1. Durch ein Schema von n^2 Elementen, welche in n Zeilen und Kolonnen geordnet sind, wird eine

Determinante n^{ten} Grades dargestellt. Diese selbst ist eine algebraische Summe aus allen Produkten, welche aus jeder Zeile und jeder Kolonne nur ein Element als Faktor enthalten.

So gehören zu den Gliedern der Determinante 3. Grades

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_{\prime} & b_{\prime} & c_{\prime} \\ a_{\prime\prime} & b_{\prime\prime} & c_{\prime\prime} \end{vmatrix}$$

die Produkte $ab_{\prime}c_{\prime\prime}$; $bc_{\prime}a_{\prime\prime}$; $cb_{\prime}a_{\prime\prime}$; nicht aber z. B. $ab_{\prime}b_{\prime\prime}$; $ca_{\prime}c_{\prime\prime}$ u. s. f.

2. Wenn man in einer Determinante n^{ten} Grades eine Zeile und eine Kolonne unterdrückt, so bleibt eine Determinante $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades. Diese wird vollständig bestimmt durch das Element, welches den beiden unterdrückten Reihen gemeinschaftlich ist und wird daher als jenem zugehörig bezeichnet.

So gehört in obiger Determinante 3. Grades zu dem Elemente a die Determinante 2. Grades

$$\begin{vmatrix} b_{\prime} & c_{\prime} \\ b_{\prime\prime} & c_{\prime\prime} \end{vmatrix};$$

zu dem Elemente b die Determinante 2. Grades

$$\begin{vmatrix} a_{\prime} & c_{\prime} \\ a_{\prime\prime} & c_{\prime\prime} \end{vmatrix} \text{ u. s. f.}$$

3. In einer Determinante n^{ten} Grades erhält die einem Elemente zugehörige Determinante $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades das Vorzeichen $+$, wenn das Element in gerader Zeile und gerader Kolonne oder in ungerader Zeile und ungerader Kolonne steht, in den beiden anderen Fällen das Vorzeichen $-$. Sie heisst dann die zugehörige Unterdeterminante und wird mit dem entsprechenden grossen Buchstaben des Elementes bezeichnet. So ist für obige Determinante 3. Grades die Unterdeterminante

$$A = + \begin{vmatrix} b_{\prime} & c_{\prime} \\ b_{\prime\prime} & c_{\prime\prime} \end{vmatrix}; \quad A_{\prime} = - \begin{vmatrix} b & c \\ b_{\prime\prime} & c_{\prime\prime} \end{vmatrix}; \quad B = - \begin{vmatrix} a_{\prime} & c_{\prime} \\ a_{\prime\prime} & c_{\prime\prime} \end{vmatrix};$$

$$A_{\prime\prime} = + \begin{vmatrix} b & c \\ b_{\prime} & c_{\prime} \end{vmatrix} \text{ u. s. f.}$$

Anmerkung. Eine Determinante 3. (n^{ten}) Grades hat 9 (n^2) Unterdeterminanten, für deren Vorzeichen man folgendes Schema erhält:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

Folgerungen:

α) Die Glieder einer Determinante n^{ten} Grades sind Produkte aus je n Faktoren (nach 1).

β) Die Unterdeterminanten sämtlicher Elemente wechseln das Vorzeichen, wenn man in der Determinante zwei Parallelreihen miteinander vertauscht (3).

4. Der Wert einer Determinante 3. Grades wird erhalten, wenn man die Elemente einer Zeile oder Kolonne mit den zugehörigen Unterdeterminanten multipliziert und die Produkte addiert.

Der Wert der Determinante 3. Grades

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_{\prime} & b_{\prime} & c_{\prime} \\ a_{\prime\prime} & b_{\prime\prime} & c_{\prime\prime} \end{vmatrix},$$

welchen wir mit R bezeichnen, ist demnach

$$R = aA + a_{\prime}A_{\prime} + a_{\prime\prime}A_{\prime\prime}$$

oder

$$R = aA + bB + cC \qquad \text{u. s. f.;}$$

denn nach 1. kann das Element a nur noch mit den Elementen

$$\begin{vmatrix} b_{\prime} & c_{\prime} \\ b_{\prime\prime} & c_{\prime\prime} \end{vmatrix}$$

zur Bildung von Produkten zusammentreten. Beachtet man nun die Bedeutung der Unterdeterminante

$$A = + \begin{vmatrix} b_{\prime} & c_{\prime} \\ b_{\prime\prime} & c_{\prime\prime} \end{vmatrix} = b_{\prime}c_{\prime\prime} - c_{\prime}b_{\prime\prime},$$

so erhält man die mit a gebildeten Produkte durch

$$a \cdot A = ab_{\prime}c_{\prime\prime} - ac_{\prime}b_{\prime\prime}.$$

Ebenso können mit $a_{\prime}$ nur noch die Elemente $\begin{vmatrix} b & c \\ b_{\prime\prime} & c_{\prime\prime} \end{vmatrix}$ zur Bildung von Produkten dienen.

Beachtet man dazu, dass

$$A_\prime = -\begin{vmatrix} b & c \\ b_{\prime\prime} & c_{\prime\prime} \end{vmatrix} = -(bc_{\prime\prime} - cb_{\prime\prime})$$

ist, so erhält man alle Produkte, in denen $a_\prime$ vorkommt, durch $a_\prime A_\prime = -a_\prime bc_{\prime\prime} + a_\prime cb_{\prime\prime}$, und ebenso alle Produkte, in denen $a_{\prime\prime}$ vorkommt, durch

$$a_{\prime\prime} A_{\prime\prime} = a_{\prime\prime}\begin{vmatrix} b & c \\ b_\prime & c_\prime \end{vmatrix} = a_{\prime\prime} bc_\prime - a_{\prime\prime} cb_\prime .$$

Da nun in diesen Produkten auch alle übrigen Elemente je einmal als Faktor vorkommen, so sind damit alle möglichen Produkte der Determinante nach 1. erschöpft, und der Wert der Determinante 3. Grades ist:

$$\begin{aligned} R &= aA + a_\prime A_\prime + a_{\prime\prime} A_{\prime\prime} \\ &= a(b_\prime c_{\prime\prime} - c_\prime b_{\prime\prime}) - a_\prime (bc_{\prime\prime} - cb_{\prime\prime}) + a_{\prime\prime}(bc_\prime - cb_\prime). \end{aligned}$$

Denselben Wert erhält man auch durch

$R = aA + bB + cC$ oder durch $R = bB + b_\prime B_\prime + b_{\prime\prime} B_{\prime\prime}$ u. s. f.

Anmerkung. Für eine rasche und praktische Ausrechnung der Determinanten 3. Grades, welche für uns am häufigsten vorkommen, empfiehlt sich folgendes Verfahren. Man schreibe die beiden ersten Kolonnen nochmals hinter die unentwickelte Determinante, dann erhält man die positiven Produkte, wenn man parallel mit der Diagonale von a nach $c_{\prime\prime}$, und die negativen, wenn man parallel mit der Diagonale von $a_{\prime\prime}$ nach c multipliziert.*

$$R = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_\prime & b_\prime & c_\prime \\ a_{\prime\prime} & b_{\prime\prime} & c_{\prime\prime} \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccc|cc} a & b & c & a & b \\ a_\prime & b_\prime & c_\prime & a_\prime & b_\prime \\ a_{\prime\prime} & b_{\prime\prime} & c_{\prime\prime} & a_{\prime\prime} & b_{\prime\prime} \\ \multicolumn{2}{c}{-} & & \multicolumn{2}{c}{+} \end{array} \begin{aligned} &= ab_\prime c_{\prime\prime} + bc_\prime a_{\prime\prime} + ca_\prime b_{\prime\prime} \\ &\quad - a_{\prime\prime} b_\prime c - b_{\prime\prime} c_\prime a - c_{\prime\prime} a_\prime b. \end{aligned}$$

Bei einiger Übung kann man diese Multiplikation auch ohne Wiederholung der beiden Kolonnen im Kopfe ausführen.

* Man kann auch die beiden letzten Kolonnen vor die Determinante, oder die beiden ersten Zeilen unter bezw. die beiden letzten über die Determinante schreiben und in ähnlicher Weise ausmultiplizieren.

5. Eine Determinante 4. Grades

$$R = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_{\prime} & b_{\prime} & c_{\prime} & d_{\prime} \\ a_{\prime\prime} & b_{\prime\prime} & c_{\prime\prime} & d_{\prime\prime} \\ a_{\prime\prime\prime} & b_{\prime\prime\prime} & c_{\prime\prime\prime} & d_{\prime\prime\prime} \end{vmatrix}$$

besteht dem Begriffe nach aus Produkten, von welchen eine Gruppe den Faktor a, eine andere den Faktor $a_{\prime}$, eine dritte den Faktor $a_{\prime\prime}$ und eine vierte den Faktor $a_{\prime\prime\prime}$ enthält. Sie lässt sich also wie oben bei der Determinante 3. Grades darstellen durch

$$R = aA + a_{\prime}A_{\prime} + a_{\prime\prime}A_{\prime\prime} + a_{\prime\prime\prime}A_{\prime\prime\prime}$$

oder

$$= aA + bB + cC + dD \qquad \text{u. s. f.,}$$

worin die grossen Buchstaben die bekannten Unterdeterminanten 3. Grades bedeuten.

Eine Determinante 4. Grades hat also $1 . 2 . 3 . 4 = 24$ Produkte aus je vier Faktoren.

6. In entsprechender Weise kann auch eine Determinante n^{ten} Grades durch Unterdeterminanten irgend einer Reihe, d. i. durch Determinanten $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades dargestellt werden.

Die Determinante n^{ten} Grades:

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & n_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & n_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \dots & n_3 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_n & b_n & c_n & \dots & n_n \end{vmatrix}$$

nach den Elementen der ersten Kolonne entwickelt lautet demnach:

$$R = a_{\prime}A + a_2 A_2 + a_3 A_3 + \dots a_n A_n.$$

An diese Darstellung lassen sich folgende Sätze knüpfen.

1. Satz. Eine Determinante hat den Wert null, wenn alle Elemente einer Zeile oder Kolonne null sind.

Denn in obiger Darstellung wird für $a_{\prime}=0,\ a_2=0\ldots a_n=0$, auch $R=0$.

2. Satz. Eine Determinante ändert das Vorzeichen, wenn man zwei Parallelreihen miteinander vertauscht (Folgerung β S. 3).

3. Satz. Eine Determinante wird mit einer Zahl p multipliziert, indem man die Elemente einer Zeile oder Kolonne mit p multipliziert.

Beweis. Es ist

$$p \cdot R = pa_{\prime} \cdot A_{\prime} + pa_2 A_2 + pa_3 A + \ldots + pa_n A_n,$$

d. h. in der unentwickelten Determinante tritt $(pa_{\prime}),\ (pa_2), \ldots (pa_n)$ an Stelle von $a_{\prime}\ a_2 \ldots a_n$.

Zusatz 1. Für $p=0$ folgt Satz 1.

Zusatz 2. Eine Determinante ändert das Vorzeichen, wenn man die Vorzeichen aller Elemente einer Zeile oder Kolonne ändert $(p=-1)$.

Zusatz 3. Eine Determinante wird durch eine Zahl q dividiert, indem man alle Elemente einer Reihe durch q dividiert $\left(p=\frac{1}{q}\right)$.

Zusatz 4. Determinanten, welche sich nur in den Elementen einer Zeile (oder Kolonne) unterscheiden, in allen übrigen aber gleich sind, werden summiert, indem man die Elemente der verschiedenen Zeilen (Kolonnen) summiert.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_{\prime} & b_{\prime} & c_{\prime} \\ a_{\prime\prime} & b_{\prime\prime} & c_{\prime\prime} \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} \alpha & b & c \\ \alpha_{\prime} & b_{\prime} & c_{\prime} \\ \alpha_{\prime\prime} & b_{\prime\prime} & c_{\prime\prime} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \pm \alpha & b & c \\ a_{\prime} \pm \alpha_{\prime} & b_{\prime} & c_{\prime} \\ a_{\prime\prime} \pm \alpha_{\prime\prime} & b_{\prime\prime} & c_{\prime\prime} \end{vmatrix}.$$

(Durch Entwicklung nach der ersten Kolonne.)

4. Satz. Eine Determinante von zwei gleichen Parallelreihen ist null.

$$R = \begin{vmatrix} a & a & c \\ a_{\prime} & a_{\prime} & c_{\prime} \\ a_{\prime\prime} & a_{\prime\prime} & c_{\prime\prime} \end{vmatrix} = 0.$$

Beweis. Entwickelt man nach den Elementen der ersten Kolonne, so erhält man R. Vertauscht man die beiden ersten

Kolonnen und entwickelt wieder nach der ersten Kolonne, so erhält man $-R$ (Satz 2); da aber die vertauschten Elemente gleich sind, so ändert sich in der Determinante nichts, es muss also $R = -R$, d. i. $R = 0$ sein.

Zusatz 1. Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man zu allen Elementen einer Reihe ein beliebiges (gleiche) Vielfache der Elemente einer anderen (parallelen) addiert oder von ihnen subtrahiert.

$$\begin{vmatrix} a_{I} & b_{I} & c_{I} \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{I} \pm p b_{I} & b_{I} & c_{I} \\ a_2 \pm p b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 \pm p b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \quad \text{(Satz 3, Zusatz 4 und Satz 4.)}$$

Zusatz 2. Wenn die Elemente zweier Parallelreihen proportional sind, so ist der Wert der Determinante Null.

Dann multipliziert man die eine Reihe mit dem Proportionalitätsfaktor und verfährt nach Zusatz 1, so wird eine Reihe Null.

5. Satz. Wenn die Unterdeterminanten der Elemente einer Zeile oder Kolonne mit den Elementen einer andern Zeile oder Kolonne multipliziert werden, so ist die Summe dieser Produkte Null.

Es ist

$$\begin{vmatrix} a_{I} & b_{I} & c_{I} \\ a_{II} & b_{II} & c_{II} \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_{I} A_{I} + a_{II} A_{II} + a_3 A_3,$$

daher

$$b_{I} A_{I} + b_{II} A_{II} + b_3 A_3 = \begin{vmatrix} b_{I} & b_{I} & c_{I} \\ b_{II} & b_{II} & c_{II} \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \quad \text{(Satz 4.)}$$

Übungen.

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} -a & b \\ -b & c \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} a-b & -2b \\ 2a & a-b \end{vmatrix}$; 7) $\begin{vmatrix} a+b & a+b \\ b & a \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} a+b & a+b \\ a-b & a-b \end{vmatrix}$;

9) $\begin{vmatrix} a-b & b \\ a-b & a \end{vmatrix}$.

Antwort: 1) 7; 2) $ac - b^2$; 3) $b^2 - ac$; 4) $-ab$; 5) 0; 6) $(a+b)^2$; 7) $(a^2 - b^2)$; 8) 0; 9) $(a-b)^2$.

10) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; 11) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; 12) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$; 13) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$;

14) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \end{vmatrix}$; 15) $\begin{vmatrix} 13 & 14 & 8 \\ 21 & 15 & 9 \\ 7 & 12 & 5 \end{vmatrix}$; 16) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 9 \end{vmatrix}$; 17) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 7 & 5 & 0 \end{vmatrix}$;

18) $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 6 & 6 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$; 19) $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & -3 & 6 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; 20) $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{vmatrix}$.

Antwort: 10) -5; 11) $+5$; 12) -14; 13) 0; 14) -4; 15) -798; 16) 0; 17) -144; 18) -171; 19) 409; 20) -360.

Anwendungen.

Erster Abschnitt.

Algebra.

Erstes Kapitel.

Proportionen.

Bei der Auflösung von Gleichungen, welche in Form einer Proportion gegeben sind, kommen eine Reihe von Transformationen zur Anwendung, welche man in neuerer Zeit unter dem Namen korrespondierender Addition oder Subtraktion zusammenfasst. Ist nämlich $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ist auch $\frac{a \pm \lambda b}{a \pm \lambda_{,} b} = \frac{c \pm \lambda d}{c \pm \lambda_{,} d}$, worin λ und $\lambda_{,}$ beliebige Zahlenwerte bedeuten.

Nun kann man aber jede Proportion in Form einer verzchwindenden Determinante 2. Grades schreiben, denn es ist

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ identisch mit } \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 0,$$

so dass man alle mit der Proportion zulässigen Umformungen auch direkt mit der Determinante vornehmen kann.

Es folgt nämlich aus

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 0,$$

wenn man die 2. Horizontale zunächst mit λ und dann mit $\lambda_{,}$ multipliziert, nach Satz 4 Zusatz 1.

$$\begin{vmatrix} a \pm \lambda b & c \pm \lambda d \\ a \pm \lambda_{,} b & c \pm \lambda_{,} d \end{vmatrix} = 0,$$

d. i. die Proportion $\frac{a \pm \lambda b}{a \pm \lambda_{,} b} = \frac{c \pm \lambda d}{c \pm \lambda_{,} d}$.

Beispiele:

1) $$\frac{4x-1}{3x+2} = \frac{4x-21}{3x-14}.$$

In dieser Proportion würde man zunächst die inneren Glieder vertauschen, um die gedachte Umformung vornehmen zu können. In Determinantenform ist das nicht nötig. Denn aus

$$\begin{vmatrix} 4x-1 & 4x-21 \\ 3x+2 & 3x-14 \end{vmatrix} = 0$$

folgt direkt durch Subtraktion der beiden Vertikalen:

$$\begin{vmatrix} 4x-1 & -20 \\ 3x+2 & -16 \end{vmatrix} = 0,$$

oder, indem man durch -4 die letzte Kolonne dividiert und auswertet:

$$x = 14.$$

2) $$\frac{13-2x}{7x-26} = \frac{4x-25}{29-14x}, \text{ d. i. } \begin{vmatrix} 13-2x & 4x-25 \\ 7x-26 & 29-14x \end{vmatrix} = 0.$$

Addiert man das Zweifache der ersten Vertikalen zur zweiten, so erhält man

$$\begin{vmatrix} 13-2x & 1 \\ 7x-26 & -23 \end{vmatrix} = 0 \text{ oder } 39x = 273;\ x = 7.$$

Wenn quadratische Gleichungen in Form von Proportionen gegeben sind, so empfiehlt sich die Determinantenform ganz besonders, da sie umständliche Multiplikationen vermeidet und nicht selten die Lösung in einfacher linearer Form, d. i. ohne Wurzelausziehung ermöglicht.

Beispiel:

1) $$\frac{9a+25b-34x}{9a-35b+26x} = \frac{9a-35b+26x}{9a+49b-58x};$$

schreibt man

$$\begin{vmatrix} 9a+25b-34x & 9a-35b+26x \\ 9a-35b+26x & 9a+49b-58x \end{vmatrix} = 0$$

und subtrahiert die erste Vertikale von der zweiten, so kann man letztere durch $12(b-x)$ dividieren und man erhält:

$$12(b-x)\begin{vmatrix} 9a+25b-34x & -5 \\ 9a-35b+26x & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

d. i.

$$12\,(b-x)\,.\,35\,.\,108\,.\,(a-x)=0;\ \text{oder}\ (b-x)\,(a-x)=0$$

d. h. die Wurzeln der quadratischen Gleichungen sind $x_{\prime} = b$; $x_{\prime\prime} = a$.

$$2)\qquad \frac{\sqrt{a-bx}+\sqrt{c-mx}}{\sqrt{a-bx}-\sqrt{nx-d}}=\frac{\sqrt{a-bx}-\sqrt{c-mx}}{\sqrt{a-bx}+\sqrt{nx-d}}.\ *$$

Schreibt man die Proportion in Determinentenform und subtrahiert die erste Vertikale von der zweiten, dividiert dann letztere durch 2 und addiert sie nochmals zur ersten Vertikalreihe, so erhält man

$$\begin{vmatrix}\sqrt{a-bx} & \sqrt{c-mx}\\ \sqrt{a-bx} & \sqrt{nx-d}\end{vmatrix}=0\ \text{oder}\ \sqrt{a-bx}\,(\sqrt{nx-d}-\sqrt{c-mx})=0,$$

d. i.

$$x_{\prime}=\frac{a}{b};\ x_{\prime\prime}=\frac{c+d}{m+n}.$$

Wir gedenken zum Schluss noch einer Form, wie sie häufig bei quadratischen Gleichungen mit zwei Unbekannten auftreten, die wir in folgender allgemeinen Gestalt zusammenfassen:

$$\frac{ax^2+2bxy+dy^2}{a_{\prime}x^2+2b_{\prime}xy+d_{\prime}y^2}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

Ihrem algebraischen Charakter nach ist vorstehende Proportion eine homogene quadratische Gleichung mit zwei Unbekannten, oder eine gewöhnliche quadratische Gleichung für $\frac{x}{y}$. Schreibt man sie in der Form

$$\begin{vmatrix}ax^2+2bxy+cy^2 & \alpha\\ a_{\prime}x^2+2b_{\prime}xy+c_{\prime}y^2 & \beta\end{vmatrix}=0$$

und multipliziert die erste Horizontale mit β, die zweite mit α und subtrahiert, so wird das zweite Glied der ersten Horizontalreihe 0 und die Gleichung reduziert sich direkt auf

$$x^2(a\beta-a_{\prime}\alpha)+2xy(b\beta-b_{\prime}\alpha)+y^2(c\beta-c_{\prime}\alpha)=0,$$

welches eine quadratische Gleichung für $\frac{x}{y}$ ist.

---

* Bardey, Aufgabensammlung XXVI, 208.

Für spezielle Werte der Koeffizienten, welche auch 0 und 1 sein können, empfiehlt es sich häufig auf $\frac{x+y}{x-y}$ statt auf $\frac{x}{y}$ umzuformen, die Determinante lässt in jedem besonderen Falle die Art der zu wählenden Umformung leicht erkennen.

Zweites Kapitel.

Die Elimination.

1. Satz. Multipliziert man in einem vollständigen System von Gleichungen mit mehreren Unbekannten die Gleichungen der Reihe nach mit den Unterdeterminanten der Koeffizienten einer Unbekannten, und addiert, so fallen sämtliche Unbekannte bis auf diese eine fort.

Wir machen den Beweis an drei Gleichungen mit drei Unbekannten; durch Fortführung der Buchstaben und Indices ist derselbe leicht auf solche mit mehr Unbekannten auszudehnen.

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= \alpha, \\ a_{\prime}x + b_{\prime}y + c_{\prime}z &= \beta, \\ a_{\prime\prime}x + b_{\prime\prime}y + c_{\prime\prime}z &= \gamma. \end{aligned}$$

Die Determinante aus den Koeffizienten der Unbekannten lautet:

$$R = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_{\prime} & b_{\prime} & c_{\prime} \\ a_{\prime\prime} & b_{\prime\prime} & c_{\prime\prime} \end{vmatrix}.$$

Die Unterdetermiannten der Koeffizienten von x sind

$$A = \begin{vmatrix} b_{\prime} & c_{\prime} \\ b_{\prime\prime} & c_{\prime\prime} \end{vmatrix}; \quad A_{\prime} = - \begin{vmatrix} b & c \\ b_{\prime\prime} & c_{\prime\prime} \end{vmatrix}; \quad A_{\prime\prime} = \begin{vmatrix} b & c \\ b_{\prime} & c_{\prime} \end{vmatrix}.$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit A, die zweite mit $A_{\prime}$, die dritte mit $A_{\prime\prime}$ und addiert, so erhält man

$$\begin{aligned} & x(aA + a_{\prime}A_{\prime} + a_{\prime\prime}A_{\prime\prime}) + y(bA + b_{\prime}A_{\prime} + b_{\prime\prime}A_{\prime\prime}) \\ & + z(cA + c_{\prime}A_{\prime} + c_{\prime\prime}A_{\prime\prime}) = \alpha A \quad + \beta A_{\prime} + \gamma A_{\prime}. \end{aligned}$$

Die Faktoren von y und z sind $= 0$ nach Satz 5, der von x ist die Determinente R, daher wird

$$\text{I)} \qquad x \,.\, R = \alpha A + \beta A_{,} + \gamma A_{,,}.$$

Multipliziert man ebenso die Gleichungen mit den Unterdeterminanten der b resp. c, so erhält man durch dieselben Schlüsse:

$$\text{I)} \qquad \begin{aligned} y \,.\, R &= \alpha B + \beta B_{,} + \gamma B_{,,}, \\ z \,.\, R &= \alpha C + \beta C_{,} + \gamma C_{,,}. \end{aligned}$$

Die durch obigen Satz angezeigte Methode zur Auflösung der Gleichungen mit mehreren Unbekannten ist eine Art Additionsmethode, welche sich von der gewöhnlichen nur dadurch unterscheidet, dass die Unterdeterminanten diejenigen Zahlen liefern, mit welchen man die Gleichungen multiplizieren muss, damit direkt alle Unbekannten bis auf eine fortfallen.

Beispiel:

$$\begin{array}{r|r|r|r} 3x + 2y + 2z = 9 & -11 & 19 & -7 \\ 2x + 3y + 5z = 15 & 2 & -1 & -2 \\ 5x + 4y + 3z = 15 & 2 & -11 & 5. \end{array}$$

Die Unterdeterminanten der Koeffizienten von x sind -11, 2, 2; multipliziert man mit ihnen die vorstehenden Gleichungen und addiert, so erhält man direkt:

$$-9x = -9; \quad x = 1.$$

Die Unterdeterminanten der y-Koeffizienten sind 19, -1, -11. Für eine rasche Lösung bemerken wir nun folgendes. Sämtliche Unbekannte haben bei der Addition den Faktor R. Nachdem derselbe also für x gefunden ist ($R = -9$), braucht man die Multiplikation mit den Unterdeterminanten für y nur an den absoluten Gliedern auszuführen. Man kann also, nachdem x gefunden, direkt schreiben:

$$\begin{aligned} -9y &= 9 \,.\, 19 - 15 - 11 \,.\, 15 = -9; \qquad y = 1, \\ -9z &= -7 \,.\, 9 - 2 \,.\, 15 + 5 \,.\, 15 = -18; \qquad z = 2, \end{aligned}$$

sofern man nicht vorzieht, z durch Substitution der gefundenen Werte aus einer der gegebenen Gleichungen zu berechnen.

Aus den Gleichungen I folgt noch:

$$\text{II)}\quad x = \frac{\alpha A + \beta A_{,} + \gamma A_{,,}}{R}; \quad y = \frac{\alpha B + \beta B_{,} + \gamma B_{,,}}{R};$$

$$z = \frac{\alpha C + \beta C_{,} + \gamma C_{,,}}{R}.$$

Der Nenner dieser Brüche ist die Determinante aus den Koeffizienten; der Zähler wird erhalten, wenn man die Koeffizienten der gesuchten Unbekannte durch die absoluten Glieder α, β, γ ersetzt. Daher ergiebt sich

2. Satz. Der Wert einer Unbekannten aus einem System von n Gleichungen mit n Unbekannten ist gleich einem Bruche, dessen Nenner die Determinante aus den Koeffizienten ist und dessen Zähler erhalten wird, wenn man in dieser Determinante die Koeffizienten der gesuchten Unbekannten durch die absoluten Glieder ersetzt.

Dieser Satz, welcher bei allgemeinen Gleichungen die Darstellung der Resultate in geschlossener Form unabhängig von der Zahl der Unbekannten ermöglicht, empfiehlt sich bei Zahlengleichungen mit zwei Unbekannten, weil man die Lösung direkt hinschreiben kann.

Beispiel:

$$17x - 11y = 7, \qquad x = \frac{5 \,.\, 7 + 11 \,.\, 44}{5 \,.\, 17 + 11 \,.\, 8} = 3,$$

$$8x + 5y = 44. \qquad y = \frac{17 \,.\, 44 - 7 \,.\, 8}{173} = 4.$$

Die unter II gegebenen Resultate zeigen, dass die Gleichungen nur dann bestimmte Wurzeln haben, wenn die Determinante R aus den Koeffizienten nicht null wird. Letzteres ist bei abhängigen Gleichungen der Fall und bei solchen, deren Koeffizienten proportional sind, wie z. B.

$$2x + 3y = 8$$
$$4x + 6y = 15$$

die ausser $x = \infty$ und $y = \infty$ keine gemeinschaftlichen Wurzeln haben (parallele Gerade).

Aufgaben:

1) $3x + 2y = 7$, $5x + 3y = 11$ $(1, 2)$

2) $7x + 3y = 23$, $5x + 4y = 22$ $(2, 3)$

3) $6x - 7y = 5$, $5x + 8y = 18$ $(2, 1)$

4) $2x + y + 3z = 14$, $3x + 2y + 2z = 14$, $5x + 3y + z = 16$ $(2, 1, 3)$

5) $3x + 2y + 2z = 9$, $2x + 3y + 5z = 15$, $5x + 4y + 3z = 15$ $(1, 1, 2)$

6) $x + 2y + 4z = 10$, $3x - 5y + 3z = -1$, $4x + 3y - 5z = 9$ $(2, 2, 1)$.

Drittes Kapitel.

