XIII.

Erläuterungen zu zwei Fragmenten von Riemann.

[Bernhard Riemanns gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlaß, 2. Aufl., S. 466—478 (1892)].

Die Entstehungszeit (September 1852) des ersten der beiden Fragmente[*)] macht es wahrscheinlich, daß Riemann darauf ausging, für die Abhandlung über die trigonometrischen Reihen[**)] Beispiele von Funktionen zu finden, die unendlich oft in jedem Intervall unstetig werden, und vielleicht sollte die zweite Untersuchung[***)], welche sich auf einem kaum leserlichen Blatte findet, demselben Zwecke dienen. Die hier von Riemann benutzte Methode zur Bestimmung des Verhaltens der in der Theorie der elliptischen Funktionen auftretenden Modulfunktionen für den Fall, daß das komplexe Periodenverhältnis

(1) $$\omega = \frac{K'i}{K} = \frac{\log q}{\pi i}$$

sich einem rationalen Werte nähert, gestattet aber zugleich eine sehr interessante Anwendung auf die sogenannte Theorie der unendlich vielen Formen der ϑ-Funktionen, nämlich auf die Bestimmung der bei der Transformation erster Ordnung auftretenden Konstanten, welche bekanntlich von Jacobi und Hermite auf die Gaußschen Summen, also auf die Theorie der quadratischen Reste zurückgeführt ist. Die Darstellung dieses Zusammenhangs bildet den Gegenstand der folgenden Erläuterungen.

Den Mittelpunkt der Theorie dieser Modulfunktionen, welche man auch ganz unabhängig von der der elliptischen Funktionen aufstellen kann, und welche seit dem Erscheinen der ersten Auflage von Riemanns Werken der Gegenstand zahlreicher Untersuchungen geworden ist, bildet in gewissem Sinne die Funktion

(2) $$\eta(\omega) = 1^{\frac{\omega}{24}} \Pi(1 - 1^{\omega\nu}) = q^{\frac{1}{12}} \Pi(1 - q^{2\nu}),$$

wo zur Abkürzung

(3) $$e^{2\pi i z} = 1^z, \quad \text{also} \quad q = 1^{\frac{\omega}{2}}$$

[*) B. Riemanns ges. mathem. Werke usw., 2. Aufl., S. 455—461.]
[**) B. Riemanns ges. mathem. Werke usw., 2. Aufl., S. 227—264.]
[***) B. Riemanns ges. mathem. Werke usw., 2. Aufl., S. 461—465.]

gesetzt ist, und wo das Produktzeichen sich auf alle natürlichen Zahlen ν erstreckt. Da diese Funktion der komplexen Variablen $\omega = x + yi$, deren Ordinate x stets positiv ist, im Innern des hierdurch begrenzten, einfach zusammenhängenden Gebietes nirgends Null oder unendlich groß wird, so sind auch alle Potenzen von $\eta(\omega)$ mit beliebigen Exponenten, und ebenso $\log \eta(\omega)$ durchaus einwertige Funktionen von ω, sobald ihr Wert an einer bestimmten Stelle festgesetzt ist. Die Funktion $\log \eta(\omega)$ soll dadurch definiert werden, daß, wenn y über alle Grenzen wächst, also q verschwindet, die Größe

$$\log \eta(\omega) - \frac{\omega \pi i}{12} = 0 \tag{4}$$

wird; dann ist $\log \eta(\omega)$ konjugiert mit $\log \eta(-\omega')$, wo ω', wie immer im folgenden, die mit ω konjugierte Größe bedeutet. Nun ist bekanntlich (Fundam. nova § 36)

$$\eta(2\omega)\,\eta\left(\frac{\omega}{2}\right)\eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right) = 1^{\frac{1}{48}}\,\eta(\omega)^3,$$

$$\sqrt{k} = 1^{\frac{1}{48}}\sqrt{2}\,\frac{\eta(2\omega)}{\eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right)},$$

$$\sqrt[4]{k'} = 1^{\frac{1}{48}}\,\frac{\eta\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right)},$$

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1^{-\frac{1}{24}}\,\frac{\eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right)^2}{\eta(\omega)},$$

also nach der obigen Festsetzung:

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
&\log \eta(2\omega) + \log \eta\left(\frac{\omega}{2}\right) + \log \eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right) = \frac{\pi i}{24} + 3\log \eta(\omega),\\
&\log k = \log 4 + \frac{\pi i}{6} + 4\log \eta(2\omega) - 4\log \eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right),\\
&\log k' = \frac{\pi i}{6} + 4\log \eta\left(\frac{\omega}{2}\right) - 4\log \eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right),\\
&\log \frac{2K}{\pi} = -\frac{\pi i}{6} + 4\log \eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right) - 2\log \eta(\omega),
\end{aligned}\right.$$

wo die Logarithmen linker Hand (wie in den Fund. nova § 40) als einwertige Funktionen von ω so definiert sind, daß die drei Größen

$$log\, k - log\, 4 - \frac{\omega\pi i}{2} = log\, k - log\, 4 \sqrt[4]{q},$$

$$log\, k' \quad \text{und} \quad log\, \frac{2K}{\pi}$$

mit q unendlich klein werden.

