IX.

Über die Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

[Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 1860, S. 66—75.]

In den meisten Lehrbüchern findet man die Sätze über die sogenannten zusammengesetzten Wahrscheinlichkeiten in folgender Weise aufgestellt: „Ist a die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A, b die eines zweiten B, so ist $a + b$ die Wahrscheinlichkeit, daß A oder B, und ab die Wahrscheinlichkeit, daß A und B eintritt". Man überzeugt sich aber leicht, daß von diesen beiden Sätzen immer höchstens einer richtig sein kann, und daß auch in unzähligen Fällen beide falsch sind. Dies findet seinen Grund darin, daß die Wahrscheinlichkeit eines zusammengesetzten Ereignisses durchaus nicht allein von den Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse, sondern außerdem noch von der gegenseitigen Beziehung derselben zueinander abhängt. Die so häufig vorkommende Vernachlässigung dieses Umstandes mag die nachfolgende Darstellung eines so elementaren Gegenstandes entschuldigen, auf welche in einer späteren Mitteilung Bezug genommen wird.

1.

Bei der ursprünglichen Begriffsbestimmung der mathematischen Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A muß man immer von der Voraussetzung ausgehen, daß sich gewisse Elementarfälle aufzählen lassen, welche die doppelte Bedingung erfüllen, erstens, daß einer, aber auch nur einer von ihnen eintreten muß; zweitens, daß wir keinen Grund haben, das Eintreten eines dieser Fälle eher zu erwarten als das eines anderen. Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, und ist p die Anzahl derjenigen dieser Fälle, in welchen A eintritt, q die Anzahl der übrigen, so ist der Bruch $\frac{p}{p+q}$ das Maß für die Wahrscheinlichkeit, mit welcher wir das Eintreten des Ereignisses A erwarten. Ist dagegen eine der beiden Bedingungen nicht zu erfüllen, so bleibt eine genaue Schätzung der Wahrscheinlichkeit von A unmöglich.

Handelt es sich nun um Eintreten oder Nichteintreten von zwei Ereignissen A und B (deren Identität nicht ausgeschlossen ist), so denken wir uns die sämtlichen Elementarfälle in vier Gruppen zerlegt; es sei nämlich die Anzahl aller Elementarfälle, in welchen

1. A und B eintritt, gleich m,
2. A allein eintritt, gleich p,
3. B allein eintritt, gleich q,
4. weder A noch B eintritt, gleich n.

Jeder Elementarfall gehört jedenfalls einer, aber auch nur einer dieser vier Gruppen an, so daß $m+p+q+n$ die Anzahl aller Elementarfälle ist. Zufolge der vorhergehenden Definition ist dann

$$a = \frac{m+p}{m+p+q+n} \text{ die Wahrscheinlichkeit von } A;$$

$$b = \frac{m+q}{m+p+q+n} \text{ die Wahrscheinlichkeit von } B.$$

Man sieht nun, daß die Wahrscheinlichkeit eines von dem Eintreten oder Nichteintreten von A und B abhängigen Ereignisses im allgemeinen von den drei Verhältnissen zwischen den vier Zahlen m, p, q, n abhängt, also durch alleinige Angabe der zwei Zahlen a, b noch nicht vollständig bestimmt ist. Es muß daher noch eine dritte Zahl, ein Element gegeben sein, welches dazu dient, die Art des Zusammenhanges zwischen den beiden Ereignissen A und B zu charakterisieren. Im allgemeinen wird nämlich das Eintreten eines dieser beiden Ereignisse die Wahrscheinlichkeit des andern abändern. Tritt z. B. das Ereignis B ein, so ist die Wahrscheinlichkeit von A — da dann die Fälle der zweiten und vierten Gruppe ausgeschlossen sind — jetzt

$$\alpha = \frac{m}{m+q};$$

und ähnlich ist die, durch die Gewißheit von A modifizierte Wahrscheinlichkeit von B

