

XIV.

Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen.

[Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 83, S. 265—292 (1877)].

Sie haben mich aufgefordert, eine etwas ausführlichere Darstellung der Untersuchungen auszuarbeiten, von welchen ich, durch das Erscheinen der Abhandlung von Fuchs*) veranlaßt, mir neulich erlaubt habe Ihnen eine kurze Übersicht mitzuteilen; indem ich Ihrer Einladung hiermit Folge leiste, beschränke ich mich im wesentlichen auf den Teil dieser Untersuchungen, welcher mit der eben genannten Abhandlung zusammenhängt, und ich bitte Sie auch, die Übergehung einiger Nebenpunkte entschuldigen zu wollen, da es mir im Augenblick an Zeit fehlt, alle Einzelheiten auszuführen. Die in Rede stehenden Untersuchungen habe ich schon vor einer Reihe von Jahren angestellt, als ich erkannte, daß die Bestimmung der Anzahl der Idealklassen in kubischen Körpern (d. h. in Gebieten von Zahlen, welche aus Wurzeln von Gleichungen dritten Grades gebildet sind) innig zusammenhängt mit der Theorie der singulären Moduln der elliptischen Funktionen, für welche die komplexe Multiplikation stattfindet. Bei meinen Versuchen, tiefer in diese mir unentbehrliche Theorie einzudringen und mir einen einfachen Weg zu den ausgezeichnet schönen Resultaten von Kronecker zu bahnen, die leider noch immer so schwer zugänglich sind, erkannte ich sogleich die fundamentale Wichtigkeit des Punktes, auf welchen auch Hermite neulich in einer Anmerkung zu der Abhandlung von Fuchs (S. 29) aufmerksam gemacht hat, und welcher in der Tat zur Grundlage für meine Theorie geworden ist. Es handelt sich um folgendes. Bedeutet

$$\omega = \frac{K'i}{K}$$

[*) Journ. f. reine u. angew. Mathem., Bd. 83, S. 13—37.]

das Periodenverhältnis der elliptischen Funktionen ($= Hi$ nach der Bezeichnung von Fuchs), so ist das Quadrat $k = \kappa^2$ des Integralmoduls κ eine einwertige Funktion von ω , welche Hermite mit $\varphi(\omega)^8$ bezeichnet, und aus der Transformation erster Ordnung folgt leicht, daß k unverändert bleibt, wenn ω durch

$$\omega_1 = \frac{\gamma + \delta \omega}{\alpha + \beta \omega}$$

ersetzt wird, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier ganze rationale Zahlen bedeuten, welche der Bedingung

$$\alpha \delta - \beta \gamma = 1$$

genügen, und von denen β, γ gerade sind. Der zu beweisende Satz besteht nun darin, daß außer diesen Zahlen ω_1 keine andere existiert, welche denselben Wert $k = \varphi(\omega)^8 = \varphi(\omega_1)^8$ hervorbringt. Bevor ich zur Darstellung meiner Theorie übergehe, will ich zunächst zeigen, daß dieser Satz sich auch aus der gewöhnlichen Theorie der elliptischen Funktionen ohne Schwierigkeit ableiten läßt.

Bedeutet ω eine komplexe Größe mit positiv-imaginärem Bestandteil, ferner z eine willkürliche Variable, und bedient man sich der folgenden Bezeichnungen

$$1^z = e^{2\pi iz},$$

$$\vartheta(z, \omega) = \sum 1^{s^2 \frac{\omega}{2} + s(z - \frac{1}{2})},$$

$$\vartheta_1(z, \omega) = \sum 1^{(s + \frac{1}{2})^2 \frac{\omega}{2} + (s + \frac{1}{2})(z - \frac{1}{2})},$$

$$\vartheta_2(z, \omega) = \sum 1^{(s + \frac{1}{2})^2 \frac{\omega}{2} + (s + \frac{1}{2})z},$$

$$\vartheta_3(z, \omega) = \sum 1^{s^2 \frac{\omega}{2} + sz},$$

wo s alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, ferner

$$\sqrt{\kappa} = \frac{\vartheta_2(0, \omega)}{\vartheta_3(0, \omega)} = \varphi(\omega)^2; \quad \sqrt{\kappa'} = \frac{\vartheta(0, \omega)}{\vartheta_3(0, \omega)} = \psi(\omega)^2,$$

so ist

$$\kappa^2 + \kappa'^2 = 1,$$

und man kann

$$\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \frac{\vartheta_1(z, \omega)}{\vartheta(z, \omega)} = \sin am(2Kz, \kappa),$$

$$\sqrt{1-x} = \frac{\sqrt{\kappa'}}{\sqrt{\kappa}} \frac{\vartheta_2(z, \omega)}{\vartheta(z, \omega)} = \cos am(2Kz, \kappa),$$

$$\sqrt{1-\kappa^2 x} = \sqrt{\kappa'} \frac{\vartheta_3(z, \omega)}{\vartheta(z, \omega)} = \Delta am(2Kz, \kappa),$$

$$\frac{d\sqrt{x}}{dz} = 2K \sqrt{1-x} \sqrt{1-\kappa^2 x}$$

setzen, wo

$$2K = \frac{\vartheta_3(0, \omega) \vartheta_1'(0, \omega)}{\vartheta(0, \omega) \vartheta_2(0, \omega)} = \pi \vartheta_3(0, \omega)^2$$

ist. Wenn nun die Größe ω_1 ebenfalls einen positiv-imaginären Bestandteil hat und denselben Wert

$$\frac{\vartheta_2(0, \omega_1)^4}{\vartheta_3(0, \omega_1)^4} = x_1^2 = x^2 = k$$

hervorbringt, wie ω , so setze man

$$2K_1 = \pi \vartheta_3(0, \omega_1)^2$$

und führe eine neue Variable z_1 durch die Gleichung

$$K_1 z_1 = Kz$$

ein; wenn ferner mit $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{1-x_1}$, $\sqrt{1-kx_1}$ die Größen bezeichnet werden, welche ebenso von z_1 , ω_1 abhängen, wie \sqrt{x} , $\sqrt{1-x}$, $\sqrt{1-kx}$ von z , ω , so ergibt sich

$$\frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}\sqrt{1-kx}} = \frac{d\sqrt{x_1}}{\sqrt{1-x_1}\sqrt{1-kx_1}},$$

und hieraus durch Integration

$$\sqrt{x}\sqrt{1-x_1}\sqrt{1-kx_1} - \sqrt{x_1}\sqrt{1-x}\sqrt{1-kx} = C(1-kxx_1);$$

die Konstante C muß aber gleich Null sein, weil für $z = 0$ auch $z_1 = 0$ ist, also \sqrt{x} und $\sqrt{x_1}$ gleichzeitig verschwinden. Hieraus folgt, daß identisch $x = x_1$ ist (ja sogar $\sqrt{x} = \sqrt{x_1}$, $\sqrt{1-x} = \sqrt{1-x_1}$, $\sqrt{1-kx} = \sqrt{1-kx_1}$); mithin wird jede der vier Funktionen

$$\vartheta(z, \omega), \quad \vartheta_1(z, \omega), \quad \vartheta_2(z, \omega), \quad \vartheta_3(z, \omega)$$

stets und nur dann verschwinden, wenn die entsprechende der vier Funktionen

$$\vartheta(z_1, \omega_1), \quad \vartheta_1(z_1, \omega_1), \quad \vartheta_2(z_1, \omega_1), \quad \vartheta_3(z_1, \omega_1)$$

verschwindet. Die Funktion $\vartheta_1(z, \omega)$ verschwindet aber für alle Werte $z = r + s\omega$ und nur*) für diese, wo r, s willkürliche ganze Zahlen bedeuten; setzt man daher

$$z_1 = 1, \quad \text{so wird} \quad z = \frac{K_1}{K} = \alpha + \beta \omega,$$

$$z_1 = \omega_1, \quad \text{so wird} \quad z = \frac{K_1}{K} \omega_1 = \gamma + \delta \omega,$$

*) Dies folgt aus der Darstellung von $\vartheta_1(z, \omega)$ als unendliches Produkt, oder auch aus dem Satze $\int d \log \vartheta_1(z, \omega) = 2\pi i$, wo die Integration durch die Begrenzung eines elementaren Parallelogramms erstreckt ist.