Homogene Gleichungen, Resultanten.

Erklärung. Eine Gleichung mit mehreren Unbekannten heisst homogen, wenn ihr absolutes Glied null ist und alle übrigen Glieder gleichviel Faktoren in den Unbekannten haben.

So ist

$ax + by = 0$ eine homogene Gleichung 1. Grades;
$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$ eine solche 2. Grades, u. s. f.

Eine gewöhnliche Gleichung mit mehreren Unbekannten kann zu einer homogenen gemacht werden, indem statt der gegebenen Unbekannten ihr Verhältnis zu einer neuen als Unbekannte einführt. So wird aus der Gleichung $ax + by + c = 0$ eine homogene Gleichung, wenn man $\frac{x}{z}$ statt x und $\frac{y}{z}$ statt y setzt; man erhält $ax + by + cz = 0$. Umgekehrt kann aus einer homogenen Gleichung auch eine gewöhnlicher Form hergestellt werden.

3. Satz. In einem vollständigen System von homogenen Gleichungen verhalten sich die Unbekannten wie die zugehörigen Unterdeterminanten aus den Koeffizienten.

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0, \\ a_{\prime}x + b_{\prime}y + c_{\prime}z &= 0, \\ a_{\prime\prime}x + b_{\prime\prime}y + c_{\prime\prime}z &= 0. \end{aligned}$$

Es ist $\frac{x}{z} = \frac{A}{C}$; $\frac{y}{z} = \frac{B}{C}$, worin A, B, C, die Unterdeterminanten zu den Elementen a, b, c bedeuten. Verfährt man nach Satz 1, Kap. II, so erhält man $x \,.\, R = 0$; d. h. $R = 0$, wo R die Determinante aus den Koeffizienten bedeutet.

Setzt man nun für $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ die Werte $\frac{A}{C}$ und $\frac{B}{C}$ in die vorstehenden Gleichungen ein, so sind die Gleichungen für diese Werte erfüllt. Denn aus der ersten Gleichung wird $aA + bB + cC = 0$, d. i. $R = 0$. Die beiden andern Gleichungen sind aber erfüllt nach Satz 5, Einleitung.

Folgerung. In einem vollständigen System von homogenen Gleichungen muss die Determinante ihrer Koeffizienten null sein, wenn dieselben zusammenbestehen, d. h. gemeinschaftliche Wurzeln haben sollen.

Diese Folgerung enthält eine Bedingung für die vorliegenden Gleichungen, welche sich folgendermassen erklärt. Setzt man $\frac{x}{z} = u$ und $\frac{y}{z} = v$, so erhält man

$$\begin{aligned} au + bv + c &= 0, \\ a_{\prime}u + b_{\prime}v + c_{\prime} &= 0, \\ a_{\prime\prime}u + b_{\prime\prime}v + c_{\prime\prime} &= 0, \end{aligned}$$

d. i. ein System von drei gewöhnlichen Gleichungen mit zwei Unbekannten; es ist also überbestimmt, weil sich aus zwei derselben schon die Werte der Unbekannten berechnen lassen. Soll die dritte Gleichung dieselben Werte zulassen, so muss sie für die aus 2 Gleichungen gefundenen Werte von u und v erfüllt sein. Setzt man diese aus 2 Gleichungen gefundenen Werte in die 3. ein, so erhält man eine Koeffizientenverbindung, welche eben nichts anders als $R = 0$ ist, wobei R nicht in Determinantenform, sondern ausgerechnet erscheint.

R ist das Eliminationsresultat der Unbekannten aus obigen Gleichungen und drückt aus, dass die drei Gleichungen gemeinschaftliche Wurzeln haben, oder dass sie zusammenbestehen. Man sieht auch, dass ein solches Eliminationsresultat nur gewonnen werden kann, wenn bei gewöhnlichen Gleichungen die Zahl der Gleichungen mindestens um eins grösser ist als die Zahl der Unbekannten und bei homogenen Gleichungen, wenn das System ein vollständiges ist. Diese Betrachtungen führen zu folgender

Erklärung. Diejenige Bedingung, welche zwischen den Koeffizienten zweier oder mehrerer Gleichungen stattfinden muss, wenn sie eine gemeinschaftliche Wurzel haben, heisst Resultante der Gleichungen; sie ist das Eliminationsresultat der Unbekannten aus den Gleichungen.

Die Elimination ist nun immer in den Fällen leicht, wenn eine Gleichung mehr gegeben ist, als zu eliminierende Glieder der Unbekannte. Es sei z. B. gegeben:

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bx + c &= 0, \\ a_{,}x^2 + 2b_{,}x + c_{,} &= 0, \\ a_{,,}x^2 + 2b_{,,}x + c_{,} &= 0. \end{aligned}$$

Hier sind x^2 und x zu eliminieren; setzt man $x^2 = u$ und $x = v$, so hat man nach obiger Folgerung direkt als Resultante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_{,} & b_{,} & c_{,} \\ a_{,,} & b_{,,} & c_{,,} \end{vmatrix} = 0.$$

Sylvesters dialytische Methode giebt ein allgemeines Verfahren, um ein solches System von Gleichungen herzustellen. Sollen aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} \ldots + q &= 0, \\ a_{,}x^n + b_{,}x^{n-1} + c_{,}x^{n-2} \ldots + q_{,} &= 0 \end{aligned}$$

die x eliminiert werden, so multipliziere man die erste Gleichung der Reihe nach mit x^{n-1}, $x^{n-2}, \ldots x$; und die zweite mit x^{m-1}, $x^{m-2} \ldots x$, so erhält man mit den beiden gegebenen Gleichungen ein System von $m + n$ Gleichungen, aus denen die Potenzen von x als Unbekannte wie in einem System linearer Gleichungen eliminiert werden können.

Z. B. aus

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bx + c &= 0, \\ a_1x^2 + 2b_1x + c_1 &= 0 \end{aligned}$$

die Unbekannte zu eliminieren. Die erste Gleichung mit x und ebenso die zweite mit x multipliziert, liefert folgendes System:

$$\begin{aligned} ax^3 + 2bx^2 + cx + 0 &= 0, \\ 0 + ax^2 + 2bx + c &= 0, \\ a_1x^3 + 2b_1x^2 + c_1x + 0 &= 0, \\ 0 + a_1x^2 + 2b_1x + c_1 &= 0. \end{aligned}$$

Betrachtet man x^3, x^2 und x als Unbekannte, so erhält man

$$R = \begin{vmatrix} a & 2b & c & 0 \\ 0 & a & 2b & c \\ a_1 & 2b_1 & c_1 & 0 \\ 0 & a_1 & 2b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Methode hat wegen der auftretenden grossen Determinanten etwas Unbequemes, wir geben daher ein anderes Verfahren an, welches die Resultanten auf Determinanten 2. Grades zurückführt und sich besonders bei Gleichungen niedern Grades empfiehlt.

1. Die Resultante zweier Gleichungen 1. Grades

$$\begin{aligned} ax + b &= 0, \\ a_1x + b_1 &= 0 \end{aligned}$$

ist:
$$R \equiv \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \equiv ab_1 - ba_1 = 0.$$

2. Die Resultante einer Gleichung 1. und 2. Grades zu bilden

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bx + c &= 0, \\ a_1x + b_1 &= 0. \end{aligned}$$

Man eliminiert die absoluten Glieder, indem man die 1. Gleichung mit b_1, die zweite mit c multipliziert und erhält nach Division durch x

$$ab_{\prime}x + (2bb_{\prime} - ca_{\prime}) = 0;$$

dazu

$$a_{\prime}x + b_{\prime} = 0$$

giebt als Resultante nach 1):

$$R \equiv \begin{vmatrix} ab_{\prime} & 2bb_{\prime} - ca_{\prime} \\ a_{\prime} & b_{\prime} \end{vmatrix} \equiv ab_{\prime}^2 - 2a_{\prime}bb_{\prime} + ca_{\prime}^2 = 0.$$

3. Die Resultante zweier Gleichungen 2. Grades zu bilden.

Eliminiert man aus den beiden Gleichungen

$$ax^2 + 2bx + c = 0,$$
$$a_{\prime}x^2 + 2b_{\prime}x + c_{\prime} = 0$$

zuerst die absoluten Glieder und dann die mit x^2, so erhält man die beiden linearen Gleichungen

$$(ac_{\prime} - ca_{\prime})\, x + 2\,(bc_{\prime} - cb_{\prime}) = 0,$$
$$2\,(ab_{\prime} - ba_{\prime})\, x + (ac_{\prime} - ca_{\prime}) = 0$$

und deren Resultante ist:

$$R \equiv \begin{vmatrix} ac_{\prime} - ca_{\prime} & 2\,(bc_{\prime} - cb_{\prime}) \\ 2\,(ab_{\prime} - ba_{\prime}) & ac_{\prime} - ca_{\prime} \end{vmatrix} \equiv$$
$$(ac_{\prime} - ca_{\prime})^2 - 4\,(ab_{\prime} - ba_{\prime})\,(bc_{\prime} - cb_{\prime}) = 0;$$

dieselbe ist identisch mit der vorhin bei denselben Gleichungen gegebenen Determinante 4. Grades.

4. Die Resultante einer Gleichung 2. und einer 3. Grades zu bilden.

$$ax^2 + 2bx + c = 0,$$
$$a_{\prime}x^3 + 3b_{\prime}x^2 + 3c_{\prime}x + d_{\prime} = 0.$$

Eliminiert man die absoluten Glieder und dividiert durch x, so erhält man die quadratische Gleichung

$$a_{\prime}cx^2 + (3b_{\prime}c - ad_{\prime})\, x + (3cc_{\prime} - 2bd_{\prime}) = 0,$$

dazu

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

führt die Aufgabe auf Nr. 3 zurück.

5. Die Resultante zweier Gleichungen 3. Grades zu bilden.

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0,$$
$$a_{\prime}x^3 + 3b_{\prime}x^2 + 3c_{\prime}x + d_{\prime} = 0.$$

Man eliminiere zunächst die absoluten Glieder und dann die mit x^3, so erhält man die sofort hinzuschreibenden quadratischen Gleichungen

$$(ad_{,} - da_{,})\, x^2 + 3\,(bd_{,} - db_{,})\, x + 3\,(cd_{,} - dc_{,}) = 0,$$
$$3\,(ba_{,} - ab_{,})\, x^2 + 3\,(ca_{,} - ac_{,})\, x + \quad (da_{,} - ad_{,}) = 0,$$

welche nach Nr. 3 zu behandeln sind.

Das Verfahren kann auch auf Gleichungen höhern Grades, wie man leicht sieht, angewendet werden. Bei Gleichungen niedern Grades mit Zahlenkoeffizienten bietet es namentlich keine Schwierigkeiten.*

Aufgabe. Welchen Wert muss b haben, wenn die beiden Gleichungen

$$x^2 + 2bx + 4 = 0,$$
$$x^2 - 4x \;\; + 3 = 0$$

eine gemeinschaftliche Wurzel haben sollen. Man erhält nach 3. die beiden Gleichungen

$$x\,(2b + 4) + 1 = 0,$$
$$-x + 6b + 16 = 0$$

und daraus

$$\begin{vmatrix} 2\,(b+2) & +1 \\ -1 & 2\,(3b+8) \end{vmatrix} = 0$$

der

$$12b^2 + 56b + 65 = 0; \quad b_{,} = -\frac{5}{2}; \quad b_{,,} = -\frac{13}{6}.$$

Für $b_{,} = -\frac{5}{2}$ haben beide Gleichungen die gemeinsame Wurzel $x = 1$, für $b_{,,} = -\frac{13}{6}$, die Wurzel $x = 3$.

---

* Bereits Cayley (Philos. Transact. CXLVII) hatte gezeigt, dass auch eine Determinante von niedrigerem Grade als die Sylvestersche von $m + n$ Grades die Resultante zweier Gleichungen vom m. und n. Grade darstellen könne, durch ein Verfahren, welches von Fiedler (Elem. der neuern Geom. und Algebra d. bin. Formen. Leipzig 1862) an zwei Gleichungen 5. Grades erläutert ist. Allein dasselbe dürfte für den Schulgebrauch ebenfalls zu umständlich sein, zumal man kaum in die Lage kommen wird, Resultanten von Gleichungen höhern als 2. Grades zu bilden.

Bestimme den Wert des unbekannten Koeffizienten aus folgenden Gleichungen, damit dieselben eine gemeinsame Wurzel bekommen:

1) $x^2 - 2bx + 21 = 0,$ $\quad$ 2) $2x^2 - 5x + c = 0,$
$x^2 - 8x + 15 = 0.$ $\quad$ $7x^2 - 10x + 3 = 0.$
(5,$4\frac{3}{5}$.) $\quad$ (3.)

3) $x^2 - 4bx + 35 = 0,$
$x^2 - 8x + 7 = 6.$
(3.)

Viertes Kapitel.

Die Diskriminante einer Gleichung 2. Grades.

Erklärung. Unter Diskriminante einer Gleichung versteht man diejenige Koeffizientenverbindung, welche null wird, wenn die Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat.

Ist
$$ax^2 + 2bx + c = 0$$
die allgemeine Form einer quadratischen Gleichung und dividiert man dieselbe durch a, d. h. macht den ersten Koeffizienten zu 1, so besteht zwischen den Wurzeln und den Koeffizienten einer solchen Gleichung folgender Zusammenhang:

Die Summe der Wurzeln einer quadratischen Gleichung, deren erster Koeffizient 1 ist, ist gleich dem negativen Koeffizienten von x und das Produkt der Wurzeln ist gleich dem absoluten Gliede.

Als Anwendung der Determinanten geben wir für den bekannten Satz folgenden Eliminationsbeweis.

Sind α und β die Wurzeln der Gleichung, so hat man folgendes System:
$$ax^2 + 2bx + c = 0,$$
$$a\alpha^2 + 2b\alpha + c = 0,$$
$$a\beta^2 + 2b\beta + c = 0;$$
eliminiert man hieraus die a, b, c, so erhält man als Zusammenhang zwischen x und den Wurzeln die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2 & \beta & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$x^2 - (\alpha + \beta)\, x + \alpha\beta = 0,$$

woraus durch Vergleichung mit der ursprünglichen Gleichung folgt

$$\alpha + \beta = -\frac{2b}{a}; \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

Satz. Die Diskriminante einer allgemeinen quadratischen Gleichung ist gleich dem Quadrate aus dem halben mittleren Koeffizienten, vermindert um das Produkt der beiden äussern.

Beweis. Wenn $\alpha = \beta$ ist, so ist auch

$$(\alpha - \beta)^2 = 0$$

oder

$$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 0,$$

d. h.

$$\left(\frac{2b}{a}\right)^2 - 4\,\frac{c}{a} = 0$$

oder

$$\Delta \equiv b^2 - ac = 0.$$

Eine zweite Herleitung der Diskriminante knüpfen wir an folgende Bemerkung. Jede geordnete vollständige Gleichung n^{ten} Grades kann man dadurch, dass man x aus den n ersten Gliedern ausscheidet, als Summe zweier vollständiger Gleichungen n—1. Grades darstellen. Eliminiert man aus den Gleichungen (n—1.) Grades die Unbekannten, so erhält man die Diskriminante der Gleichung n Grades; z. B. die Gleichung

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$$

lässt sich schreiben

$$x\,(ax^2 - 2bx + c) + bx^2 + 2cx + d = 0.$$

Umgekehrt ist:

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

und

$$bx^2 + 2cx + d = 0,$$

so ist auch

$$x\,(ax^2 + 2bx + c) + bx^2 + 2cx + d = 0.$$

Die Bedingung aber, dass die beiden erstern Gleichungen gemeinschaftliche Wurzeln haben, ist das Verschwinden ihrer

Resultante, die dann zugleich Diskriminante der Gleichung 3. Grades ist.*

Schreibt man ebenso die Gleichung 2. Grades in der Form

$$x(ax+b)+bx+c=0,$$

so erhält man als Resultante von

$$\begin{aligned} ax+b&=0, \\ bx+c&=0 \end{aligned}$$

die Bedingung

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \equiv b^2-ac=0,$$

d. i. die Diskriminante Δ der quadratischen Gleichung.

Die Anwendung der Diskriminante Δ und ihre Bedeutung für die quadratischen Gleichungen ergiebt sich aus folgendem.

1. Mit Hilfe der Diskriminante Δ lässt sich die quadratische Gleichung auf zwei lineare zurückführen. Denn es ist

$$ax^2+2bx+c=0$$

identisch mit

$$(ax+b)^2-\Delta=0,$$

woraus folgt

$$[ax+b-\sqrt{\Delta}]\,[ax+b+\sqrt{\Delta}]=0$$

oder

$$\begin{aligned} ax+b-\sqrt{\Delta}&=0, \\ ax+b+\sqrt{\Delta}&=0, \end{aligned}$$

woraus man erhält

$$x_{\prime}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{a}, \quad x_{\prime\prime}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{a}$$

Ausser dieser Darstellung folgt:

α) Ist die Diskriminante einer quadratischen Gleichung null, so hat die Gleichung zwei gleiche Wurzeln.

β) Ist die Diskriminante einer quadratischen Gleichung positiv, so sind die Wurzeln reell und verschieden.

γ) Ist die Diskriminante einer quadratischen Gleichung negativ, so sind die Wurzeln komplex und konjugiert.

---

* Den allgemeinen Beweis S. Diekmann: Einleitung in die Lehre von den Determinanten. Essen, G. D. Baedeker, S. 42

2. Ist die Diskriminante einer quadratischen Gleichung null, so ist die linke Seite der Gleichung das vollständige Quadrat eines Binoms.

Denn ist in der Darstellung der Gleichung

$$(ax + b)^2 - \Delta = 0$$
$$\Delta = 0,$$

so reduziert sich die Gleichung auf $(ax + b)^2 = 0$.

Aus

$$\Delta \equiv b^2 - ac = 0$$

folgt aber noch

$$b = \sqrt{ac}.$$

Setzt man dieses statt b in die ursprüngliche Gleichung ein, so erhält man das vollständige Quadrat

$$(x\sqrt{a} + \sqrt{c})^2 = 0.$$

Ferner folgt aus $\Delta = 0$

$$a = \frac{b^2}{c}$$

und setzt man dieses ein, so erhält man

$$(bx + c)^2 = 0.$$

Falls also in einer quadratischen Gleichung die Diskriminante null ist, kann man dieselbe unter folgenden drei Formen darstellen:

1) $$(ax + b)^2 = 0,$$
2) $$(x\sqrt{a} + \sqrt{c})^2 = 0,$$
3) $$(xb + c)^2 = 0.$$

Diese Eigenschaft der Diskriminante ist eine ausserordentlich wichtige; denn sie ermöglicht es, eine quadratische Gleichung auf das Verschwinden eines vollständigen Quadrates zurückzuführen, falls es gelingt, die Koeffizienten so zu bestimmen, dass die Diskriminante null wird. Während aber bei den Darstellungen 1) und 3) eine Division durch a oder c nötig ist, um zu der ursprünglichen Gleichung zurückzugelangen, hat die Darstellung 2) direkte Giltigkeit.

Daher gilt diese transformierende Eigenschaft der Diskriminante nicht nur für Gleichungen, sondern auch für jede quadratische Form oder quadratischen Ausdruck.

Ist also in dem quadratischen Ausdruck

$$my^2 + 2ny + p,$$
$$n^2 - mp = 0,$$

so ist derselbe identisch mit

$$(y\sqrt{m} + \sqrt{p})^2,$$

und wenn in der Gleichung

$$mx^2 + 2nxy + py^2 = q,$$
$$n^2 - mp = 0$$

ist, so ist die Gleichung identisch mit

$$(x\sqrt{m} + y\sqrt{p})^2 = q.$$

Wir kommen auf diese wichtige Eigenschaft später noch zurück.

Aufgaben. 1. Welchen Wert muss in folgenden Gleichungen der unbestimmte Koeffizient haben, damit dieselben gleiche Wurzeln bekommen?

α) $x^2 + 8x + c = 0$; (16) β) $x^2 - mx + 9 = 0$; (± 6)

γ) $2x^2 + mx + 14 = 0$. ($\pm 4\sqrt{7}$)

2. Welchen Wert muss in folgenden Ausdrücken der unbestimmte Koeffizient haben, damit dieselben vollständige Quadrate werden, und wie heissen sie?

α) $4x^2 + 12x + m$. $(2x+3)^2$ β) $5x^2 + 2mx + 3$. $(x\sqrt{5} \pm \sqrt{3})^2$ γ) $ax^2 + 6x + 27$. $(x\sqrt{\tfrac{1}{3}} + 3\sqrt{3})^2$.

---

3. Die Diskriminante ermöglicht es, die Frage nach den gemeinschaftlichen Wurzeln zweier quadratischen Gleichungen ohne Bildung ihrer Resultante zu lösen.

Schreibt man nach S. 22 die beiden quadratischen Gleichungen in der Form

$$x(ax + b) + bx + c = 0,$$
$$x(a_1x + b_1) + b_1x + c_1 = 0$$

und eliminiert den abgesonderten Faktor x, so erhält man die Determinante

$$\mathsf{H} \equiv \begin{vmatrix} ax + b & bx + c \\ a_{\prime}x + b_{\prime} & b_{\prime}x + c_{\prime} \end{vmatrix} = 0,$$

d. i. die quadratische Gleichung

$$x^2(ab_{\prime} - ba_{\prime}) + (ac_{\prime} - ca_{\prime})x + bc_{\prime} - cb_{\prime} = 0.$$

Die Diskriminante dieser Gleichung lautet:

$$\left(\frac{ac_{\prime} - ca_{\prime}}{2}\right)^2 - (ab_{\prime} - ba_{\prime})(bc_{\prime} - cb_{\prime}) = 0$$

oder

$$(ac_{\prime} - ca_{\prime})^2 - 4(ab_{\prime} - ba_{\prime})(bc_{\prime} = cb_{\prime}) = 0.$$

Letzteres ist aber die Resultante R der beiden quadratischen Gleichungen (S. 19). Statt R zu bilden, bildet man daher die erste Eliminationsgleichung $\mathsf{H} = 0$ der beiden quadratischen Gleichungen; falls erstere eine gemeinsame Wurzel haben, ist H ein vollständiges Quadrat und $\mathsf{H} = 0$ liefert die gemeinsame Wurzel.

Beispiel. 1. Welches ist die gemeinsame Wurzel der Gleichungen

$$x^2 - 6x + 8 = 0,$$
$$x^2 - 8x + 12 = 0.$$

Man erhält

$$\mathsf{H} \equiv \begin{vmatrix} x - 3 & -3x + 8 \\ x - 4 & -4x + 12 \end{vmatrix} = 0$$

d. i.

$$\mathsf{H} \equiv x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Da H ein vollständiges Quadrat ist, so ist auch ihre Diskriminante, d. h. die Resultante der beiden gegebenen Gleichungen $= 0$; sie haben also eine gemeinsame Wurzel und

$$\mathsf{H} \equiv (x - 2)^2 = 0$$

liefert die gemeinsame Wurzel, nämlich $x = 2$. Hierin liegt der Vorteil gegenüber der blossen Resultantenbildung, welche die gemeinsame Wurzel zwar anzeigt, aber nicht liefert.

2. Welches ist der kleinste gemeinschaftliche Faktor von $x^2 - 7x + 10$ und $3x^2 - 8x + 4$? oder den Bruch

$$\frac{x^2 - 7x + 10}{3x^2 - 8x + 4}$$

zu kürzen.

Im Falle, dass die beiden Ausdrücke einen gemeinschaftlichen linearen Faktor haben, müssen die Gleichungen

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$
$$3x^2 - 8x + 4 = 0$$

eine gemeinschaftliche Wurzel haben. Man erhält als Eliminationsgleichung

$$\mathsf{H} \equiv \begin{vmatrix} x - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}x + 10 \\ 3x - 4 & -4x + 4 \end{vmatrix} = 0,$$

d. i.

$$\frac{13}{2}x^2 - 26x + 26 = 0,$$

oder

$$x^2 - 4x + 4 \equiv (x-2)^2 = 0.$$

H ist also ein vollständiges Quadrat, d. h. beide Gleichungen haben eine gemeinschaftliche Wurzel $x - 2 = 0$ und der Bruch lässt sich durch $x - 2$ kürzen.

---

4. **Bildung bestimmter Formen quadratischer Gleichungen mit gegebenen Wurzeln.** Sind A, B und C lineare Ausdrücke in x, so stellt die Verbindung $AC = B^2$ eine quadratische Gleichung in x dar, welcher man auch die Form einer Proportion $\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$ geben kann.

Wir stellen die Frage, wie heisst die allgemeine Gleichung obiger Form, deren Wurzel $x = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$ sind?

Wenn $AC - B^2 = 0$ ist, so ist nach 2)

$$Am^2 + 2mnB + Cn^2$$

ein vollständiges Quadrat, nämlich $(m\sqrt{A} + n\sqrt{C})^2$; ebenso ist unter derselben Bedingung

$$(Ap^2 + 2pqB + q^2C) = (p\sqrt{A} + q\sqrt{C})^2.$$

Daher ist auch

$$\text{I)}\quad \begin{aligned} &(Am^2 + 2mnB + Cn^2)\,(Ap^2 + 2pqB + Cq^2) \\ &\quad = [(m\sqrt{A} + + n\sqrt{C})\,(p\sqrt{A} + q\sqrt{C})]^2 \\ &\quad = [Amp + B\,(np + mq) + Cnq]^2. \end{aligned}$$

Die Forderung $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ ist aber gleichbedeutend mit der Diskriminantenform $(x + a)\,(x - a) = b^2$ $(AC = B^2)$; setzt man daher in I $(x+a)$ statt A; $(x-a)$ statt C und b statt B, so erhält man in

$$[(x+a)m^2+2bmn+(x-a)n^2]\,[(x+a)p^2+2pqb+(x-a)q^2)]$$
$$= [(x+a)\,mp + b\,(np+mq) + (x-a)\,nq]^2$$

alle Gleichungen der verlangten Form, welche die Wurzeln $x = \pm\sqrt{a^2+b^2}$ haben.

Sollen die Wurzeln $x = \pm\sqrt{ab}$ sein, d. h. der Gleichung $ab - x^2 = 0$ genügen, so setzt man in I a statt A, b statt C und x statt B.

Sollen die Wurzeln $x_{\prime} = a$ und $x_{\prime\prime} = b$, d. h. $(x-a)(x-b) = 0$ sein, so hat man in I $(x-a)$ statt A, $x-b$ statt C und $B = 0$ zu setzen und man erhält als allgemeine Form:

$$[m^2\,(x-a) + n^2\,(x-b)]\,[p^2\,(x-a) + q^2\,(x-b)]$$
$$= [mp\,(x-a) + nq\,(x-b)]^2.$$

Bei der Auflösung derartiger Gleichungen wird man, um die grossen Multiplikationen zu vermeiden, nach Kapitel 1 verfahren; z. B.

$$\frac{9a+25b-34x}{9a-35b+26x} = \frac{9a-35b+26x}{9a+49b-58x}$$

wird man als Determinante schreiben und die beiden Horizontalreihen subtrahieren, so erhält man

$$12\,(b-x)\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 9a-35b-34x & 9a+49b-58x \end{vmatrix} = 0.$$

Die erste Vertikale mit 7, die zweite mit 5 multipliziert und beide Reihen addiert, giebt direkt

$$12\,(x-b) \,.\, 35 \,.\, 108\,(a-x) = 0$$

oder

$$(x-a)\,(x-b) = 0,$$

woraus man direkt $x_{\prime} = a$; $x_{\prime\prime} = b$ erhält.*

---

5. Grösste und kleinste Werte quadratischer Formen. Wenn gegeben ist die Form: $F \equiv ax^2 + 2bx + c$, so ist dieselbe identisch mit

* Ausführlicheres s. vom Verfasser Hoffm. Zeitschr. XV, S. 571.

$$a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2-\frac{b^2-ac}{a},$$

oder wenn man für die Diskriminante der quadratischen Form den Buchstaben Δ wählt

$$F\equiv a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2-\frac{\Delta}{a}.$$

Ist nun a positiv, so ist der kleinste Wert von F der Quotient $-\frac{\Delta}{a}$ und derselbe wird erhalten für $x=-\frac{b}{a}$; ist aber a negativ, so ist jener Quotient nicht der kleinste, sondern der grösste Wert, den F annehmen kann. Daher ist von jeder quadratischen Form der Quotient aus der negativen Diskriminante und dem ersten Koeffizienten der Grenzwert der Form und zwar der grösste, wenn jener Koeffizient negativ, der kleinste, wenn jener Koeffizient positiv ist.

Z. B. Die Form x^2+2x+3 hat nur einen kleinsten Grenzwert, da der erste Koeffizient positiv ist, und zwar ist derselbe $-\frac{\Delta}{a}=-(1-3)=+2$ und derselbe wird erhalten durch $x=-1$.