Aus diesem Verhalten der Funktionen ergibt sich nun mit Hilfe der Transformation erster Ordnung der ϑ-Funktionen das von Riemann untersuchte Verhalten bei Annäherung von ω an einen reellen rationalen Wert, wobei q sich zugleich einer bestimmten Einheitswurzel q_0 nähert. Setzt man

$$\begin{aligned}\vartheta_1(z, \omega) &= \sum 1^{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\omega}{2} + \left(s+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \\ &= 2\eta(\omega)\, 1^{\frac{\omega}{12}} sin\, z\pi\, \Pi(1 - 1^{\omega\nu + z})(1 - 1^{\omega\nu - z}),\end{aligned}$$

wo die Summation auf alle ganzen Zahlen s auszudehnen ist, so wird, wenn man die nach z genommene Derivierte durch einen Akzent bezeichnet,

$$\vartheta_1'(0, \omega) = 2\pi\eta(\omega)^3.$$

Sind nun α, β, γ, δ vier der Bedingung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \tag{6}$$

genügende ganze Zahlen, so ist bekanntlich

$$\vartheta_1\left(z, \frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right) = c\sqrt{\alpha+\beta\omega}\, 1^{\frac{1}{2}\beta(\alpha+\beta\omega)z^2}\, \vartheta_1\left((\alpha+\beta\omega)z, \omega\right),$$

wo c eine von α, β, γ, δ und der Wahl der Quadratwurzel abhängige achte Einheitswurzel bedeutet, deren Bestimmung von Hermite auf die Gaußschen Summen zurückgeführt ist (Liouvilles Journal, Serie II, T. III, 1858). Für $z = 0$ ergibt sich hieraus

$$\vartheta_1'\left(0, \frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right) = c(\alpha+\beta\omega)^{\frac{3}{2}}\, \vartheta_1'(0, \omega),$$

also

$$\eta\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right) = c^{\frac{1}{3}}(\alpha+\beta\omega)^{\frac{1}{2}}\, \eta(\omega), \tag{7}$$

und aus dieser Transformation von $\eta(\omega)$ ist diejenige von $log\, \eta(\omega)$ abzuleiten.

Der Fall $\beta = 0$ erledigt sich unmittelbar durch die Definitionen (2) und (4) von $\eta(\omega)$, $log\,\eta(\omega)$ und gibt

$$(8) \qquad log\,\eta(1+\omega) = log\,\eta(\omega) + \frac{\pi i}{12},$$

oder allgemeiner, wenn n irgend eine ganze Zahl ist,

$$(9) \qquad log\,\eta(n+\omega) = log\,\eta(\omega) + \frac{n\pi i}{12}.$$

Ist aber β von Null verschieden, so wird die Größe

$$\mu = -(\alpha + \beta\omega)^2$$

nirgends negativ, und man kann folglich $log\,\mu$ eindeutig so definieren, daß der imaginäre Bestandteil stets zwischen $\pm\pi i$ bleibt, und folglich konjugierten Werten von μ auch konjugierte Werte von $log\,\mu$ entsprechen; dann wird zufolge (7)

$$(10) \quad log\,\eta\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right) = log\,\eta(\omega) + \frac{1}{4}\,log\left\{-(\alpha+\beta\omega)^2\right\} + (\alpha,\beta,\gamma,\delta)\frac{\pi i}{12},$$

wo $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ eine durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vollständig bestimmte ganze Zahl bedeutet, welche dieselbe bleibt, wenn diese vier Zahlen mit (-1) multipliziert werden. Die vollständige Bestimmung dieser Zahl leistet offenbar noch sehr viel mehr, als die der obigen Einheitswurzel c, und bildet den eigentlichen Gegenstand der folgenden Untersuchung.

Zunächst läßt sich $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ auf eine nur von α, β abhängige Zahl zurückführen. Genügen nämlich die Zahlen γ', δ' ebenfalls der Bedingung $\alpha\delta' - \beta\gamma' = 1$, so ist bekanntlich $\gamma' = \gamma + n\alpha$, $\delta' = \delta + n\beta$, wo n jede ganze Zahl bedeutet; mithin wird nach (9)

$$log\,\eta\left(\frac{\gamma'+\delta'\omega}{\alpha+\beta\omega}\right) = log\,\eta\left(n + \frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right) = log\,\eta\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right) + \frac{n\pi i}{12},$$

und hieraus folgt nach (10), daß

$$(\alpha, \beta, \gamma', \delta') - \frac{\delta'}{\beta} = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) - \frac{\delta}{\beta}$$

nur von den beiden Zahlen α, β abhängt; man kann daher

$$(11) \qquad \beta(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \alpha + \delta - 2(\alpha, \beta),$$

also

$$(12) \quad log\,\eta\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right) = log\,\eta(\omega) + \frac{1}{4}\,log\left\{-(\alpha+\beta\omega)^2\right\} + \frac{\alpha+\delta-2(\alpha,\beta)}{12\beta}\,\pi i$$

