O peryodach całek hypereliptycznych

przez

S. Kępińskiego.

Wniesiono na posiedz. Wydz. mat.-przyr. z d. 6 czerwca 1898; ref. czł. Karliński.

W kilku rozprawach[1]) zajmuje się L. Fuchs, Schlesinger i R. Fuchs związkami, szczególnie dwuliniowymi, które zachodzą między peryodami całek hypereliptycznych, rozważanymi jako funkcye jednego z punktów rozgałęzienia. Funkcye te czynią zadość pewnym równaniom różniczkowym, które należą, jak dowiódł L. Fuchs, do jednej i tej samej „kategoryi równań“ i właśnie, stosując twierdzenia o „przywiedlności“ i inne ogólne własności takich równań, wyżej wspomniani autorowie częściowo wyprowadzają, częścią tylko okazują istnienie owych związków między peryodami.

Metodę tę, wymagającą wielkiego aparatu i żmudnych rachunków, można bardzo znacznie uprościć, jeżeli się wprowadzi za podstawę rozumowania równanie różniczkowe, z sobą samem sprzężone, któremu czynią zadość peryody pewnej całki hypereliptycznej gatunku pierwszego. Wówczas można obyć się bez pomocy ogólnych twierdzeń i twierdzeń o przywiedlności, tyczących się równań tej samej kategoryi

---

[1]) Literaturę tego przedmiotu podałem w pracy „O peryodach całek hyp. rodzaju $p=2$“, drukowanej w Pracach matem. T. IX, gdzie niektóre ustępy są szczegółowiej omawiane.

(własności te raczej same z siebie wynikają), a nadto można wtedy o wiele łatwiej, i to z zupełną dokładnością, wyrażenia dwuliniowe peryodów i inne otrzymać we funkcyi zmiennego punktu rozgałęzienia.

§ 1.

Jeżeli przez

$$k_1, k_2 \dots k_{2p}, z, \infty$$

oznaczymy punkty rozgałęzienia powierzchni Riemanna dwuliściowej, to, jak wiadomo, powierzchnię tę określa równanie

$$y^2 = \psi_p(x)(x-z),$$

gdzie

$$\psi_p(x) = (x-k_1)(x-k_2) \dots (x-k_{2p}).$$

Wówczas całki hypereliptyczne, należące do tej powierzchni można przyjąć w kształcie

$$(1) \qquad \int \frac{(x-z)^{\xi-1}}{\sqrt{\psi_p(x)}}\, dx,$$

gdzie $2\xi = m$ jest liczbą całkowitą.

Jeżeli przez L rozumiemy jakikolwiek tor zamknięty na powierzchni Riemanna, nie dający się ściągnąć do jednego punktu, to całka powyższa wzięta wzdłuż toru L będzie jej peryodem

$$(2) \qquad u_L = \int_L \frac{(x-z)^{\xi-1}}{\sqrt{\psi_p(x)}}\, dx.$$

Wyrażenie (2) rozważajmy, wraz z Fuchsem, jako funkcyę zmiennego parametru z. Funkcya ta czyni zadość równaniu różniczkowemu jednorodnemu liniowemu rzędu $2p$-go:

$$(3) \qquad \sum_{\nu=0}^{2p} Q_\nu(z)\, u^{(\nu)} = 0 \text{ [1]},$$

gdzie

$$u^{(\nu)} = \frac{d^\nu u}{dz^\nu},$$

[1]) Schlesinger: „Handbuch der Theorie der linearen Diffgl. etc.“ Bd. II. p. 473.

$$(4) \qquad 2Q_\nu(z) = (-1)^{\nu+1} \frac{2\xi - 2p - \nu}{(\xi-1)(\xi-2)\dots(\xi-\nu)} \frac{\overset{(2p-\nu)}{\psi_p}(z)}{(2p-\nu)!}.$$