Aufgaben. Welches ist der Grenzwert von folgenden Formen und durch welchen Wert von x wird er erreicht:

α) x^2-x+1; $\left(\frac{3}{4};+\frac{1}{2}\right)$; β) x^2+4x+7; $(+3;-2)$; γ) $-x^2+2x-3$; $(-2;+1$;

δ) $x^2-2ax-b^2+a^2$; $(-b^2;\ x=a)$.

Ferner ist aus der Darstellung

$$x=\frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$$

ersichtlich, dass $b^2-ac\geqq 0$ sein muss, wenn die Wurzeln der quadratischen Gleichung reell sein sollen. Null ist also der kleinste Wert der Diskriminante, zu welchem reelle Wurzeln gehören und unter derselben Bedingung sind $+\sqrt{ac}$ und $-\sqrt{ac}$ die Grenzwerte, zwischen denen b nicht liegen darf, falls die Gleichung reelle Wurzeln haben soll, weil für keinen dieser Zwischenwerte die Bedingung $b^2 - ac \overline{\gtrless} 0$ erfüllt werden kann.

Beispiel. Zwischen welchen Zahlen der reellen Zahlenreihe darf die Zahl λ nicht liegen, wenn die Gleichung $x^2 + 2\lambda x + 1 = 0$ reelle Wurzeln haben soll.

Aus dem Grenzwert der Diskriminante $\lambda^2 - 1 = 0$ erhält man $\lambda = \pm 1$, daher darf λ nicht zwischen -1 und $+1$ liegen.

Löse dieselbe Aufgabe für folgende Gleichungen:

1) $x^2 + \lambda x + 1 = 0$. (— 2 bis + 2.)

2) $x^2 + (2\lambda + 3)x + 4 = 0$. (— $3\frac{1}{2}$ bis + $\frac{1}{2}$.)

3) $x^2 - 2(7 + 4\lambda)x + 9\lambda^2 = 0$. (+ 1 bis + 7.)

Fünftes Kapitel.

Irrationale Gleichungen.

Die Aufgabe, aus einer Gleichung

$$\sqrt[m]{R_{\prime}} + \sqrt[n]{R_{\prime\prime}} + \ldots \sqrt[p]{R_n} = A_{\prime\prime},$$

worin die Radikanden R beliebige Funktionen von x sind, die Wurzeln fortzuschaffen, ist ein altes, schon von Fermat und vielen andern behandeltes Problem. Es ist indessen erst in neuerer Zeit mit Hilfe der Determinanten gelungen, dasselbe in allgemeiner Weise zu lösen. In der vorstehenden allgemeinern Form führt es auf eine Gleichung von so hohem Grade und zwar in Determinantenform, dass dieselbe an dieser Stelle keine praktische Bedeutung hat.

1. Wir beginnen mit der gewöhnlichen Form:*

$$\sqrt{ax + b} + \sqrt{a_{\prime}x + b_{\prime}} = A$$

und setzen

---

* Mit den nachfolgend gewählten Bezeichnungen kann man zu der Endgleichung I auch gelangen, wenn man die Gleichung in der gewöhnlichen Weise behandelt oder aus den Gleichungen 1. 2. 3. y und z in bekannter Weise (z. B. durch Berechnung von $y - z$ oder yz) eliminiert. S. des Verf. Abhandl. im Osterprogramm des Realgymn. zu Viersen, 1889.

1) $$y^2 = ax + b = R,$$

2) $$z^2 = a_, x + b = R_{,},$$

d. i.

3) $$y + z = A;$$

aus der 1. und 3. Gleichung y eliminiert giebt

$$z^2 - 2Az + A^2 = R \quad \text{oder} \quad z^2 - 2Az + A^2 - R = 0.$$

Schreibt man dazu die 2. Gleichung in der Form:

$$z^2 - 0z - R_, = 0$$

und eliminiert nach der S. 18 angegebenen Methode, so erhält man leicht

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & 2A & A^2 - R & 0 \\ 0 & 1 & 2A & A^2 - R \\ 1 & 0 & -R_, & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -R_, \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt man diese Determinante 4. Grades nach der ersten Vertikalreihe, so erhält man zwei Determinanten 3. Grades, deren Ausrechnung wegen der auftretenden Nullen sich sehr einfach gestaltet. Man erhält

$$R_,^2 + R_, (A^2 - R) - 4A^2 R_, + R_, (A^2 - R) + (A^2 - R)^2 = 0$$

oder

I) $$[R_, + (A^2 - R)]^2 - 4A^2 R_, = 0.$$

Diese einfache und elegante Eliminationsgleichung stellt die rationale Gleichung in x dar.

Sind die Radikanden lineare Funktionen von x wie in obiger Gleichung, so erhält man die Gleichung

$$[x(a_, - a) + b_, - b + A^2]^2 - 4A^2 (a_, x + b_,) = 0,$$

d. h. die Lösung einer zweigliedrig-irrationalen Gleichung 2. Grades mit linearen Radikanden führt auf eine rationale Gleichung 2. Grades.

Der Vorteil des obigen Eliminationsverfahrens, auf welches wir die Aufgabe zurückführten, besteht darin, dass es sich offenbar nicht ändert, welchen Grad auch die Radikanden haben mögen. Sind sie z. B. vom 2. Grade, d. h. haben wir die Gleichung

$$\sqrt{ax^2+2bx+c}+\sqrt{a_\prime x^2+2b_\prime x+c_\prime}=A,$$

so gilt ebenfalls Gleichung I und zeigt, dass die Aufgabe auf eine rationale Gleichung 4. Grades führt. Dieselbe lautet direkt nach I hingeschrieben:

$$[x^2(a_\prime-a)+2x(b_\prime-b)+(c-c_\prime)+A^2]^2$$
$$-4A^2(a_\prime x^2+2b_\prime x+c_\prime)=0.$$

Sie zeigt auch, welche speziellen Werte den Koeffizienten beigelegt werden müssen, wenn derartige irrationale Gleichungen sich auf quadratische zurückführen sollen, z. B. wenn $a=a_\prime$ ist u. s. f.

Ebenso lehrt die Gleichung I, dass bei kubischen Radikanden die Lösung der Gleichung auf eine Gleichung vom 6. Grade führt u. s. w.

Vorstehendes Verfahren lässt sich bei linearen Radikanden auch noch auf dreigliedrig-irrationale Gleichungen von der Form

$$\sqrt{ax+b}+\sqrt{a_\prime x+b_\prime}=A\sqrt{a_{\prime\prime}x+b_{\prime\prime}}$$

anwenden.

Denn setzt man

$$\frac{ax+b}{a_{\prime\prime}x+b_{\prime\prime}}=R \quad \text{und} \quad \frac{a_\prime x+b}{a_{\prime\prime}x+b_{\prime\prime}}=R_\prime,$$

so wird dadurch der Grad der Gleichung I nicht geändert.

Wenden wir das Vorstehende auf die Gleichung an:

$$\sqrt{3x+1}+\sqrt{4x+5}=5,$$

so erhalten wir aus Gleichung I

$$(x+29)^2-100\cdot(4x+5)=0; \quad x^2-342x+341=0,$$
$$x_\prime=1,$$
$$x_{\prime\prime}=341.$$

Nun ist aber für $x=1$, $\sqrt{3x+1}=\pm 2$ und $\sqrt{4x+5}=\pm 3$ und es genügen nur $+2$ und $+3$ der obigen Gleichung.

Für $x=341$ ist $\sqrt{3x+1}=\pm 32$ und $\sqrt{4x+5}=\pm 37$ und es genügen nur die Werte für $x=341$, wenn das Vorzeichen der ersten Wurzel negativ genommen wird, d. h. die Werte -32 und $+37$.

Nun kann man zwar aus der Gleichung selbst die Vorzeichen der darin vorkommenden Wurzelausdrücke bestimmen, aber es ist eben immer eine besondere Untersuchung notwendig.

Macht man nämlich die linke Seite der Gleichung

$$\sqrt{R} + \sqrt{R_{\prime}} = A$$

rational, so erhält man

$$R - R_{\prime} = A\,(\sqrt{R} - \sqrt{R_{\prime}}),$$

$$\sqrt{R} - \sqrt{R_{\prime}} = \frac{R - R_{\prime}}{A},$$

$$\sqrt{R} + \sqrt{R_{\prime}} = A,$$

$$\text{A)}\quad \begin{cases} \sqrt{R} = \dfrac{1}{2}\left[A + \dfrac{R - R_{\prime}}{A}\right], \\[2ex] \sqrt{R_{\prime}} = \dfrac{1}{2}\left[A - \dfrac{R - R_{\prime}}{A}\right], \end{cases}$$

durch welche Gleichungen die Vorzeichen der Wurzeln bestimmt werden, wenn x gefunden ist. Für obige Gleichungen ist

$$\sqrt{3x+1} = \frac{1}{2}\left\{5 + \frac{3x + 1 - (4x + 5)}{5}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{21 - x}{5}\right\} \text{ d. h. für } x = 1,$$

$$= +\,2 \text{ und für } x = 341,$$

$$= -\,32;$$

ebenso bestimmen sich die Vorzeichen von $\sqrt{4x+5}$ eindeutig aus den Gleichungen A.

Anmerkung. Die Gleichungen A enthalten ebenfalls eine Lösung der gegebenen Gleichung $\sqrt{R} + \sqrt{R_{\prime}} = A$.

Diese Unbestimmtheit in der Wahl der Vorzeichen der Wurzelgrössen wird wegfallen, wenn es gelingt, die Werte der Wurzelgrössen aus den Koeffizienten der Gleichung selbst zu berechnen. Nun stellen zwar die Gleichungen 1), 2) und 3) (S. 31) ein vollständiges System von drei Gleichungen mit den drei Unbekannten x, y, z dar; allein eine Lösung desselben mit elementaren Hilfsmitteln gelingt nur dann, wenn die Grössen R den ersten Grad nicht übersteigen. Für diesen

Fall geben wir nachstehend ein bemerkenswertes Lösungsverfahren; an dieser Stelle deshalb bemerkenswert, weil es lehrt, ein an sich quadratisches System von Gleichungen durch lineare Elimination zu lösen.

Ist gegeben

$$\sqrt{ax+b}+\sqrt{a_i x+b_i}=c,$$

so erhalten wir, wie oben, die Gleichungen

$$y^2=ax+b;\ z^2=a_i x+b_i;\ y+z=c;$$

d. i. das System

$$\begin{array}{llr} 4) & & ox+y \quad + \quad z=c, \\ 5) & & -ax+y\cdot y+oz \quad =b, \\ 6) & & -a_i x+oy \quad +z\cdot z=b_i \end{array}$$

Daraus erhält man, indem man zunächst wie bei linearen Gleichungen verfährt:

$$y=\frac{\begin{vmatrix} o & c & 1 \\ -a & b & o \\ -a_i & b_i & z \end{vmatrix}}{R};\ z=\frac{\begin{vmatrix} o & 1 & c \\ -a & y & b \\ -a_i & o & b_i \end{vmatrix}}{R};\ R=\begin{vmatrix} o & 1 & 1 \\ -a & y & o \\ -a_i & o & z \end{vmatrix};$$

die Determinanten des Zählers ausgerechnet, ergeben die Gleichungen

$$Ry=-ab_i+a_i b+acz,\ Rz=-a_i b+ab_i+a_i cy;$$

wir bekommen also das neue lineare System:

$$\begin{array}{ll} 7) & Ry-acz+(ab_i-ba_i)=0, \\ 8) & -a_i cy+Rz-(ab_i-ba_i)=0, \\ 9) & y+z-c=0, \end{array}$$

woraus man durch Elimination von y und z erhält:

$$\begin{vmatrix} R & -ac & (ab_i-ba_i) \\ -a_i c & R & -(ab_i-ba_i) \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix}=0,$$

das giebt:

$$R^2=c^2aa_i+(ab'-ba_i)(a-a_i),$$

$$R=\pm\sqrt{c^2aa_i+(ab_i-ba_i)(a-a_i)}.$$

Während also R ursprünglich als Determinante des Nenners noch die Unbekannten y und z enthielt, sind letztere jetzt wie von selbst verschwunden; R ist direkt ausgedrückt durch die Koeffizienten. Aus den Gleichungen 7), 8) und 9) erhält man leicht

$$y = \frac{ac - R}{a - a_{,}}; \quad z = -\frac{a_{,}c - R}{a - a_{,}}.$$

Da jetzt die Wurzelwerte y und z durch die Koeffizienten der Gleichung ausgedrückt sind, so kann über die Wahl der Vorzeichen kein Zweifel bestehen.

Beispiel:

$$\sqrt{4x+5} + \sqrt{3x+1} = 5$$

bezeichnet man die Wurzelgrössen mit y und z, so erhält man nach vorstehendem:

$$R = \pm 17; \quad ac = 20; \quad a_{,}c = 15.$$
$$y = 20 \pm 17; \quad z = -(15 \pm 17).$$
$$y_{,} = +3; \quad z_{,} = +2.$$
$$y_{,,} = +37; \quad z_{,,} = -32.$$

Man sieht, beide Wertepaare genügen; denn

$$y_{,} + z_{,} = 5$$

und ebenfalls

$$y_{,,} + z_{,,} = 5.$$

Aus $y_{,} = \sqrt{4x+5} = +3$ erhält man $x_{,} = 1$ und aus $y_{,,} = +37$ ergiebt sich $x_{,,} = 341$; dieselben Werte für x erhält man auch aus $z_{,}$ und $z_{,,}$.

Hat man drei Irrationalitäten, etwa die Gleichungen

$$\sqrt{R} + \sqrt{R_{,}} = \sqrt{R_{,,}},$$

so lassen sich derartige Gleichungen durch Division mit einer der Irrationalitäten auf die vorhergehende Form zurückführen. Kommen aber ausser dem absoluten Gliede noch drei Irrationalitäten vor, z. B.

$$\sqrt{R} + \sqrt{R_{,}} + \sqrt{R_{,,}} = A,$$

so kann man zwar die Irrationalitäten noch fortschaffen, aber die gewonnene rationale Gleichung ist selbst bei linearen Radikanden schon vom 4. Grade. Sie lautet für vorliegende Gleichung:

$$[M^2 - 4(A^2R + R_{,}R_{,,})]^2 - 64A^2RR_{,}R_{,,} = 0,$$

worin

$$M = A^2 + R - R_{,} - R_{,,}$$

gesetzt wurde.

Allein mit der Gewinnung der rationalen Gleichung ist die Lösung der irrationalen Gleichung noch nicht gegeben. Denn die Wurzeln der rationalen Gleichung sind keineswegs sämtlich auch Wurzeln der irrationalen Gleichung, wie das schon aus dem früher gegebenen Beispiele erhellt; vielmehr bedarf es noch einer besonderen Untersuchung darüber, welche von den gefundenen Wurzeln der rationalen Gleichung auch die irrationale Gleichung befriedigen. Nun gelingt es, wie schon früher bemerkt, schon bei quadratischen Radikanden nicht mehr, die Irrationalitäten rational durch die Koeffizienten auszudrücken, und noch viel weniger, wenn die Irrationalität höher als vom 2. Grade ist. Aber man kann die Irrationalitäten rational durch die Radikanden ausdrücken, wie dies schon in den Gleichungen A (S. 33) geschehen ist. Zur vollständigen Lösung einer irrationalen Gleichung mit zwei Irrationalitäten gehören also ausser der rationalen Gleichung noch zwei Gleichungen, welche die Werte der Irrationalitäten rational durch die Radikanden angeben.

2) Irrationalitäten 3. Grades:

$$\sqrt[3]{R} + \sqrt[3]{R_{\prime}} = A.$$

Wir setzen

$$y^3 = R;\ z^3 = R;\ y + z = A.$$

Durch Substitution von y aus der 3. Gleichung erhält man die beiden Gleichungen, aus welchen z zu eliminieren wäre. Es führt das auf eine Determinante 6. Grades. Um den Grad der Elimination zu erniedrigen, potenzieren wir die 3. Gleichung mit drei, so erhält man leicht:

$$3Ayz = A^3 - (R + R_{\prime}),$$

oder mit abgekürzter Bezeichnung

1) $$3Ayz = M,$$

dazu aus den beiden ersten Gleichungen

2) $$y^3z^3 = RR_{\prime}.$$

Es ist leicht, durch Substitution aus beiden Gleichungen yz zu eliminieren, allein der Gleichmässigkeit wegen in der

Behandlung der Irrationalitäten höheren Grades wenden wir auch hier das allgemeine Eliminationsverfahren an. Wir multiplizieren zu dem Zwecke Gleichung 1) der Reihe nach mit $y^2 z^2$ und mit yz, dann erhält man mit Zuhülfenahme der Gleichung 2) folgendes System:

$$\begin{aligned} 3Ay^3z^3 - \;\; My^2z^2 + \;\;\; 0yz + \;\;\; 0 &= 0 \\ 0y^3z^3 + 3Ay^2z^2 - \;\; Myz + \;\;\; 0 &= 0 \\ 0y^3z^3 + \;\;\; 0y^2z^2 + 3Ayz - \;\; M &= 0 \\ y^3z^3 + \;\;\; 0y^2z^2 + \;\;\; 0yz - RR_{\prime} &= 0, \end{aligned}$$

woraus man durch Elimination der yz erhält:

$$D \equiv \begin{vmatrix} 3A & -M & 0 & 0 \\ 0 & 3A & -M & 0 \\ 0 & 0 & 3A & -M \\ 1 & 0 & 0 & -RR_{\prime} \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante zerfällt in zwei Determinanten 3. Grades mit je vier Nullen; die Ausrechnung derselben ergiebt als rationale Gleichung

$$M^3 - 27\,A^3RR_{\prime} = 0,$$

d. i.

$$[A^3 - (R + R_{\prime})]^3 = 27\,A^3RR_{\prime} = 0.$$

Hat man die Form

$$\sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{R'} = A,$$

so kann man das Minuszeichen, wie auch etwaige andere Koeffizienten, welche vor dem Wurzelzeichen stehen, in den Radikanden eingehen lassen. Die allgemeine rationale Gleichung lautet dann

11) $$[A^3 - (R \pm R_{\prime})]^3 \mp 27A^3RR_{\prime} = 0.$$

Dieselbe lehrt:

1) Gleichungen mit zwei Irrationalitäten 3. Grades und mit linearen Radikanden führen bei ihrer Lösung auf eine rationale Gleichung 3. Grades, bei quadratischen Radikanden auf eine solche 6. Grades u. s. f.
2) Wenn bei linearen Radikanden die Koeffizienten von x gleich und entgegengesetzt sind, so führt die Lösung auf eine quadratische Gleichung.

Um die Werte der Irrationalitäten rational durch die Radikanden auszudrücken, verfahren wir folgendermassen. Es ist

$$y^3 + z^3 = R + R_{\prime\prime},$$

$$(y + z)(y^2 - yz + z^2) = R + R_{\prime\prime},$$

$$y^2 - yz + z^2 = \frac{R + R_{\prime}}{A},$$

$$y^2 + 2yz + z^2 = A^2$$

u. s. w. daraus

$$yz = \frac{A^2 - (R + R_{\prime})}{3A},$$

daher

$$x^2 + yz + z^2 = \frac{R + R_{\prime} + 2A^3}{3A} = P \text{ (abgekürzt).}$$

$$(y - z)(y^2 + yz + z^2) = P \,.\, (y - z),$$

$$y^3 - z^3 = P \,.\, (y - z),$$

$$R - R_{\prime} = P \,.\, (y - z),$$

$$y - z = \frac{R - R_{\prime}}{P}.$$

Wir haben also

$$\sqrt[3]{R} + \sqrt[3]{R_{\prime}} = A,$$

$$\sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{R_{\prime}} = \frac{R - R_{\prime}}{P};$$

folglich

$$\text{B)} \quad \begin{cases} \sqrt[3]{R} = \frac{1}{2}\left[A + \frac{R - R_{\prime}}{P}\right], \\ \sqrt[3]{R_{\prime}} = \frac{1}{2}\left[A - \frac{R - R_{\prime}}{P}\right]. \end{cases}$$

Gleichungen II) und B) geben die Lösung der irrationalen Gleichung.

Beispiel: $\sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{x - 6} = 1.$

Indem man beachtet, dass $R_{\prime}$ das negative Zeichen hat, bekommen wir nach II) als rationale Gleichung

$$x^2 - 5x - 14 = 0,$$

$$x_{\prime} = 7; \quad x_{\prime\prime} = -2.$$

Nun ist für $x_{\prime\prime} = 7$, $\sqrt[3]{x + 1} = 2\varepsilon$, wo ε die drei Wurzeln der Einheit bedeutet, nämlich $\varepsilon = 1$ und $\varepsilon = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, und ebenso ist für $x = 7$, $\sqrt[3]{x-6} = 1\,\varepsilon$. Von allen Kombinationen dieser sechs Werte genügen aber nur $\sqrt[3]{x+1} = +2$ und $\sqrt[3]{x-6} = +1$ der gegebenen Gleichung.

Gerade so verhält es sich mit den Werten der Irrationalitäten für $x = -2$; auch hier genügen nur $\sqrt[3]{x+1} = -1$ und $\sqrt[3]{x-6} = -2$.

Es erhellt dies direkt aus den Gleichungen B; denn es ist

$$\sqrt[3]{R} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x-2}{3}\right),$$

$$\sqrt[3]{R_{\prime}} = \frac{1}{2}\left(\frac{8-2x}{3}\right)$$

d. i. für $x_{\prime} = 7$:

$$\sqrt[3]{R} = +2$$
$$\sqrt[3]{R_{\prime}} = -1.$$

Für $x_{\prime\prime} = -2$ erhält man

$$\sqrt[3]{R} = -1 \text{ und } \sqrt[3]{R_{\prime}} = +2.$$

3. Irrationalitäten 4. Grades.

$$\sqrt[4]{R} + \sqrt[4]{R'} = A.$$

Wir setzen $y^4 = R$; $z^4 = R_{\prime}$; $y + z = A$.

Um aus diesen drei Gleichungen y und z zu eliminieren, verfahren wir folgendermassen. Zunächst erhält man aus den beiden Gleichungen

$$y^4 + z^4 = R + R_{\prime},$$
$$y + z = A$$

in bekannter Weise eine quadratische Gleichung für yz, nämlich

$$4A^2yz - 2y^2z^2 = A^4 - (R + R_{\prime}) = -M \text{ (abgekürzt).}$$

Durch Auflösung derselben würden wir eine Irrationalität 2. Grades schaffen, was für unsere Zwecke unzulässig ist. Wir multiplizieren daher die vorstehende Gleichung mit y^2z^2 und ziehen davon $2y^4z^4 = 2RR_{\prime}$ ab, so erhalten wir die beiden Gleichungen:

$$4A^2y^3z^3 + My^2z^2 - 2RR_{\prime} = 0$$

und

$$2y^2z^2 - 4A^2yz - M = 0.$$

Um aus diesen beiden Gleichungen yz zu eliminieren, multipliziert man die erste mit yz, die zweite der Reihe nach mit y^2z^2 und yz, so erhält man folgendes System:

$$\begin{aligned}
4A^2y^4z^4 + My^3z^3 + 0y^2z^2 - 2RR_{\prime}yz + 0 &= 0,\\
0y^4z^4 + 4A^2y^3z^3 + My^2z^2 + 0yz - 2RR_{\prime} &= 0,\\
2y^4z^4 - 4A^2y^3z^3 - My^2z^2 + 0yz + 0 &= 0,\\
0y^4z^4 + 2y^3z^3 - 4A^2y^2z^2 - Myz + 0 &= 0,\\
0y^4z^4 + 0y^3z^3 + 2y^2z^2 - 4A^2yz - M &= 0.
\end{aligned}$$

Als Bedingung für ihr Zusammenbestehen erhalten wir durch Elimination der yz:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 4A^2 & M & 0 & -2RR_{\prime} & 0 \\ 0 & 4A^2 & M & 0 & -2RR_{\prime} \\ 2 & -4A^2 & -M & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4A^2 & -M & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4A^2 & -M \end{vmatrix} = 0.$$

Zerlegt man diese Determinante in Unterdeterminanten, so erhält man leicht als die gesuchte rationale Gleichung:

$$\text{III)}\ M^4 + 2^3\,[2R^2R_{\prime}^2 - RR_{\prime}\,(2^4A^4M + M^2 + 2^5A^8)] = 0.$$

Dieselbe lehrt:

1. Gleichungen mit zwei Irrationalitäten 4. Grades führen zur Lösung einer rationalen Gleichung 4. Grades bei linearen Radikanden u. s. f.
2. Sind die Koeffizienten von x bei linearen Radikanden gleich und entgegengesetzt, so führt die Lösung der irrationalen Gleichung auf eine quadratische Gleichung für das Produkt der Radikanden; denn in diesem Falle enthält M die Unbekannte x nicht, und Gleichung III wird eine quadratische Gleichung für $RR_{\prime}$.
3. Ist die Summe der Radikanden gleich der 4. Potenz des absoluten Gliedes, so führt die Lösung der irrationalen Gleichung auf zwei lineare Gleichungen für das Produkt der Radikanden.

Um den Wert der Irrationalitäten rational durch die Radikanden auszudrücken, verfahren wir folgendermassen:

Wir hatten oben die Gleichungen

$$4A^2y^3z^3 + My^2z^2 - 2RR_{,} = 0,$$
$$2y^2z^2 - 4A^2yz - M = 0.$$

Die letzte Gleichung wird mit $2A^2yz$ multipliziert und von der vorhergehenden subtrahiert; man erhält

$$y^2z^2(M + 8A^4) + Myz = 2RR_{,}.$$

Setzt man für die Klammer den Buchstaben P, so haben wir die beiden Gleichungen

$$y^2z^2P + \quad Myz = 2RR_{,}$$
$$2y^2z^2 - 4A^2yz = M.$$

Durch Elimination von y^2z^2 erhält man leicht

$$yz = \frac{4RR_{,} - MP}{2M + 4A^2P} = Q.$$

Da nun $y + z = A$, so ist

$$y^2 + z^2 = A^2 - 2Q,$$
$$(y^2 - z^2)(y^2 + z^2) = (A^2 - 2Q)(y^2 - z^2),$$
$$y^4 - z^4 = (A^2 - 2Q)(y + z)(y - z),$$
$$R - R_{,} = (A^2 - 2Q)A \cdot (y - z),$$
$$y - z = \frac{R - R_{,}}{A(A^2 - 2Q)} = \frac{R - R_{,}}{N}.$$

Wir haben also

$$\sqrt[4]{R} - \sqrt[4]{R_{,}} = \frac{R - R_{,}}{N},$$
$$\sqrt[4]{R} + \sqrt[4]{R_{,}} = A,$$

woraus wir erhalten

$$\text{C)} \qquad \begin{cases} \sqrt[4]{R} = \frac{1}{2}\left[A + \frac{R - R_{,}}{N}\right], \\ \sqrt[4]{R_{,}} = \frac{1}{2}\left[A - \frac{R - R_{,}}{N}\right]. \end{cases}$$

Als Beispiel wählen wir die Gleichung

$$\sqrt[4]{2 - x} + \sqrt[4]{x - 1} = 1,$$

welche zugleich der Bedingung unter 3) genügt. Es ist hier $R + R_{,} = A^4 = 1$, also $M = 0$ und die rationale Gleichung III wird

$$RR_{,}(2RR_{,}-32A^8)=0,$$

d. i.

$$R\cdot R_{,}=0$$

oder

$$RR_{,}-16A^8=0;$$

aus

$$(2-x)(x-1)=0 \quad \text{folgt} \quad x_{,}=2;\ x_{,,}=1$$

und aus

$$RR_{,}-16A^8=0$$

wird

$$(x-1)(2-x)=16,$$

$$x=\frac{3}{2}(1\pm i\sqrt{7});$$

für $x=2$, wird $\sqrt[4]{x-1}=\pm 1$ oder $=\pm i$ und für $x=1$, wird $\sqrt[4]{2-x}=\pm 1$ oder $=\pm i$. Aus den Gleichungen C) aber folgt für $x_{,}=1$

$$\sqrt[4]{R}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{4(3-2x)}{6-3x+x^2}\right)$$

$$=1$$

und

$$\sqrt[4]{R_{,}}=0;$$

für $x_{,,}=2$ hingegen wird

$$\sqrt[4]{R_{,}}=1 \quad \text{und} \quad \sqrt[4]{R}=0.$$

In der That genügen nur diese Werte der gegebenen Gleichung. In gleicher Weise wird mittels Gleichungen C) die Untersuchung über die Zulässigkeit der komplexen Wurzeln $\frac{3}{2}(1\pm i\sqrt{7})$ geführt.

Beispielsweise wird für $x=\frac{3}{2}(1+i\sqrt{7})$

$$\sqrt[4]{R}=\frac{1}{2}\cdot\frac{11i\sqrt{7}-3}{9i\sqrt{7}-3}$$

und

$$\sqrt[4]{R_{,}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{7i\sqrt{7}-3}{9i\sqrt{7}-3},$$

und auch diese Werte genügen der Gleichung

$$\sqrt[4]{2-x}+\sqrt[4]{x-1}=1,$$

denn

$$\sqrt[4]{R}+\sqrt[4]{R_{,}}=1;$$

während die Gleichung selbst für

$$x = \varepsilon = \frac{3}{2}(1 + i\sqrt{7})$$

lauten würde

$$\sqrt[4]{2 - \varepsilon} + \sqrt[4]{\varepsilon - i} = 1,$$

deren Richtigkeit nicht so ohne weiteres zu ersehen ist.