setzen, wo $2(\alpha, \beta)$ und, wie sich später ergibt, auch (α, β) selbst eine ganze, lediglich von den beiden relativen Primzahlen α, β abhängende Zahl bedeutet; zugleich ergibt sich

$$(13)\qquad (-\alpha, -\beta) = -(\alpha, \beta).$$

Ersetzt man ferner alle Glieder der Gleichung (12) durch die zugehörigen konjugierten Größen, so erhält man nach den obigen Bemerkungen

$$log\, \eta\left(-\frac{\gamma+\delta\omega'}{\alpha+\beta\omega'}\right) = log\, \eta(-\omega') + \frac{1}{4} log\left\{-(\alpha+\beta\omega')^2\right\} - \frac{\alpha+\delta-2(\alpha, \beta)}{12\beta}\pi i,$$

und da die linke Seite nach (12) auch in der Form

$$log\, \eta\left(\frac{-\gamma+\delta(-\omega')}{\alpha-\beta(-\omega')}\right) = log\, \eta(-\omega') + \frac{1}{4} log\left\{-(\alpha+\beta\omega')^2\right\} + \frac{\alpha+\delta-2(\alpha, -\beta)}{12(-\beta)}\pi i$$

dargestellt werden kann, so ergibt sich

$$(14)\qquad (\alpha, -\beta) = (\alpha, \beta)$$

und zufolge (13) auch

$$(15)\qquad (-\alpha, \beta) = -(\alpha, \beta).$$

Soll ferner der Satz (12) auch noch für den Fall $\beta = 0$, $\alpha = \delta = \pm 1$ gelten, so ist die Definition des Symbols (α, β) durch die Festsetzung

$$(16)\qquad (\pm 1, 0) = \pm 1$$

zu vervollständigen, welche auch mit (13), (14), (15) harmoniert.

Aus (15) folgt $(0, \pm 1) = 0$; setzt man daher $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$, $\delta = 0$, so geht der Satz (12) über in den speziellen Fall der komplementären Transformation

$$(17)\qquad log\, \eta\left(\frac{-1}{\omega}\right) = log\, \eta(\omega) + \frac{1}{4} log(-\omega^2).$$

Ersetzt man nun in dem Satze (12) die Größe ω durch $1+\omega$ und durch $\frac{-1}{\omega}$, und drückt die Größen

$$log\, \eta\left(\frac{\gamma+\delta+\delta\omega}{\alpha+\beta+\beta\omega}\right) \quad \text{und} \quad log\, \eta\left(\frac{\delta-\gamma\omega}{\beta-\alpha\omega}\right)$$

wieder nach dem Satze (12) durch $log\, \eta(\omega)$ aus, so erhält man mit Rücksicht auf (8) und (17) leicht die beiden folgenden, für jedes Paar von relativen Primzahlen α, β geltenden Sätze

$$(18)\qquad (\alpha+\beta, \beta) = (\alpha, \beta),$$

$$(19)\qquad 2\alpha(\alpha, \beta) + 2\beta(\beta, \alpha) = 1 + \alpha^2 + \beta^2 - 3|\alpha\beta|,$$

wo $|\alpha\beta|$ den absoluten Wert von $\alpha\beta$ bedeutet. Mit Zuziehung des letzteren Satzes, welcher in naher Beziehung zu dem Reziprozitätssatz in der Theorie der quadratischen Reste steht, kann man der Gleichung (11) auch die Form

$$(20)\qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 2\gamma(\alpha, \beta) + 2\delta(\beta, \alpha) - (\alpha\gamma + \beta\delta) \pm 3\alpha\delta$$

geben, wo das Vorzeichen $\pm$ so zu wählen ist, daß $\pm\alpha\beta$ der absolute Wert von $\alpha\beta$ wird; hierdurch erscheint die zuerst in (10) auftretende Zahl $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ wieder in Form einer ganzen Zahl.

Es leuchtet nun ein, daß die beiden Sätze (18) und (19) nicht nur die früheren Eigenschaften (13) bis (16) in sich schließen, sondern auch ausreichen, um in jedem Falle den Wert des Symbols (α, β) durch eine Kettenbruch-Entwicklung vollständig, und zwar als ganze Zahl zu bestimmen. Dies geht schon aus dem Satze

$$(21)\qquad (\alpha, \alpha + \beta) = (\alpha, \beta) - (\beta, \alpha) + \beta - \alpha, \quad \text{wenn} \quad \alpha\beta \geqq 0,$$

hervor, welcher leicht aus (18) und (19) abgeleitet wird; und umgekehrt leuchtet ein, daß dieser Satz (21) in Verbindung mit (18), d. h. mit dem Satze

$$(22)\qquad (\alpha', \beta) = (\alpha, \beta), \quad \text{wenn} \quad \alpha' \equiv \alpha \pmod{\beta},$$

ebenfalls die vollständige Bestimmung des Symbols (α, β) enthält und eine sehr bequeme Berechnung einer Tabelle liefert. Es ist endlich sehr zweckmäßig, dem Symbol (α, β) auch dann eine bestimmte Bedeutung beizulegen, wenn die ganzen Zahlen α, β nicht relative Primzahlen sind, sondern einen beliebigen (positiven) größten gemeinsamen Teiler p haben; in diesem Falle setzen wir