Nadając w powyższych wzorach *(1,..,4)* na 2ξ rozmaite wartości całkowite nieparzyste, otrzymamy rozmaite całki Abelowe, ich peryody i tym ostatnim odpowiadające równania różniczkowe. Między temi równaniami na szczególniejszą uwagę zasługuje równanie, należące do wartości

$$2\xi = 2p - 1.$$

Dla tej wartości otrzymujemy z (4)

$$2Q_\nu(z) = (-1)^\nu \frac{(\nu+1)\,2^{\nu-2}}{(2p-3)(2p-5)\dots(2p-2\nu-1)} \cdot \frac{\overset{(2p-\nu)}{\psi_p}(z)}{(2p-\nu)!},$$

albo, dzieląc całe równanie przez

$$\frac{2Q_{2p}}{\psi_p(z)} = (-1)^{p+1} \frac{2^{2p-1}}{(2p-3)(2p-5)\dots 3.1.1.3\dots(2p-1)}$$

i nazywając

$$\psi_p(z)\frac{Q_{2p-\nu}}{Q_{2p}} = a^p_{2p-\nu},$$

otrzymamy równanie

$$(4') \qquad \sum_{\nu=0}^{2p} a^p_{2p-\nu} \cdot \psi_p^{(\nu)}(z) \,.\, u^{(2p-\nu)} = 0,$$

gdzie

$$(5) \qquad a^p_{2p-\nu} = \frac{2p-\nu+1}{2^\nu} \frac{(2p-2\nu+3)(2p-2\nu+5)\dots(2p-1)}{\nu!}$$

$$a^p_{2p-1} = p, \quad a^p_{2p} = 1.$$

O równaniu (4′) twierdzimy, że jest z sobą samem sprzężone.

Kładąc w (5) $p+1$ zamiast p, otrzymamy

$$a^{p+1}_{2p+2-\nu} = \frac{2p-\nu+3}{2^\nu} \frac{(2p-2\nu+5)(2p-2\nu+7)\dots(2p+1)}{\nu!},$$

a zatem

$$a^{p+1}_{2p+2-\nu} - a^p_{2p-\nu} = \frac{2p-\nu+2}{2^{\nu-1}} \frac{(2p-2\nu+5)(2p-2\nu+7)\dots(2p-1)}{(\nu-1)!}$$

$$= a^p_{2p-\nu+1}$$

Mamy zatem związki:

$$(6)\qquad \begin{aligned} a^{p+1}_{2p+2-\nu} &= a^p_{2p-\nu} + a^p_{2p-\nu+1} \\ a^{p+1}_{2p+2} &= a^p_{2p} = 1\,,\quad a_1^{\,p+1} = a_0^{\,p}\,. \end{aligned}$$

Jeżeli więc dla krótkości lewą stronę równania (4′) nazwiemy $D_p(\psi_p, u)$, to na mocy związków (6) otrzymamy związek

$$D_{p+1}(\psi_{p+1}, u) = D_p(\psi_{p+1}, u'') + D_p(\psi'_{p+1}, u') + a_0^{\,p+1}\,\psi^{(2p+2)}_{p+1}\, u\,,$$

który wyraża tę własność, że jeżeli wielomian różniczkowy $D_p(\psi_p, u)$ jest z sobą samym sprzężony, to także wielomian $D_{p+1}(\psi_{p+1}, u)$ jest z sobą samym sprzężony.

Ponieważ zaś wielomian D dla $p=1$:

$$D_1(\psi_1, u) = \psi u'' + \psi' u' + \tfrac{1}{4}\, u$$

jest, jak łatwo sprawdzić, z sobą samym sprzężony, zatem twierdzenie nasze o równaniu (4′) jest w zupełności udowodnione.

Równaniu (4′) jako z sobą samem sprzężonemu możemy nadać kształt, wprowadzony przez Jacobi'ego:

$$(4'')\qquad \sum_{\nu=0}^{p} c_\nu \left(\psi^{(2\nu)}(z)\, u^{(p-\nu)}\right)^{(p-\nu)} = 0\,,$$

gdzie

$$c_\nu = (-1)^{\nu+1}\,\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2\nu-3)}{2^{3\nu}\,\nu!}\,,\quad c_1 = \frac{1}{2^3}\,,\quad c_0 = 1.$$

Zauważmy, że dla $2\xi = 2p-1$ całka (1), t. j.

$$(1')\qquad j = \int \frac{(x-z)^{\frac{2p-3}{2}}}{\sqrt{\psi(x)}}\,dx = \int \frac{(x-z)^{p-1}}{\sqrt{\psi(x)\,(x-z)}}\,dx$$

jest całką gatunku 1-go, z której pozostałe $(p-1)$ całek $j^{(m)}$ $[m = 1, \ldots (p-1)]$ tegoż gatunku otrzymamy, biorąc kolejno $(p-1)$ pochodnych j względem z:

Równaniu więc (4′) czynią zadość peryody u całki gatunku 1-go, a ich $(p-1)$ pochodnych względem z są peryodami pozostałych całek tegoż gatunku.

§ 2.