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze rationale Zahlen bedeuten; mithin ist

$$(1) \quad \omega_1 = \frac{\gamma + \delta \omega}{\alpha + \beta \omega}, \quad (\alpha + \beta \omega) z_1 = z.$$

Setzt man umgekehrt

$$z = 1, \quad \text{so wird} \quad z_1 = \alpha_1 + \beta_1 \omega_1$$

$$z = \omega, \quad \text{so wird} \quad z_1 = \gamma_1 + \delta_1 \omega_1,$$

wo $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ ebenfalls ganze Zahlen bedeuten; es wird daher

$$(\alpha + \beta \omega) \alpha_1 + (\gamma + \delta \omega) \beta_1 = 1,$$

$$(\alpha + \beta \omega) \gamma_1 + (\gamma + \delta \omega) \delta_1 = \omega,$$

woraus, weil ω nicht reell ist,

$$\alpha \alpha_1 + \gamma \beta_1 = 1, \quad \beta \alpha_1 + \delta \beta_1 = 0,$$

$$\alpha \gamma_1 + \gamma \delta_1 = 0, \quad \beta \gamma_1 + \delta \delta_1 = 1,$$

also

$$(\alpha \delta - \beta \gamma) (\alpha_1 \delta_1 - \beta_1 \gamma_1) = 1,$$

mithin

$$\alpha \delta - \beta \gamma = \alpha_1 \delta_1 - \beta_1 \gamma_1 = \pm 1$$

folgt*). Hierin darf aber zufolge (1) nur das obere Zeichen genommen werden, weil der Koeffizient von i in beiden Größen ω und ω_1 dasselbe (positive) Vorzeichen hat; also ist

$$(2) \quad \alpha \delta - \beta \gamma = + 1.$$

Da ferner die Werte von z_1 , für welche $\vartheta(z_1, \omega_1)$ verschwindet, mit den Werten $r + (s + \frac{1}{2}) \omega_1$ zusammen fallen, so wird gleichzeitig

$$z = \frac{\omega}{2}, \quad z_1 = r + (s + \frac{1}{2}) \omega_1;$$

mithin ist zufolge (1)

$$(\alpha + \beta \omega) r + (\gamma + \delta \omega) (s + \frac{1}{2}) = \frac{\omega}{2},$$

$$\alpha r + \gamma (s + \frac{1}{2}) = 0,$$

also

$$(3) \quad \gamma \equiv 0 \pmod{2}.$$

Auf dieselbe Weise ergibt sich aus dem gleichzeitigen Verschwinden der Funktionen $\vartheta_2(z, \omega)$, $\vartheta_2(z_1, \omega_1)$ für $z = \frac{1}{2}$ auch

$$(4) \quad \beta \equiv 0 \pmod{2},$$

womit der in Rede stehende Satz vollständig bewiesen ist.

Dieser Beweis beruht offenbar darauf, daß die elliptischen Funktionen $\sin am(u, \kappa)$, $\cos am(u, \kappa)$, $\Delta am(u, \kappa)$ einwertige Funktionen auch von $k = \kappa^2$ sind. Der Satz selbst reizte mich aber bald, den

* Dies ist nur ein spezieller Fall eines allgemeinen Satzes aus der Theorie der Zahlensysteme, welche ich *endliche Moduln* genannt habe.

Zusammenhang zwischen den Größen ω , k , K ganz unabhängig von der Theorie der elliptischen Funktionen zu erforschen, und in diesem Streben bestärkte mich eine Bemerkung von Hermite, welcher an einer Stelle seiner kurzen Übersicht über die Theorie der elliptischen Funktionen hervorhebt, daß noch kein anderer Weg zu diesen Modul-funktionen führe, als der, welchen die Gründer der Theorie der elliptischen Funktionen eingeschlagen haben. Ich erlaube mir nun, Ihnen meine damals entstandene Theorie in ihren Grundzügen zu entwickeln; die Anwendung auf die Theorie der singulären Moduln, derentwegen die ganze Untersuchung angestellt ist, darf ich Ihnen vielleicht ein anderes Mal vorlegen.

§ 1.

Äquivalente Zahlen.

Zwei Zahlen ω , ω_1 sollen im folgenden *äquivalent* heißen, wenn es vier ganze (rationale) Zahlen α , β , γ , δ gibt, welche den beiden Bedingungen

$$\omega_1 = \frac{\gamma + \delta \omega}{\alpha + \beta \omega}, \quad \alpha \delta - \beta \gamma = 1$$

genügen; offenbar ist die hierdurch ausgedrückte Beziehung zwischen ω , ω_1 eine gegenseitige, da zugleich die vier Zahlen δ , $-\beta$, $-\gamma$, α den Bedingungen

$$\omega = \frac{(-\gamma) + \alpha \omega_1}{\delta + (-\beta) \omega_1}, \quad \delta \alpha - (-\beta)(-\gamma) = 1$$

genügen. Ist nun ω_2 ebenfalls äquivalent mit ω , gibt es also vier ganze Zahlen α_1 , β_1 , γ_1 , δ_1 , welche den Bedingungen

$$\omega = \frac{\gamma_1 + \delta_1 \omega_2}{\alpha_1 + \beta_1 \omega_2}, \quad \alpha_1 \delta_1 - \beta_1 \gamma_1 = 1$$

genügen, so setze man in üblicher Weise

$$\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha', \beta' \\ \gamma', \delta' \end{pmatrix},$$

d. h.

$$\alpha' = \alpha \alpha_1 + \beta \gamma_1, \quad \beta' = \alpha \beta_1 + \beta \delta_1,$$

$$\gamma' = \gamma \alpha_1 + \delta \gamma_1, \quad \delta' = \gamma \beta_1 + \delta \delta_1;$$

da diese Zahlen α' , β' , γ' , δ' den beiden Bedingungen

$$\omega_1 = \frac{\gamma' + \delta' \omega_2}{\alpha' + \beta' \omega_2}, \quad \alpha' \delta' - \beta' \gamma' = 1$$

genügen, so folgt, daß je zwei mit einer und derselben Zahl ω äquivalente Zahlen ω_1, ω_2 auch miteinander äquivalent sind. Aus diesem Grunde wird man das gesamte Zahlengebiet in Klassen einteilen können, indem man je zwei Zahlen in dieselbe oder in zwei verschiedene Klassen aufnimmt, je nachdem sie äquivalent sind oder nicht. Jede Zahl ω kann als Repräsentant derjenigen Klasse angesehen werden, welche aus allen mit ω äquivalenten Zahlen besteht.

Nennt man die reellen Zahlen x, y die Koordinaten, und zwar x die Abszisse, y die Ordinate der aus ihnen gebildeten komplexen Zahl $\omega = x + yi$, so ergibt sich leicht, daß die Ordinaten von je zwei äquivalenten Zahlen ω, ω_1 dasselbe Vorzeichen haben, oder beide verschwinden. Wir werden im folgenden das Gebiet S derjenigen ω betrachten, deren Ordinaten positiv sind, und außerdem nur noch die rationalen reellen Zahlen, welche letzteren offenbar eine einzige Klasse R bilden, weil sie sämtlich mit der Zahl 0 äquivalent sind; es wird sich zeigen, daß diese Klasse R , welche zugleich die Zahl ∞ enthält, als die vollständige Begrenzung des Gebietes S anzusehen ist.

§ 2.

Vollständiges Repräsentantensystem.

Es kommt nun darauf an, ein vollständiges System von Repräsentanten ω_0 aller Klassen aufzustellen, aus welchen das Gebiet S besteht, in der Weise, daß jede Zahl ω dieses Gebietes mit einem, und im allgemeinen auch nur mit einem dieser Repräsentanten ω_0 äquivalent ist. Dies geschieht durch den folgenden Satz, in welchem das Zeichen $N(x + yi)$ die Norm $(x^2 + y^2)$ der komplexen Zahl $x + yi$ bedeutet:

In jeder Klasse des Gebietes S einschließlich R gibt es einen, und im allgemeinen auch nur einen Repräsentanten ω_0 , welcher den drei Bedingungen

$$(1) \quad N(\omega_0 - 1) \geq N(\omega_0),$$

$$(2) \quad N(\omega_0 + 1) \geq N(\omega_0),$$

$$(3) \quad N(\omega_0) \geq 1$$

genügt.

Der Beweis kann mit denselben Mitteln geführt werden, durch welche in der Theorie der binären quadratischen Formen von negativer Determinante bewiesen wird, daß jede solche Form einer, und

im allgemeinen auch nur einer reduzierten Form äquivalent ist. Ich will mich hier begnügen, den ersten Teil des Satzes durch die folgende Betrachtung zu erledigen. Ist ω eine bestimmte Zahl des Gebietes S , so gibt es, weil ω nicht reell ist, unter allen Paaren von relativen Primzahlen α, β mindestens eins, für welches $N(\alpha + \beta\omega)$ so klein wie möglich wird; nachdem α, β so gewählt sind, erhält man alle Lösungen der Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ in ganzen Zahlen γ, δ aus einer einzigen Lösung γ', δ' , indem man $\gamma = \gamma' - m\alpha$, $\delta = \delta' - m\beta$ setzt und m alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen läßt; wählt man m so, daß

$$N\left(\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}\right) = N\left(\frac{\gamma' + \delta'\omega}{\alpha + \beta\omega} - m\right)$$

möglichst klein wird, so hat die mit ω äquivalente Zahl

$$\omega_0 = \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega},$$

die in (1), (2), (3) ausgedrückten Eigenschaften. Denn aus der Definition von α, β folgt, daß ω_0 der Bedingung (3) genügt, und ebenso aus der Definition von m , daß ω_0 den Bedingungen (1) und (2) genügt.

Geometrisch wird der Inbegriff aller dieser Zahlen ω_0 durch ein Stück der Halbebene S dargestellt, welches das Hauptfeld heißen und mit (ω_0) bezeichnet werden soll. Dasselbe ist begrenzt durch drei Linien, welche den Gleichheitszeichen in den Bedingungen (1), (2), (3) entsprechen; setzt man $\omega_0 = x_0 + y_0 i$, so nehmen die letzteren die folgende Gestalt an:

- (1) $x_0 \leq \frac{1}{2},$
 (2) $x_0 \leq -\frac{1}{2},$
 (3) $x_0^2 + y_0^2 \geq 1;$

das Feld (ω_0) liegt daher zwischen den beiden Geraden, welche in den Abständen $\pm \frac{1}{2}$ parallel mit der Ordinatenachse laufen, und zugleich außerhalb des Halbkreises, welcher mit dem Radius Eins aus dem Nullpunkte beschrieben ist. Dieses Feld wird offenbar durch die Ordinatenachse in zwei symmetrische Hälften zerlegt. Die beiden Parallelen (2) und (1) schneiden sich im Punkte ∞ , dem Repräsentanten der Klasse R der rationalen Zahlen, und sie schneiden den Kreis in den Punkten

$$\varrho = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad -\varrho^2 = 1 + \varrho = \frac{-1}{\varrho},$$

während die Symmetrieachse den Kreis im Punkte

$$i = \frac{-1}{i}$$

schneidet.