$$(23)\qquad (\alpha, \beta) = p\left(\frac{\alpha}{p}, \frac{\beta}{p}\right),$$

weil dann offenbar die beiden Sätze (21), (22) ungeändert bestehen bleiben, während freilich das erste Glied 1 auf der rechten Seite des Satzes (19) durch p^2 zu ersetzen ist; aber in den beiden Sätzen (21), (22) ist jetzt auch ohne Zuziehung von (23) die vollständige Bestimmung von (α, β) enthalten, und sie gelten sogar für den Fall $\alpha = \beta = 0$, wenn

$$(24)\qquad (0, 0) = 0$$

gesetzt wird. Durch diese Erweiterung des Symbols (α, β) gelingt es oft, solche Sätze, die sonst in verschiedene Fälle zerfallen würden, in einem einzigen Ausspruch zu vereinigen (vgl. die in (28), (34) ent haltenen Sätze).

Obgleich nun das Symbol (α, β) durch die Eigenschaften (21), (22) für jedes Paar von ganzen rationalen Zahlen α, β vollständig bestimmt ist, so würde es doch schwer sein, aus ihnen einen allgemeinen Ausdruck für dasselbe abzuleiten. Mit Hilfe der von Riemann in dem zweiten Fragment angewandten Methode gelingt es aber, einen solchen Ausdruck in Form einer endlichen Summe aufzustellen. Diese Methode besteht in der Untersuchung des Verhaltens der Modulfunktionen, wenn $\omega = x + yi$ sich einem rationalen, in den kleinsten Zahlen ausgedrückten Bruche $\frac{-\alpha}{\beta}$ annähert. Geschieht diese Annäherung in der Weise, daß $\alpha + \beta x$ unendlich klein von höherer Ordnung wird als $\sqrt{y}$, so wird die Ordinate der in dem Satze (12) auftretenden Größe

$$\omega_1 = \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega} = \frac{\delta}{\beta} - \frac{1}{\beta(\alpha + \beta\omega)}$$

positiv unendlich groß, mithin nach (4)

$$\log \eta(\omega_1) - \frac{\omega_1 \pi i}{12} = 0,$$

also

$$\log \eta(\omega) + \frac{\pi i}{12\beta(\alpha + \beta\omega)} + \frac{1}{4}\log\left\{-(\alpha + \beta\omega)^2\right\} = \frac{2(\alpha, \beta) - \alpha}{12\beta}\pi i;$$

ersetzt man, um sich der Bezeichnung von Riemann zu nähern, α, β durch $-m$, n, so kann man diesen Satz so aussprechen: Nähert sich die Variable $\omega = x + yi$ dem irreduzibelen Bruche $m : n$ so an, daß $nx - m$ von höherer Ordnung unendlich klein wird als $\sqrt{y}$, so wird zuletzt

$$(25) \qquad \log \eta(\omega) + \frac{\pi i}{12n(n\omega - m)} + \frac{1}{4}\log\left\{-(n\omega - m)^2\right\} = \frac{m - 2(m, n)}{12n}\pi i.$$

Unterwirft man aber die Annäherung der schärferen Bedingung, daß $nx - m$ von höherer Ordnung unendlich klein wird als y^2, so verschwinden gleichzeitig die imaginären Bestandteile des zweiten und dritten Gliedes links, und folglich ergibt sich durch Subtraktion der konjugierten Größen der Annäherungssatz

$$(26) \qquad \log \eta(\omega) - \log \eta(-\omega') = \frac{m - 2(m, n)}{6n}\pi i,$$

welcher zufolge der obigen Erweiterung des Symbols (m, n) auch dann gilt, wenn die ganzen Zahlen m, n irgendwelchen gemeinsamen Teiler haben.

Bevor wir denselben benutzen, um unsere Aufgabe zu lösen, bemerken wir noch folgendes. Sind a, d positive ganze Zahlen und c eine beliebige ganze Zahl, und genügt die Annäherung von ω an ihren rationalen Grenzwert der letzten, schärferen Bedingung, so gilt dasselbe offenbar auch für die Annäherung der Größe

$$\frac{c+d\omega}{a} \text{ an den Wert } \frac{cn+dm}{an},$$

und folglich wird gleichzeitig mit (26) auch die Annäherung

$$\log \eta\left(\frac{c+d\omega}{a}\right) - \log \eta\left(-\frac{c+d\omega'}{a}\right) = \frac{cn+dm-2(cn+dm,\, an)}{6\,an}\pi i$$

eintreten. Nun besteht, wenn p eine Primzahl ist, der aus der Transformation $p$ter Ordnung oder aus (2) leicht abzuleitende Satz

$$\log \eta(p\omega) + \sum \log \eta\left(\frac{s+\omega}{p}\right) = \frac{(p-1)\pi i}{24} + (p+1)\log \eta(\omega), \tag{27}$$

wo s in der Summe die p Zahlen $0, 1, 2, \cdots, (p-1)$ zu durchlaufen hat; zieht man hiervon die durch den Übergang zu den konjugierten Größen entstehende Gleichung ab, so ergibt sich durch die Grenzannäherung der Satz

$$p(pm, n) + \sum (m+ns, np) = p(p+1)(m, n), \tag{28}$$

wo s ein beliebiges vollständiges Restsystem (mod. p) durchlaufen muß. Aus dem Satze (27) lassen sich auf verschiedene Weise allgemeinere Sätze ableiten, die für beliebige zusammengesetzte Zahlen p gelten, und aus jedem dieser Sätze entspringt wieder ein ähnlicher Satz über das Symbol (m, n); doch dürfen wir auf diese, an sich sehr interessanten Eigenschaften der Funktion $\log \eta(\omega)$ und des Symbols (m, n) hier nicht eingehen.