Peryod dowolnej całki hypereliptycznej można przedstawić jako sumę algebraiczną peryodów „elementarnych“, posiadających tę własność, że ich tory okrążają (w kierunku np. ujemnym) tylko punkt z i któryś z punktów rozgałęzienia: $k_1, k_2, \dots k_{2p}$. Jeżeli taki tor, okrążający punkt z i punkt k_i, i odpowiadający mu peryod nazwiemy s_i, to przy obiegach punktu z około wszystkich punktów osobliwych k_h w kierunku ujemnym otrzymamy podstawienia liniowe:

$$
\begin{aligned}
\overline{s_i} &= s_i - 2s_h \quad \text{dla } i > h \\
\overline{s_i} &= s_i \qquad\quad\ \ „ \ \ i = h \\
\overline{s_i} &= s_i + 2s_h \quad\ „ \ \ i < h.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Nadto zauważmy, że dla równania (4′) równaniem zasadniczem określającem w punkcie osobliwym k_h jest równanie:

$$k(k-1)(k-2)\dots(k-p+1)^2(k-p)\dots(k-2p+2)=0, \tag{8}$$

skąd wynika, że wykładniki całek u są dla punktów osobliwych k_h dodatne, lub co najwyżej równe zeru. Z tej ostatniej uwagi i z równań (7) wynika, że w okolicy punktu k_h całki s_i mają rozwinięcia:

$$s_i = \mathfrak{P}_i\,(z-k_h) \pm \frac{s_h}{2\pi i} \log\,(z-k_h), \text{ dla } i \gtrless h,$$

(9) zaś

$$s_h = \mathfrak{P}_h\,(z-k_h),$$

gdzie $\mathfrak{P}_i$, $\mathfrak{P}_h$ są szeregami potęgowymi, o potęgach całkowitych dodatnych, argumentu $(z-k_h)$.

Rozwinięcie dokładne całki s_h w okolicy punktu osobliwego k_h łatwo jest znaleźć w następujący sposób. Jeżeli z znajdzie się w pobliżu punktu k_h, to tor całkowania (okrążający z i k_h) możemy uważać za koło C, zakreślone z punktu k_h jako środka promieniem $r=|z-k_h|$ tak małym, że na jego polu, oprócz punktu z, nie znajduje się żaden z punktów osobliwych k_i, dla $i \gtrless h$. W tem kole mamy więc rozwinięcie

$$s_h = \sum_{m=0}^{\infty} (s_h^{(m)})_{z=k_h} \frac{(z-k_h)^m}{m!},$$

gdzie

$$(s_h^{(m)})_{z=k_h} = \left(\frac{ds_h^m}{dz^m}\right)_{z=k_h} =$$

$$= (-1)^m \frac{(2p-3)(2p-5)\dots(2p-2m-1)}{2^m} \int_c \frac{(x-k_h)^{\frac{2p-2m-3}{2}}}{\sqrt{\psi(x)}}$$

Ponieważ zaś w okolicy punktu k_h jest

$$\frac{1}{\sqrt{\psi(x)}} = (x-k_h)^{-\frac{1}{2}}\ \psi'(k_h)^{-\frac{1}{2}} \left[1-\tfrac{1}{4}\frac{\psi''(k_h)}{\psi'(k_h)}(x-k_h)+\dots\right],$$

zatem

$$(s_h^{(m)})_{z=k_h} = 0 \quad \text{dla} \quad m \leqq p-2\,,$$

$$(s_h^{(p-1)})_{z=k_h} = (-1)^{p-1}\frac{1.3\dots(2p-3)}{2^{p-1}}\ \psi'(k_h)^{-\frac{1}{2}}\ 2\pi i\,,$$

$$(s_h^{(p)})_{z=k_h} = (-1)^p\frac{1.3\dots(2p-3)}{2^{p+2}}\ \psi'^{-\frac{3}{2}}\ \psi''\ 2\pi i\,.$$

Jest zatem w okolicy punktu k_h :

$$(10)\qquad s_h(z) = (-1)^{p-1}\frac{1.3\dots(2p-3)}{2^{p-1}}\ 2\pi i\ \frac{(z-k_h)^{p-1}}{(p-1)!}$$

$$\left[\psi'^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2^3 p}\ \psi''\ \psi'^{-\frac{3}{2}}(z-k_h)+\dots\right]$$