$$\beta = \frac{m}{m+p}.$$

Ist nun außer a und b noch eine der beiden modifizierten Wahrscheinlichkeiten α, β gegeben, so läßt sich die Wahrscheinlichkeit eines jeden aus A und B zusammengesetzten Ereignisses bestimmen. Zunächst muß zwischen den vier Zahlen a, b, α, β, welche nur von den Verhältnissen zwischen m, p, q, n abhängen, eine Relation bestehen; eliminiert man m, p, q, n, so erhält man

$$a\beta = b\alpha, \tag{1}$$

und zwar ist der gemeinschaftliche Wert dieser beiden Produkte gleich

$$\frac{m}{m+p+q+n}=\omega;$$

also gleich der Wahrscheinlichkeit, daß A und B eintreten. Ferner ist die Wahrscheinlichkeit, daß A allein eintritt, gleich

$$\frac{p}{m+p+q+n}=a-b\alpha=a(1-\beta)=a-\omega; \tag{2}$$

ebenso ist

$$\frac{q}{m+p+q+n}=b(1-\alpha)=b-a\beta=b-\omega \tag{3}$$

die Wahrscheinlichkeit, daß B allein eintritt; und

$$\begin{aligned}\frac{n}{m+p+q+n}&=1-a-b+b\alpha\\&=1-a-b+a\beta=1-a-b+\omega\end{aligned} \tag{4}$$

ist die Wahrscheinlichkeit, daß weder A noch B eintritt.

Ferner ist:

$$\frac{m+n}{m+p+q+n}=1-a-b+2\omega \tag{5}$$

die Wahrscheinlichkeit, daß keines der beiden Ereignisse A, B allein eintritt;

$$\frac{m+p+q}{m+p+q+n}=a+b-b\alpha=a+b-a\beta=a+b-\omega \tag{6}$$

die, daß mindestens eins der beiden Ereignisse eintritt;

$$\frac{p+q+n}{m+p+q+n}=1-b\alpha=1-a\beta=1-\omega \tag{7}$$

die, daß höchstens eins der beiden Ereignisse eintritt;

$$\frac{m+q+n}{m+p+q+n}=1-a+b\alpha=1-a(1-\beta)=1-a+\omega \tag{8}$$

die, daß A nicht allein eintritt; und endlich ist

$$\frac{m+p+n}{m+p+q+n}=1-b(1-\alpha)=1-b+a\beta=1-b+\omega \tag{9}$$

die Wahrscheinlichkeit, daß B nicht allein eintritt.

Um die Bedeutung von α, β noch anschaulicher zu machen, mögen hier noch folgende Bemerkungen Platz finden. Man sagt, zwei Ereignisse A und B schließen einander aus, wenn das Eintreten des einen das des andern unmöglich macht; der arithmetische Ausdruck dafür ist

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \omega = 0$$

(vorausgesetzt, daß a und b nicht selbst $= 0$ sind); dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens eins der beiden Ereignisse eintritt, d. h. daß wirklich eins eintritt,

$$= a + b.$$

Man sagt ferner, zwei Ereignisse sind voneinander unabhängig, wenn das Eintreten des einen durchaus keinen Einfluß auf die Wahrscheinlichkeit des andern ausübt, d. h. wenn

$$\alpha = a, \quad \beta = b, \quad \omega = ab$$

ist; in diesem Falle ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens eins der beiden Ereignisse eintritt,

$$= a + b - ab.$$

Und umgekehrt sieht man, daß der erste der beiden zu Anfang erwähnten Sätze nur dann richtig ist, wenn die beiden Ereignisse einander ausschließen, und der zweite nur dann, wenn sie voneinander unabhängig sind; und nur dann sind beide Sätze zu gleicher Zeit richtig, wenn mindestens eins der beiden Ereignisse unmöglich ist.

Ist ferner $\alpha = 1$, so zieht das Eintreten von B das von A als notwendige Folge nach sich, und dann ist $b = a\beta \lesseqgtr a$. Ist außerdem $\beta = 1$, so ist $a = b$, und die beiden Ereignisse sind gewissermaßen identisch; aber es ist wohl zu bemerken, daß nicht umgekehrt aus $a = b$ diese Identität der Ereignisse folgt.