Indem wir uns nun unserer Aufgabe zuwenden, benutzen wir die aus (2) und (4) folgende Darstellung

$$\log \eta(\omega) = \frac{\omega \pi i}{12} + \sum \log(1 - 1^{\omega\nu}), \tag{29}$$

wo ν alle natürlichen Zahlen durchläuft, und die Logarithmen rechts zugleich mit 1^{ω} verschwinden; es wird daher

$$\log(1-1^{\omega\nu}) = -\sum \frac{1^{\omega\nu\mu}}{\mu},$$

wo auch μ alle natürlichen Zahlen durchläuft, und wenn man die Summation nach ν ausführt, so erhält man die Umformung von Jacobi (Fund. nova § 39)

$$\log \eta(\omega) = \frac{\omega\pi i}{12} - \sum \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1^{\omega\mu}}{1 - 1^{\omega\mu}}, \tag{30}$$

mithin

$$\log \eta(\omega) - \log \eta(-\omega') = \frac{(\omega + \omega')\pi i}{12} - \sum \frac{a_\mu}{\mu},$$

wo zur Abkürzung

$$a_\mu = \frac{1}{1 - 1^{\omega\mu}} - \frac{1}{1 - 1^{-\omega'\mu}}$$

gesetzt ist.

Jetzt lassen wir die positive Ordinate y der Größe $\omega = x + yi$ unendlich klein werden, während die Abszisse x von vornherein den konstanten rationalen Wert $m:n$ besitzen soll, wodurch die obige, schärfere Bedingung offenbar erfüllt ist. Die ganzen Zahlen m, n dürfen im folgenden einen beliebigen gemeinsamen Teiler haben, doch nehmen wir den Nenner n als positiv an. Setzen wir zur Abkürzung

$$1^x = 1^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{2m\pi i}{n}} = \theta; \quad 1^{yi} = e^{-2\pi y} = r,$$

so genügt die Konstante θ der Bedingung $\theta^n = 1$, und r bedeutet einen variablen positiven echten Bruch, der wachsend sich dem Werte 1 annähert; zugleich ist

$$a_\mu = \frac{1}{1 - \theta^\mu r^\mu} - \frac{1}{1 - \theta^{-\mu} r^\mu},$$

und es handelt sich um die Bestimmung des Grenzwertes von

$$\log \eta(\omega) - \log \eta(-\omega') = \frac{m\pi i}{6n} - \sum \frac{a_\mu}{\mu}.$$

Durch Vereinigung von je zwei Zählern a_μ, welche den Zahlen $\mu = sn + \nu$ und $\mu = (s+1)n - \nu$ entsprechen, wo $0 < \nu < \frac{1}{2}n$, ergibt sich nun leicht, daß der absolute Betrag der Summe

$$A_\mu = a_1 + a_2 + \cdots + a_\mu$$

für alle Werte von r einschließlich $r = 1$ unterhalb einer von r und μ unabhängigen, endlichen Konstanten bleibt, und hieraus folgt nach einem allgemeinen Satze*), daß die Reihe

$$\sum \frac{a_\mu}{\mu} = \sum A_\mu \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu + 1}\right),$$

---

*) Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, 2. Aufl., § 143.

wenn ihre Glieder nach wachsenden μ geordnet werden, auch noch für $r = 1$ konvergiert und an dieser Stelle stetig ist; mit Rücksicht auf den Satz (26) ergibt sich daher

$$\frac{(m, n)\pi i}{3n} = \sum \frac{b_\mu}{\mu},$$

wo

$$b_\mu = \lim a_\mu = 0 \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{1-\theta^\mu} - \frac{1}{1-\theta^{-\mu}},$$

je nachdem $\theta^\mu = 1$ ist oder nicht; durch Anwendung der Transformation

$$\frac{1}{1-\theta^\mu} = -\frac{1}{n}\sum \sigma\,\theta^{\mu\sigma},$$

wo σ die Werte $1, 2, \cdots, (n-1)$ durchläuft, erhält man aber die für alle μ geltende Darstellung

$$b_\mu = \frac{1}{n}\sum \sigma(\theta^{-\mu\sigma} - \theta^{\mu\sigma}),$$

aus welcher sich die Summe unserer unendlichen Reihe auch ohne Benutzung bestimmter Integrale sehr leicht ergibt.