Ze wzorów (8), (9) i (10) wnosimy, że wszystkie $(p-1)$ pochodnych funkcyi $s_i(z)$, dla $i \gtrless h$, to jest wszystkie

$$s_i^{(m)}(z) \quad \text{dla } m=0,\ 1,\ 2, \dots (p-1), \quad i \gtrless h$$

posiadają w okolicy punktu k_h rozwinięcia na szeregi:

$$s_i^{(m)} = \mathfrak{P}_i^{(m)}(z-k_h) \pm \frac{s_h^{(m)}}{\pi i}\log(z-k_h)\,,$$

(11) zaś

$$s_h^{(m)} = \mathfrak{P}_h^m(z-k_h)\,. \qquad m=0,\ 1,\ 2, \dots p-1\,.$$

Stąd zaś wynika, że wyrażenie utworzone z $s_i^{(m)}$ w sposób następujący:

$$u_{i,j}^{m,n} = s_i^{(m)}\,s_j^{(n)} - s_i^{(n)}\,s_j^{(m)}\,, \quad \text{dla } m \gtrless n = 0,\ 1,\ 2, \dots p-1\,,$$

posiada w okolicy punktu osobliwego k_h rozwinięcie na szereg kształtu:

$$(12)\qquad u_{i,j}^{m,n} = Q(z-k_h) \pm Q_1(z-k_h)\log(z-k_h)\,,$$

gdzie Q i Q_1 są szeregami potęgowymi o całkowitych i dodatnych potęgach argumentu: $z-k_h$.

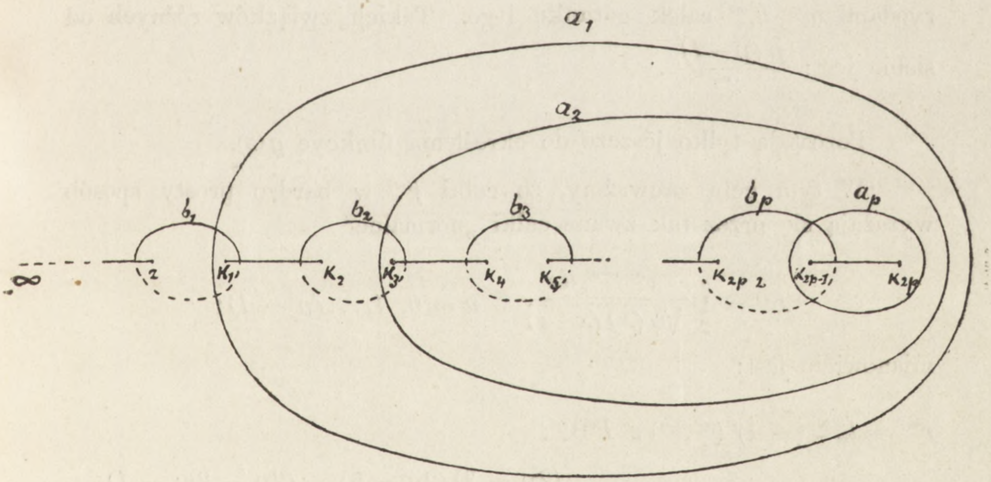
§. 3.

Korzystając z tego, że przy obiegu około punktu osobliwego k_h nietylko całki s_i, lecz także wszystkie ich pochodne: $s_i^{(m)}$ ulegają podstawieniom (7) zauważymy wraz z Fuchsem, że funkcya $u^{m,\,n}$ złożona z funkcyi $u_{i\,j}^{m,\,n}$ w sposób następujący:

$$\begin{aligned} u^{m,\,n} = -\,u_{1\,2}^{m,\,n} + u_{1\,3}^{m,\,n} - u_{1\,4}^{m,\,n} + \dots\quad & - u_{1,\,2p}^{m,\,n} \\ -\,u_{2\,3}^{m,\,n} + u_{2\,4}^{m,\,n} - \dots\quad & + u_{2,\,2p}^{m,\,n} \\ +\,u_{3\,4}^{m,\,n} - \dots\quad & - u_{3,\,3p}^{m\,n} \qquad (13) \\ \dots\dots\dots\quad & \\ & - u_{2p-1,\,2p}^{m,\,n}; \end{aligned}$$

pozostaje przy obiegach zmiennej z około wszystkich punktów osobliwych k_h, a więc także przy obiegu z około $z = \infty$, bez zmiany.