2.

Es hat nun keine Schwierigkeit, diese Sätze auf Kombinationen von mehr als zwei Ereignissen auszudehnen; sind z. B. $W_1, W_2, \dots W_n$ Ereignisse, von denen je zwei einander ausschließen, und sind w_1, $w_2, \dots w_n$ ihre Wahrscheinlichkeiten, so ist die Summe

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n$$

die Wahrscheinlichkeit, daß eins dieser Ereignisse eintritt, wovon man sich leicht durch den Schluß von n auf $(n + 1)$ überzeugt.

Man kann sich dieses Satzes häufig bedienen, um die Wahrscheinlichkeit a eines Ereignisses A zu bestimmen, ohne auf die Aufzählung der einzelnen gleich möglichen Elementarfälle zurückzugehen. Gesetzt, man habe verschiedene einander ausschließende Eventualitäten B_1, B_2, ... B_n, in welchen das Ereignis A eintreten kann, in so erschöpfender Weise aufgestellt, daß das Eintreten von A unter keiner anderen Eventualität möglich ist. Es sei b die Wahrscheinlichkeit, daß die Eventualität B_r eintritt, und α_r sei die Wahrscheinlichkeit, daß, wenn B_r eintritt, auch A eintritt. Dann ist

$$a = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_n\alpha_n;$$

denn irgend ein Glied $b_r\alpha_r = w_r$ ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses W_r, daß gleichzeitig B_r und A eintritt, und das Ereignis A ist identisch mit demjenigen, daß von diesen n einander ausschließenden Ereignissen W_1 ... W_n irgend eins eintritt.

Umgekehrt kann man nun auch, wenn das Ereignis A wirklich eingetreten ist, die Wahrscheinlichkeit a posteriori bestimmen, daß dies infolge der Eventualität B_r geschehen ist; denn diese Wahrscheinlichkeit β_r ist nichts anderes, als die durch die Gewißheit von A modifizierte Wahrscheinlichkeit von B_r, so daß

$$a\beta_r = b_r\alpha_r, \quad \text{also} \quad \beta_r = \frac{b_r\alpha_r}{b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_n\alpha_n},$$

und die hieraus sich ergebende Gleichung

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = 1$$

ist nur ein Ausdruck für unsere ursprüngliche Annahme, daß das Eintreten von A nur unter einer der Eventualitäten B_1, B_2, ... B_n und auch unter keiner anderen möglich ist. Von diesem Satze über die Wahrscheinlichkeit a posteriori wird in einer folgenden Mitteilung Gebrauch gemacht werden.

	1	2	3	4	x
1	(10)	(8)	(1)	(1)	
2	(8)	(9)	(7)	(6)	
3	(1)	(7)	(1)	(1)	
4	(1)	(6)	(1)	(2)	
y					

Ein Beispiel, welches zugleich zu einer weiteren Bemerkung Veranlassung geben wird, mag das Bisherige erläutern. Es seien

16 Urnen in quadratischer Anordnung aufgestellt, so daß sie vier Vertikalreihen ($x = 1, 2, 3, 4$) und vier Horizontalreihen ($y = 1, 2, 3, 4$) von je vier Urnen bilden; die einzelnen Urnen können dann durch Angabe der Vertikalreihe x und der Horizontalreihe y, in denen sie sich finden, voneinander unterschieden werden. In jeder Urne seien zehn Kugeln enthalten, von denen so viele weiß sind, wie die in Klammern gesetzte Zahl angibt (also enthält z. B. die Urne ($x = 1$, $y = 1$) nur weiße Kugeln, die Urne ($x = 4$, $y = 3$) enthält eine weiße und neun schwarze Kugeln). [*)] Wir nehmen an, daß der Zug ebensowohl aus der einen wie aus jeder anderen Urne geschehen kann; dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine weiße Kugel gezogen wird

$$a = \Sigma\, b_{x,y}\, \alpha_{x,y} = \frac{1}{16} \Sigma\, \alpha_{x,y} = \frac{7}{16},$$

wo $b_{x,y}$ die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{16}$ bedeutet, daß der Zug aus der Urne (x, y) geschehen wird, und $\alpha_{x,y}$ die Wahrscheinlichkeit, daß der Zug, wenn er aus der Urne (x, y) geschieht, eine weiße Kugel geben wird.