Wenn nun ω_0 der Grenzlinie (2) angehört, d. h. wenn $x_0 = -\frac{1}{2}$ ist, so leuchtet ein, daß die äquivalente Zahl $1 + \omega_0$ der Grenzlinie (1) angehört, und diese beiden Punkte $\omega_0, 1 + \omega_0$ liegen symmetrisch zu beiden Seiten der Ordinatenachse. Wenn ferner ω_0 der Kreislinie (3) angehört, so gilt dasselbe von der äquivalenten Zahl $\frac{-1}{\omega_0} = -x_0 + y_0 i$, und diese beiden Punkte $\omega_0, \frac{-1}{\omega_0}$ liegen ebenfalls symmetrisch zu beiden Seiten der Ordinatenachse. Je zwei symmetrische Punkte der Begrenzung von (ω_0) sind daher Repräsentanten einer und derselben Klasse. Es ließe sich nun auch leicht zeigen, daß außer diesen Fällen niemals zwei verschiedene Punkte oder Zahlen des Feldes (ω_0) derselben Klasse angehören können, mögen sie im Innern oder auf der Begrenzung von (ω_0) liegen. Der Kürze halber unterdrücke ich diesen Beweis, welcher, wie schon oben bemerkt, genau ebenso lautet, wie der Beweis des Satzes, daß zwei verschiedene reduzierte binäre quadratische Formen von negativer Determinante nur in gewissen Ausnahmefällen äquivalent sein können (vgl. Zahlentheorie von Dirichlet, zweite Auflage, § 65); es wird genügen zu bemerken, daß, wenn x, y willkürliche Variable bedeuten, die binäre quadratische Form

$$N(x + y\omega_0) = (1, x_0, x_0^2 + y_0^2),$$

deren Determinante $= -y_0^2$, immer eine reduzierte ist, wenn dieser Begriff auf Formen mit gebrochenen oder irrationalen reellen Koeffizienten übertragen wird.

Sind nun $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier bestimmte ganze Zahlen, welche der Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ genügen, und setzt man

$$\omega_0 = \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}, \quad \omega = \frac{-\gamma + \alpha\omega_0}{\delta - \beta\omega_0},$$

so entspricht, wie man leicht erkennt, dem Hauptfelde (ω_0) ein Feld (ω) , welches von drei Kreisbogen begrenzt wird, deren Mittelpunkte stets in der Abszissenachse liegen, und welche in gerade Linien ausarten können; die den Eckpunkten

$$0, -\varrho^2, \infty$$

des Hauptfeldes entsprechenden Eckpunkte des Feldes (ω) sind

$$\frac{-\gamma + \alpha \varrho}{\delta - \beta \varrho}, \quad \frac{-\gamma - \alpha \varrho^2}{\delta + \beta \varrho^2}, \quad \frac{-\alpha}{\beta},$$

deren letzter der Klasse R angehört. Offenbar entspricht den vier Zahlen $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$ dasselbe Feld (ω); sonst aber entsprechen, wie die genaue Untersuchung zeigt, zwei verschiedenen Systemen von vier Zahlen α , β , γ , δ immer zwei verschiedene Felder (ω), welche ganz außerhalb einander liegen und höchstens eine Grenzlinie oder auch nur einen Eckpunkt gemeinsam haben können. Die ganze Halbebene S einschließlich R besteht aus unendlich vielen solchen, den verschiedenen Systemen oder Substitutionen $\pm \alpha$, $\pm \beta$, $\pm \gamma$, $\pm \delta$ entsprechenden Kreisbogendreiecken (ω), welche sich in unendlicher Anzahl und Verkleinerung an die Abszissenachse andrängen.

Niemals enthält aber ein solches Feld (ω) einen irrationalen reellen Wert, und in diesem Sinne sage ich, daß bei unserer Untersuchung die Klasse R der rationalen Zahlen die vollständige Begrenzung des Gebiets S bildet. Ist r eine bestimmte rationale Zahl, so gibt es unendlich viele Felder (ω), welche diesen Wert r gemeinschaftlich haben (vgl. § 4, III); das aus allen diesen Feldern bestehende Gebiet $G(r)$ ist durch unendlich viele solche Kreisbogen begrenzt, welche der Linie (3) entsprechen. Ist nun x ein konstanter reeller, aber irrationaler Wert, und nimmt y von $+\infty$ bis 0 ab, so durchläuft $\omega = x + yi$ unendlich viele solche Gebilde $G(r)$, und die Zahlen r , deren Nenner immer größer werden, nähern sich dem Werte x unendlich an. Solange ω einem und demselben Gebiete $G(r)$ angehört, beschreibt die äquivalente Zahl ω_0 im Hauptfelde Kreisbogen, welche immer nach einer bestimmten der beiden Linien (1), (2) hinführen, von hier zu dem symmetrischen Punkte springen und sich durch Verschiebung zu einem einzigen Kreise zusammensetzen lassen; endlich aber muß ein letzter solcher Kreisbogen in die Linie (3) führen; dann tritt ω in das folgende Gebiet $G(r')$, und nun beginnt ω_0 von dem symmetrischen Punkte der Linie (3) aus, eine neue Kreisbogenbewegung in (ω_0), welche dem Durchgange der Variablen ω durch eine endliche Anzahl von Feldern des Gebietes $G(r')$ entspricht (vgl. den Schluß von § 6). Die Annäherung der Zahlen r , r' ... an den Wert x ist nicht ohne Interesse, und ich verspreche mir (viel-

leicht mit Unrecht) von der näheren Untersuchung derselben noch ein brauchbares Resultat, wenigstens für den Fall, daß x die Wurzel einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten ist.

§ 3.

Die Valenz.

Nach diesen Vorbereitungen gehe ich zu dem Fundamentalsatze meiner Untersuchung über, welcher folgendermaßen lautet:

Es gibt eine Funktion v der Variablen ω im Gebiete S und auf dessen Begrenzung R , welche für alle äquivalenten Werte ω Einen bestimmten Wert besitzt, und zwar so, daß umgekehrt Jedem Werte der unbeschränkten komplexen Variablen v Eine bestimmte Klasse von äquivalenten Werten ω entspricht.

Der Beweis ergibt sich aus den Prinzipien von Riemann (Art. 21 der Inaugural-Dissertation). Man bilde die eine der beiden symmetrischen Hälften des Hauptfeldes (ω_0) auf einer der beiden Hälften der v -Ebene ab, in welche dieselbe durch die Achse der reellen v zerfällt; hierbei bleiben drei reelle Konstanten willkürlich, da zu einem inneren und zu einem Begrenzungspunkte des Originals die entsprechenden Bildpunkte willkürlich gewählt werden dürfen. Hierauf setze man die Abbildung durch die Symmetrieachse des Feldes (ω_0) hindurch in die andere Hälfte in der Weise fort, daß je zwei zur Achse symmetrischen Punkten ω_0 zwei konjugierte komplexe Werte v entsprechen; hiermit ist das ganze Feld (ω_0) so auf der ganzen v -Ebene abgebildet, daß je zwei äquivalenten Werten ω_0 , d. h. je zwei symmetrischen Punkten der Begrenzung von (ω_0) ein und derselbe (reelle) Wert v entspricht; je zwei nicht-äquivalenten Werten ω_0 entsprechen zwei verschiedene Werte v , und umgekehrt entspricht jedem Werte v ein einziger Wert ω_0 , oder es entsprechen ihm zwei äquivalente Werte ω_0 , welche der Begrenzung von (ω_0) angehören. Man kann daher die Abbildung von (ω_0) auf alle Felder (ω) der ganzen Halbebene S und deren Begrenzung R so ausdehnen, daß je zwei äquivalenten Werten ω ein und derselbe Wert v entspricht, und es leuchtet ein, daß bei dem Übergange von einem Felde (ω) durch die Begrenzung desselben zu einem benachbarten Felde die Funktion v sich stetig ändert.

Sind nun A, B, C, D beliebige reelle Konstanten, so hat die Funktion

$$\frac{C + Dv}{A + Bv}$$

dieselben Eigenschaften wie v , und sie nimmt ebenfalls jeden reellen Wert einmal an, wenn ω_0 die ganze Begrenzung der einen symmetrischen Hälfte des Feldes (ω_0) durchläuft; die drei verfügbaren Konstanten sollen nun so gewählt werden, daß

$$\begin{array}{ll} \text{dem Werte } \omega_0 = \rho & \text{der Wert } v = 0, \\ \text{„ „ } \omega_0 = i & \text{„ „ } v = 1, \\ \text{„ „ } \omega_0 = \infty & \text{„ „ } v = \infty \end{array}$$

entspricht. Die hierdurch bestimmte Funktion v will ich die Valenz von ω nennen und mit $\text{val}(\omega)$ bezeichnen. Äquivalente Zahlen ω sind demnach Zahlen von gleicher Valenz.

§ 4.

Windungspunkte.