Wyrażenie to (12) zmieniać może tylko swój kształt zależnie od tego, jakie peryody liniowo od siebie niezależne weń wprowadzimy. Wprowadzając zamiast torów i peryodów s_i tory i peryody „kanoniczne“ Riemann'a, nazwijmy je a_i, b_i $(i = 1, 2, \dots p)$,



t. j. kładąc:

$$(14)\quad a_r^{(m)} = -\,s_{2r-1}^{(m)} + s_{2r}^{(m)} - \dots - s_{2p-1}^{(m)} + s_{2p}^{(m)}, \qquad r = 1,\ 2, \dots p,$$

zaś

$$b_1^{(m)} = s_1^{(m)}$$

(14) $$b_r^{(m)} = -s_{2r-2}^{(m)} + s_{2r-1}^{(m)} \qquad r = 2, 3, \ldots p,$$

otrzymamy:

(13′) $$u^{m,n} = \sum_{i=1}^{i=p} (a_i^{(m)} b^{(n)} - a_i^{(n)} b_i^{(m)}).$$

Ponieważ, jak zauważyliśmy, wyrażenie $u^{m,n}$ pozostaje przy obiegach około punktów osobliwych bez zmiany, i ponieważ funkcya ta nie posiada punktów istotnie osobliwych (nie posiadają ich bowiem także $s_i^{(m)}$), więc jest to funkcya jednowartościowa algebraiczna, t. j. funkcya wymierna zmiennej z. Nadto w rozwinięciach (12) dla $m < n = 0, 1, 2, \ldots p-1$ wyrażeń $u_{i,j}^{m,n}$, a więc i w rozwinięciu funkcyi $u^{m,n}$ nie zachodzą potęgi ujemne, wyrazy zaś zawierające logarytmy muszą zniknąć z powodu jednowartościowości funkcyi $u^{m,n}$. Stąd wynika, że dla $m < n = 0, 1, \ldots p-1$ jest $u^{m,n}$ funkcyą całkowitą wymierną:

(16) $$u^{m,n} = \underset{m,n}{g}(z) \qquad m < n = 0, 1, 2, \ldots (p-1),$$

co przedstawia związek dwuliniowy między peryodami $a_i^{(m)}$, $b_i^{(m)}$ i peryodami $a_i^{(m)}$ $b_i^{(m)}$ całek gatunku 1-go. Takich związków różnych od siebie jest: $\frac{p(p-1)}{2}$.

Pozostają tylko jeszcze do określenia funkcye $\underset{m,n}{g}(z)$.

W tym celu zauważmy, że całki $j^{(m)}$ w bardzo prosty sposób wyrażają się przez tak zwane całki „normalne“

$$I^{(n)} = \int \frac{x^{p-1-n}\, dx}{\sqrt{\psi(x)(x-z)}} \qquad n = 0, 1, \ldots (p-1);$$

mianowicie jest:

$$j^{(m)} = l_m \sum_{r=0}^{r=p-m-1} (-1)^r \binom{p-m-1}{r} z^r I^{(m+r)},$$

$$l_m = (-1)^m \frac{(2p-3)(2p-5)\ldots(2p-2m-1)}{2^m}.$$

Zowiąc więc peryody całek $I^{(n)}$ na torach a_i, b_i powierzchni Riemann'a odpowiednio

$$A_i^{(n)}, \; B_i^{(n)},$$

mamy dwa układy po p równań:

$$a_i^{(m)} = l_m \sum_{r=0}^{r=p-m-1} (-1)^r \binom{p-m-1}{r} z^r A_i^{(m+r)} \tag{16}$$

i $$i = 1,\ 2, \ldots p$$

$$b_i^{(m)} = l_m \sum_{r=0}^{r=p-m-1} (-1)^r \binom{p-m-1}{r} z^r B_i^{(m+r)} \tag{17}$$

Z równań tych (16) i (17) możemy nawzajem wyrazić peryody $A_i^{(m)}$, $B_i^{(m)}$ przez peryody $a_i^{(n)}$, $b^{(n)}$.

Ponieważ wyznacznik prawej strony równań (16), (17):

$$l_0\, l_1 \ldots l_{p-1} \begin{vmatrix} 1, & -\binom{p-1}{1} z, & \binom{p-1}{2} z^2, \ldots & \binom{p-1}{p-1} z^{p-1} \\ 0 & 1, & \binom{p-2}{2} z & \binom{p-2}{p-2} z^{p-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = l_0 . l_1 \ldots l_{p-1},$$

jest liczbą stałą, niezależną od z, zatem $A_i^{(m)}$ wyrazi się liniowo przez $a_i^{(n)}$ — podobnie $B_i^{(m)}$ przez $b_i^{(n)}$ — i spółczynniki tych wyrażeń będą funkcyami c a ł k o w i t e m i w y m i e r n e m i zmiennej z.

