III.

Ein Satz aus der Theorie der dreiachsigen Koordinatensysteme.

[Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 50, S. 272—275 (1855)].

Wenn die Winkel YOZ, ZOX, XOY eines dreiachsigen Koordinatensystems durch a, b, c bezeichnet werden, so wird der konkave Winkel w zwischen zwei beliebigen Richtungen OM und OM' durch folgende Gleichung bestimmt:

$$(1)\quad \begin{cases} \alpha\alpha' \sin a^2 + \beta\beta' \sin b^2 + \gamma\gamma' \sin c^2 + (\beta\gamma' + \gamma\beta')(\cos b \cos c - \cos a) \\ + (\gamma\alpha' + \alpha\gamma')(\cos c \cos a - \cos b) + (\alpha\beta' + \beta\alpha')(\cos a \cos b - \cos c) \\ = D \cos w, \end{cases}$$

in welcher α, β, γ die Kosinus der konkaven Winkel MOX, MOY, MOZ, ebenso α', β', γ' die Kosinus der konkaven Winkel $M'OX$, $M'OY$, $M'OZ$ sind, und D folgende Bedeutung hat:

$$(2)\quad D = 1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2 \cos a \cos b \cos c.$$

Dieser bekannte Satz schließt den anderen ein, daß drei solche Richtungskosinus, wie α, β, γ, stets der Bedingung

$$(3)\quad \begin{cases} \alpha\alpha \sin a^2 + \beta\beta \sin b^2 + \gamma\gamma \sin c^2 + 2\,\beta\gamma(\cos b \cos c - \cos a) \\ + 2\,\gamma\alpha(\cos c \cos a - \cos b) + 2\,\alpha\beta(\cos a \cos b - \cos c) = D \end{cases}$$

Genüge leisten müssen.

Ist das Koordinatensystem rechtwinklig, so gehen die Gleichungen (1) und (3) in die beiden folgenden über:

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = \cos w,$$
$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 1.$$

Um daher auszudrücken, daß dann die drei Linien OM, OM', OM'' ein zweites rechtwinkliges Koordinatensystem bilden, sind folgende sechs Gleichungen nötig:

$$(4)\quad \begin{cases} \alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 1, & \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0, \\ \alpha'\alpha' + \beta'\beta' + \gamma'\gamma' = 1, & \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma = 0, \\ \alpha''\alpha'' + \beta''\beta'' + \gamma''\gamma'' = 1, & \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0. \end{cases}$$

Sie sind auch hinreichend zu diesem Zwecke, wenn angenommen wird, daß das erste System rechtwinklig sei.

Der in der Überschrift angekündigte Satz besteht nun darin, daß diese letztere Beschränkung weggelassen werden darf, indem die Gleichungen (4) unzweifelhaft ausdrücken, daß beide Systeme durchaus rechtwinklig sein müssen. Der Beweis dieses merkwürdigen Theorems bildet den Gegenstand des gegenwärtigen Aufsatzes.

Zunächst mögen hier ohne weiteren Beweis die bekannten Folgerungen aus den Gleichungen (4) Platz finden, nämlich:

$$(5)\quad \begin{cases} \alpha\alpha + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' = 1, & \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0, \\ \beta\beta + \beta'\beta' + \beta''\beta'' = 1, & \gamma\alpha + \gamma'\alpha' + \gamma''\alpha'' = 0, \\ \gamma\gamma + \gamma'\gamma' + \gamma''\gamma'' = 1, & \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0, \end{cases}$$

und

$$(6)\quad \begin{cases} \beta'\gamma'' - \beta''\gamma' = \varepsilon\alpha, & \gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha' = \varepsilon\beta, & \alpha'\beta'' - \alpha''\beta' = \varepsilon\gamma, \\ \beta''\gamma - \beta\gamma'' = \varepsilon\alpha', & \gamma''\alpha - \gamma\alpha'' = \varepsilon\beta', & \alpha''\beta - \alpha\beta'' = \varepsilon\gamma', \\ \beta\gamma' - \beta'\gamma = \varepsilon\alpha'', & \gamma\alpha' - \gamma'\alpha = \varepsilon\beta'', & \alpha\beta' - \alpha'\beta = \varepsilon\gamma'', \end{cases}$$

wo bekanntlich $\varepsilon\varepsilon = 1$ ist.

Die ternäre quadratische Form

$$F \equiv xx + yy + zz + 2\,yz\cos a + 2\,zx\cos b + 2\,xy\cos c,$$

[welche bekanntlich das Quadrat der Entfernung eines beliebigen Punktes (xyz) von dem Nullpunkte O des Koordinatensystems $OXYZ$ ausdrückt] hat zur Determinante den oben (2) mit D bezeichneten Ausdruck (das Quadrat des Volumens des von den drei Achsen $OX = OY = OZ = 1$ als Kanten gebildeten Parallelepipedums) und zur adjungierten Form:

$$F_1 \equiv xx\sin a^2 + yy\sin b^2 + zz\sin c^2 + 2\,yz(\cos b\cos c - \cos a)$$
$$+ 2\,zx(\cos c\cos a - \cos b) + 2\,xy(\cos a\cos b - \cos c).$$

Es ist dann bekanntlich die Determinante von F_1 das Quadrat der von F, also $= DD$, und die adjungierte Form F_2 von F_1 ist $\equiv DF$.