Ist z irgend ein reeller Wert, so wollen wir den von z um eine ganze Zahl abstehenden, zwischen $\pm\frac{1}{2}$ liegenden Wert der Deutlichkeit halber nicht mit (z), sondern mit $((z))$ bezeichnen; für solche Werte von z aber, welche in der Mitte zwischen zwei ganzen Zahlen liegen, soll nach Riemann (S. 242 und 457)[*)] die hier unstetige periodische Funktion $((z)) = 0$, also gleich dem arithmetischen Mittel aus den beiden unendlich nahe benachbarten Werten $((z+0)) = -\frac{1}{2}$ und $((z-0)) = +\frac{1}{2}$ gesetzt werden. Nach einem sehr bekannten Satze aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, der sich auch unmittelbar aus der Logarithmen-Reihe ergibt, gilt dann stets die Darstellung

$$2\pi i((z)) = \sum \frac{(-1)^\mu(1^{-z\mu} - 1^{z\mu})}{\mu},$$

wo μ die natürlichen Zahlen wachsend durchläuft, also auch

$$(31) \qquad 2\pi i\left(\left(z-\frac{1}{2}\right)\right) = \sum \frac{1^{-z\mu} - 1^{z\mu}}{\mu}.$$

[*) Die Seitenangaben beziehen sich auf die 2. Aufl. von B. Riemanns ges. mathem. Werken usw.]

Hieraus folgt

$$\sum \frac{\theta^{-\mu\sigma} - \theta^{\mu\sigma}}{\mu} = 2\pi i\left(\left(\frac{\sigma m}{n} - \frac{1}{2}\right)\right),$$

mithin

$$\frac{(m, n)}{6n} = \sum \frac{\sigma}{n}\left(\left(\frac{\sigma m}{n} - \frac{1}{2}\right)\right);$$

da aber, wie sich durch Verwandlung von σ in $n - \sigma$ ergibt,

$$\frac{1}{2}\sum\left(\left(\frac{\sigma m}{n} - \frac{1}{2}\right)\right) = 0$$

ist, so erhält man hieraus leicht durch Subtraktion den folgenden Ausdruck

$$(m, n) = 6n\sum\left(\left(\frac{s}{n} - \frac{1}{2}\right)\right)\left(\left(\frac{ms}{n} - \frac{1}{2}\right)\right), \tag{32}$$

wo n positiv angenommen ist, und s ein beliebiges vollständiges Restsystem (mod. n) durchläuft. Dieser Ausdruck für das Symbol (m, n) in Form einer endlichen Summe gestattet noch manche Umformungen und Vereinfachungen, auf welche wir unten noch näher eingehen wollen. Daß derselbe auch dann gilt, wenn die Zahlen m, n einen beliebigen (positiven) gemeinschaftlichen Teiler p haben, läßt sich mit Rücksicht auf (23) nachträglich mit Hilfe des auch sonst wichtigen Satzes

$$\sum\left(\left(\frac{x + p'}{p} - \frac{1}{2}\right)\right) = \left(\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) \tag{33}$$

leicht bestätigen, in welchem x eine beliebige reelle Zahl bedeutet und p' ein vollständiges Restsystem (mod. p) durchläuft.

Machen wir jetzt die Voraussetzung, daß m, n relative Primzahlen sind, und setzen wir zur Abkürzung

$$B = \frac{\pi i}{24n(n\omega - m)}, \quad C = \frac{1}{4}\log\left\{-(n\omega - m)^2\right\},$$

$$\mu = \frac{1 - (-1)^m}{2}, \quad \nu = \frac{1 - (-1)^n}{2},$$

so ist $(1 - \mu)(1 - \nu) = 0$, $m \equiv \mu$, $n \equiv \nu$ (mod. 2), und aus dem Annäherungs-Satze (25)

$$\log \eta(\omega) = \frac{m - 2(m, n)}{12n}\pi i - 2B - C$$

folgt gleichzeitig

$$\log \eta(2\omega) \quad = \frac{m-(2m,n)}{6n}\pi i-(4-3\nu)B-C+\frac{\nu}{2}\log 2,$$

$$\log \eta\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad = \frac{m-2(m,2n)}{24n}\pi i-(4-3\mu)B-C+\frac{1-\mu}{2}\log 2,$$

$$\log \eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right)=\frac{m+n-2(m+n,2n)}{24n}\pi i+(2-3\mu-3\nu)B-C+\frac{\mu+\nu-1}{2}\log 2;$$

die hier auftretenden Symbole sind zufolge (28) durch die stets geltende Relation

(34) $$2(2m,n)+(m,2n)+(m+n,2n)=6(m,n)$$

miteinander verbunden. Gleichzeitig ergeben sich hieraus zufolge (5) die Annäherungen

$$(35)\begin{cases}\log k \quad = \dfrac{3m+2(m+n,2n)-4(2m,n)}{6n}\pi i+(\mu+2\nu-2)(12B-2\log 2),\\[2mm] \log k' \quad = \dfrac{(m+n,2n)-(m,2n)}{3n}\pi i+(2\mu+\nu-2)(12B-2\log 2),\\[2mm] \log \dfrac{2K}{\pi} = \dfrac{(m,n)-(m+n,2n)}{3n}\pi i+(1-\mu-\nu)(12B-2\log 2)-2C.\end{cases}$$