Tworząc więc wyrażenie $U^{m,n}$ z peryodów A_i, B_i w ten sam sposób jak $u^{m,n}$ z peryodów a_i, b_i, otrzymamy:

$$U^{m,n} = \sum_{i=1}^{i=p} (A_i^{(m)} B_i^{(n)} - A_i^{(n)} B_i^{(m)}) = G_{m,n}(z),$$

gdzie $G_{m,n}$ jest funkcyą również całkowitą wymierną zmiennej z.

Wiadomo jednak, że wszystkie peryody A_i^m, B_i^m $m = 0 \ldots p-1$ całek normalnych gatunku pierwszego posiada w okolicy punktu $z = \infty$ rozwinięcia kształtu

$$z^{-\frac{1}{2}} (\mathfrak{P}(\tfrac{1}{z}) + \tfrac{1}{\pi i} \mathfrak{P}_1(\tfrac{1}{z}) \log z,)$$

gdzie $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$ są szeregami potęgowemi całkowitych dodatnych potęg argumentu $\frac{1}{z}$.

Stąd wynika, że funkcya całkowita wymierna $G_{m,n}(z)$ posiada w punkcie $z = \infty$ wartość zero. Jest więc tożsamościowo:

$$G_{m,n}(z) = 0.$$

A zatem, m a m y $\dfrac{p(p-1)}{2}$ z w i ą z k ó w m i ę d z y p e r y o d a m i c a ł e k n o r m a l n y c h $I^{(m)}$:

$$U^{m,n} = 0, \qquad m < n = 0, 1, \ldots p-1; \tag{18}$$

a stąd wynika tyleż związków międzyperyodami całek $j^{(m)}$:

$$(19) \qquad u^{m,n} = 0 \qquad m < n = 0, 1 \ldots (p-1).$$

§. 4.

Biorąc pochodne wyrażeń (19) względem z, łatwo się przekonać, że także te wyrażenia

$$(20) \qquad u^{m,n} = 0,$$

dla których $\qquad m + n \leqq 2p - 2, \qquad n \geqq p > m;$

(nowych tych związków jest znowu $\frac{p(p-1)}{2}$). Nadto okaże się, że

$u^{0,2p-1} = - u^{1,2p-2} = u^{2,2p-3} = \ldots = (-1)^{p-1} u^{p-1,p}$, to jest, że:

$$(21) \qquad u^{m,n} = (-1)^m R(z), \qquad m + n = 2p - 1, m < p \leqq n.$$

Funkcyę tę $R(z)$ znajdziemy przy pomocy równania różniczkowego (4'). Jakoż z (21) otrzymujemy przez różniczkowanie:

$$u^{m+1,n} + u^{m,n+1} = (-1)^m R'(z),$$

a więc:

$$\begin{aligned}
u^{0,2p} + u^{1,2p-1} \qquad\qquad\qquad\qquad &= R'(z) \\
- u^{1,2p-1} - u^{2,2p-2} \qquad\qquad &= R'(z) \\
+ u^{2,2p-2} + u^{3,2p-3} &= R'(z) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
(-1)^{p-2} u^{p-2,p+2} + (-1)^{p-2} u^{p-1,p+1} &= R'(z) \\
(-1)^{p-1} u^{p-1,p+1} &= R'(z)
\end{aligned}$$

skąd sumując:

$$(22) \qquad u^{0,2p} = p\, R'(z).$$

Z drugiej jednak strony przy pomocy równania (4'):

$$\psi\, u^{(2p)} + p\, \psi'\, u^{2p-1} + a_{2p-2}\, \psi''\, u^{(2p-2)} + \ldots + a_0\, \psi^{(2p)}\, u = 0$$

i z uwagi na związki (19) i (20) znajdziemy:

$$\psi\, u^{0,2p} + p\, \psi'\, u^{0,2p-1} = 0,$$

czyli z uwagi na (21) i (22)

$$\psi R'(z) + \psi' R(z) = 0,$$

skąd

$$R(z) = \frac{c}{\psi}.$$

W celu znalezienia wartości ilości stałej c rozwiniemy (co najdogodniej) funkcyą $u^{p-1,p}$ w okolicy punktu rozgałęzienia k_1 na szereg potęgowy.