4. Irrationalitäten 5. Grades:

$$\sqrt[5]{R} + \sqrt[5]{R_{,}} = A.$$

Wir setzen wie früher

$$y^5 = R;\ z^5 = R_{,};\ y + z = A.$$

Aus den Gleichungen

$$y^5 + z^5 = R + R_{,},$$
$$y + z = A,$$

erhält man in bekannter Weise

$$5y^2z^2A - 5yzA^3 = R + R_{,} - A^5$$
$$= M;$$

dazu

$$y^5z^5 = RR_{,}.$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit y^3z^3, die zweite mit $5A$ und subtrahiert, so erhält man

$$5y^4z^4A^3 + My^3z^3 = 5ARR;$$

dazu

$$5y^2z^2A - 5yzA^3 = M.$$

Die zweite Gleichung mit $y^2z^2A^2$ multipliziert und von der ersten subtrahiert giebt

1) $$y^3z^3(5A^5 + M) + y^2z^2A^2M - 5ARR_{,} = 0;$$

dazu kommt

2) $$5y^2z^2A - 5yzA^3 - M = 0.$$

Das Problem der Elimination ist dadurch auf eine Gleichung 3. und eine Gleichung 2 Grades zurückgeführt und ergiebt eine Determinante 5. Grades, während die ursprünglichen Gleichungen auf eine solche 9. Grades geführt haben würden. Behufs Elimination der yz multipliziert man die erste Gleichung mit yz, die zweite der Reihe nach mit y^2z^2 und yz, so erhält man folgendes System von Gleichungen, wobei für $(5A^5 + M)$ kurz P gesetzt wurde:

$$\begin{aligned}
&y^4z^4P + y^3z^3MA^2 + 0y^2z^2 - 5ARR_{\prime}yz + 0 = 0,\\
&0y^4z^4 + y^3z^3P + y^2z^2MA^2 + 0yz - 5ARR_{\prime} = 0,\\
&5y^4z^4A - 5y^3z^3A^3 - y^2z^2M + 0yz + 0 = 0,\\
&0y^4z^4 + 5y^3z^3A - 5y^2z^2A^3 - Myz + 0 = 0,\\
&0y^4z^4 + 0y^3z^3 + 5y^2z^2A - 5yzA^3 - M = 0.
\end{aligned}$$

Die Resultante dieser Gleichungen, als deren Unbekannte wir die Potenzen von yz ansehen, lautet:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} P & MA^2 & 0 & -5ARR_{\prime} & 0 \\ 0 & P & MA^2 & 0 & -5ARR_{\prime} \\ 5A & -5A^3 & -M & 0 & 0 \\ 0 & 5A & -5A^3 & -M & 0 \\ 0 & 0 & 5A & -5A^3 & -M \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt man diese Determinante nach Unterdeterminanten bis auf Determinanten 3. Grades und setzt für P wieder seinen Wert $5A^5 + M$, so erhält man die gesuchte rationale Gleichung in der Form

$$\text{IV)}\quad M^5 - 5^4A^5RR_{\prime}\,[5RR_{\prime} - (M^2 + 5A^5M + 5A^{10})] = 0.$$

Dieselbe lehrt:

1. Eine Gleichung mit zwei Irrationalitäten 5. Grades führt bei linearen Radikanden auf eine rationale Gleichung 5. Grades.

2. Wenn bei linearen Radikanden die Koeffizienten von x gleich, und entgegengesetzten Vorzeichens sind, so führt die Lösung auf eine quadratische Gleichung für das Produkt der Radikanden.

Denn in diesem Falle enthält $M \equiv R + R_{\prime} - A^5$ die Unbekannte x nicht mehr und aus Gleichung IV) wird eine quadratische Gleichung für $RR_{\prime}$.

3. Ist die Summe der Radikanden gleich der 5. Potenz des absoluten Gliedes, so wird der Gleichung durch das Verschwinden jedes ihrer Radikanden genügt.

Denn in diesem Falle ist $M = 0$ und die Gleichung IV) vereinfacht sich auf

$$RR_{\prime}[5RR_{\prime} - 5A^{10}] = 0,$$

d. i.

$$RR_{\prime} = 0 \quad \text{und} \quad RR_{\prime} - A^{10} = 0.$$

Es erübrigt noch den Wert der Irrationalitäten rational durch ihre eignen Radikanden auszudrücken.

Wir hatten die Gleichungen

$$y^3z^3P + y^2z^2A^2M = 5ARR_1; \quad P = 5A^5 + M,$$
$$5y^2z^2A - 5yzA^3 = M.$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit $5A$, die zweite mit Pyz, so erhält man durch Subtraktion

$$5y^2z^2(MA^3 + A^3P) + MPyz = 25A^2RR_1;$$

dazu

$$5y^2z^2A - 5A^3yz = M.$$

Aus diesen beiden Gleichungen lässt sich y^2z^2 und yz berechnen. Setzt man für die Klammer $MA^3 + A^3P$ kurz den Buchstaben Q, so erhält man leicht

$$yz = \frac{25A^3RR_1 - MQ}{MAP + 5A^3Q} = S, \text{ (abgekürzt)}$$

$$y^2z^2 = \frac{5^3A^5RR_1 - M^2P}{5(5A^3Q - AMP)} = T.$$

Nun ist

$$(y+z)^4 = A^4,$$

oder

$$y^4 + 4y^3z + 6y^2z^2 + 4yz^3 + z^4 = A^4,$$

$$y^4 + y^3z + y^2z^2 + yz^3 + z^4 + 3yz(y^2 + 2yz + z^2) = A^4 + y^2z^2,$$

$$y^4 + y^3z + y^2z^2 + yz^3 + z^4 = A^4 - 3yzA^2 + y^2z^2,$$
$$= A^4 - 3SA^2 + T = N \text{ (abgekürzt).}$$

Multipliziert man beiderseits mit $y - z$, so wird

$$y^5 - z^5 = N(y - z),$$

$$y - z = \frac{R - R_1}{N}.$$

Wir haben also:

$$\sqrt[5]{R} + \sqrt[5]{R_1} = A,$$

$$\sqrt[5]{R} - \sqrt[5]{R_1} = \frac{R - R_1}{N},$$

also

$$\text{D)} \quad \left\{ \begin{aligned} \sqrt[5]{R} &= \frac{1}{2}\left[A + \frac{R - R_1}{N}\right], \\ \sqrt[5]{R_1} &= \frac{1}{2}\left[A - \frac{R - R_1}{N}\right]. \end{aligned} \right.$$

Beispiel. $\sqrt[5]{2-x}+\sqrt[5]{x-1}=1.$

Die Gleichung genügt der Bedingung unter 3), es ist $M=0$; $RR_{\prime}=(2-x)(x-1)$; $A=1$; die rationale Gleichung lautet

$$RR_{\prime}(5RR_{\prime}-5A^{10})=0;$$

daher

$$(2-x)(x-1)=0,$$

$$x_{\prime}=2;\quad x_{\prime\prime}=1$$

oder

$$5(3x-x^2-2)-5\cdot 1=0,$$

$$x=\frac{3\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Es ist für $x=1$, $\sqrt[5]{R}=\sqrt[5]{2-x}=1\cdot\varepsilon$; wo ε die 5 Wurzeln der Einheit bedeutet. Nun genügt $\varepsilon=1$ der Gleichung; ist aber $\varepsilon_{\prime}$ eine der Primitivwurzeln, so lautet die Gleichung

$$\sqrt{2-\varepsilon_{\prime}}+\sqrt{\varepsilon_{\prime}-1}=1.$$

Ferner ist

$$M=0;\quad P=5A^5+M=5;\quad Q=5;\quad S=\frac{25(2-x)(x-1)}{5^3};$$
$$T=\frac{5^3(2-x)(x-1)}{5^3};\quad N=\frac{5+2(2-x)(x-1)}{5};$$
$$R-R_{\prime}=3-2x.$$

Daher nach den Gleichungen D)

$$\sqrt[5]{R}=\frac{1}{2}\left[1+\frac{5(3-2x)}{5+2(2-x)(x-1)}\right];$$

d. i. für $x_{\prime}=1$,

$$=+1,$$

$$\sqrt[5]{R_{\prime}}=0.$$

Ebenso erhält man für $x_{\prime\prime}=2$:

$$\sqrt[5]{R_{\prime}}=+1$$

und

$$\sqrt[5]{R}=0,$$

also die einzigen Werte, welche für $x_{\prime}=1$ und $x_{\prime\prime}=2$ der Gleichung genügen. Die übrigen Werte ε genügen der Gleichung nicht.

Aufgaben.

Berechne die Wurzelwerte aus folgenden Gleichungen:

1) $x - 4\sqrt{2x+3} + 9 = 0$; 2) $\sqrt{4x+1} - \sqrt{2x-3} = 2$;

3) $$\sqrt{3x+4} - \sqrt{x-3} = 0;$$

4) $$\sqrt{ax+b} + \sqrt{a_{\prime}x + b_{\prime}} = c\sqrt{a_{\prime\prime}x + b_{\prime\prime}}.$$

Anleitung. Setze $y^2 = ax + b$; $z^2 = a_{\prime}x + b_{\prime}$; $u^2 = a_{\prime\prime}x + b_{\prime\prime}$. Dann erhält man durch lineare Elimination (S. 34)

$$Ry - cz\Delta_{\prime} - u\Delta = 0,$$
$$c\Delta_{\prime\prime}y + Rz + u\Delta = 0,$$
$$\Delta_{\prime\prime}y + \Delta_{\prime}z + Ru = 0;$$

daraus

$$R = \pm\sqrt{c^2\Delta_{\prime}\Delta_{\prime\prime} - \Delta(\Delta_{\prime} - \Delta_{\prime\prime})}$$

und dann

$$\frac{y}{u} = \frac{R + c\Delta_{\prime}}{\Delta_{\prime} - \Delta_{\prime\prime}}; \quad \frac{z}{n} = \frac{R + c\Delta_{\prime\prime}}{\Delta_{\prime} - \Delta_{\prime\prime}};$$

wobei $\Delta = a_{\prime}b - b_{\prime}a$; $\Delta_{\prime} = a_{\prime\prime}b - b_{\prime\prime}a$; $\Delta_{\prime\prime} = a_{\prime\prime}b_{\prime} - b_{\prime\prime}a_{\prime}$ gesetzt wurde.

5) $$\sqrt{7x-5} - \sqrt{2x+3} = \sqrt{x-2};$$

6) $$\sqrt{4x+5} + \sqrt{3x+1} = 5\sqrt{2x-1};$$

7) $$\sqrt[3]{7x+6} - \sqrt[3]{7x-13} = 1;$$

8) $$\sqrt[3]{7x+\sqrt{21}} + \sqrt[3]{\sqrt{21} - 7x} = \sqrt[6]{21}; \qquad (\pm\tfrac{2}{3})$$

9) $$\sqrt[4]{18-x} + \sqrt[4]{x-2} = 2;$$

10) $$\sqrt[5]{x+8} + \sqrt[5]{24-x} = 2. \qquad [-8;\ 24]$$

Sechstes Kapitel.

Die Diskriminante einer quadratischen Gleichung mit zwei Unbekannten.

Die allgemeine Gleichung 2. Grades mit zwei Unbekannten:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

ist identisch mit

$(ax+by+d)^2-b^2y^2-2bdy-d^2+acy^2+2adx+2aey+af=0,$ nachdem dieselbe mit a multipliziert ist. Letztere Form geordnet giebt

$$[ax+by+d]^2-[(b^2-ac)y^2+2(bd-ae)+d^2-af]=0.$$

Die zweite Klammer enthält eine quadratische Form von y und diese wird ein vollständiges Quadrat, wenn ihre Diskriminante (S. 24) gleich 0 ist, d. h. wenn

$$\text{I)} \qquad (b^2-ac)(d^2-af)-(bd-ae)^2=0$$

ist.

Unter dieser Bedingung haben wir statt der ursprünglichen Gleichung die Form

$$[ax+by+d]^2-[y\sqrt{b^2-ac}+\sqrt{d^2-af}]^2=0$$

oder

$$[ax+by+d+y\sqrt{b^2-ac}+\sqrt{d^2-af}]$$
$$[ax+by+d-y\sqrt{b^2-ac}-\sqrt{d^2-af}]=0$$

und die quadratische Gleichung zerfällt in die beiden linearen:

$$\text{II)} \quad \begin{cases} ax+(b+\sqrt{b^2-ac})y+d+\sqrt{d^2-af}=0, \\ ax+(b-\sqrt{b^2-ac})y+d-\sqrt{d^2-af}=0. \end{cases}$$

Nach Auflösung der Klammern nimmt Gleichung I die Gestalt an

$$acf+2bde-d^2c-e^2a-b^2f=0$$

und man sieht leicht, dass sie auch dargestellt wird durch die Determinantengleichung

$$\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}=0.$$

Diese Bedingungsgleichung für das Zerfallen einer Gleichung 2. Grades mit zwei Unbekannten in das Produkt zweier linearer Gleichungen heisst Diskriminante der Gleichung 2. Grades mit zwei Unbekannten oder Diskriminante der Kegelschnittsgleichung. Ihrer Wichtigkeit wegen für die Theorie dieser Gleichungen geben wir für die Determinantenform derselben noch folgende Herleitungen.

1. [Nach O. Hesse.] Die allgemeine Gleichung lässt sich auch in der Form schreiben:

$$F\equiv x(ax+by+d)+y(bx+cy+e)+dx+ey+f=0.$$

Setzt man nun

$$F = 2(\alpha x + \beta y + \gamma)(\alpha_{\prime} x + \beta_{\prime} y + \gamma_{\prime})$$

und multipliziert aus, so erhält man:

$$\begin{aligned} x(ax + by + d) + y(bx + cy + e) + (dx + cy + f) = \\ x[\alpha(\alpha_{\prime} x + \beta_{\prime} y + \gamma_{\prime}) + \alpha_{\prime}(\alpha x + \beta y + \gamma)] + \\ y[\beta(\alpha_{\prime} x + \beta_{\prime} y + \gamma_{\prime}) + \beta_{\prime}(\alpha x + \beta y + \gamma)] + \\ [\gamma(\alpha_{\prime} x + \beta_{\prime} y + \gamma_{\prime}) + \gamma_{\prime}(\alpha x + \beta y + \gamma)] \end{aligned}$$

und daraus durch beiderseitige Vergleichung:

$$\begin{aligned} ax + by + d &= \alpha(\alpha_{\prime} x + \beta_{\prime} y + \gamma_{\prime}) + \alpha_{\prime}(\alpha x + \beta y + \gamma), \\ bx + cy + e &= \beta(\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;) + \beta_{\prime}(\;.\;.\;.\;.\;.\;), \\ dx + ey + f &= \gamma(\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;) + \gamma_{\prime}(\;.\;.\;.\;.\;.\;). \end{aligned}$$

Für die Werte, welche die linearen Faktoren zu null machen, wird also auch

$$\begin{aligned} ax + by + d &= 0, \\ bx + cy + e &= 0, \\ dx + ey + f &= 0, \end{aligned}$$

woraus man durch Elimination von x und y die Bedingung erhält:

$$\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0.$$

2. Setzt man wiederum

$$F = (\alpha x + \beta y + \gamma)(\alpha_{\prime} x + \beta_{\prime} y + \gamma_{\prime}),$$

so erhält man durch Vergleichung der beiderseitigen Koeffizienten:

1) $\alpha\alpha_{\prime} + \alpha_{\prime}\alpha = 2a$; 2) $\beta\alpha_{\prime} + \beta_{\prime}\alpha = 2b$; 3) $\gamma\alpha_{\prime} + a\gamma_{\prime} = 2d$;
4) $\beta_{\prime}\gamma + \gamma_{\prime}\beta = 2e$; 5) $\beta_{\prime}\beta + \beta_{\prime}\beta = 2c$; 6) $\gamma_{\prime}\gamma + \gamma_{\prime}\gamma = 2f$.

Nun ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{\prime}\alpha + \alpha\alpha_{\prime} & \alpha_{\prime}\beta + \alpha\beta_{\prime} & \alpha_{\prime}\gamma + \alpha\gamma_{\prime} \\ \beta_{\prime}\alpha + \beta\alpha_{\prime} & \beta_{\prime}\beta + \beta\beta_{\prime} & \beta_{\prime}\gamma + \beta\gamma_{\prime} \\ \gamma_{\prime}a + \gamma\alpha_{\prime} & \gamma_{\prime}\beta + \gamma\beta_{\prime} & \gamma_{\prime}\gamma + \gamma\gamma_{\prime} \end{vmatrix}$$

identisch null. Denn zerlegt man sie nach Zusatz 4 (S. 6), so erhält man Determinanten, worin jedesmal zwei Vertikalreihen gleich sind.* Setzt man also in dieser Determinante für $\alpha_{,}\alpha + \alpha\alpha_{,}$ etc. die entsprechenden Koeffizienten der Gleichung ein und dividiert jede Vertikalreihe durch 2, so erhält man direkt:

$$\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0.$$

3. Eliminiert man aus den drei ersten Gleichungen unter 2. α und $\alpha_{,}$, so erhält man die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha_{,} & a \\ \beta & \beta_{,} & b \\ \gamma & \gamma_{,} & d \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. nach der letzten Vertikalreihe entwickelt.

$$\text{I)}\quad a\,(\beta\gamma_{,} - \gamma\beta_{,}) - b\,(\alpha\gamma_{,} - \gamma\alpha_{,}) + d\,(\alpha\beta_{,} - \beta\alpha_{,}) = 0;$$

ebenso erhält man durch Elimination von β und $\beta_{,}$ aus den Gleichungen 2, 4 und 5, sowie von γ und $\gamma_{,}$ aus 3, 4 und 6

$$\text{II)}\quad b\,(\beta\gamma_{,} - \gamma\beta_{,}) - c\,(\alpha\gamma_{,} - \gamma\alpha_{,}) + e\,(\alpha\beta_{,} - \beta\alpha_{,}) = 0;$$

$$\text{III)}\quad d\,(\beta\gamma_{,} - \gamma\beta_{,}) - e\,(\alpha\gamma_{,} - \gamma\alpha_{,}) + f\,(\alpha\beta_{,} - \beta\alpha_{,}) = 0.$$

Für das Zusammenbestehen dieser drei Gleichungen erhält man durch Elimination der 3 Klammerausdrücke ebenfalls die Bedingung:

$$\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0.$$

---

* Durch diese Zerlegung erhält man zunächst zwei Determinanten P und Q, welche bis auf die erste Vertikale gleich sind. Zerlegt man nun P nach demselben Zusatz in zwei Determinanten S und R, so sieht man, dass in S die beiden ersten, in R die erste und dritte Vertikalreihe nach Ausscheidung des gemeinschaftlichen Faktors gleich werden. Will man das Multiplikationsgesetz voraussetzen, so ist obige Determinante gleich dem Produkte

$$\begin{vmatrix} \alpha_{,} & \alpha & 0 \\ \beta_{,} & \beta & 0 \\ \gamma_{,} & \gamma & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_{,} & \beta_{,} & \gamma_{,} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

woraus ihr Verschwinden sofort erhellt.

4. Setzt man

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=(\alpha x+\beta y+\gamma)^2-(\alpha_i x+\beta_i y+\gamma_i)^2,$$

worin die rechte Seite ebenfalls das Produkt zweier linearer Faktoren darstellt, so erhält man wie unter 2. durch Vergleichung:

$$1)\ \alpha\alpha-\alpha_i\alpha_i=a;\quad 2)\ \alpha\beta-\alpha_i\beta_i=b;\quad 3)\ \beta\beta-\beta_i\beta_i=c;$$
$$4)\ \alpha\gamma-\alpha_i\gamma_i=d;\quad 5)\ \beta\gamma-\beta_i\gamma_i=e;\quad 6)\ \gamma\gamma-\gamma_i\gamma_i=f.$$

Durch lineare Elimination von α und α_i aus den Gleichungen 1, 2 und 4, von β und β_i aus den Gleichungen 2, 3, 5 und von γ und γ_i aus den Gleichungen 4, 5 und 6 erhält man dasselbe System von Gleichungen wie unter 3. (I, II, III) und daraus auch wieder die nämliche Bedingung:

$$\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0.$$

Beispiel: Gegeben $x^2-2xy-8y^2+2x+10y-3=0.$

Die Diskriminante der Gleichungen lautet:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -8 & 5 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}.$$

Dieselbe ist null, daher muss die linke Seite das Produkt zweier linearer Faktoren sein.

Um die linearen Faktoren zu finden, kann man die Gleichungen direkt nach II (S. 48) umformen oder dieselbe nach einer Unbekannten, etwa nach x oder y, auflösen. Also:

$$x^2-2x(y-1)-8y^2+10y-3=0,$$
$$x=y-1\pm\sqrt{9y^2-12y+4},$$
$$=y-1\pm(3y-2).$$

Wir erhalten also die beiden linearen Gleichungen

$$x-4y+3=0$$

und

$$x+2y-1=0.$$

4*

Aufgaben. Zerlege ebenfalls in lineare Gleichungen:

1) $x^2 - xy + y - 1 = 0.$ $[(x-1)(x-y+1)]$

2) $x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0.$
$[(x-y-1)(x-4y+2)]$

3) $x^2 - 5yx + 6y^2 + 2x - 6y = 0.$
$[(x-2y+2)(x-3y)]$

4) $2x^2 - 9xy + 9y^2 + 5x - 9y + 2 = 0.$
$[(2x-3y+1)(x-3y+2)]$

5) $ax^2 + xy(2a+b) + 2by^2 + x(b-a) + by - b = 0.$
$[(ax+by+b)(x+2y-1)]$

Welchen Wert muss in folgenden Gleichungen der unbestimmte Koeffizient haben, damit dieselben in lineare zerfallen?

1) $x^2 - 2xy + 2dx + 4y - 2 = 0.$ $\left[d = -\frac{1}{2}\right]$

2) $x^2 - 2bxy + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0.$ $\left[\frac{5}{3};\ \frac{5}{4}\right]$

3) $15x^2 - 41xy + cy^2 + 29x - 29y + 12 = 0.$ (14)

Siebentes Kapitel.

Auflösung quadratischer Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Die Methoden des Kapitel III zeigen, wie man aus einer quadratischen und einer linearen Gleichung eine Unbekannte eliminieren kann, und dass man dadurch eine quadratische Gleichung mit einer Unbekannten erhält, durch deren Auflösung man die gemeinschaftlichen Wurzeln der beiden gegebenen Gleichungen finden kann.

Dieselben Methoden zeigen aber auch, dass man bei zwei quadratischen Gleichungen mit zwei Unbekannten zu einer Gleichung 4. Grades gelangt, deren Auflösung an dieser Stelle also unmöglich sein würde.

Wenn aber eine der gegebenen Gleichungen:

$$F \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$
$$F_I \equiv a_I x^2 + 2b_I xy + c_I y^2 + 2d_I x + 2e_I y + f_I = 0$$

etwa $F_I = 0$ in zwei lineare zerfällt, so kann man durch Zusammenstellung jeder dieser linearen Gleichungen mit $F = 0$ ebenfalls die gemeinschaftlichen Wurzeln der beiden gegebenen Gleichungen finden. Alle Werte der Unbekannten aber, welche gleichzeitig F und F_I zu null machen, machen auch $F + \lambda F_I$ zu null, so dass

$$F + \lambda F_I = 0,$$

worin λ einen unbestimmten Faktor bedeutet, ebenfalls eine Gleichung ist, welche mit den beiden gegebenen gemeinschaftliche Wurzeln hat. Die Bedingung dafür aber, dass die Gleichung $F + \lambda F_I = 0$ in zwei lineare zerfalle, ist, dass ihre Diskriminante null werde. Ordnet man die Gleichung $F + \lambda F_I = 0$ nach Potenzen der Unbekannten, so lautet nach Kapitel VI die Diskriminante derselben:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a + \lambda a_I & b + \lambda b_I & d + \lambda d_I \\ b + \lambda b_I & c + \lambda c_I & e + \lambda e_I \\ d + \lambda d_I & e + \lambda e_I & f + \lambda f_I \end{vmatrix} = 0.$$

Dieselbe stellt eine kubische Gleichung für λ dar. Aber wegen ihrer durchsichtigen Gestalt, lassen sich aus ihr leicht diejenigen Fälle ableiten, in welchen sich diese kubische Gleichung auf eine quadratische oder lineare Gleichung reduziert. Es handelt sich mit andern Worten darum, diejenigen allgemeinen Formen aus obiger Determinante abzuleiten, in welchen ein Wert von λ gefunden werden kann, durch welchen $F + \lambda F_I = 0$ in zwei lineare Gleichungen zerlegt wird, so dass damit auch die Lösung von $F = 0$ und $F_I = 0$ gegeben ist.

Dieses ist aber der Fall, wenn λ in einer Zeile oder Kolonne als Faktor heraustritt; denn die kubische Gleichung $\Delta = 0$ zerfällt dann in eine lineare und eine quadratische, so dass also stets ein solcher Wert von λ gefunden wird, der ein Zerfallen der Gleichung $F + \lambda F_I = 0$ in zwei lineare möglich macht.

Ist z. B.

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{d}{d_1} = \frac{1}{m} \quad \text{d. h.} \quad a_1 = ma; \quad b_1 = mb; \quad c_1 = mc,$$

so zerfällt die Diskriminante in

$$(1 + m\lambda) \begin{vmatrix} a & b + \lambda b_1 & d + \lambda d_1 \\ b & c + \lambda c_1 & e + \lambda e_1 \\ c & e + \lambda e_1 & f + \lambda f_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Eine Wurzel der kubischen Gleichung erhält man also aus

$$m\lambda + 1 = 0, \quad \text{oder} \quad \lambda_1 = -\frac{1}{m}.$$

Der andere Faktor stellt eine quadratische Gleichung für λ dar.

Dasselbe ergiebt sich auch, wenn wir die Koeffizienten einer anderen Zeile oder Kolonne proportional setzen, also:

$$\frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{e}{e_1} \quad \text{und} \quad = \frac{d}{d_1} = \frac{e}{e_1} = \frac{f}{f_1}.$$

Die Wurzel $\lambda = -\frac{1}{m}$ sagt aber aus, dass $mF - F_1 = 0$ eine zerlegbare Gleichung sein muss. Da nun im ersten Falle $a_1 = ma$; $b_1 = mb$ und $d_1 = md$ war, so erhalten wir folgende beiden Gleichungen:

$$1) \quad \begin{cases} F = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \\ F_1 = max + 2mbxy + c_1y^2 + 2mdx + 2e_1y + f_1 = 0; \end{cases}$$

ebenso erhält man für die beiden andern Proportionen:

$$2) \quad \begin{cases} ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \\ a_1x^2 + 2mbxy + mcy^2 + 2d_1x + 2mey + f_1 = 0; \end{cases}$$

$$3) \quad \begin{cases} ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \\ a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 + 2mdx + 2mey + mf = 0. \end{cases}$$

In der That zeigt ein Blick auf die drei Gruppen, dass man nur die erste Gleichung mit m zu multiplizieren und von ihr die zweite zu subtrahieren braucht, um lösbare Gleichungen zu erhalten, und zwar aus 1) eine quadratische Gleichung für y, aus 2) eine solche für x und aus 3) eine solche für $\frac{x}{y}$.

Ferner tritt ein Zerfallen der kubischen Gleichung $\Delta = 0$ ein, wenn λ in allen Unterdeterminanten als Faktor heraustritt, d. h. wenn die Koeffizienten der Unterdeterminanten proportional sind. Ist also

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{1}{m}, \text{ oder } a_1 = ma; \; b_1 = mb; \; c_1 = mc,$$

so erhält man in $\Delta = 0$ ebenfalls $(1 + m\lambda)$ als Faktor. Die beiden Gleichungen lauten in diesem Falle

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$
$$max^2 + 2mbxy + mcy^2 + 2d_1x + 2e_1y + f_1 = 0.$$

Setzt man ebenso die anderen Koeffizienten proportional, so bekommen wir folgende Formen. Jede derselben stellt mit der allgemeinen Gleichung $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey = 0$ zusammen ein System lösbarer quadratischer Gleichungen dar.

I.