Die Vergleichung dieser Sätze mit den acht Formeln des zweiten Fragments ergibt, daß Riemann auf die Bestimmung der unendlich großen reellen Bestandteile, welche in den Gliedern mit B, C enthalten sind, weniger Wert gelegt hat; sie sind zum Teil ungenau dargestellt, zum Teil ganz weggelassen. Auch in den imaginären Bestandteilen fanden sich (bei der dritten, vierten und fünften Formel) einige kleine Versehen, die sich aber ohne Zwang schon in der ersten Auflage berichtigen ließen, während die reellen Teile auch jetzt ungeändert abgedruckt werden. Daß die Riemannschen Formeln in den imaginären Bestandteilen mit den vorstehenden Sätzen (35) übereinstimmen, ist nicht überall auf den ersten Blick zu erkennen, und es würde zu weit führen, diese Übereinstimmung hier vollständig nachzuweisen; doch wollen wir, weil der Gegenstand wichtig genug ist, zur Erleichterung noch folgende Bemerkungen hinzufügen.

Unter dem Nenner einer rationalen Zahl x verstehen wir immer die kleinste positive ganze Zahl n, für welche das Produkt nx ebenfalls eine ganze Zahl m wird, und diese nennen wir den Zähler von x. Es gibt dann immer unendlich viele Zahlen x', welche denselben Nenner n haben, und deren Zähler m' der Kongruenz $mm' \equiv 1 \pmod{n}$

genügen, und jede solche Zahl x' soll ein Gefährte (socius) von x heißen (vgl. Art. 77 der Disqu. Arithm.). Nennt man zwei Zahlen x, y schlechthin kongruent, wenn ihre Differenz eine ganze Zahl ist, und bezeichnet dies durch $x \equiv y$, so entspricht jeder Klasse von kongruenten Zahlen x eine und nur eine Klasse von Zahlen x', und wenn p eine ganze Zahl, und zwar relative Primzahl zu n bedeutet, so ist $p(px')' \equiv x$. Setzen wir nun zur Abkürzung

$$D(x) = \frac{(m, n)}{n} = 6 \sum \left(\left(\frac{s}{n} - \frac{1}{2}\right)\right)\left(\left(\frac{ms}{n} - \frac{1}{2}\right)\right), \tag{36}$$

so hat diese Funktion, wie sich aus dem vorstehenden Ausdrucke, oder auch aus (18), (15), (12), (34) leicht ergibt, die Eigenschaften

$$\left\{\begin{aligned} &D(x) = D(x+1) = -D(-x) = D(x'),\\ &D(2x) + D\left(\frac{x}{2}\right) + D\left(\frac{x+1}{2}\right) = 3D(x). \end{aligned}\right. \tag{37}$$

Ersetzt man die in den Riemannschen Formeln bisweilen benutzte Funktion $E(x)$, welche die größte in x enthaltene ganze Zahl bedeutet, durch den Ausdruck

$$E(x) = x - \frac{1}{2} - \left(\left(x - \frac{1}{2}\right)\right), \tag{38}$$

in welchem nur, wenn x selbst eine ganze Zahl ist, statt $E(x)$ wieder das arithmetische Mittel $x - \frac{1}{2}$ aus $E(x+0)$ und $E(x-0)$ zu nehmen ist, so treten in den meisten dieser Formeln zuletzt nur noch Funktionen von der Form

$$R(x) = \sum ((\nu x)), \quad S(x) = \sum \left(\left(\nu x - \frac{1}{2}\right)\right) \tag{39}$$

auf, wo die Summationen sich auf alle diejenigen, nicht negativen ganzen Zahlen ν beziehen, welche kleiner als der halbe Nenner von x sind; diese Funktionen haben die Eigenschaften

$$\left\{\begin{aligned} &R(x) = R(x+1) = -R(-x)\\ &S(x) = S(x+1) = -S(-x)\\ &R(x) - S(x) = R(x') - S(x') = \frac{1}{2}h, \end{aligned}\right. \tag{40}$$

wo h den Überschuß der Anzahl der positiven Glieder $((\nu x))$ über die der negativen bedeutet, und stehen in folgenden Beziehungen zu der Funktion $D(x)$. Allgemein ist nach (36)

$$6S(x') = D(2x) - 2D(x). \tag{41}$$

Hat die Zahl x einen geraden Nenner n, so ist

$$(42)\quad \begin{cases} R(x) = -S(x) = \frac{1}{4}h = \frac{1}{3}D(x) - \frac{1}{6}D(2x), \\ R\left(\frac{x}{2}\right) + R\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2R(x). \end{cases}$$