Um von dieser Definition der Funktion v zu ihrer analytischen Bestimmung zu gelangen, betrachten wir zunächst die umgekehrte Funktion; ist ω ein Zweig derselben, so ist jeder andere von der Form

$$\omega_1 = \frac{\gamma + \delta \omega}{\alpha + \beta \omega},$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier ganze Zahlen bedeuten, welche der Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ genügen, und es fragt sich, ob zwei solche im allgemeinen verschiedene Zweige in einem Windungspunkte v , für welchen $\omega = \omega_1 = \tau$ wird, zusammenhängen können. Hierzu ist erforderlich, daß τ eine Wurzel der Gleichung

$$\beta \tau^2 + (\alpha - \delta) \tau - \gamma = 0,$$

also

$$(2\beta\tau + \alpha - \delta)^2 = (\alpha + \delta)^2 - 4\gamma$$

ist, und da τ entweder rational ist oder eine positive Ordinate hat, so sind nur folgende drei Fälle möglich:

(I)

$$\alpha + \delta = 0.$$

Da $\alpha^2 + 1 = (\alpha + i)(\alpha - i) = -\beta\gamma$ ist, und β positiv angenommen werden darf, so ergibt sich aus der Theorie der ganzen komplexen Zahlen von Gauß mit Leichtigkeit, daß man

$$\begin{array}{l} -\alpha + i = (\alpha' - \beta' i)(\gamma' + \delta' i); \quad \gamma = -(\gamma' + \delta' i)(\gamma' - \delta' i), \\ \beta = (\alpha' + \beta' i)(\alpha' - \beta' i); \quad \alpha + i = -(\alpha' + \beta' i)(\gamma' - \delta' i) \end{array}$$

setzen kann, wo $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ vier ganze rationale Zahlen bedeuten, welche offenbar der Bedingung $\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1$ genügen müssen; die ganzen komplexen Zahlen $\alpha' + \beta'i, \gamma' + \delta'i$ sind relative Primzahlen, und man erhält

$$\tau = \frac{-\alpha + i}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha + i} = \frac{\gamma' + \delta'i}{\alpha' + \beta'i},$$

d. h. τ ist äquivalent mit i , und folglich ist $v = 1$. Nimmt man nun z. B. $\tau = i$, so ist

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -1, \quad \delta = 0,$$

und die beiden in Rede stehenden Zweige sind

$$\omega_0 \quad \text{und} \quad \frac{-1}{\omega_0}.$$

Diese hängen aber wirklich an der Stelle $v = 1, \omega = i$ zusammen; denn wenn v , von Werten mit positiver Ordinate ausgehend, einen positiven Umlauf um $v = 1$ macht, also die Achse der reellen v zuerst zwischen 0 und 1, und nachher zwischen 1 und $+\infty$ kreuzt, so geht ω_0 aus derjenigen Hälfte des Hauptfeldes (ω_0), in welcher die Abszissen negativ sind, durch den Kreisbogen (3) zwischen ϱ und i zunächst in die Hälfte des Feldes $\left(\frac{-1}{\omega_0}\right)$ über, in welcher die Abszissen negativ sind, und dann durch die Ordinatenachse hindurch in die andere Hälfte desselben Feldes $\left(\frac{-1}{\omega_0}\right)$, in welcher die Abszissen positiv sind. Hieraus ergibt sich, daß $(1 - v)$ unendlich klein wie $(\omega - i)^2$ wird, und folglich bleibt in diesem Windungspunkte das Produkt

$$(1 - v)^{-1/2} \frac{dv}{d\omega}$$

endlich und von Null verschieden. Dasselbe gilt für je zwei Zweige

$$\omega = \frac{\gamma' + \delta'\omega_0}{\alpha' + \beta'\omega_0} \quad \text{und} \quad \omega_1 = \frac{-\delta' + \gamma'\omega_0}{-\beta' + \alpha'\omega_0},$$

welche sich für $v = 1$ in irgend einem mit i äquivalenten Werte

$$\tau = \frac{\gamma' + \delta'i}{\alpha' + \beta'i}$$

vereinigen, und zwischen welchen die Relation

$$\omega_1 = \frac{\gamma - \alpha\omega}{\alpha + \beta\omega} = \frac{-(\gamma'^2 + \delta'^2) + (\alpha'\gamma' + \beta'\delta')\omega}{-(\alpha'\gamma' + \beta'\delta') + (\alpha'^2 + \beta'^2)\omega}$$

besteht.

(II) $\alpha + \delta = \pm 1.$

Setzt man zur Abkürzung

$$\varepsilon = \frac{1 - \alpha + \delta}{2},$$

so ist, je nachdem das obere oder untere Zeichen gilt,

$$\varepsilon = 1 - \alpha = \delta \quad \text{oder} \quad \varepsilon = -\alpha = 1 + \delta.$$

folglich in beiden Fällen

$$(\varepsilon + \alpha - 1)(\varepsilon + \alpha) = 0,$$

also

$$\alpha \delta = \alpha(2\varepsilon + \alpha - 1) = \varepsilon - \varepsilon^2;$$

mithin ist

$$-\beta\gamma = \varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = (\varepsilon + \varrho)(\varepsilon + \varrho^2),$$

und da β positiv angenommen werden darf, so ergibt sich hieraus zufolge der Theorie der aus ϱ gebildeten ganzen komplexen Zahlen, daß man

$$\begin{aligned} \varepsilon + \varrho &= (\alpha' + \beta' \varrho^2)(\gamma' + \delta' \varrho); & \gamma &= -(\gamma' + \delta' \varrho)(\gamma' + \delta' \varrho^2), \\ \beta &= (\alpha' + \beta' \varrho)(\alpha' + \beta' \varrho^2); & \varepsilon + \varrho^2 &= (\alpha' + \beta' \varrho)(\gamma' + \delta' \varrho^2) \end{aligned}$$

setzen kann, wo α' , β' , γ' , δ' vier ganze rationale Zahlen bedeuten, welche offenbar der Bedingung $\alpha' \delta' - \beta' \gamma' = 1$ genügen müssen; die ganzen komplexen Zahlen $\alpha' + \beta' \varrho$, $\gamma' + \delta' \varrho$ sind relative Primzahlen, und man erhält

$$\tau = \frac{\varepsilon + \varrho}{\beta} = \frac{-\gamma}{\varepsilon + \varrho^2} = \frac{\gamma' + \delta' \varrho}{\alpha' + \beta' \varrho},$$

d. h. τ ist äquivalent mit ϱ , und folglich ist $v = 0$. Nimmt man nun z. B. $\tau = \varrho$, so ist $\varepsilon = 0$, $\beta = 1$, also entweder

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -1, \quad \delta = 0,$$

oder

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -1, \quad \delta = -1,$$

und in der Tat geht, wenn v aus einem Werte mit positiver Ordinate einen positiven Umlauf um $v = 0$ macht, von den drei Zweigen

$$\omega_0, \quad \frac{-1 - \omega_0}{\omega_0}, \quad \frac{-1}{1 + \omega_0}$$

der erste in den zweiten, dieser in den dritten, und dieser wieder in den ersten über. (Macht v denselben Umlauf aus einem Werte mit negativer Ordinate, so gehen die drei Zweige

$$\frac{-1}{\omega_0}, \quad -1 + \omega_0, \quad \frac{-\omega_0}{-1 + \omega_0},$$

welche ebenfalls den Eckpunkt ϱ gemeinschaftlich haben, zyklisch ineinander über.) Hieraus folgt, daß in diesem Windungspunkte das Produkt

$$v^{-2/3} \frac{dv}{d\omega}$$

endlich und von Null verschieden bleibt. Ähnlich verhält es sich für alle anderen mit ϱ äquivalenten Werte τ .

$$(III) \quad (\alpha + \delta)^2 = 4.$$

In diesem und nur in diesem Falle wird τ rational, also ein Repräsentant der Begrenzung R , und folglich wird $v = \infty$. Setzt man (was erlaubt ist) $\alpha + \delta = +2$, und

$$\tau = \frac{1 - \alpha}{\beta} = \frac{-\gamma}{1 - \alpha} = \frac{m}{n},$$

wo m, n relative Primzahlen, so ergibt sich

$\alpha = 1 + gmn$, $\beta = -gn^2$, $\gamma = +gm^2$, $\delta = 1 - gmn$, wo g eine willkürliche ganze Zahl bedeutet. Nimmt man z. B. $m = 1$, $n = 0$, also $\tau = \infty$, so erkennt man leicht, daß jeder der unendlich vielen Zweige ($g + \omega_0$) durch einen positiven Umlauf von v um $v = \infty$ in den folgenden Zweig ($g + 1 + \omega_0$) übergeht. Für unendlich große Werte von ω ist daher die unendlich kleine Größe

$$q^2 = 1^\omega$$

eine einändrige Funktion von v , und da umgekehrt v überall eine einwertige Funktion von 1^ω ist, so bleibt für $\omega = \infty$ das Produkt

$$v 1^\omega$$

endlich und von Null verschieden, und zugleich wird

$$v^{-1} \frac{dv}{d\omega} = \frac{d \log v}{d\omega} = -2\pi i.$$

Hieraus läßt sich leicht das Verhalten von v für alle anderen rationalen Werte $\omega = \frac{m}{n}$ ableiten.

§ 5.

Differentialgleichungen.