Proportionale Koeffizienten.	Form der zweiten Gleichung.
1) $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{1}{m}$	$max^2 + 2mbxy + mcy^2 + 2d_1x + 2e_1y + f_1 = 0.$
2) $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{d}{d_1} = \frac{e}{e_1} = \frac{1}{m}$	$max^2 + 2mbxy + c_1y^2 + 2mdx + 2mey + f_1 = 0.$
3) $\frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{d}{d_1} = \frac{e}{e_1} = \frac{1}{m}$	$a_1x^2 + 2mbxy + mcy^2 + 2mdx + 2mey + f_1 = 0.$
4) $\frac{a}{a_1} = \frac{d}{d_1} = \frac{f}{f_1} = \frac{1}{m}$	$max^2 + 2b_1xy + c_1y^2 + 2mdx + 2e_1y + mf = 0.$
5) $\frac{b}{b_1} = \frac{e}{e_1} = \frac{d}{d_1} = \frac{f}{f_1} = \frac{1}{m}$	$a_1x^2 + 2mbxy + e_1y^2 + 2mdx + 2mey + mf = 0.$
6) $\frac{c}{c_1} = \frac{e}{e_1} = \frac{f}{f_1} = \frac{1}{m}$	$a_1x^2 + 2b_1xy + mcy^2 + 2d_1x + 2mey + mf = 0.$

Für den Fall der Proportionalität dreier Koeffizienten, der zu den allgemeinen Formen 1), 2) und 3) (S. 54) führte, ist noch zu merken, dass die Proportion $a : b : d = a_1 : b_1 : d_1$

auch besteht, wenn je 2 Elemente null sind, also wenn etwa $\frac{a}{d} = \frac{a_{\prime}}{d_{\prime}} = 0$ und $\frac{b}{d} = \frac{b_{\prime}}{d_{\prime}} = 0$. Dehnen wir dieses auch auf die übrigen Koeffizienten aus, so bekommen wir folgende Übersicht spezieller Formen lösbarer quadratischer Gleichungen:

II.

0	Form beider Gleichungen
1) ab	$cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$
2) ad	$cy^2 + 2bxy + 2ey + f = 0.$
3) bd	$ax^2 + cy^2 + 2ey + f = 0.$
4) bc	$ax^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$
5) be	$ax^2 + cy^2 + 2dx + f = 0.$
6) ce	$ax^2 + 2bxy + 2dx + f = 0.$
7) de	$ax^2 + 2bxy + cy^2 + f = 0.$
8) df	$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ey = 0.$
9) ef	$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx = 0.$

Auch die Formen der Tabelle I lassen sich noch spezialisieren, wenn man dem Koeffizienten bestimmte Werte, auch 0 und 1, beilegt. Insbesondere erhält man für $m = 0$ folgende Formen:

III.

$m = 0$	Form der zweiten Gleichung.
1)	$2d_{\prime}x + 2e_{\prime}y + f_{\prime} = 0.$
2)	$c_{\prime}y^2 + f_{\prime} = 0.$
3)	$a_{\prime}x^2 + f_{\prime} = 0.$
4)	$2b_{\prime}xy + c_{\prime}y^2 + 2ey = 0.$
5)	$a_{\prime}x^2 + e_{\prime}y^2 = 0.$
6)	$a_{\prime}x^2 + 2b_{\prime}xy + 2d_{\prime}x = 0.$

Nr. 1 stellt darin den Fall einer quadratischen und linearen Gleichung dar.

In den vorstehenden Fällen reduzierte sich die kubische Gleichung $\Delta = 0$ auf eine lineare und eine quadratische dadurch, dass eine bestimmt erkennbare Wurzel λ ausgeschieden wurde. Allein es reduziert sich die kubische Gleichung $\Delta = 0$ auch auf eine quadratische, wenn eine Wurzel derselben $\lambda = 0$ oder $= \infty$ ist.

Dieses ist der Fall, wenn in der kubischen Gleichung das absolute Glied, oder der Koeffizient von λ^3 gleich null ist. Entwickelt man die Determinante Δ nach Zusatz 4, S. 6, so erhält man als absolutes Glied die Determinante

$$\Delta_{\prime} \equiv \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

und als Koeffizienten von λ^3 die Determinante

$$\Delta_{\prime\prime} \equiv \begin{vmatrix} a_{\prime} & b_{\prime} & d_{\prime} \\ b_{\prime} & c_{\prime} & e_{\prime} \\ d_{\prime} & e_{\prime} & f_{\prime} \end{vmatrix};$$

$\Delta_{\prime} = 0$ bedeutet aber die Gleichung $F = 0$ zerfällt in 2 lineare, und dasselbe bedeutet $\Delta_{\prime\prime} = 0$ für $F_{\prime}$. Hier stellt sich indessen die Untersuchung wesentlich anders als für die kubische Gleichung $\Delta = 0$. Während es sich dort darum handelte, eine leicht erkennbare Wurzel λ auszuscheiden, ist hier die Wurzel $\lambda = 0$ oder $= \infty$ an das Verschwinden einer Determinante geknüpft, welche eine Gleichung zwischen 6 Grössen darstellt. Denn $\Delta_{\prime} = 0$ bedeutet die Koeffizientengleichung*

$$acf + 2bed - cd^2 - ae^2 - fb^2 = 0.$$

Sind 5 davon beliebig gegeben, so lässt sich der sechste Koeffizient berechnen, der $\Delta_{\prime}$ zu null macht, woraus sich also eine ∞ Mannigfaltigkeit ergeben würde, und es würde einer jedesmaligen besonderen Untersuchung der Diskriminante be-

* In dieser Form gab Plücker die Bedingung für $\lambda = 0$ als Wurzel der kubischen Gleichung an. Analyt. geometr. Entwicklungen I, S. 243.

dürfen, um festzustellen, ob eine der gegebenen Gleichungen in zwei lineare zerfalle.

Diejenigen Fälle, welche an die Sätze über das Verschwinden einer Determinante geknüpft sind, geben zugleich die leicht erkennbaren Formen der Gleichung an, welche in zwei lineare Faktoren zerfallen.

Sind zunächst zwei Parallelreihen der Determinante Δ_1 proportional, so erhalten wir folgende Formen:

Für $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{d}{e} = \frac{1}{m}$; $b = ma$; $c = mb = m^2a$; $e = md$:

$$ax^2 + 2maxy + m^2ay^2 + 2dx + 2mdy + f = 0,$$

oder

$$a(x + my)^2 + 2d(x + my) + f = 0.$$

Nimmt man m statt $\frac{1}{m}$ als Proportionalitätsfaktor, so erhält man

$$b(mx + y) + 2me(mx + y) + mf = 0.$$

Ebenso für die übrigen Proportionen. Wir erhalten folgende Übersicht:

IV.

	Formen einer Gleichung.
1) $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{d}{e}$	$\begin{cases} a(x + my)^2 + 2d(x + my) + f = 0, \\ b(mx + y)^2 + 2me(mx + y) + mf = 0; \end{cases}$
2) $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{d}{f}$	$\begin{cases} a\left(\frac{x + m}{y}\right)^2 + 2b\left(\frac{x + m}{y}\right) + c = 0, \\ d\left(\frac{mx + 1}{y}\right)^2 + 2e\left(\frac{mx + 1}{y}\right) + c = 0; \end{cases}$
3) $\frac{b}{d} = \frac{c}{e} = \frac{e}{f}$	$\begin{cases} a + 2b\left(\frac{y + m}{x}\right) + c\left(\frac{y + m}{x}\right)^2 = 0, \\ ma + 2md\left(\frac{my + 1}{x}\right) + e\left(\frac{my + 1}{x}\right)^2 = 0. \end{cases}$

Sämtliche Gleichungen sind quadratisch für lineare Formen von x und y, also lösbar. Sind die Elemente einer

Reihe der Determinante Δ_i null, so bekommen wir folgende Formen:

V.

0	Form einer Gleichung.
$a\ b\ d$	$cy^2 + 2ey + f = 0,$
$b\ c\ e$	$ax^2 + 2dx + f = 0,$
$d\ e\ f$	$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0.$

Es sind spezielle Formen von IV, je nachdem man $m = 0$ oder $= \infty$ setzt. Alle in vorstehenden Tabellen gegebenen Formen quadratischer Gleichungen lassen mit einiger Überlegung leicht eine Wurzel λ, welche bei der Elimination anzuwenden ist, erkennen und es stellen daher die aufgestellten Formen der Tabellen I bis V die Grundtypen der durch quadratische oder lineare Gleichungen lösbaren Gleichungen 2. Grades mit zwei Unbekannten dar. Nur die Fälle $\lambda = 0$ oder $= \infty$, d. h. diejenigen Fälle, wo bereits eine der gegebenen Gleichungen das Produkt zweier linearer Faktoren ist, enthalten noch eine ∞ Mannigfaltigkeit. Da über dieselben aber in den wenigsten Fällen mit dem blossen Auge entschieden werden kann, so haben sie (ausser den in Tafel IV und V aufgeführten Formen) für die Praxis wenig Bedeutung. Vorkommenden Falls giebt die Diskriminante darüber sichern Aufschluss (vergl. Übungen, S. 52).

Achtes Kapitel.

Besondere Formen.

Zwei quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten auflösen heisst, diejenigen Werte der Unbekannten bestimmen, welche beiden Gleichungen gleichzeitig genügen, mit andern Worten die gemeinschaftlichen Wurzeln beider Gleichungen suchen. Es können mithin auch nur diejenigen Werte der

Unbekannten als Lösungen zugelassen werden, welche jenen Anforderungen genügen. Die Methoden des vorigen Kapitels geben einen klaren Einblick in das eigentliche Wesen der Lösung quadratischer Gleichungen und ihrer Schwierigkeit. Die Lösung wird wie bei den Gleichungen 1. Grades mit mehreren Unbekannten auf eine Eliminationsaufgabe zurückgeführt, dessen Schwierigkeit einzig und allein in der Auffindung des Eliminationsfaktors λ besteht. Es wurde aber auch gezeigt, dass diese Auffindung keinerlei Schwierigkeit macht, wenn ein lösbares, d. h. durch quadratische oder lineare Gleichungen lösbares System vorliegt. Das Verfahren lässt keine Zweifel darüber, nicht nur, dass es bei allen hierher gehörigen Gleichungen sicher zum Ziele führt, sondern dass es auch gleichmässig alle Gleichungen, welcher Gestalt sie sein mögen, umfasst, dass es somit eine einheitliche Methode für das ganze Gebiet der quadratischen Gleichungen mit zwei Unbekannten angiebt.

Im Gegensatz hierzu stehen diejenigen Methoden, welche die hierher gehörigen Gleichungen gewissermassen von Typus zu Typus behandeln lehren und das einzuschlagende Verfahren je nach Form der Gleichungen ändern, was ihnen den Ruf von „Kunstgriffen" angehängt hat, ohne dass man sich immer klar darüber ist, was man in der Mathematik unter „Kunstgriff" zu rechnen oder zu verstehen hat. Wir wollen daher, um genau sein zu können, unter „Kunstgriff" alle solche Operationen verstehen, durch welche der Grad der Lösung über den durch die Gleichungen bedingten erhöht oder darunter erniedrigt wird, so dass im einen Fall die Anzahl der Wurzeln eine zu grosse, darunter also unzulässige, im andern eine zu geringe wird. Nur in diesem Sinne wird man mit dem Worte „Kunstgriff" etwas ungehöriges oder unmethodisches bezeichnen können, weil ein solches Verfahren zur Unterschlagung von Wurzeln führen muss und den Schüler über das eigentliche Wesen und den Begriff „Gleichungen lösen" zu täuschen geeignet ist.

Nun ist die obere Grenze für die Zahl der Wurzeln gegeben, nämlich für zwei quadratische Gleichungen vier und für eine quadratische und eine lineare zwei, welche Anzahl also nicht überschritten werden darf. Aber es ist damit nicht gesagt, dass in jedem gegebenen Falle wirklich vier, resp. zwei Wurzeln existieren müssen.

Wir wollen das Gesagte an zwei einfachen Beispielen erläutern.

Von den Gleichungen

$$x + y = a,$$
$$x^2 - y^2 = b$$

ist die eine linear und es würden demnach zwei gemeinschaftliche Wurzeln zu erwarten sein. Bekanntlich führt die Substitutionsmethode stets zum Ziele. Trotzdem würde man hier die Division anwenden, wodurch man $x - y$, aber auch nur eine gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen erhält. Ist nun hier die Division ein Kunstgriff? Nein, denn die Gleichungen haben in der That nur *eine* gemeinschaftliche Wurzel, wovon man sich auch durch Substitution überzeugen kann. Der Grund ist leicht einzusehen. Multipliziert man die erste Gleichung mit λ, so ist

$$x^2 - y^2 + \lambda x + \lambda y - (\lambda a + b) = 0$$

die Gleichung, welche mit jeder der beiden gegebenen die gesuchten gemeinschaftlichen Wurzeln liefern muss. Die Diskriminante dieser Gleichungen giebt für λ aber nur einen Wert, nämlich $\lambda = -\frac{b}{a}$; setzt man diesen Wert ein, oder, was dasselbe, eliminiert man aus beiden gegebenen Gleichungen die absoluten Glieder a und b, so erhält man

$$ax^2 - ay^2 - bx - by = 0$$

oder

$$(x + y)\ [a\,(x - y) - b] = 0.$$

Da nun aber $x + y$ wegen der ersten Gleichung nicht 0 sein kann, so bleibt als einzige Gleichung, welche mit *jeder* der beiden gegebenen die gemeinschaftlichen Wurzeln liefert:

$$x - y = \frac{b}{a},$$

d. i. in jedem Falle, ob man mit der ersten oder zweiten Gleichung kombiniert, nur *ein* Wurzelpaar.

Liegt hingegen vor

$$x + y = 5,$$
$$xy = 6,$$

so wird man auch hier auf zwei gemeinschaftliche Wurzeln rechnen müssen. Ein beliebtes Verfahren besteht nun darin, die erste Gleichung zu quadrieren etc., wodurch man als Gleichung, welche mit den gegebenen gemeinschaftliche Wurzeln hat, erhält:

$$x - y = \pm 1.$$

Mit der ersten Gleichung kombiniert, erhält man

$$x_{I} = 3, \ x_{II} = 2; \quad y_{I} = 2, \ y_{II} = 3.$$

Kombiniert man aber mit der zweiten Gleichung, so erhält man ausser den vorstehenden Werten noch $x_{III} = -3$; $x_4 = -2$; $y_{III} = -2$; $y_4 = -3$; im ganzen also vier Wurzelpaare, von welchen nur die beiden ersten den gegebenen Gleichungen genügen. Der Grund liegt in dem Quadrieren, weil dadurch zwei Gleichungen 2. Grades geschaffen werden, für welche dann allerdings vier Wurzeln zulässig sind. In der That genügen alle vier Wurzeln, sowohl dem Quadrate der ersten Gleichung, als auch der zweiten. Wir würden also in diesem Falle das Quadrieren als einen „Kunstgriff" bezeichnen, der hier sich auch schon dadurch als unberechtigt herausstellt, weil man zu derselben Lösung auch gelangen würde, wenn $x + y = -5$ statt $x + y = 5$, also ein ganz anderes Gleichungspaar gegeben wäre.

Dasselbe gilt auch für die Formen $x \pm y = a$; $x^2 + y^2 = b$ und ähnl.

Als ferneres Beispiel möge dienen:

$$x^2 - 2xy = 3,$$
$$xy - 2y^2 = 1.$$

Beide Gleichungen sind offenbar quadratisch und man muss daher vier gemeinschaftliche Wurzeln erwarten.

Dividiert man beide Gleichungen, so erhält man $\frac{x}{y} = 3$ und dann durch Substitution direkt $x = \pm 3$, $y = \pm 1$, also nur zwei Wurzeln. Da dieses dem äussern Charakter der Gleichungen nach zu wenig ist, so würde man die Division als einen Kunstgriff zu bezeichnen haben. Allein trotz ihres quadratischen Charakters haben die Gleichungen nur zwei gemeinschaftliche Wurzeln.

Die Diskriminante der Gleichungen giebt zwei Wege zur Lösung an, indem sie für λ die Werte $\lambda_{,} = -3$ und $\lambda_{,,} = -2$ liefert. Multipliziert man die 2. Gleichung mit 3 und subtrahiert sie von der ersten Gleichung, so erhält man die bekannte quadratische Gleichung für $\frac{x}{y}$, allein sie hat die Form

$$(x - 2y)\,[x - 3y] = 0.$$

Da nun $x - 2y$ nicht null sein kann, sowohl wegen der ersten als der zweiten Gleichung, da ihre linken Seiten $x - 2y$ als Faktor enthalten, so bleibt allein $x - 3y = 0$ als Gleichung übrig, welche mit jeder der gegebenen die gemeinschaftlichen Wurzeln liefert. Der zweite aus der Diskriminante erhaltene Wert $\lambda_{,,} = -2$ sagt, dass das Zweifache der 2. Gleichung von der ersten abzuziehen sei; man erhält

$$[x - 2y]^2 = 1,$$
$$x - 2y = \pm 1;$$

aber beide Werte geben mit jeder der gegebenen Gleichungen nur dieselben Wurzeln wie oben, nämlich $x = \pm 3$, $y = \pm 1$. Wir werden also die Division nicht als Kunstgriff bezeichnen, um so weniger, da sie im Grunde nichts anderes ist, als was auch die Diskriminante lehrt, nämlich Elimination der absoluten Glieder.

Man sieht also, dass Operationen, selbst wenn sie den Grad des Problems zu erhöhen oder erniedrigen scheinen, nicht so ohne weiteres als „Kunstgriffe“ zu bezeichnen sind. Es ist aber zugleich ersichtlich, dass in solchen zweifelhaften Fällen die Diskriminante sichern Aufschluss giebt, ja dass sie sämtliche Wege zur Lösung angiebt, ausgenommen diejenigen, welche nach der vorhin gegebenen Definition als „Kunstgriffe“ zu bezeichnen wären.

Wir wollen die Diskriminante daher auf einige bekannte Formen anwenden, weil sie Lösungen für dieselben vermittelt, welche bislang nicht beachtet wurden.

Die Tabellen des vorigen Kapitels enthalten die Mehrzahl der lösbaren quadratischen Gleichungen in allgemeiner Form, wie ja auch die vorhin behandelten als spezielle Formen in ihnen enthalten sind.

Wir wählen zunächst aus Tabelle II Nr. 7 eine Gleichungsform, welche unter dem Namen der kanonischen bekannt ist, und in vielfach abgeänderter Gestalt Gegenstand von Übungen bildet.

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = f,$$
$$a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 = f_1.$$

Die Diskriminante der beiden Gleichungen lautet:

$$\begin{vmatrix} a + \lambda a_1 & b + \lambda b_1 & 0 \\ b + \lambda b_1 & c + \lambda c_1 & 0 \\ 0 & 0 & -(f + \lambda f_1) \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(f + \lambda f_1)\,[(a + \lambda a_1)\,(c + \lambda c_1) - (b + \lambda b_1)^2] = 0.$$

Die allgemeine kubische Gleichung für λ zerfällt also in diesem Falle in eine lineare und eine quadratische. Die erstere lautet

$$f + \lambda f_1 = 0$$

und giebt für λ den Wert $\lambda_1 = -\dfrac{f}{f_1}$; d. h. die erste der gegebenen Gleichungen ist mit f_1, die zweite f zu multiplizieren und dann sind beide Gleichungen zu subtrahieren. Es ist das bekannte Verfahren, eine quadratische Gleichung für $\dfrac{x}{y}$ herzustellen. Die beiden andern Werte für λ werden aus der quadratischen Gleichung erhalten:

1) $$(a + \lambda a_1)\,(c + \lambda c_1) - (b + \lambda b_1)^2 = 0.$$

Ohne dieselbe auszurechnen und aufzulösen kann man entscheiden, welches Verfahren die beiden Wurzeln für die gegebenen Gleichungen anzeigen. Die Gleichung nämlich, welche die gemeinschaftlichen Wurzeln der beiden gegebenen Gleichungen enthält, lautet:

2) $$(a + \lambda a_1)x^2 + 2(b + \lambda b_1)xy + (c + \lambda c_1)y^2 = f + \lambda f_1.$$

Ist nun $(a + \lambda a)\,(c + \lambda c_1) - (b + \lambda b_1)^2 = 0$, so heisst das, die Diskriminante der links stehenden quadratischen Form ist $= 0$, letztere ist also ein vollständiges Quadrat (s. S. 24). Wir bekommen daher, je nachdem wir einen der drei Faktoren aus Gleichung 1) durch die beiden anderen ausdrücken, für die Gleichung 2) folgende drei Formen:

$$4)\quad [(a + \lambda a_{,})x + (b + \lambda b_{,})y]^2 = (f + \lambda f_{,})(a + \lambda a_{,}),$$

$$5)\quad [(b + \lambda b_{,})x + (c + \lambda c_{,})y]^2 = (f + \lambda f_{,})(c + \lambda c_{,}),$$

$$6)\quad [(\sqrt{a + \lambda a})x + (\sqrt{c + \lambda c_{,}})y]^2 = (f + \lambda f_{,}).$$

Jede dieser drei Formen stellt zwei lineare Gleichungen dar, welche die Lösung der gegebenen Gleichungen vermitteln, z. B.

$$2x^2 + 4xy - 5y^2 = -10,$$
$$3x^2 + 6xy - 2y^2 = 7.$$

Die Diskriminante der beiden Gleichungen lautet:

$$\begin{vmatrix} 2 + 3\lambda & 2 + 3\lambda & 0 \\ 2 + 3\lambda & -(5 + 2\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & (10 - 7\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Daraus erhält man $\lambda_{,} = \frac{10}{7}$; $\lambda_{,,} = -\frac{2}{3}$; $\lambda_{,,,} = -\frac{5}{7}$.

$\lambda_{,}$ lehrt in bekannter Weise die absoluten Glieder eliminieren, wodurch man eine quadratische Gleichung für $\frac{x}{y}$ erhält. $\lambda_{,,} = -\frac{2}{3}$ sagt aus, dass die 1. Gleichung mit drei, die 2. mit zwei zu multiplizieren, und dann die eine von der andern zu subtrahieren sei, wodurch man direkt erhält:

$$y = \pm 2$$

und dann mit Hülfe einer der gegebenen Gleichungen $x_{,} = +1$; $x_{,,} = -5$; $x_{,,,} = +5$; $x_4 = -1$.

Für $\lambda_{,,,}$ endlich erhält man:

$$(x + y)^2 = 9,$$
$$x + y = \pm 3,$$

woraus man ebenfalls die Wurzeln $y = \pm 2$ und für x die obigen erhält.

Wir haben hier zugleich den Fall, dass zwei quadratische Gleichungen für die eine Unbekannte vier, für die andere nur zwei gemeinschaftliche Wurzeln haben. Es sei noch ein Fall angeführt, in welchem die Gleichung 1) irrationale Wurzeln für λ liefert.

$$2x^2 - 4xy + 3y^2 = 6,$$
$$3x^2 - 8xy + 5y^2 = 7.$$

Gleichung 1) lautet

$$(2 + 3\lambda)(3 + 5\lambda) - (2 + 4\lambda)^2 = 0,$$

woraus man leicht erhält

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Gleichung 4) wird

$$[(2 + 3\lambda)x - (2 + 4\lambda)y]^2 = (6 + 7\lambda)(2 + 3\lambda)$$

und daraus erhält man für $\lambda = \dfrac{3 + \sqrt{17}}{2}$

$$\left\{(13 + 3\sqrt{17})x - (16 + 4\sqrt{17})y\right\}^2 = (19 + 5\sqrt{17})^2,$$
$$(13 + 3\sqrt{17})x - (16 + 4\sqrt{17})y = \pm(19 + 5\sqrt{17}),$$

7) $$13x - 16y + \sqrt{17}(3x - 4y) = \pm(19 + 5\sqrt{17}).$$

Da aber wegen der kanonischen Form der gegebenen Gleichungen x und y entweder beide rational oder beide irrational sein müssen, so liefert Gleichung 7) direkt die Lösung; denn sie kann nur bestehen, wenn entweder

$$13x - 16y = \pm 19,$$
$$3\sqrt{17}x - 4\sqrt{17}y = \pm 5\sqrt{17}$$

ist, und das giebt

$$x = \pm 1, \quad y = \pm 2;$$

oder wenn

$$13x - 16y = \pm 5\sqrt{17},$$
$$3x\sqrt{17} - 4y\sqrt{17} = \pm 19$$

ist, und das giebt

$$x = \pm \frac{9}{\sqrt{17}}; \quad y = \pm \frac{2}{\sqrt{17}}.$$

Das sind aber die vier gemeinschaftlichen Wurzeln der gegebenen Gleichungen.

Eine andere Methode, Gleichungen obiger Form zu lösen, besteht darin, zunächst x^2 und y^2 unbekümmert um das Glied xy zu berechnen und dann beide Werte zu multiplizieren, wodurch man eine quadratische Gleichung für xy erhält. Allein diese quadratische Gleichung für xy repräsentiert eine unvollständige Gleichung 4. Grades in x und y und muss mit den gegebenen Gleichungen, wenn genau verfahren wird, acht Wurzeln liefern, wovon also vier unzulässige sind.

Für das obige Gleichungssystem lautet die quadratische Gleichung für xy

$$17x^2y^2 - 52xy = -36,$$

und man erhält

$$xy = 2 \quad \text{und} \quad xy = \frac{18}{17}.$$

Setzt man nun $x = \frac{2}{y}$ in die erste der gegebenen Gleichungen ein, so erhält man in der That eine Gleichung 4. Grades für y, mit den Wurzeln $y = \pm 2$ und $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, wobei letztere Werte, nämlich $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ und $x = \pm\sqrt{6}$ der 2. Gleichung nicht genügen. Ebenso erhält man noch zwei unzulässige Wurzeln aus $xy = \frac{18}{17}$. Man bekommt also durch das angewandte Verfahren nur dann die gemeinschaftlichen Wurzeln der Gleichungen, wenn man vier der durch das Verfahren gegebenen Wurzeln unterschlägt; das Verfahren würde als „Kunstgriff“ zu bezeichnen sein.

Wir wollen statt dessen noch eine andere Methode angeben, welche darin besteht, x und y zunächst linear zu berechnen und welche in vielen Fällen mehr leistet als die gewöhnlichen Hilfsmittel, wovon wir bereits in Kapitel V ein Beispiel gaben.

Die beiden gegebenen Gleichungen schreibt man in der Form:

$$x(ax + by) + y(bx + cy) = f,$$

$$x(a_{\prime}x + b_{\prime}y) + y(b_{\prime}x + c_{\prime}y) = f_{\prime}.$$

Daraus erhält man:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} f & bx + cy \\ f_{,} & b_{,}x + c_{,}y \end{vmatrix}}{R}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} ax + by & f \\ a_{,}x + b_{,}y & f_{,} \end{vmatrix}}{R},$$

worin

$$R = \begin{vmatrix} ax + by & bx + cy \\ a_{,}x + b_{,}y & b_{,}x + c_{,}y \end{vmatrix}$$

ist. Die Werte für x und y führen zu den neuen Gleichungen

$$Rx = x(fb_{,} - bf_{,}) + y(fc_{,} - cf_{,}),$$
$$Ry = x(af_{,} - fa_{,}) + y(bf_{,} - fb_{,})$$

oder

$$8) \quad \begin{cases} x[R - (fb_{,} - bf_{,})] + y(cf_{,} - fc_{,}) = 0, \\ x(af_{,} - fa_{,}) + y[bf_{,} - fb_{,} - R] = 0, \end{cases}$$

d. h. durch Elimination von x und y:

$$\begin{vmatrix} R - (fb_{,} - bf_{,}) & cf_{,} - fc_{,} \\ af_{,} - fa_{,} & R + (fb_{,} - bf_{,}) \end{vmatrix} = 0,$$

$$R^2 - (fb_{,} - bf_{,})^2 = (af_{,} - fa_{,})(cf_{,} - fc_{,});$$

$$9) \quad R = \pm\sqrt{(fb_{,} - bf_{,})^2 + (af_{,} - fa_{,})(cf_{,} - fc_{,})}$$

Aus einer der Gleichungen 8) erhält man $\frac{x}{y}$; z. B. aus der zweiten

$$\frac{x}{y} = \frac{bf_{,} - fb_{,} - R}{af_{,} - fc_{,}};$$

dadurch ist die Lösung gegeben; denn R, welches ursprünglich noch x und y quadratisch enthielt, ist in Gleichung 9) direkt durch die Koeffizienten ausgedrückt.

Wie bei den Gleichungen kanonischer Form derjenige Wert von λ, welcher die absoluten Glieder eliminiert, auch ohne Diskriminante leicht zu erkennen ist, so lassen auch die übrigen Formen der Tabelle II leicht einen solchen Eliminationsfaktor erkennen. Allein nach Ausscheidung dieser leicht erkennbaren Wurzel bleibt von der Diskriminante noch eine quadratische Gleichung für λ übrig, deren Wurzeln nicht weniger interessante Lösungsformen der Gleichungen ergeben, wie schon an den oben behandelten kanonischen Formen gezeigt wurde.