Nun sei umgekehrt eine weiße Kugel gezogen, ohne daß man die Urne kennt, aus welcher sie gezogen ist. Dann ist die Wahrscheinlichkeit a posteriori, daß dieser Zug aus der Urne (x, y) geschehen ist,

$$\beta_{x,y} = \frac{b_{x,y}\, \alpha_{x,y}}{\Sigma\, b_{x,y}\, \alpha_{x,y}} = \frac{\alpha_{x,y}}{\Sigma\, \alpha_{x,y}} = \frac{\alpha_{x,y}}{7}.$$

Am wahrscheinlichsten ist es daher, daß der Zug aus der Urne (1, 1) geschehen ist; d. h. also, das wahrscheinlichste System der beiden Unbekannten x, y ist das System $x = 1$, $y = 1$.

Man findet nun häufig die ganz unrichtige Ansicht, daß der Wert einer unbekannten Größe, der ihr in dem wahrscheinlichsten System von mehreren Unbekannten zukommt, zugleich auch ihr wahrscheinlichster Wert sein müsse. Daß dem nicht so ist, lehrt recht augenfällig das vorliegende Beispiel; denn wir finden für die Wahrscheinlichkeit, daß der Zug aus der ersten, zweiten, dritten, vierten Vertikalreihe geschehen ist, d. h. daß x den Wert 1, 2, 3, 4 hat, resp. den Wert

$$\frac{2}{7},\ \frac{3}{7},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{7};$$

[*) In der Originalarbeit ist die Tabelle über die Anzahlen weißer Kugeln nicht frei von Druckfehlern.]

und dieselben Zahlen drücken auch (infolge der Symmetrie des obigen Schemas) die Wahrscheinlichkeiten aus, daß die Unbekannte y den Wert 1, 2, 3 4 hat. Wir finden also, daß der wahrscheinlichste Wert von x gleich 2, der von y gleich 2 ist; und doch haben wir vorher gesehen, daß das wahrscheinlichste Wertsystem der beiden Unbekannten das System $x = 1$, $y = 1$ ist. Die Wichtigkeit dieser Bemerkung wird in einer späteren Mitteilung sich herausstellen.

Ganz ähnlich verhält es sich, wenn die Werte der unbekannten Größen ein Gebiet stetig erfüllen. Ist z. B.

$$\frac{1}{2\pi}(x^2 + 3\,y^2)\,e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

die Wahrscheinlichkeit, daß die Abszisse eines unbekannten Punktes in dem unendlich kleinen Intervall zwischen x und $x + dx$, und daß seine Ordinate zugleich zwischen y und $y + dy$ liegt, so findet man

$$\frac{1}{4\sqrt{\pi}}(2\,x^2 + 3)\,e^{-x^2}\,dx$$

als Wahrscheinlichkeit, daß seine Abszisse zwischen x und $x + dx$ liegt, und ebenso

$$\frac{1}{4\sqrt{\pi}}(6\,y^2 + 1)\,e^{-y^2}\,dy$$

als Wahrscheinlichkeit, daß seine Ordinate zwischen y und $y + dy$ liegt. Die erste Wahrscheinlichkeit wird ein Maximum für die beiden Systeme

$$x = 0, \quad y = \pm 1;$$

die zweite für den Wert

$$x = 0;$$

die dritte für die beiden Werte

$$y = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}.$$

In diesem Falle stimmt das System der beiden wahrscheinlichsten Werte zwar sehr nahe, aber doch nicht vollständig mit dem wahrscheinlichsten Wertsystem überein.