Bedeutend u, v zwei beliebige voneinander abhängige Variable, so wollen wir zur Abkürzung den Differentialausdruck dritter Ordnung

$$(1) \quad \frac{-4}{\sqrt{\frac{dv}{du}}} \frac{d}{dv} \frac{d}{dv} \sqrt{\frac{dv}{du}} = [v, u]$$

setzen; man findet leicht, daß derselbe die beiden Eigenschaften

$$(2) \quad [u, v] = -[v, u] \left(\frac{dv}{du} \right)^2,$$

$$(3) \quad [v, u] dv^2 + [w, v] dw^2 + [u, w] du^2 = 0$$

besitzt, wo w ebenfalls eine beliebige Funktion von u , also auch von v bedeutet. Sind ferner u, w kollineare Variable, womit ausgedrückt sein soll, daß

$$(4) \quad w = \frac{C + Du}{A + Bu}$$

ist, wo A, B, C, D Konstanten bedeuten, so ist

$$(5) \quad [u, w] = [w, u] = 0,$$

und folglich, was auch v sein mag,

$$(6) \quad [v, u] = [v, w];$$

und umgekehrt, wenn $[u, w] = 0$ ist, so sind u, w kollinear, d. h. die Gleichung (4) ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung (5).

Diese allgemeinen Sätze wenden wir auf folgendes Beispiel an. Es sei wieder $v = \text{val}(\omega)$, so ist offenbar

$$[v, \omega] = f(\omega)$$

eine einwertige Funktion von ω , da sie auf rationale Weise aus den Derivierten erster, zweiter und dritter Ordnung von v in bezug auf ω gebildet ist; wir wollen nun beweisen, daß sie auch eine einwertige Funktion von v ist. In der Tat, setzt man $v_1 = \text{val}(\omega_1)$, wo ω_1 eine neue Variable bedeutet, so ist $f(\omega_1) = [v_1, \omega_1]$; und wenn ω_1 mit ω durch die Gleichung

$$\omega_1 = \frac{\gamma + \delta \omega}{\alpha + \beta \omega}$$

verbunden wird, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen bedeuten, welche der Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ genügen, so ist $v_1 = v$, also $f(\omega_1) = [v, \omega_1]$; da außerdem ω, ω_1 kollinear sind, so folgt aus (6), daß $[v, \omega] = [v, \omega_1]$, also $f(\omega) = f(\omega_1)$ ist; mithin entspricht jedem Werte v nur ein einziger Wert $f(\omega)$. Wir können daher

$$(7) \quad [v, \omega] = F(v)$$

setzen, wo $F(v)$ eine einwertige Funktion von v bedeutet. Aus ihrer Bildung geht hervor, daß sie für alle Werte v , mit Ausnahme von 1, 0, ∞ endlich bleibt, und da für diese Werte von v , denen man

die Werte i, g, ∞ von ω entsprechen lassen darf, respektive das Produkt

$$(1-v)^{-1/2} \frac{dv}{d\omega}, \quad v^{-2/3} \frac{dv}{d\omega}, \quad v^{-1} \frac{dv}{d\omega}$$

endlich und von Null verschieden bleibt, so ergibt sich, daß entsprechend

$$(1-v)^2 F(v) = \frac{3}{4}, \quad v^2 F(v) = \frac{8}{9}, \quad v^2 F(v) = 1$$

wird; da folglich die einwertige Funktion $v^2(1-v)^2 F(v)$ für alle endlichen Werte von v endlich bleibt und für $v = \infty$ unendlich groß von zweiter Ordnung wird, so ist sie eine ganze Funktion zweiten Grades, deren Koeffizienten aus den vorstehenden drei Gleichungen sich unmittelbar ergeben; auf diese Weise findet man

$$(8) \quad \begin{cases} F(v) = \frac{36v^2 - 41v + 32}{36v^2(1-v)^2} \\ = \frac{8}{9v^2} + \frac{23}{36v} + \frac{3}{4(1-v)^2} + \frac{23}{36(1-v)}. \end{cases}$$

Die Funktion $v = \text{val}(\omega)$ ist daher eine Lösung v' der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(9) \quad [v' \omega] = F(v);$$

um ihr allgemeines Integral v' zu finden, setze man $v' = \text{val}(\omega')$, wo ω' eine neue Variable bedeutet; dann ist $[v', \omega'] = F(v')$, also $[v', \omega'] = [v', \omega]$, woraus mit Rücksicht auf (2) und (3) folgt, daß $[\omega, \omega'] = 0$, also

$$(10) \quad \omega' = \frac{C + D\omega}{A + B\omega}, \quad v' = \text{val}\left(\frac{C + D\omega}{A + B\omega}\right)$$

ist, wo A, B, C, D willkürliche Konstanten bedeuten. Zugleich ergibt sich aus (3), daß das System der beiden Gleichungen

$$(11) \quad v = \text{val}(\omega), \quad v' = \text{val}\left(\frac{C + D\omega}{A + B\omega}\right)$$

das allgemeine Integral der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(12) \quad [v, v'] d v^2 = F(v) d v^2 - F(v') d v'^2$$

bildet (vgl. Fund. nova §§ 32, 33).

§ 6.

Die elliptischen Modulfunktionen.

Aus der Bildung des Ausdrucks $[v, \omega]$ geht hervor, daß $\sqrt{\frac{dv}{d\omega}}$ einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung in bezug auf v genügt; allein es ist offenbar zweckmäßiger, die Größe

$$(1) \quad w = \text{const } v^{-1/3} (1-v)^{-1/4} \left(\frac{dv}{d\omega}\right)^{1/2}$$

einzuführen, welche für alle Werte von ω innerhalb S endlich und von Null verschieden bleibt, während sie in der Begrenzung R stets unendlich klein wird; mithin ist $\log w$ und jede Potenz von w , sobald ihr Wert an einer Stelle des einfach zusammenhängenden Gebietes S gegeben ist, eine völlig bestimmte, durchaus einwertige Funktion von ω . Aus der obigen Differentialgleichung dritter Ordnung (7) in § 5 folgt nun, daß w der hypergeometrischen Differentialgleichung

$$(2) \quad v(1-v) \frac{d^2 w}{d v^2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{7}{6} v\right) \frac{d w}{d v} - \frac{1}{144} w = 0$$

genügt, deren allgemeines Integral $(const + const \omega) w$ in der Form

$$const \cdot F\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{2}{3}, v\right) + const \cdot F\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{2}, 1-v\right)$$

enthalten ist, wo F die Reihe von Gauß bedeutet. Dasselbe hätte man auch durch direkte Untersuchung der Größe w als einer Riemannschen P -Funktion erhalten, und noch einfacher würde man, wie mein Freund Heinrich Weber in Königsberg mir vor einem Jahre mitgeteilt hat, durch die Betrachtungen zum Ziele gelangen können, welche den Gegenstand der Abhandlung XXV in Riemanns Werken bilden. Endlich bemerke ich, daß das in § 3 behandelte Abbildungsproblem sich auch durch die Untersuchungen von Weierstrass und Schwarz erledigen läßt.

Von besonderem Interesse ist nun die Quadratwurzel der Größe w , und ich will dieselbe durch

$$(3) \quad \eta(\omega) = const v^{-1/6} (1-v)^{-1/6} \left(\frac{d v}{d \omega}\right)^{1/4}$$

bezeichnen; sie ist, wie schon bemerkt, eine einwertige Funktion von ω , welche für alle Werte von ω innerhalb S endlich und von Null verschieden bleibt; für $\omega = \infty$ wird sie unendlich klein wie $v^{-1/24}$, also wie $1^{\omega/24}$; ich wähle die Konstante so, daß für $\omega = \infty$ das Produkt

$$(4) \quad 1^{-\frac{\omega}{24}} \eta(\omega) = 1$$

wird, und hierdurch ist $\eta(\omega)$ für das ganze Gebiet S vollständig bestimmt. Bedeuten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ wieder vier ganze Zahlen, welche der Bedingung $\alpha \delta - \beta \gamma = 1$ genügen, so folgt aus

$$\text{val} \left(\frac{\gamma + \delta \omega}{\alpha + \beta \omega} \right) = \text{val}(\omega)$$

die Eigenschaft

$$(5) \quad \eta \left(\frac{\gamma + \delta \omega}{\alpha + \beta \omega} \right) = c(\alpha + \beta \omega)^{1/2} \eta(\omega),$$

wo $c^{24} = 1$ ist; speziell ergibt sich leicht

$$(6) \quad \eta(1 + \omega) = 1^{1/24} \eta(\omega); \quad \eta\left(\frac{-1}{\omega}\right) = 1^{-1/8} \omega^{1/2} \eta(\omega),$$

wo $\omega^{1/2} = 1^{1/8}$ wird, wenn $\omega = 1^{1/4} = i$ ist. Die Funktion ist durch die genannten Eigenschaften vollständig bestimmt; denn wenn $f(\omega)$ ebenso beschaffen ist, so ist der Quotient $f(\omega) : \eta(\omega)$ zufolge (6) eine einwertige Funktion von $v = \text{val}(\omega)$, welche für alle endlichen Werte von v endlich bleibt und zufolge (4) für $v = \infty$ den Wert Eins annimmt, und folglich $\text{const} = 1$ ist.