Zu diesen gehören besonders noch die Formen 3) und 5) derselben Tabelle; für die übrigen ergiebt die Diskriminante je zwei rationale Wurzeln λ. Dabei mag noch erwähnt werden, dass derjenige Faktor, welcher z. B. das Glied $2dx$ eliminiert, auch das Glied $2d(x+y)$ eliminieren würde. Gleichungen von der Form

$$(x-y)^2 - xy = 5(x-y) + 12$$

oder

$$y^2 - xy = 7(x-y) - 12$$

würden daher auch als zu Nr. 2 und 6 der Tabelle gehörig zu betrachten sein u. s. w., wie ja durch Spezialisierung der Koeffizienten die Formen der Gleichungen dieser Tabellen noch in der mannigfachsten Weise abgeändert werden können. Haben beide Gleichungen in den Unbekannten einen gemeinschaftlichen Faktor, so ist dieser zunächst zu eliminieren, da die Zahl der gemeinschaftlichen Wurzeln dadurch erniedrigt wird, wie S. 61flg. bereits dargethan ist.

Neuntes Kapitel.

Kubische und biquadratische Gleichungen.

Die Anwendung der Determinanten bei der Lösung kubischer und biquadratischer Gleichungen knüpft sich an die Zerlegung der entsprechenden algebraischen Formen in lineare Faktoren.

I. Kubische Gleichungen.

a) Die reduzierte Form. Ist gegeben

$$x^3 - 3px - 2q = 0$$

und setzt man $m(x-\alpha)^3 + n(x-\beta)^3 = x^3 - 3px - 2q$, so erhält man durch Vergleichung der Koeffizienten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} m + n \quad - 1 &= 0, \\ m\alpha + n\beta + 0 &= 0, \\ m\alpha^2 + n\beta^2 + p &= 0, \\ m\alpha^3 + n\beta^3 - 2q &= 0. \end{aligned}$$

Eliminiert man aus den drei ersten dieser Gleichungen m und n, so erhält man:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \alpha & \beta & 0 \\ \alpha^2 & \beta^2 & p \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn man die zweite Kolonne von der ersten subtrahiert und die Determinante durch $\alpha - \beta$ dividiert, so wird:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & \beta & 0 \\ \alpha + \beta & \beta^2 & p \end{vmatrix} = 0,$$

d. i.

$$\alpha\beta = p.$$

Eliminiert man aus den drei letzten der obigen Gleichungen die Grössen $m\alpha$ und $n\beta$, so erhält man:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & p \\ \alpha^2 & \beta^2 & -2q \end{vmatrix} = 0,$$

und nachdem man gerade so verfahren wie vorhin, ergiebt sich

$$\alpha + \beta = -\frac{2q}{p}.$$

Die Grössen α und β sind demnach (S. 21) Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$px^2 + 2qx + p^2 = 0,$$

d. i.

$$x_{\prime} = \frac{-q + \sqrt{q^2 - p^3}}{p}; \quad x_{\prime\prime} = \frac{-q - \sqrt{q^2 - p^3}}{p}.$$

Diese quadratische Gleichung heisst **Resolvente** der kubischen Gleichung, weil durch ihre Wurzeln sich die Wurzeln der kubischen Gleichung in einfacher Weise ausdrücken lassen. Man erhält nämlich aus den beiden ersten Gleichungen des obigen Systems:

$$m = \frac{\beta}{\alpha - \beta} \quad \text{und} \quad n = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}.$$

Somit zerfällt die Gleichung

$$m(x - \alpha)^3 + n(x - \beta)^3 = 0$$

in drei lineare von der Form

$$(x-\alpha)\sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha-\beta}}+\varepsilon(x-\beta)\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}=0,$$

worin ε eine dritte Wurzel der Einheit bedeutet. Setzt man darin für α und β die Wurzeln der quadratischen Resolvente ein, so erhält man als Wurzeln der kubischen Gleichung

$$x=-\sqrt[3]{p}\,(\varepsilon\sqrt[3]{\alpha}+\varepsilon^2\sqrt[3]{\beta})$$

wobei

$$\alpha=\frac{-q+\sqrt{q^2+p^3}}{p} \quad \text{und} \quad \beta=\frac{-q-\sqrt{q^2-p^3}}{p}$$

ist.

Folgerungen. 1. Schreibt man die kubische Gleichung in Form einer quadratischen, nämlich

$$x\,.\,x^2-2px-(px+2q)=0,$$

so lautet die Diskriminante dieser quadratischen Gleichung

$$\Delta\equiv\begin{vmatrix} x & -p \\ -p & -(px+2q)\end{vmatrix}=0$$

oder ausgewertet

$$px^2+2qx+p^2=0;$$

und das ist die quadratische Resolvente der kubischen Gleichung.

2. Die Diskriminante der quadratischen Resolvente ist

$$R\equiv q^2-p^3.$$

Ist $R=0$, so hat die Resolvente zwei gleiche Wurzeln und ihre linke Seite ist ein vollständiges Quadrat

$$\Delta\equiv\left(x+\frac{q}{p}\right)^2.$$

Die kubische Gleichung geht dann über in

$$\left(x+\frac{q}{p}\right)^2\left(x-\frac{2q}{p}\right)=0,$$

d. h. die kubische Gleichung hat ebenfalls zwei gleiche Wurzeln, da Δ ein Faktor ihrer linken Seite ist.

3. Die Diskriminante der quadratischen Resolvente ist zugleich Diskriminante der kubischen Gleichung.

4. Ist die Diskriminante $R>0$, so sind die Wurzeln der Resolvente beide reell, daher eine der Wurzeln der kubischen

Gleichung auch reell. Die beiden andern komplex und konjugiert.

5. Ist $R < 0$, so sind die Wurzeln der Resolvente komplex und konjugiert. In diesem Falle erscheinen auch die Wurzeln der kubischen Gleichung in imaginärer Form, sind aber in Wirklichkeit reell. Durch Einführung der Winkelfunktionen lässt sich mit Hilfe des Moivreschen Theorems das Imaginäre aus den Wurzeln in bekannter Weise fortschaffen

b) Die allgemeine kubische Gleichung. Soll die linke Seite der Gleichung

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$$

in die Summe zweier Kuben

$$m(x-\alpha)^3 + n(x-\beta)^3$$

übergehen, so erhält man durch Vergleichung der Koeffizienten folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} m + n \quad - a &= 0, \\ \alpha m + \beta n \ + b &= 0, \\ \alpha^3 m + \beta^3 n - c &= 0, \\ \alpha^3 m + \beta^3 n + d &= 0. \end{aligned}$$

Eliminiert man aus den drei ersten dieser Gleichungen m und n, so erhält man

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ \alpha & \beta & b \\ \alpha^2 & \beta^2 & d \end{vmatrix} = 0,$$

und indem man diese Determinante gerade so behandelt wie S. 70, entsteht die Gleichung

1) $$a\alpha\beta + b(\alpha+\beta) + c = 0.$$

Eliminiert man aus den drei letzten Gleichungen die Grössen $m\alpha$, $m\beta$, so erhält man

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ \alpha & \beta & -c \\ \alpha^2 & \beta^2 & d \end{vmatrix} = 0$$

und hieraus entsteht die Gleichung

2) $$b\alpha\beta + c(\alpha+\beta) + d = 0.$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) erhält man leicht

$$3)\quad \begin{cases} \alpha + \beta = -\dfrac{ad - bc}{ac - b^2}, \\[2ex] \alpha\beta = \dfrac{bd - c^2}{ac - b^2}; \end{cases}$$

α und β sind also Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$4)\qquad R = (ac - b^2)\,x^2 + (bc - ad)\,x + bd - c^2 = 0.$$

Dieses ist die Resolvente der allgemeinen kubischen Gleichung.

Aus den gefundenen Werten von α und β, die sich entweder aus den Gleichungen 3) oder der quadratischen Resolvente 4) ergeben, erhält man

$$m = \frac{a\beta + b}{\beta - \alpha}, \quad n = -\frac{a\alpha + b}{\beta - \alpha},$$

und ausserdem noch vier andere gleichwertige aus den obigen vier Gleichungen für m und n.

Die Gleichung

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$$

geht demnach über in

$$\frac{a\beta + b}{\beta - \alpha}(x - \alpha)^3 + \frac{a\alpha + b}{\beta - \alpha}(x - \beta)^3 = 0,$$

und die linke Seite derselben kann in drei Faktoren von der Form

$$(x - \alpha)\sqrt[3]{\frac{\alpha\beta + b}{\beta - \alpha}} + \varepsilon\,(x - \beta)\sqrt[3]{\frac{a\alpha + b}{\beta - \alpha}}$$

zerlegt werden. Demnach ist

$$x = \frac{\alpha\sqrt[3]{a\beta + b} - \varepsilon\beta\,\sqrt[3]{a\alpha + b}}{\sqrt[3]{a\beta + b} - \varepsilon\ \sqrt[3]{a\alpha + b}}$$

die Form der drei Wurzeln, welche durch Rationalmachen des Nenners übergeht in

$$x = -\frac{1}{\alpha}\left[b + \sqrt[3]{b^2 - ac}\,(\varepsilon\sqrt[3]{a\alpha + b} + \varepsilon^2\sqrt[3]{a\beta + b})\right].$$

In Bezug auf die Resolvente und die Wurzeln der allgemeinen kubischen Gleichungen gelten dieselben Schlüsse wie unter *a*).

Übungen.

Löse mittelst der quadratischen Resolvente

1) $$x^3 - 12x - 16 = 0.$$

Anleitung. Die Resolvente lautet

$$4x^2 + 16x + 16 = 0,$$
$$x^2 + 4x + 4 = 0,$$
$$\alpha = \beta = -2.$$

Daher $x_{\prime} = x_{\prime\prime} = -2;\quad x_{\prime\prime\prime} = 4.$

2) $$x^3 - 27x + 54 = 0.$$

[3; 3; − 6]

3) $$4x^3 - 3x - 1 = 0.$$

[$-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$, 1]

4) Welches sind die Wurzeln der Gleichungen

$$x^3 - 3b^2x - 2b^3 = 0.$$

[$-b$; $-b$; $2b$]

$$a^3x^3 - 3ab^2x - 2b^3 = 0?$$

$\left[-\frac{b}{a}; -\frac{b}{a}; \frac{2b}{a}\right]$

5) $$x^3 - 8x^2 + 21x - 18 = 0.$$

[3; 3; 2]

6) $$x^3 - 3x^2 + 4 = 0.$$

[2; 2; − 1]

7) $$9x^3 - 39x^2 + 40x - 12 = 0.$$

[$\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$; 3]

8) $$x^3 + 24x - 56 = 0.$$

[2; $-1 \pm 3i\sqrt{3}$]

II. Biquadratische Gleichungen.

Die Lösung der biquadratischen Gleichung

$$ax^4 + bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$$

durch Reduktion kann auf dreierlei Weise geschehen. 1. Man gebe der linken Seite der Gleichung die Form der Differenz zweier Quadrate von quadratischen Formen in x.

2. Man zerlege die linke Seite in das Produkt zweier quadratischer Formen von x.

3. Man entferne das kubische und das lineare Glied.

Alle drei Lösungsarten führen auf dieselbe kubische Resolvente und zwar die beiden letzten auf eine Determinante 3. Grades.

1. Bezeichnet man die linke Seite der Gleichung kurz mit F und setzt

$$ax^2 + 2bx + c + 2\lambda = M,$$

so wird

$$M^2 - aF = 4\,(b^2 - ac + a\lambda)\,x^2 + 4\,(bc - ad + 2b\lambda)\,x + (c + 2\lambda)^2 - ae$$
$$= T^2 x^2 + 2Rx + S^2,$$

wobei

$$T^2 = 4\,(b^2 - ac + a\lambda);$$
$$R = 2\,(bc - ad + 2b\lambda);$$
$$S^2 = (c + 2\lambda)^2 - ae$$

gesetzt wird. Nun ist $T^2 x + 2Rx + S^2$ ein vollständiges Quadrat, wenn (S. 24)

$$\text{I)} \qquad S^2 T^2 - R^2 = 0$$

ist. Man hat dann

$$M^2 - aF = (Tx + S)^2$$

oder

$$aF = M^2 - (Tx + S)^2.$$

Für $F = 0$ haben wir also

$$\text{II)} \qquad M^2 - (Tx + S)^2 = 0$$

oder die beiden einfachen quadratischen Gleichungen

$$\text{III)} \qquad \begin{cases} M + Tx + S = 0, \\ M - (Tx + S) = 0, \end{cases}$$

in welchem M, T und S noch von λ abhängig sind. Aus der Gleichung $T^2 S^2 - R^2 = 0$ erhält man für λ die Gleichung

$$4\lambda^3 - (ae - 4bd + 3c^2)\,\lambda + ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3 = 0.$$

Es ist die kubische Resolvente der biquadratischen Gleichung und wird gewöhnlich mit $\Delta = 0$ bezeichnet.

2. Setzt man

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = (\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)(\alpha_{,} x^2 + 2\beta_{,} x + \gamma_{,}),$$

so erhält man durch Vergleichung der Koeffizienten:

$$\begin{aligned} \alpha\alpha_{,} + \alpha\alpha_{,} &= 2a, \\ \alpha\beta_{,} + \beta\alpha_{,} &= 2b, \\ \alpha\gamma_{,} + \gamma\alpha_{,} + 4\beta\beta_{,} &= 6c, \\ \beta\gamma_{,} + \gamma\beta_{,} &= 2d, \\ \gamma\gamma_{,} + \gamma\gamma_{,} &= 2e. \end{aligned}$$

Zerlegt man die 3. dieser Gleichungen in $\alpha\gamma_{,} + \gamma\alpha_{,} = 2c - 2\lambda$ und $4\beta\beta_{,} = 4c + 2\lambda$, so hat man die 6 Gleichungen:

$$\begin{aligned} &1) & \alpha\alpha_{,} + \alpha\alpha_{,} &= 2a, \\ &2) & \alpha\beta_{,} + \beta\alpha_{,} &= 2b, \\ &3) & \alpha\gamma_{,} + \gamma\alpha_{,} &= 2c - 2\lambda, \\ &4) & 2\beta\beta_{,} + 2\beta\beta_{,} &= 4c + 2\lambda, \\ &5) & \beta\gamma_{,} + \gamma\beta_{,} &= 2d, \\ &6) & \gamma\gamma_{,} + \gamma\gamma_{,} &= 2e. \end{aligned}$$

Eliminiert man aus 1), 2) und 3) die Grössen α und $\alpha_{,}$; aus 2), 4) und 5) die Grössen β und $\beta_{,}$; aus 3), 5) und 6) γ und $\gamma_{,}$, so erhält man

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha_{,} & 2a \\ \beta & \beta' & 2b \\ \gamma & \gamma_{,} & 2c - 2\lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} \alpha & \alpha_{,} & 2b \\ \beta & \beta_{,} & 4c + 2\lambda \\ \gamma & \gamma_{,} & 2d \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} \alpha & \alpha_{,} & 2c - 2\lambda \\ \beta & \beta_{,} & 2d \\ \gamma & \gamma_{,} & 2e \end{vmatrix} = 0.$$

Diese 3 Determinanten nach der letzten Kolonne entwickelt geben die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a(\beta\gamma_{,} - \gamma\beta_{,}) - b(\alpha\gamma_{,} - \gamma\alpha_{,}) + (c - \lambda)(\alpha\beta_{,} - \beta\alpha_{,}) &= 0, \\ b(\beta\gamma_{,} - \gamma\beta_{,}) - (2c + \lambda)(\alpha\gamma_{,} - \gamma\alpha_{,}) + 2d(\alpha\beta_{,} - \beta\alpha_{,}) &= 0, \\ (c - \lambda)(\beta\gamma_{,} - \gamma\beta_{,}) - d(\alpha\gamma_{,} - \gamma\alpha_{,}) + e(\alpha\beta_{,} - \beta\alpha_{,}) &= 0. \end{aligned}$$

Eliminiert man hieraus die Unterdeterminanten, so erhält man

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a & b & c - \lambda \\ b & 2c + \lambda & d \\ c - \lambda & d & e \end{vmatrix} = 0,$$

und dieses ist wiederum dieselbe kubische Resolvente, wie unter 1).

3. Setzt man

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = m(x-\alpha)^4 + 6n(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 + p(x-\beta)^4,$$

so erhält man durch Vergleichung der Koeffizienten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} m + p + 6n - a &= 0, \\ \alpha m + \beta p + 3n(\alpha+\beta) + b &= 0, \\ \alpha^2 m + \beta^2 p + (\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta)^2 n - c &= 0, \\ \alpha^3 m + \beta^3 p + (\alpha^2\beta + \alpha\beta^2) n + d &= 0, \\ \alpha^4 m + \beta^4 p + 6\alpha^2\beta^2 n - e &= 0. \end{aligned}$$

Eliminiert man aus den drei ersten Gleichungen die Unbekannten $m + 3n$ und $p + 3n$ und setzt zur Abkürzung $(\alpha - \beta)^2 n = \lambda$, so erhält man

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ \alpha & \beta & b \\ \alpha^2 & \beta^2 & -(c + 2\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Subtrahiert man die zweite Kolonne von der ersten und dividiert die Determinante durch $\alpha - \beta$, so erhält man durch Auswertung die Gleichung

$$1) \qquad a\alpha\beta + b(\alpha+\beta) + c + 2\lambda = 0.$$

In derselben Weise kann man aus den drei mittleren Gleichungen die Grössen $\alpha m + 3\beta n$ und $\beta p + 3\alpha n$, und aus den drei letzten die Grössen $\alpha^2 m + 3\beta^2 n$ und $\beta^2 p + 3\alpha^2 n$ eliminieren. Indem man die entstehenden Determinanten wie die obige behandelt, erhält man die Gleichungen

$$2) \qquad b\alpha\beta + (c - \lambda)(\alpha+\beta) + d = 0;$$

$$3) \qquad (c + 2\lambda)\alpha\beta + d(\alpha+\beta) + e = 0.$$

Durch Elimination der Grössen $\alpha\beta$ und $\alpha + \beta$ aus den Gleichungen 1), 2) und 3) erhält man gleichfalls die kubische Resolvente*

* Diese Determinante ist unter dem Namen der Cayley-Aronholdschen bekannt. Früher als diese beiden Gelehrten gab sie mein Freund Heilermann in seiner Programmarbeit: „Zerlegung der homogenen quadratischen, kubischen und biquadratischen Funktionen zweier Veränderlichen in Faktoren.“ Trier 1855. Auch die Determinanten (S. 72) rühren von ihm her. Die Darstellung sub 1) und 2) gab Verfasser. Vergl. auch Heilermann und Diekmann: Lehr- und Übungsbuch der Algebra. III. Teil. 2. Aufl. S. 34flg.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c+2\lambda \\ b & c-\lambda & d \\ c+2\lambda & d & e \end{vmatrix} = 0;$$

die kubische Resolvente $\Delta = 0$ hat die Form der Cardanischen Lösung. Setzt man zur Abkürzung

$$ae - 4bd + 3c^2 = i$$

und

$$ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3 = j,$$

so lautet die Resolvente

$$\Delta \equiv 4\lambda^3 - i\lambda + j = 0;$$

ihre Diskriminante ist

$$R \equiv j^2 - \frac{i^3}{27}$$

und die quadratische Resolvente lautet

$$\lambda^2 - \frac{3j}{i}\lambda + \frac{i}{12} = 0$$

und liefert die Wurzeln

$$\frac{3(j \pm \sqrt{R})}{2i}.$$

Die Wurzeln der kubischen Resolvente selbst sind

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\varepsilon\sqrt[3]{-j+\sqrt{R}} + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\sqrt[3]{-j-\sqrt{R}}.$$

Die Wurzeln der biquadratischen Gleichung erhält man nach dem in 1) angegebenen Verfahren, wo T und S nur von λ abhängig waren.

Folgerungen:

α) Ist $R = 0$, so hat die kubische Resolvente zwei gleiche Wurzeln und ebenso die biquadratische Gleichung

$$j^2 - \frac{i^3}{27} = 0$$

ist daher auch Diskriminante der biquadratischen Gleichung.

β) Ist $R > 0$, so ist $\lambda_{,}$ reell, $\lambda_{,,}$ und $\lambda_{,,,}$ komplex. Die biquadratische Gleichung hat zwei reelle und zwei komplexe Wurzeln.

γ) Ist $R < 0$, so sind sämtliche Wurzeln der kubischen Resolvente reell und die biquadratische Gleichung hat entweder vier reelle oder vier komplexe Wurzeln.

δ) Ist $i = 0$, so wird die Resolvente rein kubisch.

ε) Ist $j = 0$, so ist

$$\lambda_{I} = 0; \quad \lambda_{II} = -\lambda_{III} = \tfrac{1}{2}\sqrt{i}.$$

ζ) Ist $i = 0$ und $j = 0$, so ist $\lambda_{I} = \lambda_{II} = \lambda_{III} = 0$ und die biquadratische Gleichung hat drei gleiche Wurzeln.

Die Resolvente $\Delta = 0$ in der Form

$$T^2 \,.\, S^2 - R^2 = 0$$

lehrt noch diejenigen Fälle kennen, in denen die Lösung einer biquadratischen Gleichung ohne Lösung einer kubischen möglich ist.

I. Ist nämlich $T = 0$ und $R = 0$, so ist auch $\Delta = 0$; d. h. wenn

$$a\lambda + b^2 - ac = 0$$

$$2b\lambda + bc - ad = 0.$$

Als Bedingung für das Zusammenbestehen der beiden letzten Gleichungen erhält man durch Elimination von λ

$$\begin{vmatrix} a & b^2 - ac \\ 2b & bc - ad \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$2\left(\frac{b}{a}\right)^3 - 3\,\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a} + \frac{d}{a} = 0.$$

Bestimmt man in dieser Gleichung drei der Koeffizienten willkürlich, so kann man den vierten berechnen und so beliebig viele biquadratische Gleichungen herstellen, welche ohne kubische Resolvente lösbar sind. Aus $R = 0$ folgt

$$\lambda = \frac{ad - bc}{2b},$$

und setzt man diesen Wert für λ in die Gleichung II (S. 75), so geht die biquadratische Gleichung über in

$$\left(ax^2 + 2b + \frac{ad}{b}\right)^2 - \left(\left[\frac{ad}{b}\right]^2 - ac\right) = 0,$$

welche direkt in zwei quadratische Gleichungen zerfällt.

II. Δ wird ferner gleich 0, wenn

$$S = 0 \text{ und } R = 0,$$

d. i.

$$(c + 2\lambda)^2 - ae = 0,$$
$$b(c + 2\lambda) - ad = 0.$$

Die Bedingung, dass beide Gleichungen für λ eine gemeinschaftliche Wurzel haben, ist

$$\begin{vmatrix} 1 & ae \\ b^2 & a^2d^2 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{e}{a} - \frac{d^2}{a^2} = 0,$$

und auch diese Gleichung kann zur Herstellung von biquadratischen Gleichungen, welche ohne Resolvente lösbar sind, verwendet werden. Aus $S = 0$ folgt

$$2\lambda = -c \pm \sqrt{ae},$$

und durch diesen Wert nimmt die biquadratische Gleichung die Gestalt an

$$(ax^2 + 2bx + \sqrt{ae})^2 - x^2(4b^2 - 6ac + 2a\sqrt{ae}) = 0.$$

Hierzu gehören die reziproken Gleichungen vierten Grades und diejenigen bekannten Formen, welche sich auf reziproke Gleichungen zurückführen lassen.

Zweiter Abschnitt.

Geometrie.

Zehntes Kapitel.

Ebene Trigonometrie und Planimetrie.

Soweit die Planimetrie Bezug hat auf die Konstruktion von Figuren, speziell von Dreiecken, ist ihr wesentlicher Gang der, dass sie zunächst die Grundbedingungen aufstellt für die Möglichkeit der Konstruktion von Dreiecken aus gegebenen Stücken. Diesen reihen sich die Kongruenzsätze an, welche das Theorem beweisen, dass aus je drei unabhängigen Stücken der Seiten und Winkel die übrigen durch Konstruktion gefunden werden können. Als Bedingung für die Möglichkeit eines Dreiecks ABC, dessen Seiten a, b, c sein mögen, stellt sie zwischen den Winkeln die Relation auf

$$\sphericalangle (a, b) + \sphericalangle (b, c) = \sphericalangle (a, c),$$

(Satz vom Aussenwinkel) oder was dasselbe, die Winkelsumme muss $= 2R$ sein.

Für die Seiten gilt die Bedingung

$$\overline{AB} \pm \overline{BC} = k \, . \, \overline{AC},$$

wo $k \gtrless 1$ ist.

In Bezug auf die algebraische Behandlung der konstruktiven Planimetrie haben wir also dem obigen entsprechend folgende Fragen zu beantworten.

1. Können auf Grund allgemeiner Eigenschaften von Strecken und Winkeln algebraische Relationen zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks hergeleitet werden, welche obigen beiden Sätzen entsprechen?

2. Ist es möglich, aus jenen allgemeinen Relationen den algebraischen Ausdruck derjenigen Sätze der Planimetrie her-

zuleiten, welche für die Konstruktion von Dreiecken bedingend sind, und wie formulieren sich die planimetrischen Kongruenzsätze als Resultate algebraischer Elimination?

I. Allgemeine Relationen.

Da man in jedem Dreiecke eine Seite zusammensetzen kann aus den Projektionen der beiden andern, so erhält man in den Gleichungen:

$$\text{I)}\qquad \begin{aligned} b\cos\gamma + c\cos\beta &= a,\\ a\cos\gamma + c\cos\alpha &= b,\\ a\cos\beta + b\cos\alpha &= c \end{aligned}$$

einen allgemeinen Zusammenhang zwischen Seiten und Winkeln eines Dreiecks.

Ehe wir den Satz von der Winkelsumme in seiner allgemeinen Form geben, wollen wir das Abhängigkeitsverhältnis zwischen Seiten und Winkeln, welches durch obige Gleichungen ausgedrückt wird, etwas näher präzisieren, weil dadurch sich recht deutlich das Charakteristische des algebraischen Verfahrens gegenüber dem planimetrischen zeigt.

Aus obigen Gleichungen folgt:

$$1)\qquad \frac{a}{c} - \frac{b}{c}\cos\gamma = \cos\beta,$$

$$2)\qquad \frac{a}{c}\cos\gamma - \frac{b}{c} = -\cos\alpha,$$

$$3)\qquad \frac{a}{c}\cos\beta + \frac{b}{c}\cos\alpha = 1.$$

Aus je zwei der Gleichungen erhält man

$$4)\qquad \frac{a}{c} = \frac{\begin{vmatrix} \cos\beta & -\cos\gamma \\ -\cos\alpha & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\cos\gamma \\ \cos\gamma & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\cos\beta + \cos\alpha \,.\, \cos\gamma}{\sin^2\gamma},$$

oder aus den beiden letzten Gleichungen

$$5)\qquad \frac{a}{c} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos\beta + \cos\alpha \,.\, \cos\gamma} = \frac{\sin^2\alpha}{B},$$

ebenso

$$\frac{b}{c} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\gamma} = \frac{A}{\sin^2\gamma}$$

u. s. f. Dieser algebraische Ausdruck für ein Abhängigkeitsverhältnis, welches sonst unter dem Namen des Sinussatzes bekannt ist, hat auf den ersten Anblick etwas befremdendes, zumal in jedem der Verhältnisse alle drei Winkel vorkommen.

Aus 4) und 5) erhält man die Bedingung

$$B = \sin\alpha\sin\gamma,$$

so dass dann

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

und ebenso

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

wird. Um die Bedeutung dieser Gleichungen kennen zu lernen, erinnern wir daran, dass

$$6)\qquad \cos(\alpha+\gamma) = \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma;$$

dann ist identisch

$$\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma = \cos\beta + \cos(\alpha+\gamma) + \sin\alpha\sin\gamma,$$

und wir erhalten rechts nur dann $\sin\alpha\,.\,\sin\gamma$, wenn

$$\cos\beta + \cos(\alpha+\gamma) = 0$$

oder

$$\cos\beta = -\cos(\alpha+\gamma),$$

d. h. wenn

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

ist. Trigonometrisch ergiebt sich also:

Das Abhängigkeitsverhältnis zwischen Seiten und Winkeln eines Dreiecks kann durch den Sinussatz ausgedrückt werden, wenn die Summe der Winkel in einem Dreieck gleich 180^0 ist.

Für den Satz vom Aussenwinkel, der, wie schon vorhin gesagt, mit vorstehendem als identisch zu betrachten ist, stellt sich die Sache folgendermassen: bezeichnet man die gesuchte Grösse des Aussenwinkels von α mit x, die von β mit y und die von γ mit z, so erhält man analog den ersten Gleichungen folgende:

$$\text{II)}\qquad \begin{aligned} c\cos y - b\cos\gamma &= -a,\\ a\cos z - c\cos\alpha &= -b,\\ b\cos x - a\cos\beta &= -c. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung wird

$$\cos y = \frac{b}{c}\cos\gamma - \frac{a}{c},$$

oder mit Rücksicht auf den Sinussatz

$$\cos y = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot\cos\gamma - \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

Da aber $\sin\beta = \sin y$, so erhält man mittelst einer quadratischen Gleichung

$$\cos y = -\sin\alpha\sin\gamma \pm \cos\alpha\cos\gamma,$$

wo $+$ oder $-$ gesetzt werden muss, je nachdem einer der Winkel α oder γ stumpf ist. Nimmt man das positive Zeichen, so wird

7) $$\cos y = \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\,.\,\sin\gamma,$$

$$\cos y = \cos(\alpha+\gamma);$$

daher

$$y = \alpha + \gamma,$$

wobei wir in 7) noch einen Ausdruck der Gleichung 6) gewonnen haben.