Uwzględniając wzory (7) i (14), łatwo zauważyć, że wszystkie całki a_i i b_i z wyjątkiem całki a_1 pozostają przy obiegu około punktu k_1 niezmienione, zaś całka a_1 ulega podstawieniu

$$\bar{a}_1 = a_1 - 2b_1.$$

Stąd na podstawie równań (11) wnosimy, że w okolicy punktu k_1 istnieją rozwinięcia:

$$\begin{aligned} a_1^{(m)} &= \mathfrak{P}_{a_1}^{(m)}(z-k_1) + \frac{b_1^{(m)}}{\pi i}\log(z-k_1) \\ a_i^{(m)} &= \mathfrak{P}_{a_i}^{(m)}(z-k_1) \qquad i = 2, 3 \ldots p \\ b_i^{(m)} &= \mathfrak{P}_{b_i}^{(m)}(z-k_1) \qquad i = 1, 2 \ldots p \end{aligned} \qquad m = 0, 1, \ldots p-1. \tag{23}$$

Co się tyczy $b_1 = s_1$, to całkę tę rozwinęliśmy w § 2-im (10)

$$b_1 = (-1)^{p-1}\frac{1.3\ldots 2p-3}{2^{p-1}} 2\pi i \frac{(z-k_1)^{p-1}}{(p-1)!} \left[\psi'^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2^2 p}\psi''\psi'^{-\frac{3}{2}}(z-k_1) + \ldots\right];$$

stąd

$$b_1^{(p-1)} = (-1)^{p-1}\frac{1.3\ldots 2p-3}{2^{p-1}} 2\pi i \left[\psi'^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2^3}\psi''\psi'^{-\frac{3}{2}}(z-k_1) + \ldots\right],$$

zaś

$$b_1^{(p)} = (-1)^p \frac{1.3\ldots 2p-3}{2^{p+2}} 2\pi i\, \psi''\psi'^{-\frac{3}{2}} + \ldots$$

Ponieważ według (23)

$$a_1^{(p-1)} = \mathfrak{P}_{a_1}^{(p-1)}(z-k_1) + \frac{b_1^{(p-1)}}{\pi i}\log(z-k_1),$$

zatem

$$a_1^{(p)} = \mathfrak{P}_{a_1}^{(p)} + \frac{b_1^{(p-1)}}{\pi i} \frac{1}{(z-k_1)} + \frac{b_1^{(p)}}{\pi i} . \log (z-k_1).$$

Jest więc

$$a_1^{(p-1)} b_1^{(p)} - a_1^{(p)} b_1^{(p-1)} = \mathfrak{P}_{a_1}^{(p-1)} \mathfrak{P}_{b_1}^{(p)} - \mathfrak{P}_{a_1}^{(p)} \mathfrak{P}_{b_1}^{(p-1)} - \frac{[b_1^{(p-1)}]^2}{\pi i} \frac{1}{z-k},$$

zaś

$$a_i^{(p-1)} b_i^{p} - a_i^{(p)} b_i^{(p-1)} = Q \qquad i = 2, 3, \ldots p,$$

gdzie Q jest szeregiem potęgowym, o potęgach dodatnych, całkowitych argumentu $(z - k_1)$.

Mamy zatem

$$u^{p-1, p} = - \frac{1^2 . 3^2 \ldots (2p-3)^2}{2^{2p-4}} \pi i \frac{1}{z-k_1} + \mathfrak{P}(z-k_1).$$

Ponieważ zaś

$$\frac{c}{\psi(z)} = \frac{c}{z-k_1} + \mathfrak{P}_1 (z-k_1),$$

więc

$$c = (-1)^p \left(\frac{1 . 3 \ldots (2p-3)}{2^{p-2}} \right)^2 \pi i,$$

tak iż

$$u^{m, n} = (-1)^m R(z) = (-1)^{m+p} \left(\frac{1 . 3 \ldots (2p-3)}{2^{p-2}} \right)^2 \pi i \frac{1}{\psi(z)},$$

(24) dla $m + n = 2p - 1$, $m < n$.

Mamy zatem twierdzenie:

$p\ (p-1)$ w y r a ż e ń (19, 20) $u^{m, n}$, d l a k t ó r y c h $m + n \leq 2p - 2$, $m < n$ s ą r ó w n e z e r u, zaś p w y r a ż e ń (24) $u^{m, n}$, d l a k t ó r y c h $m + n = 2p - 1$, $m < n$ s ą r ó w n e

$$(-1)^{m+p} \left(\frac{1 . 3 \ldots (2p-3)}{2^{p-2}} \right)^2 \pi i \frac{1}{\psi(z)}.$$

§. 5.

Z kolei wyprowadzimy związki między peryodami całek gatunku 1-go i 2-go.