Um nun den Zusammenhang zwischen dieser Funktion $\eta(\omega)$ und dem Modul der elliptischen Integrale oder dessen Quadrat k herzustellen, betrachte ich die der Transformation zweiter Ordnung entsprechenden Funktionen

$$(7) \quad \eta_1(\omega) = \eta(2\omega); \quad \eta_2(\omega) = \eta\left(\frac{\omega}{2}\right); \quad \eta_3(\omega) = \eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right),$$

welche folgende Eigenschaften besitzen. Aus (6) folgt

$$\eta_1(1 + \omega) = 1^{1/12} \eta_1(\omega); \quad \eta_1\left(\frac{-1}{\omega}\right) = 1^{-1/8} \left(\frac{\omega}{2}\right)^{1/2} \eta_2(\omega),$$

$$\eta_2(1 + \omega) = \eta_3(\omega) \quad ; \quad \eta_2\left(\frac{-1}{\omega}\right) = 1^{-1/8} (2\omega)^{1/2} \eta_1(\omega),$$

$$\eta_3(1 + \omega) = 1^{1/24} \eta_2(\omega); \quad \eta_3\left(\frac{-1}{\omega}\right) = 1^{-1/8} \omega^{1/2} \eta_3(\omega),$$

und für $\omega = \infty$ folgt aus (4)

$$1^{-\frac{\omega}{12}} \eta_1(\omega) = 1; \quad 1^{-\frac{\omega}{48}} \eta_2(\omega) = 1; \quad 1^{-\frac{\omega}{48}} \eta_3(\omega) = 1^{1/48}.$$

Hieraus ergibt sich, daß die Funktion

$$f(\omega) = \frac{\eta_1(\omega) \eta_2(\omega) \eta_3(\omega)}{\eta(\omega)^8}$$

die Eigenschaften

$$f(1 + \omega) = f(\omega), \quad f\left(\frac{-1}{\omega}\right) = f(\omega)$$

besitzt und folglich eine einwertige Funktion von $v = \text{val}(\omega)$ ist,

weil alle Substitutionen $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ sich aus den beiden Substitutionen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

und $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ zusammensetzen lassen; sie bleibt vermöge ihrer Definition

endlich für alle endlichen Werte v und wird $= 1^{1/48}$ für $\omega = \infty$, $v = \infty$, folglich ist sie eine Konstante. Es ist daher

$$(8) \quad \eta_1(\omega) \eta_2(\omega) \eta_3(\omega) = 1^{1/48} \eta(\omega)^8,$$

und ein ähnlicher Satz gilt für Transformationen von beliebiger Ordnung. Ebenso ergibt sich, daß die Funktion

$$f_1(\omega) = \frac{2^4 \eta_1(\omega)^8 + \eta_2(\omega)^8 + 1^{1/3} \eta_3(\omega)^8}{\eta(\omega)^8}$$

die Eigenschaften

$$f_1(1 + \omega) = 1^{1/3} f_1(\omega), \quad f_1\left(\frac{-1}{\omega}\right) = f_1(\omega)$$

besitzt, woraus folgt, daß $f_1(\omega)^3$ eine einwertige Funktion von $v = \text{val}(\omega)$ ist, welche für jeden endlichen Wert von v endlich ist; für $\omega = \infty$, $v = \infty$ wird ferner $f_1(\omega) 1^{\omega/6} = 0$, also auch $f_1(\omega)^8 v^{-1/2} = 0$; also kann $f_1(\omega)^8$ nicht einmal von der Ordnung $v^{1/2}$ unendlich groß werden, und folglich ist $f_1(\omega)^3$, also auch $f_1(\omega)$ eine Konstante, und zwar $= 0$, wie sich aus $f_1(1 + \omega) = 1^{1/3} f_1(\omega)$ ergibt. Es ist daher

$$(9) \quad 2^4 \eta_1(\omega)^8 + \eta_2(\omega)^8 + 1^{1/3} \eta_3(\omega)^8 = 0.$$

Führt man nun die folgenden Bezeichnungen ein (welche mit denen von Hermite übereinstimmen)

$$(10) \quad \begin{cases} \varphi(\omega) = 1^{1/48} \sqrt[2]{2} \cdot \frac{\eta_1(\omega)}{\eta_3(\omega)} = \sqrt[4]{x} = \sqrt[8]{k}, \\ \psi(\omega) = 1^{1/48} \frac{\eta_2(\omega)}{\eta_3(\omega)} = \sqrt[4]{x'} = \varphi\left(\frac{-1}{\omega}\right), \\ \chi(\omega) = 1^{1/48} \sqrt[6]{2} \cdot \frac{\eta(\omega)}{\eta_3(\omega)}, \end{cases}$$

so folgt aus (9)

$$(11) \quad \varphi(\omega^8) + \psi(\omega)^8 = 1, \quad x^2 + x'^2 = 1$$

und aus (8)

$$(12) \quad \varphi(\omega) \psi(\omega) = \chi(\omega)^3;$$

außerdem kann man die Größen K, K' durch die Gleichungen

$$(13) \quad \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1^{-1/24} \frac{\eta_3(\omega)^2}{\eta(\omega)}, \quad K'i = K\omega$$

definieren.

Für die Funktion $k = x^2 = \varphi(\omega)^8$ ergeben sich nun aus dem Obigen die Eigenschaften

$$(14) \quad \varphi(1 + \omega)^8 = -2^4 \frac{\eta_1(\omega)^8}{\eta_2(\omega)^8} = \frac{k}{k-1}$$

$$(15) \quad \varphi\left(\frac{-1}{\omega}\right)^8 = 1^{1/6} \frac{\eta_2(\omega)^8}{\eta_3(\omega)^8} = x'^2 = 1 - k,$$

und außerdem ist

$$(16) \quad k 1^{-\frac{\omega}{2}} = 2^4 \quad \text{für } \omega = \infty.$$

Hieraus folgt, daß die Funktion

$$f_2(\omega) = \frac{(k + \varrho)^3 (k + \varrho^2)^3}{k^2 (1 - k)^2}$$

die Eigenschaften

$$f_2(1 + \omega) = f_2(\omega), \quad f_2\left(\frac{-1}{\omega}\right) = f_2(\omega)$$

besitzt, mithin eine einwertige Funktion von $v = \text{val}(\omega)$ ist; sie kann nur dann unendlich werden, wenn $k = 0, 1, \infty$ wird; da aber k und $(1 - k)$ Quotienten von η -Funktionen sind, so kann dies nur dann geschehen, wenn $v = \infty$ wird, also z. B. für $\omega = \infty$; in diesem Fall wird aber k zufolge (16) unendlich klein wie $1^{\omega/2}$, also wie $v^{-1/2}$, und folglich $f_2(\omega)$ unendlich groß wie v ; mithin ist $f_2(\omega)$ eine ganze Funktion ersten Grades von v , also

$$\frac{(k + \varrho)^3 (k + \varrho^2)^3}{k^2 (1 - k)^2} = a v + b.$$

Um die Konstante b zu bestimmen, setze man $\omega = \varrho$, also $v = 0$; da nun

$$\eta_3(\varrho) = \eta\left(\frac{1 + \varrho}{2}\right) = \eta\left(\frac{-1}{2\varrho}\right),$$

und folglich

$$\eta_3(\varrho)^8 = \eta\left(\frac{-1}{2\varrho}\right)^8 = (2\varrho)^4 \eta(2\varrho)^8 = (2\varrho)^4 \eta_1(\varrho)^8$$

ist, so ergibt sich für k der Wert

$$(17) \quad \varphi(\varrho)^8 = 1^{1/6} 2^4 \frac{\eta_1(\varrho)^8}{\eta_3(\varrho)^8} = -\varrho,$$

und folglich ist $b = 0$. Um a zu bestimmen, setze man $\omega = i$, also $v = 1$; dann ergibt sich für k der Wert

$$(18) \quad \varphi(i)^8 = \varphi\left(\frac{-1}{i}\right)^8 = 1 - \varphi(i)^8 = \frac{1}{2},$$

woraus $a = \frac{27}{4}$ folgt. Auf diese Weise erhalten wir das Resultat

$$(19) \quad v = \text{val}(\omega) = \frac{4}{27} \frac{(k + \varrho)^3 (k + \varrho^2)^3}{k^2 (1 - k)^2}.$$

In dieser Form erscheint die Funktion v an mehreren Stellen der berühmten Abhandlung von Hermite über die Theorie der Modulargleichungen; ich bemerke zugleich, daß auch Gauß (Werke III, S. 386) die Absicht gehabt hat, eine solche Funktion einzuführen.

Man kann, in ähnlicher Weise, wie dies oben für $\eta(\omega)$ gesehen ist, beweisen, daß die Funktion $k = \varphi(\omega)^8$ durch die an-

gegebenen Eigenschaften vollständig bestimmt ist; die Prinzipien, auf welche sich der Nachweis der Existenz der Funktion v gestützt hat, führen auch ebenso leicht zur unmittelbaren Bestimmung der Funktion k ; dieselbe erfordert, wie aus der Kombination von (14) und (15) hervorgeht, zu ihrer vollen Ausbreitung im Gebiete S sechs ganze oder zwölf halbe Felder (ω), welche letzteren so gewählt werden können, daß sie symmetrisch zu beiden Seiten der rein imaginären ω liegen. Man erhält auf diese Weise die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(20) \quad [k, \omega] = \frac{(k + q)(k + q^2)}{k^2(1 - k)^2},$$

und ebenso, wie wir oben zu einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung für $w = \text{const} \cdot \eta(\omega)^2$ gelangt sind, ergibt sich hier, wenn man

$$(21) \quad \frac{dk}{d\omega} = \frac{-4}{\pi i} k(1 - k) K^2$$

setzt, die bekannte lineare Differentialgleichung

$$(22) \quad \frac{d}{dk} \left(k(1 - k) \frac{dK}{dk} \right) = \frac{1}{4} K,$$

welche den Ausgangspunkt der Abhandlung von Fuchs bildet. Natürlich würde man dieselben Resultate auch aus dem Zusammenhang zwischen k und v finden, welcher in (19) ausgedrückt ist.