Um schliesslich den Satz von der Winkelsumme und dem Aussenwinkel in seiner allgemeinsten Form zu bringen, d. h. unabhängig vom Verhältnis zweier Seiten, ordnen wir die Gleichungen I) nach a, b, c.

$$a - b\cos\gamma - c\cos\beta = 0,$$
$$a\cos\gamma - b + c\cos\alpha = 0,$$
$$a\cos\beta + b\cos\alpha - c = 0.$$

Für das Zusammenbestehen dieser Gleichungen gilt die Bedingung

III) $$R \equiv \begin{vmatrix} 1 & -\cos\gamma & -\cos\beta \\ \cos\gamma & -1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & -1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$1 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) = 0.$$

Letztere Gleichung lässt sich auf eine höchst charakteristische Form bringen, indem man durch eine leichte Umformung daraus erhält:

$$\cos\alpha\,[\cos\alpha + \cos(\beta+\gamma)] + \cos\beta\,[\cos\beta + \cos(\alpha+\gamma)] + \sin\gamma\,[\sin(\alpha+\beta) - \sin\gamma] = 0$$

oder abgekürzt geschrieben*

$$\cos\alpha\, X + \cos\beta\, Y + \sin\gamma\, Z = 0.$$

Die Gleichung ist für $X = 0$ oder $Y = 0$ oder $Z = 0$ erfüllt. Denn aus

$$X \equiv \cos\alpha + \cos(\beta+\gamma) = 0$$

folgt

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0,$$

womit auch das Verschwinden von Y und Z angezeigt ist. Ebenso ist die Gleichung erfüllt für

$$\cos\alpha = 0,\ \ \cos\beta = 0,\ \ \sin\gamma = 0,$$

was wiederum auf die Bedingung führt

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0,$$

d. h. jene Gleichung gilt auch, wenn ein Eckpunkt unendlich fern liegt. Wir bekommen somit in III) den trigonometrischen Ausdruck des Satzes, dass die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks gleich $2R$ sei.

Der trigonometrische Ausdruck des Satzes vom Aussenwinkel stellt sich folgendermassen dar. Durch Elimination der Grössen a, b, c aus den Gleichungen II) erhält man:

$$R_{\prime} = \begin{vmatrix} 1 & -\cos\gamma & \cos y \\ \cos z & 1 & -\cos\alpha \\ \cos\beta & \cos x & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$1 - \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos x\cos y\cos z + \cos\alpha\cos x + \cos\beta\cos y + \cos\gamma\cos z = 0.$$

Da nun

$$\cos x = -\cos\alpha;\ \ \cos y = -\cos\beta;\ \ \cos z = -\cos\gamma,$$

so erhält man nach einer kleinen Umformung:

---

* Durch eine leichte Umformung kann man der Gleichung noch die Gestalt geben

$$R \equiv -4\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} = 0,$$

welche man aus der Determinante erhält, wenn man darin (nach Einleit. 4, Zus. 1) zwei Elemente einer Reihe zu null macht. Der analogen Form des Satzes vom Aussenwinkel wegen, behalten wir hier die obige Gestalt bei.

$$\cos\alpha[\cos x - \cos(\beta+\gamma)] + \cos\beta[\cos y - \cos(\alpha+\gamma)] + \sin\gamma[\sin z - \sin(\alpha+\beta)] = 0$$

oder abgekürzt geschrieben

$$\cos\alpha X + \cos\beta\, Y + \cos\gamma Z = 0.$$

Schliessen wir den Fall, dass $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ gleichzeitig null sind, aus, so ist jene Gleichung erfüllt, wenn $X=0$, $Y=0$ und $Z=0$ ist, d. h.

$$x = \beta+\gamma;\quad y = \alpha+\gamma;\quad z = \alpha+\beta.$$

Wir machen hierbei noch auf die Allgemeinheit der trigonometrischen Form gegenüber der Planimetrie aufmerksam, indem sie den Satz für alle drei Aussenwinkel gleichzeitig darstellt.

Es erübrigt noch, aus den Gleichungen I) die Bedingung für die Seiten eines Dreiecks darzustellen, den die Planimetrie in der Form $b+c=ka$, wo $k>1$ ist, giebt.

Addiert man zwei der Gleichungen I), so erhält man leicht

$$b + c = a \cdot \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}, \quad \text{(Mollweide)}$$

$$= k \cdot a$$

wo $k = \dfrac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}$ stets >1 ist.

II. Die Hauptaufgaben der Planimetrie.

Nachdem im vorhergehenden der trigonometrische Ausdruck für die Bedingung gewonnen, welche zwischen Winkeln einerseits und den Seiten andererseits stattfinden muss, wenn überhaupt ein Dreieck möglich sein soll, gehen wir dazu über, die Kongruenzsätze in trigonometrisches Gewand zu kleiden. Hier befindet sich nun die Trigonometrie der Planimetrie gegenüber in einem offenbaren Vorteile, denn fassen wir den Kongruenzbegriff der Planimetrie in dem Sinne, dass er Übereinstimmung in sämtlichen Seiten und Winkeln verlangt, so wäre es notwendig, jedesmal zum Kongruenznachweise die Gleichheit von sechs Stücken zu konstatieren. Indem nun die Planimetrie die Bedingungen auf drei herabmindert, kommt sie zu Sätzen, welche sie zu beweisen hat, und ohne vorher anzugeben, welche drei aus obigen sechs Stücken jedesmal die übrigen mitbestimmen, kommt sie schrittweise zu vier Kongruenzsätzen, deren Beweise sie nicht hintereinander absolvieren kann, ohne Eigenschaften besonderer Dreiecke zu benutzen. In allen diesen ist die Trigonometrie günstiger gestellt. Ein Blick auf das System ihr zu Gebote stehender Gleichungen zeigt, dass es gelingen muss, wenn drei der sechs Grössen gegeben sind, die übrigen (mit Ausnahme eines sich gleich ergebenden Falles) zu berechnen. Von diesem Standpunkte aus gruppieren sich die Aufgaben um einen einheitlichen, sich durch alle gleichmässig hindurchziehenden Gedanken; es handelt sich in einem, wie in allen übrigen Fällen um ein einfaches Eliminationsproblem.

Schon die algebraische Konstitution der Gleichungen I) gestattet es, manches aus ihnen herauszulesen; indem wir die fehlende Grösse mit dem Koeffizienten null ergänzen, schreiben wir sie in folgender Form:

$$0 \cos\alpha + c\cos\beta + b\cos\gamma = a,$$

$$c\cos\alpha + 0\cos\beta + a\cos\gamma = b,$$

$$b\cos\alpha + a\cos\beta + 0\cos\gamma = c.$$

Die Gleichungen sind bilinear und simultan, insofern darin die Winkel und Seiten als Unbekannte angesehen werden können.

1. Betrachtet man die Seiten als gegeben, so lassen sich daraus die Winkel linear berechnen.

2. Sind die Winkel gegeben, so stellen sie ein vollständiges System von homogenen Gleichungen für die Seiten dar, und es lassen sich nur die Verhältnisse der Seiten berechnen; d. h. sind a, b, c Werte, welche jene Gleichungen erfüllen, so sind ϱa, ϱb, ϱc, wo ϱ ein beliebiger Faktor ist, ebenfalls solche. Es giebt also ∞ viele Dreiecke, welche gleiche

Winkel haben, und daher sind die drei Winkel keine eindeutigen Bestimmungsstücke eines Dreiecks.

3. Sind zwei Seiten und ein Winkel gegeben, so sind die Gleichungen für die drei übrigen Stücke quadratisch, wobei zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der Winkel von den Seiten eingeschlossen oder einer der Seiten gegenüber liegt.

4. Sind eine Seite und zwei Winkel gegeben, so hat man nur noch zwei Stücke zu berechnen, da der dritte Winkel, wie schon bewiesen, an die Relation

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

gebunden ist.

Um auch äusserlich in den Gleichungen Bekanntes von Unbekanntem zu trennen, so sollen, wenn die Seiten unbekannt sind, sie mit den Buchstaben u, v, w; wenn $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ unbekannt ist, so sollen sie mit x, y, z bezeichnet werden.

A. Gegeben zwei Seiten und ein Winkel.

1. Der Winkel sei von den Seiten eingeschlossen; gegeben b, c, α; gesucht u, y, z.

Schreiben wir die drei Gleichungen in den gewählten Symbolen, so lauten sie:

1) $$cy + bz = u,$$

2) $$c\cos\alpha + uz = b,$$

3) $$b\cos\alpha + uy = c.$$

Die Gleichungen sind für u, y, z quadratisch; eliminiert man u aus 2) und 3), so wird

$$(b - c\cos\alpha)y - z(c - b\cos\alpha) = 0,$$

dazu 1) geschrieben

$$cy + bz = u$$

giebt

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -(c - b\cos\alpha) \\ u & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b - c\cos\alpha & -(c - b\cos\alpha) \\ c & b \end{vmatrix}}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} b - c\cos\alpha & 0 \\ c & u \end{vmatrix}}{\Delta}$$

oder

$$y = \frac{u(c - b\cos\alpha)}{\Delta}; \quad z = \frac{u(b - c\cos\alpha)}{\Delta}.$$

Da nun aus 2) und 3) sich ergiebt:

$$y = \frac{c - b\cos\alpha}{u}; \quad z = \frac{b - c\cos\alpha}{u},$$

so folgt

$$\Delta = u^2.$$

Man erhält also, wenn wir für u wieder a schreiben:

$$a^2 = \Delta = \begin{vmatrix} b - c\cos\alpha & -(c - b\cos\alpha) \\ c & b \end{vmatrix},$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \text{ (Cosinus-Satz)}$$

4) $\left\{ \begin{array}{l} a = \pm\sqrt{b(b - c\cos\alpha) + c(c - b\cos\alpha)} = \pm\sqrt{\Delta}; \\ \text{ferner ergiebt sich für } y \text{ und } z \\ \cos\beta = \dfrac{c - b\cos\alpha}{\pm\sqrt{\Delta}}; \\ \cos\gamma = \dfrac{b - c\cos\alpha}{\pm\sqrt{\Delta}}, \end{array} \right.$

womit die Lösung der Aufgabe gegeben ist.

Hierbei sehen wir auch die Bedeutung und algebraische Gleichberechtigung des doppelten Vorzeichens von $a = \pm\sqrt{\Delta}$. Nimmt man das positive Vorzeichen, so kann $\cos\beta$ nur dann negativ werden (d. h. $\beta > R$), wenn $b\cos\alpha > c$ ist; $b\cos\alpha$ ist aber die Projektion von b auf c, und diese kann nur dann $> c$ sein, wenn eben β ein stumpfer Winkel ist. Es muss demnach in beiden Fällen, β mag $>$ oder $< R$ sein, die positive Wurzel genommen werden. Man findet also für positives a aus obigen drei Wurzeln die Innenwinkel und für ein negatives a die Aussenwinkel, übereinstimmend mit Gleichungen II).

Wir wollen noch zeigen, wie die Lösung

$$\cos\beta = \frac{c - b\cos a}{a}$$

auf den Sinussatz führt, wenn a berechnet ist; man quadriert und subtrahiert beiderseits von 1), so erhält man

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha.$$

Die Lösungen 4) bilden eine zusammengehörige Gruppe. In der Praxis wendet man gewöhnlich eine Lösung an, welche sich durch die Summe und Differenz der gegebenen Seiten und halber Summe und Differenz der Winkel darbietet. Man kommt dazu durch ein mehr künstliches Eliminationsverfahren. Man erhält nämlich durch Addition und Subtraktion der Gleichungen 2) und 3) leicht

$$5)\quad \begin{cases} uy = (b+c)\sin^2\dfrac{\alpha}{2} + (c-b)\cos^2\dfrac{\alpha}{2} \equiv P_{\prime}, \\[2ex] uz = (c+b)\sin^2\dfrac{\alpha}{2} - (c-b)\cos^2\dfrac{\alpha}{2} \equiv P_{\prime\prime}, \end{cases}$$

mithin

$$cy = c\,\frac{P_{\prime}}{u}; \quad bz = b\,\frac{P_{\prime\prime}}{u},$$

und daher mit Hilfe von Gleichung 1)

$$\begin{aligned} u^2 &= cP_{\prime} + bP_{\prime\prime} \\ &= (c+b)^2\cos^2\frac{\beta+\gamma}{2} + (c-b)^2\sin^2\frac{\beta+\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Ferner erhält man aus 5)

$$\frac{y}{z} = \frac{P_{\prime}}{P_{\prime\prime}} \quad \text{oder} \quad \frac{y+z}{y-z} = \frac{P_{\prime}+P_{\prime\prime}}{P_{\prime}-P_{\prime\prime}},$$

woraus nach einer kleinen Umformung, wenn man statt y und z $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ schreibt, sich ergiebt

$$\operatorname{tang}\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{tang}\frac{\beta+\gamma}{2},$$

eine Formel, welche unter dem Namen des Tangens-Satzes bekannt ist. Zu dieser Tangensformel steht also in ganz bestimmtem analytischem Konnex die Formel für a^2; als zweite Gruppe zusammengehöriger Lösungen bekommen wir daher

$$6)\quad \begin{cases} a^2 = (b+c)^2\cos^2\dfrac{\beta+\gamma}{2} + (b-c)^2\sin^2\dfrac{\beta+\gamma}{2}, \\[2ex] \operatorname{tang}\dfrac{\beta-\gamma}{2} = \dfrac{b-c}{b+c}\operatorname{tang}\dfrac{\beta+\gamma}{2}. \end{cases}$$

Allein sie entsprechen nicht direkt der gestellten Aufgabe. Sie würden z. B. auch die Aufgabe lösen: Ein Dreieck zu berechnen aus der Summe zweier Seiten, der dritten Seite und dem gegenüberliegenden Winkel.

2. Der Winkel liege einer der gegebenen Seiten gegenüber.

Gegeben b, c, γ; gesucht a, β, α; (u, y, x).

Unsere Gleichungen lauten:

$$cy + b\cos\gamma = u,$$
$$cx + u\cos\gamma = b,$$
$$bx + uy = c.$$

Man erhält für u leicht die quadratische Gleichung

$$u^2 - 2b\cos\gamma u - (c^2 - b^2) = 0.$$

Ihre Diskriminante ist

$$\Delta \equiv b^2\cos^2\gamma + (c^2 - b^2)$$
$$= c^2 - b^2\sin^2\gamma,$$

daher

$$u = b\cos\gamma \pm \sqrt{\Delta},$$

wobei das doppelte Vorzeichen in ähnlicher Weise, wie vorhin, zu diskutieren ist. Für y erhalten wir

$$y = \frac{\pm\sqrt{\Delta}}{c}$$

oder

$$\cos\beta = \frac{\pm\sqrt{\Delta}}{c}.$$

Ist nun β und γ bekannt, so erhält man dadurch auch a; unabhängig bekommt man aber aus obigen drei Gleichungen

$$x \equiv \cos\alpha = \frac{b}{c}\sin^2\gamma \pm \cos\gamma\,\frac{\sqrt{\Delta}}{c}.$$

Leicht ist aus der Formel für y der Sinussatz und die sogenannte separierte Tangentenformel herzuleiten.

B. Gegeben eine Seite und die Winkel.

Da hier alle drei Winkel bekannt sind, so genügen zwei der Gleichungen, um die Seiten zu berechnen. Sie lauten:

$$w\cos\beta + v\cos\gamma = a,$$
$$w\cos\alpha + a\cos\gamma = v,$$
$$v\cos\alpha + a\cos\beta = w.$$

Man erhält direkt

$$v = \frac{a\,(\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta)}{1 - \cos^2\alpha} = a\,\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

u. s. f., d. h. die Lösung wird durch den Sinussatz gegeben.

C. Gegeben die Seiten, gesucht die Winkel.

Man erhält aus den drei Gleichungen direkt:

$$\cos\alpha = \frac{\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & 0 & a \\ c & a & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}} = \frac{a\,(c^2 + b^2 - a^2)}{2abc}$$

und analoge Werte für $\cos\beta$ und $\cos\gamma$.

Schreibt man den Ausdruck für $\cos\alpha$, welcher in Zähler und Nenner homogen ist, in folgender Form:

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{c}\right),$$

so erhält man noch den Winkel durch die Höhen ausgedrückt:

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{h'''}{h''} + \frac{h''}{h'''} - \frac{h''}{h'}\cdot\frac{h'''}{h'}\right).$$

Obige Formeln für die Winkel eignen sich für eine logarithmische Rechnung nicht; man hat daher die Funktionen der halben Winkel aus den Seiten darzustellen gesucht. Wir wollen zeigen, dass diese Lösung einer bestimmten Gruppe von Aufgaben angehört, aus welcher sie isoliert herausgegriffen ist.

Zu dem Zwecke formen wir unsere drei Hauptgleichungen auf die sin, cos und tang der halben Winkel um und setzen daher zunächst $\cos\beta = 2\cos^2\dfrac{\beta}{2} - 1$ etc., wobei α', β', γ' statt der halben Winkel gesetzt werden soll. Wir erhalten demnach:

$$\text{III)}\qquad \begin{aligned} c\cos^2\beta' + b\cos^2\gamma' &= s, \\ c\cos^2\alpha' + a\cos^2\gamma' &= s, \\ b\cos^2\alpha' + a\cos^2\beta' &= s, \end{aligned}$$

wenn s der halbe Umfang des Dreiecks ist. Es enthalten diese Gleichungen ausser den Seiten und Winkeln auch den

Umfang des Dreiecks und stellen somit eine Gruppe von Aufgaben dar, bei denen der Umfang gegeben ist. Man sieht, dass darunter auch die enthalten ist: die halben Winkel zu berechnen, wenn die Seiten gegeben sind. Für diesen Fall erhält man aus obigen Gleichungen

$$\cos^2\alpha' = \frac{\begin{vmatrix} s & c & b \\ s & 0 & a \\ s & a & 0 \end{vmatrix}}{2abc} = \frac{s\,(s-a)}{bc};$$

daher

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s\,.\,(s-a)}{bc}}.$$

Unter anderm steckt in obigen Gleichungen auch noch die Lösung der häufiger vorkommenden Aufgabe: die drei Seiten zu berechnen, wenn die Winkel und der Umfang gegeben ist. Man erhält leicht, wenn man die Gleichungen nach den Seiten ordnet, die bekannte Formel

$$a = \frac{\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}{s\,.\,\sin\frac{\alpha}{2}}$$

u. s. f. Formt man ferner die drei Hauptgleichungen nach den Sinus der halben Winkel um, so erhält man:

$$\text{IV)}\qquad \begin{aligned} c\sin^2\beta' + b\sin^2\gamma' &= s - a \\ c\sin^2\alpha' + a\sin^2\gamma' &= s - b \\ b\sin^2\alpha' + a\sin^2\beta' &= s - c; \end{aligned}$$

Gleichungen, in denen auch die Aufgabe enthalten ist, aus den Seiten die Sinus der halben Winkel zu berechnen.

Man erhält

$$\sin^2\alpha' = \frac{\begin{vmatrix} s-a & c & b \\ s-b & 0 & a \\ s-c & a & 0 \end{vmatrix}}{2abc};$$

und daraus schliesslich

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{bc}}.$$

Um ein ähnliches System für die Tangenten der halben Winkel zu bekommen, dividiert man je eine Gleichung aus IV) durch eine aus III) und erhält:

$$\text{V)}\qquad \begin{aligned} a &= s\,(1 - \operatorname{tang}\beta' \operatorname{tang}\gamma'),\\ b &= s\,(1 - \operatorname{tang}\alpha' \operatorname{tang}\gamma'),\\ c &= s\,(1 - \operatorname{tang}\alpha' \operatorname{tang}\beta'). \end{aligned}$$

Die Gleichungen zeigen zunächst die Lösung der Aufgabe: die Seiten aus dem Umfange und den Winkeln zu berechnen. Um die Aufgabe, aus den Seiten die Winkel zu berechnen, zu lösen, isoliert man die Funktionen auf jeder Seite und man erhält leicht

$$\operatorname{tang}\alpha' = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{s\,(s-a)}}$$

u. s. f. Addiert man die Gleichungen V), so gelangt man noch zu der bekannten Bedingung

$$1 = \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tang}\frac{\beta}{2}\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}.$$

III. Aufgaben, wobei hervorragende Linien des Dreiecks gegeben sind.

Im vorstehenden sind die Hauptaufgaben, soweit sie Seiten und Winkel betreffen, erledigt, es würden sich daran Aufgaben knüpfen, wobei hervorragende Linien des Dreiecks, Höhen, Transversalen, Radien u. a. vorkommen, die dann gleichfalls als Eliminationsaufgaben betrachtet werden. Als hübsche Anwendung der Determinanten in der metrischen Geometrie wollen wir aus der Frage nach dem Inhalt des Dreiecks zunächst einige Gleichungen ableiten, welche für den Zusammenhang einiger hervorragender Linien von Wichtigkeit sind.

Bezeichnet man die Lote von irgend einem Punkte im Dreieck auf die Seiten a, b, c mit x_1, x_2, x_3, so ist, wenn Δ der Inhalt:

$$\text{7)}\qquad ax_1 + bx_2 + cx_3 = 2\Delta.$$

Lässt man den Punkt in eine der Ecken fallen, so werden von den Loten je zwei $= 0$, und aus dem dritten wird die Höhe.

Setzt man z. B. $x_1 = h_1$, so ist $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ und es bleibt $ah_1 + b0 + c.0 = 2\Delta$. Fällt man von einem Punkte ausserhalb des Dreiecks jene Lote, so wird in obiger Gleichung je ein Glied negativ. Wir erhalten sonach folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + cx_3 &= 2\Delta, \\ ah_1 + b.0 + c.0 &= 2\Delta, \\ a.0 + bh_{II} + c.0 &= 2\Delta, \\ a.0 + b.0 + ch''' &= 2\Delta. \end{aligned}$$

Eliminiert man hieraus a, b, c und 2Δ, so erhält man

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ h_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & h_{II} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & h_{III} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

8) $$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_{II}} + \frac{x_3}{h_{III}} = 1$$

eine Gleichung, worauf wir noch einmal zurückkommen werden.

Lässt man den Punkt x in die Mittelpunkte der Berührungskreise fallen, so erhält man aus 7) folgendes System von Gleichungen:

VI) $$\begin{aligned} a\varrho \;+ b\varrho \;+ c\varrho \;- 2\Delta &= 0, \\ -a\varrho_I + b\varrho_I + c\varrho_I - 2\Delta &= 0, \\ a\varrho_{II} - b\varrho_{II} + c\varrho_{II} - 2\Delta &= 0, \\ a\varrho_{III} + b\varrho_{III} - c\varrho_{III} - 2\Delta &= 0, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\begin{vmatrix} \varrho & \varrho & \varrho & 1 \\ -\varrho_I & \varrho_I & \varrho_I & 1 \\ \varrho_{II} & -\varrho_{II} & \varrho_{II} & 1 \\ \varrho_{III} & \varrho_{III} & -\varrho_{III} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{\varrho} \\ -1 & 1 & 1 & \frac{1}{\varrho_I} \\ 1 & -1 & 1 & \frac{1}{\varrho_{II}} \\ 1 & 1 & -1 & \frac{1}{\varrho_{III}} \end{vmatrix} = 0,$$

d. i. die bekannte Bedingung:

$$\frac{1}{\varrho_I} + \frac{1}{\varrho_{II}} + \frac{1}{\varrho_{III}} = \frac{1}{\varrho}.$$

Setzt man nun in 8) $x_1 = x_2 = x_3 = \varrho$, so wird

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_{II}} + \frac{1}{h_{III}} = \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_I} + \frac{1}{\varrho_{II}} + \frac{1}{\varrho_{III}}.$$

Um die Höhen einzeln durch die Radien darzustellen, berechnet man aus den drei letzten Gleichungen von VI) die Seiten a, b, c. Man erhält leicht

$$a = \frac{2\Delta \begin{vmatrix} 1 & \varrho_I & \varrho_I \\ 1 & -\varrho_{II} & \varrho_{II} \\ 1 & \varrho_{III} & -\varrho_{III} \end{vmatrix}}{\varrho_I \varrho_{II} \varrho_{III} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta(\varrho_I \varrho_{II} + \varrho_I \varrho_{III})}{\varrho_I \varrho_{II} \varrho_{III}} = \frac{\Delta(\varrho_{II} + \varrho_{III})}{\varrho_{II} \varrho_{III}};$$

ebenso

$$b = \frac{\Delta(\varrho_I + \varrho_{III})}{\varrho_I \varrho_{III}}; \quad c = \frac{\Delta(\varrho_I + \varrho_{II})}{\varrho_I \varrho_{II}}.$$

Setzt man diese Werte in 7), so wird

$$x_1(\varrho_I \varrho_{II} + \varrho_I \varrho_{III}) + x_2(\varrho_I \varrho_{II} + \varrho_{II} \varrho_{III}) + x_3(\varrho_I \varrho_{III} + \varrho_{II} \varrho_{III}) = 2 \varrho_I \varrho_{II} \varrho_{III}.$$

Setzt man darin $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ d. i. $x_1 = h_1$, so erhält man direkt

$$h_I = \frac{\varrho_{II} \varrho_{III}}{\frac{1}{2}(\varrho_{II} + \varrho_{III})};$$

ebenso für $x_1 = 0$, $x_3 = 0$

$$h_{II} = \frac{\varrho_I \varrho_{III}}{\frac{1}{2}(\varrho_I + \varrho_{III})};$$

und für $x_1 = 0$, $x_2 = 0$

$$h_{III} = \frac{\varrho_I \varrho_{II}}{\frac{1}{2}(\varrho_I + \varrho_{II})},$$

d. h. die Höhen sind harmonische Mittel der Radien und somit ist die Aufgabe des Dreiecks für die Höhen gelöst, wenn sie für Berührungsradien gelöst ist und umgekehrt.

Wir wollen jetzt das Problem allgemeiner fassen und Gleichungen aufstellen, welche für Höhen und Transversalen gleichmässig gelten. Zu dem Zwecke führen wir als Variabele das Verhältnis ein, in welchem je eine beliebige Ecktransversale die gegenüberliegende Seite schneidet. Die Transversalen von den Ecken A, B, C seien $\xi_{\prime}$, $\xi_{\prime\prime}$, $\xi_{\prime\prime\prime}$; das Teilverhältnis auf der Seite a sei $n : m$; das der beiden andern $n_{\prime} : m_{\prime}$ und $n_{\prime\prime} : m_{\prime\prime}$. Man erhält dann mit Hilfe des Pythagoreischen Lehrsatzes folgendes System von Gleichungen:

$$\text{VII)} \begin{cases} n^2(b^2 - \xi_{\prime}^2) + m^2(c^2 - \xi_{\prime}^2) + mn\,[(b^2 - \xi_{\prime}^2) + (c^2 - \xi_{\prime}^2) - a^2] = 0, \\ n_{\prime}^2(c^2 - \xi_{\prime\prime}^2) + m_{\prime}^2(a^2 - \xi_{\prime\prime}^2) + m_{\prime}n_{\prime}\,[(c^2 - \xi_{\prime\prime}^2) + (a^2 - \xi_{\prime\prime}^2) - b^2] = 0, \\ n_{\prime\prime}^2(a^2 - \xi_{\prime\prime\prime}^2) + m_{\prime\prime}^2(b^2 - \xi_{\prime\prime\prime}^2) + m_{\prime\prime}n_{\prime\prime}[(a^2 - \xi_{\prime\prime\prime}^2) + (b^2 - \xi_{\prime\prime\prime}^2) - c^2] = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen sind homogen für die n und m; wie sie für jede Transversale gelten, müssen sich auch die Höhen aus ihnen berechnen lassen. Setzt man $\xi_{\prime} = h_{\prime}$, $\xi_{\prime\prime} = h_{\prime\prime}$ und $\xi_{\prime\prime\prime} = h_{\prime\prime\prime}$, so ist für $h_{\prime}$ das Teilverhältnis

$$\frac{n^2}{m^2} = \frac{c^2 - h_{\prime}^2}{b^2 - h_{\prime}^2} \quad \text{oder} \quad \frac{n}{m} = \sqrt{\frac{c^2 - h_{\prime}^2}{b^2 - h_{\prime}^2}}$$

und ähnlich für

$$\frac{n_{\prime}}{m_{\prime}} \quad \text{und} \quad \frac{n_{\prime\prime}}{m_{\prime\prime}}.$$

Setzt man diese Werte in VII) ein, so erhält man nach einer kleinen Umformung folgendes System von Gleichungen:

$$\text{VIII)} \begin{cases} 4a^2h_{\prime}^2 = 2a^2(b^2 + c^2) - a^4 - (b^2 - c^2)^2, \\ 4b^2h_{\prime\prime}^2 = 2b^2(a^2 + c^2) - b^4 - (a^2 - c^2)^2, \\ 4c^2h_{\prime\prime\prime}^2 = 2c^2(a^2 + b^2) - c^4 - (a^2 - b^2)^2. \end{cases}$$

Sind nun die Seiten gegeben und will man die Höhen berechnen, so erhält man direkt

$$4a^2h_{\prime}^2 = a^2[(b + c)^2 - a^2] + a^2(b - c)^2 - (b^2 - c^2)^2$$

oder

$$h_{\prime}^2 = \frac{4}{a^2}[s \,.\, (s - a)\,(s - b)\,(s - c)] = 4\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2$$

und ähnlich für $h_{\prime\prime}$ und $h_{\prime\prime\prime}$.