Wenn man folgende Bezeichnung einführt:

$$xx'\sin a^2 + yy'\sin b^2 + zz'\sin c^2 + (yz' + zy')\cos b\cos c - \cos a)$$
$$+ (zx' + xz')(\cos c\cos a - \cos b) + (xy' + yx')(\cos a\cos b - \cos c)$$
$$\equiv F_1\begin{pmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \end{pmatrix},$$

so ist aus der Theorie der ternären Formen weiter bekannt, daß

$$F_1\begin{pmatrix} x, & y, & z \\ x, & y, & z \end{pmatrix} F_1\begin{pmatrix} x', & y', & z' \\ x', & y', & z' \end{pmatrix} - \left[F_1\begin{pmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \end{pmatrix}\right]^2$$

$$\equiv F_2\begin{pmatrix} yz'-zy', & zx'-xz', & xy'-yx' \\ yz'-zy', & zx'-xz', & xy'-yx' \end{pmatrix},$$

also im gegenwärtigen Falle

$$(7) \qquad \equiv D\cdot F\begin{pmatrix} yz'-zy', & zx'-xz', & xy'-yx' \\ yz'-zy', & zx'-xz', & xy'-yx' \end{pmatrix}$$

ist.

Nach diesen Vorbemerkungen ist es nun leicht, den obigen Satz zu beweisen. $OXYZ$ sei das eine Koordinatensystem mit den Winkeln. a, b, c; $OMM'M''$ das andere mit den Winkeln m, m', m''. OM bilde mit den drei Achsen OX, OY, OZ Winkel, deren Kosinus α, β, γ usw sind. Dann finden folgende sechs Gleichungen Statt:

$$(8) \quad \left\{\begin{array}{ll} F_1\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha, & \beta, & \gamma \end{pmatrix} = D, & F_1\begin{pmatrix} \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \end{pmatrix} = D, \\ F_1\begin{pmatrix} \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{pmatrix} = D, & F_1\begin{pmatrix} \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{pmatrix} = D\cos m, \\ F_1\begin{pmatrix} \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \\ \alpha, & \beta, & \gamma \end{pmatrix} = D\cos m', & F_1\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \end{pmatrix} = D\cos m'', \end{array}\right.$$

welche allgemein die Beziehung zwischen irgend zwei dreiachsigen Koordinatensystemen ausdrücken. Wenn nun aber außerdem die Gleichungen (4), und folglich auch die (5) und (6) gelten, so erhält man durch Addition der drei ersten Gleichungen in (8):

$$(9) \qquad \sin a^2 + \sin b^2 + \sin c^2 = 3\,D.$$

Ferner ergibt sich aus dem in (7) enthaltenen Theorem:

$$F_1\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha, & \beta, & \gamma \end{pmatrix} F_1\begin{pmatrix} \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \end{pmatrix} - \left[F_1\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \end{pmatrix}\right]^2$$

$$\equiv D\cdot F\begin{pmatrix} \beta\gamma'-\beta'\gamma, & \gamma\alpha'-\gamma'\alpha, & \alpha\beta'-\alpha'\beta \\ \beta\gamma'-\beta'\gamma, & \gamma\alpha'-\gamma'\alpha, & \alpha\beta'-\alpha'\beta \end{pmatrix} = D\cdot F\begin{pmatrix} \varepsilon\alpha'', & \varepsilon\beta'', & \varepsilon\gamma'' \\ \varepsilon\alpha'', & \varepsilon\beta'', & \varepsilon\gamma'' \end{pmatrix}$$

oder

$$DD - DD\cos m''^2$$

$$= D(\alpha''\alpha'' + \beta''\beta'' + \gamma''\gamma'' + 2\,\beta''\gamma''\cos a + 2\,\gamma''\alpha''\cos b + 2\,\alpha''\beta''\cos c),$$

also

$$\begin{aligned} D\sin m^2 &= 1 + 2\,\beta\,\gamma\,\cos a + 2\,\gamma\,\alpha\,\cos b + 2\,\alpha\,\beta\,\cos c, \\ D\sin m'^2 &= 1 + 2\,\beta'\gamma'\cos a + 2\,\gamma'\alpha'\cos b + 2\,\alpha'\beta'\cos c, \\ D\sin m''^2 &= 1 + 2\,\beta''\gamma''\cos a + 2\,\gamma''\alpha''\cos b + 2\,\alpha''\beta''\cos c, \end{aligned}$$

und hieraus durch Addition:

$$D(\sin m + \sin m'^2 + \sin m''^2) = 3.$$

Vergleicht man diese Relation mit der in (9) enthaltenen, so ergibt sich

$$(\sin a^2 + \sin b^2 + \sin c^2)(\sin m^2 + \sin m'^2 + \sin m''^2) = 3 \cdot 3,$$

und hieraus

$$\sin a^2 = \sin b^2 = \sin c^2 = \sin m^2 = \sin m'^2 = \sin m''^2 = 1;$$

d. h. alle sechs Koordinatenwinkel müssen rechte Winkel sein.

Bei diesem Beweis wurde natürlich vorausgesetzt, daß D von Null verschieden sei, d. h. daß OX, OY, OZ nicht in einer Ebene enthalten sind.

Göttingen, 15. Juli 1854.