Da k durch die obigen Eigenschaften als Funktion von ω vollständig bestimmt ist, und da die in der Theorie der elliptischen oder \wp -Funktionen auftretende Funktion

$$\frac{\wp_2(0, \omega)^4}{\wp_3(0, \omega)^4}$$

wirklich dieselben Eigenschaften besitzt, so ergibt sich aus dieser Identität beider Funktionen leicht, daß

$$(23) \quad \begin{cases} \wp(0, \omega) = \frac{\eta_2(\omega)^2}{\eta(\omega)}; & \wp_1(0, \omega) = 2\pi\eta(\omega)^3, \\ \wp_2(0, \omega) = 2\frac{\eta_1(\omega)^2}{\eta(\omega)}; & \wp_3(0, \omega) = 1^{-\frac{1}{24}} \frac{\eta_3(\omega)^2}{\eta(\omega)}, \end{cases}$$

und folglich

$$(24) \quad \eta(\omega) = 1^{\omega/24} \Pi(1 - 1^{\omega\nu}) = q^{1/12} \Pi(1 - q^{2\nu})$$

ist, wo ν alle positiven ganzen Zahlen durchläuft und

$$(25) \quad q = 1^{\omega/2}$$

gesetzt ist. Allein es ist mir bisher nicht geglückt, diese Darstellung von $\eta(\omega)$ als explizite Funktion von ω lediglich aus ihrer obigen Definition, also ohne die Hilfe der Theorie der ϑ -Funktionen abzuleiten.

Die eingehende Beschäftigung mit dieser Funktion $\eta(\omega)$, zu welcher mich zuerst die Untersuchung über die Anzahl der Idealclassen in kubischen Körpern veranlaßt hatte, ist mir später von großem Nutzen bei der Bearbeitung des zweiten Fragmentes XXVII aus dem Nachlasse von Riemann gewesen. Die Zahlen (m, n) , auf welche ich durch das Studium desselben geführt bin, besitzen in der That sehr interessante Eigenschaften; ist z. B. n eine positive ungerade Zahl, und m relative Primzahl zu n , so ist

$$\left(\frac{m}{n}\right) \equiv \frac{n+1}{2} - (m, n) \pmod{4},$$

wo $\left(\frac{m}{n}\right)$ das Zeichen von Legendre und Jacobi aus der Theorie der quadratischen Reste bedeutet; ist m ebenfalls positiv und ungerade, so ergibt sich hieraus unter Zuziehung des Satzes

$$2m(m, n) + 2n(n, m) = 1 + m^2 + n^2 - 3mn$$

sofort der verallgemeinerte Reziprozitätssatz in der Form

$$\left(\frac{m}{n}\right) + \left(\frac{n}{m}\right) \equiv 2 \left(1 + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}\right) \pmod{4}.$$

Ich erlaube mir hier auf eine Stelle der Abhandlung von Fuchs aufmerksam zu machen, in welche, wie mir scheint, sich ein Irrtum eingeschlichen hat. Sind m, n relative Primzahlen, und nähert sich $\omega = x + yi$ dem rationalen Werte $\frac{m}{n}$ so an, daß x konstant $= \frac{m}{n}$ bleibt, und y positiv unendlich klein wird, so nähert sich k , wie aus dem Fragment von Riemann oder auch aus der obigen Theorie folgt, dem Werte

$$k = \infty, \quad \text{wenn } m \equiv 1, \quad n \equiv 1 \pmod{2},$$

$$k = 1, \quad \text{,, } m \equiv 0, \quad n \equiv 1 \quad \text{,,}$$

$$k = 0, \quad \text{,, } m \equiv 1, \quad n \equiv 0 \quad \text{,,}$$

ist; wenn dagegen $\omega = x + yi$ sich auf dieselbe Weise einem irrationalen reellen Wert x nähert, so ergibt sich aus der obigen Theorie (vgl. den Schluß von § 2), daß k sich keinem bestimmten Werte nähert, sondern unaufhörliche Schwankungen erleidet. Dies steht im Widerspruch mit dem Satze II auf S. 27 der genannten

Abhandlung, in welchem behauptet wird, daß die Größe u ($= k^{-1}$ nach meiner Bezeichnung) sich immer einem der beiden Werte Null oder Eins annähern müsse, und mir scheint, als sei der Beweis dieser Behauptung gerechten Bedenken unterworfen, namentlich in dem Teile, welcher auf die Worte „ou n'y parvint pas“ (S. 26) folgt. Doch ist diese Abweichung von keiner wesentlichen Bedeutung für den Hauptgegenstand der sehr interessanten Abhandlung.

§ 7.

Transformation.

Ich will nun noch zum Schluß die Theorie der algebraischen Gleichungen zwischen Valenzen begründen, welche den Modulargleichungen in der Theorie der Transformation der elliptischen oder ϑ -Funktionen entsprechen. Es sei wieder $v = \text{val}(\omega)$, und

$$v_n = \text{val}\left(\frac{C + D\omega}{A + B\omega}\right),$$

wo A, B, C, D vier beliebige ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Teiler und von positiver Determinante

$$AD - BC = n$$

bedeuten. Die Anzahl aller möglichen solchen Funktionen v_n , welche einer gegebenen positiven ganzen Zahl n entsprechen, ist endlich und leicht zu bestimmen. Es sei nämlich, wenn A, B, C, D gegeben sind, δ der größte positive gemeinschaftliche Teiler der beiden Zahlen

$$B = \delta\beta, \quad D = \delta\delta,$$

so ist

$$n = \alpha\delta, \quad \text{wo } \alpha = A\delta - C\beta;$$

nun kann man, da β, δ relative Primzahlen sind, die beiden ganzen Zahlen α, γ stets und nur auf eine einzige Art so bestimmen, daß $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ wird, und daß zugleich die Zahl

$$c = C\alpha - A\gamma$$

der Bedingung

$$0 \leq c < \alpha$$

genügt; dann ist

$$\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, 0 \\ c, \delta \end{pmatrix},$$

mithin

$$v_n = \text{val}\left(\frac{C + D\omega}{A + B\omega}\right) = \text{val}\left(\frac{c + \delta\omega}{\alpha}\right),$$

und da A, B, C, D keinen gemeinschaftlichen Teiler haben, so gilt dasselbe auch von den drei Zahlen a, c, d . Um daher für eine gegebene Zahl n alle möglichen Funktionen v_n zu erhalten, braucht man nur a alle positiven Divisoren von n durchlaufen zu lassen; für jeden solchen Divisor a bestimmt sich d durch die Gleichung $ad = n$; ist nun e der größte gemeinschaftliche Teiler von a und d , so darf, wenn $\varphi(e)$ die Anzahl derjenigen Zahlen $0, 1, 2, \dots (e-1)$ bedeutet, welche relative Primzahlen zu e sind, die Zahl c alle diejenigen $\frac{a}{e} \varphi(e)$ Zahlen durchlaufen, welche relative Primzahlen zu e sind und zugleich der Bedingung $0 \leq c < a$ genügen. Es läßt sich ferner leicht zeigen, daß je zwei verschiedenen Systemen von drei solchen Zahlen a, c, d auch zwei nichtidentische Funktionen

$$v_n = \text{val} \left(\frac{c + d \omega}{a} \right)$$

entsprechen, und folglich ist die Anzahl aller wirklich verschiedenen Funktionen v_n gleich

$$\sum \frac{a}{e} \varphi(e) = \psi(n),$$

wo a alle Divisoren von n durchläuft, und e jedesmal die oben angegebene Bedeutung hat. Aus dieser Form folgt sofort, wenn n, n' relative Primzahlen sind, der Satz

$$\psi(nn') = \psi(n) \psi(n');$$

der Fall einer Primzahlpotenz ist leicht zu erledigen, und hieraus ergibt sich allgemein

$$\psi(n) = n \Pi \left(1 + \frac{1}{p} \right),$$

wo p alle verschiedenen in n aufgehenden Primzahlen durchläuft.

Setzt man zur Abkürzung $\psi(n) = \nu$, und bezeichnet mit

$$f_1(\omega), f_2(\omega), \dots, f_\nu(\omega)$$

die sämtlichen verschiedenen in der Form

$$\text{val} \left(\frac{C + D \omega}{A + B \omega} \right)$$

enthaltenen Funktionen v_n , so sind, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier bestimmte ganze Zahlen bedeuten, welche der Bedingung $\alpha \delta - \beta \gamma = 1$ genügen, auch die ν Funktionen

$$f_1 \left(\frac{\gamma + \delta \omega}{\alpha + \beta \omega} \right), f_2 \left(\frac{\gamma + \delta \omega}{\alpha + \beta \omega} \right), \dots, f_\nu \left(\frac{\gamma + \delta \omega}{\alpha + \beta \omega} \right)$$

voneinander verschieden; da ferner jedes System von vier ganzen Zahlen A, B, C, D ohne gemeinschaftlichen Teiler, welche die Bedingung $AD - BC = n$ befriedigen, durch die Zusammensetzung

$$\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A', B' \\ C', D' \end{pmatrix}$$

wieder ein System von vier ganzen Zahlen A', B', C', D' liefert, welche keinen gemeinschaftlichen Teiler haben und der Bedingung $A'D' - B'C' = n$ genügen, so ist jede dieser Funktionen identisch mit einer der ν Funktionen v_n , und folglich ist ihr Komplex identisch mit dem der Funktionen v_n . Bedeutet daher σ eine willkürliche, von ω unabhängige Größe, so ist das über alle ν Funktionen v_n ausgedehnte Produkt

