VIII.

Über Kreisevolventen.

[Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 1859, S. 363—365.]

Die Betrachtung der sukzessiven Evolventen des Kreises führt zu einer einfachen mechanischen Konstruktion der Glieder der Exponentialreihe, welche, soviel ich weiß, noch nicht bemerkt ist. Beschreibt man mit dem Radius r einen Kreis K_1 und wählt auf seiner Peripherie einen bestimmten Punkt m_0, von welchem aus der (in einem bestimmten Sinne positiv genommene) Drehungswinkel φ gerechnet wird, so ist das Stück der Peripherie von dem Punkte m_0 bis zu dem Punkte m_1, welcher dem Winkel φ entspricht,

$$m_0 m_1 = r\varphi.$$

Wickelt man dieses Stück ab, vom Punkte m_0 aus, so beschreibt m_0 ein Stück $m_0 m_2$ der Kreisevolvente K_2, welches

$$m_0 m_2 = \frac{r\varphi^2}{1\cdot 2}$$

ist. Wickelt man abermals dies Stück ab, so daß die Ablösung des Fadens am Punkte m_0 beginnt, so beschreibt m_0 ein Stück

$$m_0 m_3 = \frac{r\varphi^3}{1\cdot 2\cdot 3}$$

der Evolvente K_3 der Kurve K_2, und so fort. Der Radius r und die Kurvenstücke $m_0 m_1$, $m_0 m_2$, $m_0 m_3$ ... bilden die sukzessiven Glieder der unendlichen Reihe, in welche re^{φ} entwickelt wird.

Der Beweis läßt sich am einfachsten durch Betrachtung der komplexen Größen und ihrer geometrischen Bedeutung führen, wie folgt.

Wir betrachten die beiden reellen Funktionen x_n und y_n der reellen Variabeln φ, welche durch die Gleichung

$$x_n + y_n i = re^{\varphi i} + \frac{r\varphi}{1} e^{\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)i} + \cdots + \frac{r\varphi^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)} e^{\left(\varphi - (n-1)\frac{\pi}{2}\right)i}$$

definiert sind ($i = \sqrt{-1}$), als zusammengehörige rechtwinklige Koordinaten eines Punktes m_n einer Ebene; der Ort aller dieser Punkte, welche allen reellen Werten von φ entsprechen, bildet eine Kurve K_n; für $\varphi = 0$ erhält man den Punkt $x_n = r$, $y_n = 0$; wir wollen ihn mit m_0 bezeichnen und rechnen von ihm aus den Bogen $s_n = m_0 m_n$ der Kurve nach der Seite hin, welche positiven Werten von φ entspricht. Nun ist für $h \geqq 1$:

$$d\left(\frac{r\varphi^h}{1\cdot 2\cdots h}\, e^{\left(\varphi - h\frac{\pi}{2}\right)i}\right)$$

$$= \frac{r\varphi^{h-1}}{1\cdot 2\cdots(h-1)}\, e^{\left(\varphi - h\frac{\pi}{2}\right)i} d\varphi - \frac{r\varphi^h}{1\cdot 2\cdots h}\, e^{\left(\varphi-(h+1)\frac{\pi}{2}\right)i} d\varphi,$$

und

$$d(re^{\varphi i}) = -re^{\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)i} d\varphi,$$

woraus sogleich durch paarweise Destruktion der Glieder

$$dx_n + i\,dy_n = -\frac{r\varphi^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\, e^{\left(\varphi - n\frac{\pi}{2}\right)i} d\varphi;$$

$$ds_n = \frac{r\varphi^{n-1}\, d\varphi}{1\cdot 2\cdots(n-1)}; \quad s_n = \frac{r\varphi^n}{1\cdot 2\cdots n} = m_0 m_n$$

folgt; außerdem leuchtet ein, daß $t_n = \varphi - n\frac{\pi}{2}$ die Neigung der Tangente im Punkte m_n ist, in dem Sinne genommen, nach welchem φ und s_n abnehmen. Man kann daher die erste Gleichung so schreiben

$$x_n + y_n i = re^{\varphi i} + s_1 e^{t_1 i} + s_2 e^{t_2 i} + \cdots + s_{n-1} e^{t_{n-1} i}$$

oder

$$x_n + y_n i = x_{n-1} + y_{n-1} i + s_{n-1} e^{t_{n-1} i},$$

wodurch unmittelbar ausgedrückt ist, daß die Kurve K_n die Evolvente der Kurve K_{n-1} ist.

Für $n = 1$ erhält man die Gleichungen

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad y_1 = r\sin\varphi$$

des Kreises K_1; für $n = 2$ die Gleichungen

$$x_2 = r\cos\varphi + r\varphi\sin\varphi, \quad y_2 = r\sin\varphi - r\varphi\cos\varphi$$

der Kreisevolvente K_2 usf.

Ich bemerke nur noch, daß man die allgemeine Gleichung auch so schreiben kann

$$x_n + y_n i = re^{\varphi i}\left\{1 + \frac{-\varphi i}{1} + \frac{(-\varphi i)^2}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{(-\varphi i)^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\right\}$$
$$= re^{\varphi i}[e^{-\varphi i}]_n,$$

wo der letzte Faktor auf der rechten Seite die Summe der ersten n Glieder der Entwicklung von $e^{-\varphi i}$ bedeutet. Mag φ noch so groß sein, so wird für unendlich wachsende Werte von n stets $lim\, s_n = 0$, $lim\,(x_n + y_n i) = r$, d. h. der Punkt m_n nähert sich unbegrenzt wieder dem Punkte m_0.