Hat aber die Zahl x einen ungeraden Nenner n, so zerfallen die Zahlen y, welche der Bedingung $2y \equiv x$ genügen, also $\equiv \frac{1}{2}x$ oder $\equiv \frac{1}{2}(x+1)$ sind, in zwei Klassen von Zahlen, von denen diejenigen, welche denselben Nenner n haben, mit x_1, die übrigen mit x_2 bezeichnet werden sollen; die letzteren haben den Nenner $2n$. Dann ist

$$(43)\quad R(x_2) = R(x) - S(x) = 2R(x) - S(2x)$$

und

$$(44)\quad \begin{cases} D(x) \;\;\, = 6R(x_2) - 4R(x) - 4R(x'), \\ D(2x) = 6R(x_2) - 8R(x) - 2R(x'), \\ D(x_1) \;\, = 6R(x_2) - 2R(x) - 8R(x'), \\ D(x_2) \;\, = 6R(x_2) - 2R(x) - 2R(x'), \end{cases}$$

wodurch wieder die obige Bedingung

$$(45)\quad D(2x) + D(x_1) + D(x_2) = 3D(x)$$

erfüllt wird. Die Übereinstimmung der drei ersten Darstellungen in (44) ergibt sich aus den früheren Eigenschaften von $R(x)$ mit Rücksicht auf die Beziehungen

$$x_1 \equiv x_2 + \frac{1}{2} \equiv (2x')', \quad \left(x + \frac{1}{2}\right)' \equiv (4x)' + \frac{1}{2}, \quad (x_2)' \equiv (x')_2;$$

und umgekehrt ist

$$(46)\quad \begin{cases} 6R(x) \;\;\, = 3D(x) - 2D(2x) - \;\; D(x_1) = \;\; D(x_2) - D(2x) \\ 6R(x') \;\, = 3D(x) - \;\; D(2x) - 2D(x_1) = \;\; D(x_2) - D(x_1) \\ 6R(x_2) = 5D(x) - 2D(2x) - 2D(x_1) = 2D(x_2) - D(x). \end{cases}$$

Die Herleitung dieser und zahlreicher anderer Relationen, welche alle in naher Beziehung zu der Theorie der quadratischen Reste stehen, müssen wir uns aber für eine andere Gelegenheit versparen.

Erläuterungen zur vorstehenden Abhandlung.

Die Bedeutung der Abhandlung geht weit hinaus über ihre erste Absicht, nur eine Erläuterung zu den beiden Riemannschen „Fragmenten über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunktionen" sein zu wollen. Die Methoden der Abhandlung führen nicht nur zur Bestimmung derjenigen bei der linearen Transformation der ϑ-Funktionen auftretenden Einheitswurzeln, die bereits von Jacobi und Hermite berechnet wurden (vgl. den Anfang der Abhandlung), sondern auch zur Bestimmung der 24sten Einheitswurzel, die bei der linearen Transformation der 24sten Wurzel der Diskriminante

$$\sqrt[24]{\Delta(\omega_1, \omega_2)} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}}\, \eta(\omega)$$

auftritt. Über den letzteren Gegenstand vgl. man die Dissertation von Th. Molien: „Über die lineare Transformation der elliptischen Funktionen" (Dorpat, 1885).

Das Problem Dedekinds umfaßt sofort alle Wurzeln aus η, indem er das Verhalten der in der positiven ω-Halbebene eindeutigen Funktion $\log \eta(\omega)$ gegenüber der Modulgruppe festzustellen anstrebt. Das Problem wird zurückgeführt auf die Bestimmung der durch das Symbol (m, n) bezeichneten ganzen Zahl. Es wird zunächst die Berechnung von (m, n) durch ein Kettenbruchverfahren gelehrt und sodann eine allgemein gültige Darstellung von (m, n) in einer endlichen Summe mittels des Restsymbols $((x))$ entwickelt.

Dedekind betont den Zusammenhang des Symbols (m, n) mit der Theorie der quadratischen Reste und hat demselben mit Recht überhaupt eine große zahlentheoretische Bedeutung zuerkannt. Aber auch die Darstellung von (m, n) durch das Restsymbol $((x))$ gibt noch keineswegs einen tieferen Einblick in die Abhängigkeit der ganzen Zahl (m, n) von m und n. Man weiß lediglich, daß die Zahlen (m, n) mod 24 mit gewissen rationalen Ausdrücken in m und n kongruent sind. Es hängt dies, um beim Legendreschen Integralmodul k^2 zu bleiben, mit dem Umstand zusammen, daß von allen Wurzeln aus k^2 nur k^2, k, $\sqrt{k}$ und $\sqrt[4]{k}$ sogenannte „Kongruenzmoduln" sind, d. h. daß sich nur die zu ihnen gehörenden Teiler der Modulgruppe durch Kongruenzen erklären lassen. Es sind Versuche gemacht, zu arithmetischen Aussagen über die zu höheren Wurzeln aus k^2 gehörenden Teiler der Modulgruppe zu gelangen. Diese Versuche schlossen mit dem negativen Ergebnis, daß diese Teiler eben „Nicht-Kongruenzgruppen" seien, worüber die Arbeiten von G. Pick, Mathem. Ann., Bd. 28, S. 119 (1886) und R. Fricke, ebenda, Bd. 28, S. 99 (1886) zu vergleichen sind. Von einer tieferen Erforschung des Dedekindschen Symbols (m, n) darf man neue Aufschlüsse in dieser Richtung erwarten.

Fricke.