$$\Pi(\sigma - v_n)$$

eine einwertige Funktion von ω , welche ungeändert bleibt, wenn ω durch eine beliebige äquivalente Größe

$$\frac{\gamma + \delta \omega}{\alpha + \beta \omega}$$

ersetzt wird, und folglich kann man

$$\Pi(\sigma - v_n) = F_n(\sigma, v)$$

setzen, wo $F_n(\sigma, v)$ eine ganze Funktion ν^{ten} Grades von σ bedeutet, deren Koeffizienten einwertige Funktionen von $v = \text{val}(\omega)$ sind. Ist v endlich, so gehört ω dem Innern des Gebietes S an, und folglich ist jeder der ν Werte v_n , also auch $F_n(\sigma, v)$ endlich. Wird aber $v = \infty$, so darf man annehmen, daß auch $\omega = \infty$ wird; da nun in diesem Falle

$$1^{\omega} \text{val}(\omega) = m,$$

also

$$1^{\frac{\partial}{\partial \omega}} \text{val} \left(\frac{c + d \omega}{a} \right) = m 1^{-\frac{c}{a}}$$

wird, wo m endlich und von Null verschieden ist [nämlich $= 2^{-6} 3^{-3}$, wie sich aus (16) und (19) in § 6 ergibt], so folgt, daß $F_n(\sigma, v)$ gleichzeitig mit v unendlich groß wird, und zwar von der Ordnung

$$\sum \frac{\partial}{\partial a} \cdot \frac{a}{e} \varphi(e) = \sum \frac{\partial}{\partial e} \varphi(e) = \sum \frac{a}{e} \varphi(e) = \nu;$$

mithin ist

$$F_n(\sigma, v) = \sigma^\nu + V_1 \sigma^{\nu-1} + V_2 \sigma^{\nu-2} + \dots + V_\nu$$

auch eine ganze Funktion ν^{ten} Grades von v , und es ist z. B.

$$-V_1 = \sum v_n = \frac{1}{m^{n-1}} v^n + \dots$$

eine ganze Funktion n^{ten} Grades von v . Die ν Funktionen v_n sind daher algebraische Funktionen von v , nämlich die Wurzeln der Gleichung

$$F_n(v_n, v) = 0.$$

Diese Valenzgleichung ist irreduktibel. Genügt nämlich die Funktion $v'_n = \text{val}(n\omega)$ einer Gleichung von der Form

$$G(v'_n, v) = 0,$$

wo $G(\sigma, v)$ eine ganze rationale Funktion der beiden Größen σ, v bedeutet, so ist identisch

$$G(\text{val}(n\omega), \text{val}(\omega)) = 0,$$

folglich auch, wenn die vier ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ genügen,

$$G\left(\text{val}\left(\frac{n\gamma + n\delta\omega}{\alpha + \beta\omega}\right), \text{val}(\omega)\right) = 0;$$

läßt sich nun zeigen, wie gleich geschehen soll, daß die Funktion

$$\text{val}\left(\frac{n\gamma + n\delta\omega}{\alpha + \beta\omega}\right)$$

durch geeignete Wahl der vier Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zur Übereinstimmung mit jeder der ν Funktionen

$$v_n = \text{val}\left(\frac{c + d\omega}{a}\right)$$

gebracht werden kann, so genügt jede Funktion v_n der Gleichung $G(v_n, v) = 0$, mithin ist $G(\sigma, v)$ teilbar durch $F_n(\sigma, v)$, woraus die Irreduktibilität dieser letzteren Funktion folgt. Es ist also nur noch zu beweisen, daß, wenn drei Zahlen a, c, d ohne gemeinschaftlichen Teiler gegeben sind, welche der Bedingung $ad = n$ genügen, man immer acht ganze Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$ so wählen kann, daß $\alpha\delta - \beta\gamma = \alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1$ und

$$\begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha', \beta' \\ \gamma', \delta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, 0 \\ c, d \end{pmatrix}$$

wird. Die allgemeinste Art, solche Zahlen zu finden, ist die folgende (vgl. die zu Anfang dieses Paragraphen ausgeführte Reduktion). Man wähle für γ eine beliebige Zahl, welche relative Primzahl zu d ist, und setze

$$\delta' = a\delta,$$

so kann man γ so wählen, daß die Zahl

$$\gamma' = d\gamma - c\delta$$

relative Primzahl zu δ' wird; denn wie man auch γ wählen mag, so ist γ' jedenfalls unteilbar durch diejenigen Primzahlen, welche gleichzeitig in a und in ∂ , also in e aufgehen, weil a, c, ∂ keinen gemeinschaftlichen Teiler haben, und weil δ relative Primzahl zu ∂ ist; bezeichnet man ferner mit p das Produkt aller übrigen in a aufgehenden Primzahlen (oder die Einheit, falls keine solche vorhanden sind), so ist ∂ relative Primzahl zu p , also auch zu $p\delta$, und folglich durchläuft γ' gleichzeitig mit γ ein vollständiges Restsystem (mod. $p\delta$); mithin gibt es unendlich viele Werte von γ , für welche γ' relative Primzahl zu $p\delta$ und folglich auch zu $\delta' = a\delta$ wird. Nachdem δ, γ so gewählt sind, daß δ', γ' relative Primzahlen werden, wähle man eine beliebige Lösung α', β' der Gleichung

$$\alpha' \delta' - \beta' \gamma' = 1,$$

und setze

$$\alpha = a\alpha' + c\beta', \quad \beta = \partial\beta',$$

so wird

$$\alpha\delta - \beta\gamma = (a\alpha' + c\beta')\delta - \partial\beta'\gamma = \alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1,$$

und die gefundenen acht Zahlen erfüllen die obigen Forderungen weil

$$n\gamma = a\gamma' + c\delta', \quad n\delta = \partial\delta'$$

ist.

Die Funktion $F_n(\sigma, v)$ ist symmetrisch in bezug auf σ und v , wenn $n > 1$ ist. Denn aus der Identität

$$F_n(\text{val}(n\omega), \text{val}(\omega)) = 0$$

folgt, wenn man ω durch $\frac{\omega}{n}$ ersetzt, die Gleichung

$$F_n\left(v, \text{val}\left(\frac{\omega}{n}\right)\right) = 0,$$

und da $\text{val}\left(\frac{\omega}{n}\right)$ eine der v Funktionen v_n ist, so ergibt sich aus der eben bewiesenen Irreduktibilität, daß $F_n(v, \sigma)$ durch $F_n(\sigma, v)$ teilbar und folglich $= \pm F_n(\sigma, v)$ sein muß; da aber im Falle des unteren Zeichens die irreduktible Funktion $F_n(\sigma, v)$ den Faktor $(\sigma - v)$ enthalten würde, so muß, wenn $n > 1$ ist, das obere Zeichen gelten.

Da die sämtlichen Funktionen v_n nur spezielle Fälle der in der Gleichung (11) des § 5 mit v' bezeichneten Funktion bilden, so besitzt die dortige Differentialgleichung (12) unendlich viele partikuläre Lösungen $v' = v_n$, welche algebraische Funktionen von v sind. Es

läßt sich auch zeigen, daß sie keine anderen algebraischen Lösungen besitzen kann, und hieraus kann man, wie ich glaube, den Satz ableiten, daß alle Koeffizienten der Funktion $F_n(\sigma, v)$ rationale Zahlen sind. Ich bemerke schließlich, daß man durch die Untersuchung der ganzen Funktion $F_n(v, v)$ oder auch der Diskriminante der Funktion $F_n(\sigma, v)$ zur Theorie der singulären Moduln geführt wird, für welche die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen stattfindet; eine nähere Ausführung dieser Untersuchung, in welcher die Komposition der quadratischen Formen eine wesentliche Rolle spielt, muß ich mir aber für eine andere Gelegenheit versparen.

Braunschweig, den 12. Juni 1877.

Erläuterungen zur vorstehenden Abhandlung.

Es war zur Zeit der Entstehung dieser Abhandlung noch unbekannt, daß die hier von Dedekind beschriebene, später in der Theorie der Moduln Funktionen so wichtig gewordene Dreiecksteilung der ω -Halbebene bereits weit früher aufgefunden worden war. Schon Gauß hat das Dreiecksnetz gekannt und benutzt, worüber man Bd. 8 seiner Werke, S. 102—105 vergleiche. Dasselbe gilt von Riemann, der in einer Vorlesung über die hypergeometrische Reihe im Wintersemester 1858/59 das Dreiecksnetz behandelt und zur Beschreibung der Abhängigkeit des Legendre-Jacobischen Integralmoduls k^2 vom Periodenverhältnis ω benutzt. Die Vorlesung ist s. Zt. durch v. Bezold nachgeschrieben; diese Nachschrift ist erst 1897 bekannt geworden und in den von M. Noether und W. Wirtinger herausgegebenen „Nachträgen zu Bernhard Riemanns gesammelten mathematischen Werken“ (Leipzig, 1902) allgemein zugänglich gemacht. Noch ehe die Abhandlung Dedekinds erschien, war F. Klein an die Theorie der elliptischen Moduln Funktionen herangeführt. Seine erste ausführlichere Abhandlung über Moduln Funktionen „Über die Transformation der elliptischen Funktionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades“ (datiert Anfang Mai 1878) ist mit Dedekinds Arbeit eng verwandt. Klein hat sich über die Entstehung seiner Arbeiten über Moduln Funktionen selbst ausführlich ausgesprochen in Band 3 seiner „Gesammelten mathematischen Abhandlungen“, S. 3—9.

Fricke.