Die Gleichungen VIII) gestatten aber auch, sofort die Seiten aus den Höhen zu berechnen. Dividiert man nämlich die erste Gleichung durch a^4 und erinnert sich, dass die Seiten sich umgekehrt verhalten wie die Höhen, so wird

$$\frac{4h_{\prime}^2}{a^2} = 2\left(\frac{h_{\prime}^2}{h_{\prime\prime}^2} + \frac{h_{\prime}^2}{h_{\prime\prime\prime}^2}\right) - \left(\frac{h_{\prime}^2}{h_{\prime\prime}^2} + \frac{h_{\prime}^2}{h_{\prime\prime\prime}^2}\right)^2 - 1,$$

woraus man nach einer bekannten Umformung erhält:

$$\frac{1}{a^2} = \frac{[(h_{I}h_{II}+h_{I}h_{III})^2 - h_{II}^2h_{III}^2][(h_{I}h_{III}+h_{II}h_{III})^2 - h_{I}^2h_{II}^2]}{4h_{I}^2h_{II}^4h_{III}^4};$$

setzt man $h_{I}^4h_{II}^4h_{III}^4$ dividiert durch obigen Zähler $= \Pi^2$, so erhält man

$$a^2 = \frac{4}{h_{I}^2}\Pi^2;$$

und ebenso

$$b^2 = \frac{4}{h_{II}^2}\Pi^2; \quad c^2 = \frac{4}{h_{III}^2}\Pi^2,$$

woraus noch folgt, dass der Inhalt

$$\Delta = \Pi.$$

Um aus System VII) die winkelhalbierenden Transversalen zu berechnen, setzt man

$$\frac{n}{m} = \frac{c}{b}; \quad \frac{n_{I}}{m_{I}} = \frac{a}{c}; \quad \frac{n_{II}}{m_{II}} = \frac{b}{a}$$

und erhält

$$m_{I}^2 = cb - \frac{a^2cb}{(b+c)^2}; \quad m_{II}^2 = ac - \frac{b^2ac}{(a+c^2)}; \quad m_{III}^2 = ab - \frac{c^2ab}{(a+b)^2},$$

wobei m_{I}, m_{II}, m_{III} die winkelhalbierenden Transversalen bezeichnen.

Es erübrigt noch die Seiten durch die Schwerpunktstransversalen auszudrücken. Ein Vorzug der Gleichungen VII) besteht noch darin, dass bei gegebenen Teilverhältnissen die Quadrate der Seiten sich linear aus ihnen berechnen lassen. Ordnet man sie nach den Seiten, so erhält man:

$$\begin{aligned}
-a^2mn + b^2(n^2+mn) + c^2(m^2+nm) &= \xi_{I}^2\,(n+m)^2,\\
a^2(m_{I}^2+m_{I}n_{I}) - b^2m_{I}n_{I} + c^2(n_{I}^2+m_{I}n_{I}) &= \xi_{II}^2\,(n_{I}+m_{I})^2,\\
a^2(n_{II}^2+m_{II}n_{II}) + b^2(m_{II}^2+n_{II}m_{II}) - c^2(m_{II}n_{II}) &= \xi_{III}^2(n_{II}+m_{II})^2.
\end{aligned}$$

Man erhält daraus für die Seite a

$$a^2 = \frac{\begin{vmatrix} \xi_{I}^2\,(n+m)^2 & n^2+mn & m^2+nm \\ \xi_{II}^2\,(n_{I}+m_{I})^2 & -m_{I}n_{I} & n_{I}^2+n_{I}m_{I} \\ \xi_{III}^2(n_{II}+m_{II})^2 & m_{II}^2+m_{II}n_{II} & -m_{II}n_{II} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -mn & n^2+mn & m^2+nm \\ m_{I}^2+m_{I}n_{I} & -m_{I}n_{I} & n_{I}^2+n_{I}m_{I} \\ n_{II}^2+m_{II}n_{II} & m_{II}^2+m_{II}n_{II} & -m_{II}n_{II} \end{vmatrix}}.$$

Setzt man die Teilverhältnisse einander gleich, so erhält man

$$9)\quad a = \frac{m+n}{m^2+mn+n^2}\sqrt{m(m+n)\xi_{II}^2 + mn\xi_I^2 + n(m+n)\xi_{III}^2}.$$

Für die Schwerpunktstransversalen t_I, t_{II}, t_{III} wird daraus

$$a = \tfrac{2}{3}\sqrt{2t_{II}^2 + 2t_{III}^2 - t_I^2}$$

etc. Berechnet man noch wie in 9) die Quadrate aller drei Seiten, so erhält man aus den Gleichungen VIII), wo links $(4\Delta)^2$ steht:

$$\Delta = \frac{(m+n)^2}{4(m^2+mn+n^2)}\sqrt{(\xi_I+\xi_{II}+\xi_{III})(\xi_I+\xi_{II}-\xi_{III})(\xi_I+\xi_{III}-\xi_{II})(\xi_{II}+\xi_{III}-\xi_I)}.$$

Für den Fall $m = n$ erhält man daraus die bekannte Formel

$$\Delta = \tfrac{4}{3}\sqrt{T(T-t_I)(T-t_{II})(T-t_{III})},$$

worin

$$T = \frac{t_I + t_{II} + t_{III}}{2}$$

gesetzt wurde.

Wir können den Gegenstand nicht verlassen, ohne auf die grosse Bedeutung des von uns benutzten Gleichungssystems auch für den rein analytischen Teil der Trigonometrie hinzuweisen. Dividiert man eine der Gleichungen des Systems I (S. 82), etwa die Gleichungen

$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$$

durch c, so erhält man

$$1 = \frac{a}{c}\cos\beta + \frac{b}{c}\cos\alpha;$$

d. i. nach dem Sinussatze

$$\sin\gamma = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha;$$

da nun $\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta)$ ist, so hat man

$$\underline{\underline{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \,.\, \cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.}}$$

Dasselbe würde auch erreicht, wenn man die Gleichung durch $2r$, den Durchmesser des umbeschriebenen Kreises dividiert.

Um $\cos(\alpha+\beta)$ abzuleiten, berechnet man aus der ersten Gleichung von I (S. 82) $\cos\gamma$, dann erhält man

$$\cos\gamma = \frac{a}{b} - \frac{c}{b}\cos\beta,$$

und indem man für c den Wert aus der dritten Gleichung nimmt, wird

$$\cos\gamma = \frac{a}{b}(1 - \cos^2\beta) - \cos\alpha\cos\beta,$$

d. i. mit Hilfe des Sinussatzes

$$= \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta.$$

Da nun $\cos\gamma = -\cos(\alpha + \beta)$ ist, so wird

$$\underline{\underline{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\,.\,\cos\beta - \sin\alpha\,.\,\sin\beta.}}$$

Dieselben Formeln kann man in gleicher Weise auch aus den Gleichungen II (S. 83), welche für die Aussenwinkel gelten, herleiten. Sie ergeben ausserdem direkt die Formeln für die Differenz zweier Winkel. Dividiert man die dritte der Gleichungen II durch c, so erhält man mit Hilfe des Sinussatzes wie oben

$$\sin\gamma = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos x.$$

Nun ist $x = \beta + \gamma$ (Satz vom Aussenwinkel), d. h. $\gamma = x - \beta$; daher wird

$$\sin(x - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos x;$$

da ferner $\sin\alpha = \sin x$ ist, so erhält man

$$\underline{\underline{\sin(x - \beta) = \sin x\cos\beta - \cos x\,.\,\sin\beta.}}$$

Ebenso erhält man aus der ersten Gleichung von II:

$$\cos\gamma = \frac{c\,.\cos y + a}{b}$$

$$= \frac{(a\cos\beta + b\cos\alpha)\cos y + a}{b}$$

$$= \cos\alpha\cos y + \frac{a}{b}(1 + \cos\beta\cos y);$$

da nun $\sin\beta = \sin y$ und $\cos\beta = -\cos y$ ist, so erhält man wie oben

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos y + \sin\alpha\,.\,\sin y,$$

und da $\gamma = y - \alpha$ ist, so wird

$$\underline{\underline{\cos(y - \alpha) = \cos\alpha\cos y + \sin\alpha\,.\,\sin y.}}$$

Der hergebrachte Gang der Trigonometrie behandelt bekanntlich diese Formeln in einem besondern Kapitel, ohne dass an dieser Stelle der Zusammenhang derselben mit der eigentlichen Aufgabe der Trigonometrie und ihre Bedeutung für dieselbe von dem Schüler erkannt werden kann. Die obige Herleitung, welche keinerlei Schwierigkeit hat, knüpft an bekanntes an und ermöglicht somit einen einfachern und zusammenhängenden Gang des Unterrichts. Der Zusammenhang dieser Formeln mit den Dreieckswinkeln liegt aber auch ohnedem nahe. Es möge nämlich $\alpha + \beta$ dargestellt werden durch drei von einem Punkte C ausgehende Strahlen a, b, c, so dass b der gemeinsame Schenkel ist. Zieht man dann zu b eine Parallele, so erscheint $(\alpha + \beta)$ als Aussenwinkel des Dreiecks ABC und ist gleich den beiden gleichnamigen Winkeln im Dreieck selbst. Dabei ist es gleichgiltig, ob der Aussenwinkel ein stumpfer oder ein spitzer ist und es kann somit die Herleitung der Funktionen von $(\alpha \pm \beta)$ direkt an die Dreieckswinkel geknüpft werden. Es wäre dann nur noch die Giltigkeit der gewonnenen Formeln für den Fall zu erweisen, dass $\alpha + \beta$ ein Winkel im 3^{ten} oder 4^{ten} Quadranten ist. Es sei also $\alpha + \beta$ ein überstumpfer Winkel und es seien die Nebenwinkel, welche man durch Verlängerung des gemeinsamen Schenkels erhält, u resp. v, so dass $\alpha = 180 - u$ und $\beta = 180 - v$ ist. Dann hat man

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= \sin[360 - (u + v) \\
&= -\sin(u + v) \\
&= -\sin u \cos v - \cos u \sin v \\
&= -\sin(180-\alpha)\cos(180-\beta) - \cos(180-\alpha)\sin(180-\beta) \\
&= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;
\end{aligned}$$

ebenso für $\cos(\alpha + \beta)$.

Elftes Kapitel.
Sphärische Trigonometrie.

Um für die drei Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks ein System von simultanen Gleichungen zu erhalten, kann man analog der ebenen Trigonometrie verfahren. Es ist nach bekannten Formeln* (Fig. 1)

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang} c \cos\beta \quad \text{und} \quad \operatorname{tang} y = \operatorname{tang} b \cos\gamma.$$

Daher

$$\operatorname{tang} a = \operatorname{tang}(x+y) = \frac{\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} y}{1 - \operatorname{tang} x \,.\, \operatorname{tang} y};$$

oder wenn man die Werte für $\operatorname{tang} x$ und $\operatorname{tang} y$ einsetzt:

$$\operatorname{tang} a = \frac{\operatorname{tang} c \cos\beta + \operatorname{tang} b \cos\gamma}{1 - \operatorname{tang} c \cos\beta \cdot \operatorname{tang} b \cos\gamma},$$

das giebt geordnet:

$$\text{I)}\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang} a &= \operatorname{tang} b \cos\gamma + \operatorname{tang} c \cos\beta + \\ &\qquad + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c \cos\beta \cos\gamma; \\ &\text{ebenso erhält man} \\ \operatorname{tang} b &= \operatorname{tang} c \cos\alpha + \operatorname{tang} a \cos\gamma + \\ &\qquad + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c \cos\alpha \cos\gamma, \\ \operatorname{tang} c &= \operatorname{tang} a \cos\beta + \operatorname{tang} b \cos\alpha + \\ &\qquad + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c \cos\alpha \cos\beta. \end{aligned}\right.$$

---

* Schreibt man die Formeln für den Sinus, Cosinus und Tangente eines Winkels im rechtwinkligen Dreieck als ein System von Gleichungen auf, nämlich:

$$\sin a \sin\beta + 0 - \sin b = 0,$$

$$\left(\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin a}, \text{ wenn } a \text{ die Hypotenuse ist}\right),$$

$$0 + \operatorname{tang} a \cos\beta - \operatorname{tang} c = 0,$$

$$\sin c \cdot \sin\beta - \operatorname{tang} b \cos\beta - 0 = 0,$$

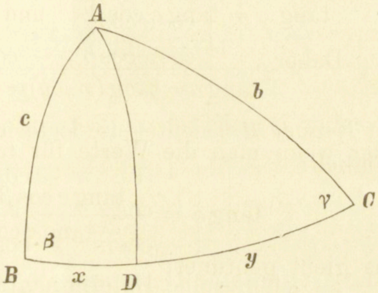
so erhält man durch Elimination von $\sin\beta$ und $\cos\beta$

$$\begin{vmatrix} \sin a & 0 & \sin b \\ 0 & \operatorname{tang} a & \operatorname{tang} c \\ \sin c & -\operatorname{tang} b & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder $\cos a = \cos b \cdot \cos c$.

Diese drei Gleichungen* gelten gleichmässig für die Seiten und Winkel bezw. deren Funktionen. Betrachtet man je drei derselben als Unbekannte, so kann man ihre Werte auf dem Wege der Elimination aus vorstehenden Gleichungen berechnen. Diese Gleichungen zeigen dazu gegenüber den entsprechenden Gleichungen der ebenen Trigonometrie, in welche sie übergehen, wenn man die Seiten unendlich klein gegenüber dem Radius der Kugel nimmt, die Eigentümlichkeit, dass in ihnen auch die drei Winkel bezw. ihre Funktionen als unabhängige Unbekannte vorkommen und sich selbstständig aus ihnen berechnen lassen. Allein wenn sich auch ähnlich, wie es im Kapitel X geschehen, die Hauptaufgaben der sphärischen Trigonometrie ebenfalls auf rein analytischem Wege aus obigem System von Gleichungen ableiten und lösen lassen, so ist der algebraische Prozess dabei doch ein stellenweise so umständlicher und verwickelter, dass eine derartige Behandlung für den Unterricht von keiner praktischen Bedeutung ist. Wir begnügen uns daher, an obige Gleichungen eine neue Ableitung der wichtigsten Formeln, namentlich der vielgebrauchten Gaussschen und Neperschen zu knüpfen.

Fig. 1.



Wir setzen zu dem Zwecke das in allen drei Gleichungen vorkommende Produkt $\operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c = k$, dividieren die Gleichungen durch k und führen für $\frac{\operatorname{tang} a}{k}$, $\frac{\operatorname{tang} b}{k}$ und

* Dieselben wurden zuerst aufgestellt von Dr. F. X. Stoll im Programm des Grossherzoglichen Gymnasiums zu Bensheim 1878/79. Daselbst finden sich auch die Hauptaufgaben der sphärischen Trigonometrie als Eliminationsaufgaben in analoger Weise behandelt, wie es mit denen der ebenen Trigonometrie vom Verfasser im Programm des Königlichen Gymnasiums zu Essen 1876/77 geschehen war.

$\frac{\operatorname{tang} c}{k}$ die Unbekannten x, y, z ein, dann erhält man folgendes System von Gleichungen:

$$\text{II)}\quad \left\{\begin{aligned} x - y\cos\gamma - z\cos\beta &= \cos\beta\cos\gamma, \\ -x\cos\gamma + y - z\cos\alpha &= \cos\alpha\cos\gamma, \\ -x\cos\beta - y\cos\alpha + z &= \cos\alpha\cos\beta. \end{aligned}\right.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \cos\beta\cos\gamma & -\cos\gamma & -\cos\beta \\ \cos\alpha\cos\gamma & 1 & -\cos\alpha \\ \cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha & 1 \end{vmatrix}}{R};$$

der Nenner R bedeutet die Determinante aus den Koeffizienten, nämlich:

$$R = \begin{vmatrix} 1 & -\cos\gamma & \cos\beta \\ -\cos\gamma & 1 & -\cos\alpha \\ -\cos\beta & -\cos\alpha & 1 \end{vmatrix}.$$

Es ist dieselbe Determinante, die wir auch in der ebenen Trigonometrie (S. 84) erhielten, nur ist dieselbe hier nicht null, sondern behält ihren Wert (S. 85)

$$R = -4\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$$

$$= -4\cos\sigma\,.\,\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma).$$

Multipliziert man in der Determinante des Zählers die letzte Vertikalreihe mit $\cos\gamma$ und addiert sie zur ersten, so erhält man

$$Rx = \begin{vmatrix} 0 & -\cos\gamma & -\cos\beta \\ 0 & +1 & -\cos\alpha \\ \cos\gamma + \cos\beta\cos\alpha & -\cos\alpha & +1 \end{vmatrix}$$

$$= (\cos\gamma + \cos\beta\cos\alpha)(\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma).$$

Setzen wir wie früher (S. 82, 83) $\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma = A$; $\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma = B$ und $\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta = C$, so wird

$$\text{III)}\qquad Rx = B\,.\,C;$$

ebenso erhält man $Ry = A\,.\,C$; $Rz = A\,.\,B$.

Nun ist

$$x = \frac{\operatorname{tang} a}{R} = \frac{1}{\operatorname{tang} b\operatorname{tang} c};\quad y = \frac{1}{\operatorname{tang} a\operatorname{tang} c};\quad z = \frac{1}{\operatorname{tang} a\operatorname{tang} b}.$$

Daher

$$\operatorname{tang} b \,.\, \operatorname{tang} c = \frac{R}{B\,.\,C}; \quad \operatorname{tang} a \,.\, \operatorname{tang} c = \frac{R}{A\,.\,C};$$

$$\operatorname{tang} a \,.\, \operatorname{tang} b = \frac{R}{A\,.\,B}.$$

Daraus erhält man leicht

$$\text{IV)} \qquad \operatorname{tang} a = \frac{\sqrt{R}}{A}; \quad \operatorname{tang} b = \frac{\sqrt{R}}{B}; \quad \operatorname{tang} c = \frac{\sqrt{R}}{C}.$$

1. Um aus diesen Formeln, in welchen die Seiten durch die Winkel ausgedrückt erscheinen, den Sinussatz abzuleiten, benutzt man den bekannten Zusammenhang

$$\sin^2 a = \frac{\operatorname{tang}^2 a}{1+\operatorname{tang} a} = \frac{R}{A^2+R}; \; \sin^2 b = \frac{R}{B^2+R}; \; \sin^2 c = \frac{R}{C^2+R}.$$

Nun ist (S. 84):

$$A^2+R = (\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma)^2+1-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$$
$$= (1-\cos^2\beta)\,(1-\cos^2\gamma) = \sin^2\beta\,\sin^2\gamma.$$

Daher erhält man:

$$\text{V)} \begin{cases} \sin^2 a = \dfrac{R}{\sin^2\beta\,\sin^2\gamma} \\[2ex] \sin^2 b = \dfrac{R}{\sin^2\alpha\,\sin^2\gamma} \\[2ex] \sin^2 c = \dfrac{R}{\sin^2\alpha\,\sin^2\beta} \end{cases} \quad \text{und} \quad \text{VI)} \begin{cases} \cos^2 a = \dfrac{A^2}{\sin^2\beta\,\sin^2\gamma} \\[2ex] \cos^2 b = \dfrac{B^2}{\sin^2\alpha\,\sin^2\gamma} \\[2ex] \cos^2 c = \dfrac{C^2}{\sin^2\alpha\,\sin^2\beta} \end{cases}$$

Aus den Gleichungen V) folgt der Sinussatz direkt in der Form

$$\sin a : \sin b = \sin\alpha : \sin\gamma$$

u. s. f., oder wenn man die erste Gleichung durch $\sin^2\alpha$, die zweite durch $\sin^2\beta$, die dritte durch $\sin^2\gamma$ dividiert, in der Form:

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}$$

und der gemeinschaftliche Wert dieser Verhältnisse ist

$$\frac{\sqrt{R}}{\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma}.$$

2. Um den Cosinus-Satz für die Winkel abzuleiten, benutzen wir Gleichungen VI); es folgt aus ihnen

$$A = \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma;$$

andererseits war

$$A = \cos\alpha + \cos\beta \cos\gamma;$$

daher

VII) $$\cos\alpha = \cos a \sin\beta \sin\gamma - \cos\beta \cos\gamma.$$

Ebenso erhält man aus den beiden andern Gleichungen VI) die Ausdrücke für $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ selbständig hergeleitet.

3. Um den Cosinus-Satz für die Seiten zu gewinnen, kann man von der Gleichung VII) aus zum Polardreieck übergehen.

Will man ihn selbständig aus den ursprünglichen Gleichungen herleiten, so kann man folgendermassen verfahren. Nach Gleichung III) ist

$$BC = Rx = \begin{vmatrix} \cos\beta\cos\gamma & -\cos\gamma & -\cos\beta \\ \cos\alpha\cos\gamma & +1 & -\cos\alpha \\ \cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha & +1 \end{vmatrix}.$$

Multipliziert man nun die erste Kolonne der Determinante R mit $\cos\alpha$ und addiert sie zu vorstehender Determinante, so erhält man (Einl. Satz 4, 1):

$$BC + R\cos\alpha = \begin{vmatrix} \cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma & -\cos\gamma & -\cos\beta \\ 0 & +1 & -\cos\alpha \\ 0 & -\cos\alpha & +1 \end{vmatrix}$$
$$= A\,(1 - \cos^2\alpha) = A \sin^2\alpha.$$

Nun ist aber nach den Gleichungen unter III)

$$BC = R \operatorname{cotg} b \,.\, \operatorname{cotg} c$$

und nach IV)

$$A = \operatorname{cotg} a \,.\, \sqrt{R};$$

daher wird

$$R\,[\operatorname{cotg} b \operatorname{cotg} c + \cos\alpha] = \sqrt{R} \,.\, \operatorname{cotg} a \,.\, \sin^2\alpha;$$

oder

$$R\,[\cos b \cos c + \sin b \sin c \,.\, \cos\alpha] = \sqrt{R} \operatorname{cotg} a \sin^2\alpha \sin b \,.\, \sin c.$$

Nach den Gleichungen V) ist aber

$$\sin b \,.\, \sin c \,.\, \sin^2\alpha = \sqrt{R} \,.\, \sin\alpha;$$

folglich

$$R\,(\cos b \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos\alpha) = R \,.\, \operatorname{cotg} a \,.\, \sin a;$$

d. i. nach Division durch R:

VIII) $$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos\alpha.$$

4. Um die Seiten aus den Winkeln zu berechnen, bemerke man, dass $\sin^2\frac{a}{2} = \frac{1-\cos a}{2}$ ist.

Nun ist nach VI) $\cos a = \frac{A}{\sin\beta\sin\gamma}$, folglich ist

$$\sin^2\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{A}{\sin\beta\sin\gamma}\right]$$

oder mit Benutzung des Wertes von A,

$$\sin^2\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\beta\sin\gamma - (\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma)}{\sin\beta\,.\,\sin\gamma}\right];$$

da nun allgemein $\sin\beta\sin\gamma = \cos\beta\cos\gamma - \cos(\beta+\gamma)$ ist, so folgt:

$$\sin\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos\beta\cos\gamma - \cos(\beta+\gamma) - \cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}\right],$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{-[\cos\alpha + \cos(\beta+\gamma)]}{\sin\beta\sin\gamma},$$

$$= \frac{-\cos\frac{\beta+\gamma+\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}}{\sin\beta\,.\,\sin\gamma},$$

d. i. mit bekannter Bezeichnung

IX) $$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma\,.\,\cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\,.\,\sin\gamma}}.$$

Ebenso ist

$$\cos^2\frac{a}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{A}{\sin\beta\sin\gamma}\right);$$

indem man genau wie oben verfährt, erhält man

X) $$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta\,.\,\sin\gamma}} \text{ u. s. f.}$$

5. Zur Herleitung der Gaussschen Formeln benutzen wir den unter 1. gewonnenen Sinussatz. Aus ihm folgt

$$\frac{\sin a + \sin b}{\sin c} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\gamma}$$

oder

$$\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Setzt man jetzt

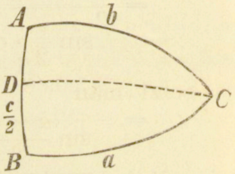
$$\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} = \lambda \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}},$$

so wird

XI) $$\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \frac{1}{\lambda}.$$

Nun ist für ein gleichschenkliges Dreieck nach dem Sinussatz, wenn man die Höhe CD fällt:

XII) $$\frac{\sin a}{\sin\frac{c}{2}} = \frac{\sin 90^0}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$



Setzt man daher in der obigen Gleichung, um zum gleichschenkligen Dreieck überzugehen, $a = b$, so wird

$$\frac{\sin a}{\sin\frac{c}{2}} = \lambda \cdot \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}},$$

da $\alpha - \beta = 0$ ist. Es muss also nach XII)

$$\lambda \cdot \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}};$$

d. i.

$$\lambda = \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

sein.

Setzt man diesen Wert von λ in die Gleichungen XI) ein, so erhält man direkt

$$\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

und

$$\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Durch Subtraktion erhält man aus dem Sinussatze

$$\frac{\sin a - \sin b}{\sin c} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\gamma},$$

oder

$$\frac{\cos\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}\cdot\cos\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Setzt man

$$\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} = \lambda\,\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}},$$

so ist

$$\text{XIII)}\qquad \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \frac{1}{\lambda}.$$

Gehen wir nun zum ebenen Dreieck über, indem wir die Seiten unendlich klein im Verhältnis zum Radius der Kugel nehmen, so gehen die Sinus in die Bogen d. h. die Seiten über. Aus der ersten der beiden letzten Gleichungen wird dann

$$\frac{a-b}{c} = \lambda\cdot\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}},$$

nun ist für ein ebenes Dreieck

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}};$$

daher muss

$$\lambda \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}};$$

d. h.

$$\lambda = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

sein.

Setzen wir diesen Wert für λ in die Formeln XIII), so erhalten wir die beiden andern Gaussschen Gleichungen:

$$\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}},$$

$$\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Derselbe Schluss konnte auch zur Gewinnung der beiden ersten Gaussschen Formeln angewandt werden.

Es ist bekannt, wie man durch Division aus den Gaussschen Formeln leicht die Nepersche Analogien herleitet.

Berichtigungen.

Seite 13, Beispiel. Der erste Faktor der dritten Gleichung muss 4 statt 2 heissen; ebenda Zeile 20 v. o. muss 2,4 statt 2,2 stehen.

„ 21. In der 2. Gleichung der Aufgabe 3 muss 0 statt 6 stehen.

„ 22 Zeile 9 v. u. muss $+2bx$ statt $-2bx$ stehen.

„ 27. In der Determinante muss $\frac{7}{2}$ und $\frac{7}{2}x$ statt $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}x$ stehen.

„ 31. In der Determinante muss $-2A$ statt $2A$ stehen.

„ 48 Zeile 4 v. o. In der Gleichung muss $2(bd-ae)y$ statt $2(bd-ae)$ stehen.

„ 58 „ 15 v. o. In der Gleichung muss $b(mx+y)^2$ statt $b(mx+y)$ stehen.

„ 64 „ 2 v. u. In der Gleichung muss $(a+\lambda a_{\prime})$ statt $(a+\lambda a)$ stehen.

„ 75 „ 17 v. o. In der Gleichung muss T^2x^2 statt T^2x stehen.

Berichtigungen.

Seite 19, Beispiel. Der erste Faktor der dritten Gleichung muss [illegible] heissen; ebenda Zeile 20 v. o. muss [illegible] statt [illegible] stehen.

„ 21. In der 2. Gleichung der [illegible] muss 0 statt [illegible] stehen.

„ 22 Zeile 4 v. u. muss [illegible] statt [illegible] stehen.

„ 22. In der Determinante muss [illegible] statt [illegible] und [illegible] stehen.

„ 31. In der Determinante muss [illegible] statt [illegible] stehen.

„ 43 Zeile 4 v. o. In der Gleichung muss [illegible] statt [illegible] stehen.

„ 53 „ 15 v. o. In der Gleichung muss [illegible] statt [illegible] stehen.

„ 64 „ 2 v. u. In der Gleichung muss [illegible] statt [illegible] stehen.

„ 70 „ 17 v. u. In der Gleichung muss [illegible] statt [illegible] stehen.