Jako całki gatunku 2-go przyjmujemy funkcye otrzymane przez całkowanie wielokrotne względem z całki gatunku 1-go: j, mianowicie funkcye:

$$E^{(n)} = \int\int \ldots \int dz^n . \int j\, dz \qquad n = 0, 1, 2, \ldots p-1,$$

to jest

$$E^{(n)} = (-1)^{n+1} \frac{2^{n+1}}{(2p-1)(2p+1)\ldots(2p+2n-1)} \int \frac{(x-z)^{\frac{2p+2n-1}{2}}}{\sqrt{\psi(x)}} dx$$
$$E^{0} = E.$$

Peryody tych całek $E^{(n)}$ nazwijmy ogólnie $v^{(n)}$ ($v^{0} = v$), a jeżeli będzie szło o peryody $v^{(n)}$ na torach a_i, b_i powierzchni Riemann'a, to dla krótkości oznaczmy je przez:

$$v_{a_i}^{(n)} = \alpha_i^{(n)} \qquad n = 0, 1, \ldots, p-1$$
$$v_{b_i}^{(n)} = \beta_i^{(n)} \qquad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Z równań (4″) otrzymujemy:

$$c_p\, \psi^{(2p)} u = -c_{p-1} (\psi^{(2p-2)} u')' - c_{p-2} (\psi^{(2p-4)} u'')'' - \ldots - c_1 (\psi' u^{(p-1)})^{(p-1)} -$$
$$- c_0 (\psi\, u^{(p)})^{(p)}.$$

Całkując to wyrażenie względem z, otrzymamy:

$$c_p\, \psi^{(2p)} v = -c_{p-1}\, \psi^{(2p-2)} u' - c_{p-2} (\psi^{(2p-4)} u'')' - \ldots - c_1 (\psi'' u^{(p-1)})^{(p-2)} -$$
$$- c_0 (\psi\, u^{(p)})^{(p-1)}. \tag{25}$$

Całkując zaś (25) względem z n razy, mieć będziemy [1]):

$$d_0^n\, \psi^{(2p)} v^{(n)} = d_1^n\, \psi^{(2p-1)} v^{(n-1)} - d_2\, \psi^{(2p-2)} v^{(n-2)} + \ldots + (-1)^n d_n^n\, \psi^{(2p-n)} v +$$
$$+ (-1)^n d_{n+1}^n\, \psi^{(2p-n-1)} u + (-1)^{n-1} d_{n+2}^n\, \psi^{(2p-n-2)} u' + \ldots +$$
$$+ (-1)^{2n-1} d_{2n}^n\, \psi^{(2p-2n)} u^{(n-1)} + 0 - d_{n+2}^n\, \psi^{(2p-2n-2)} u^{(n+1)} - \ldots -$$
$$- c_0 (\psi\, u^{(p)})^{(p-n-1)}\,; \tag{26}$$

Spółczynniki d_i^n otrzymuje się ze wzorów:

$$d_i^n = \sum_{j=i}^{j=2n} d_j^{n-1}, \qquad d_{2n-1}^{n-1} = 0, \qquad d_{2n}^{n-1} = c_{p-n}.$$

[1]) Podstawiając w (26) za $n = 0, 1, \ldots, p-1$, można wyrazić peryody całek gatunku 2-go jako funkcye liniowe peryodów całki u i jej $(2p-1)$ pochodnych. Spółczynniki tych funkcyi będą funkcyami całkowitemi, wymiernemi, zmiennej z.

Związki dwuliniowe między peryodami całek gatunku 1-go: $a_i^{(m)}$, $b_i^{(m)}$ i peryodami całek gatunku 2-go: $\alpha_i^{(n)}$, $\beta_i^{(n)}$ będą miały kształt:

$$w^{m,n} = \sum_{i=1}^{i=p} (\alpha_i^{(m)} \beta_i^{(n)} - \alpha_i^{(n)} \beta_i^{(m)}) \qquad m, n = 0, 1, \dots p-1 ;$$

jest ich więc p^2.

Na podstawie wzoru (26) otrzymamy:

$$\begin{aligned} d_o^n \psi^{(2p)} w^{m,n} &= d_1^n \psi^{2p-1} w^{m,n-1} - d_2 \psi^{(2p-2)} w^{m,n-2} + \dots + \\ &+ (-1)^n \psi^{2p-n} w^{m,o} + (-1)^n d_{n+1}^n \psi^{(2p-n-1)} u^{m,o} + \\ &+ (-1)^{n-1} d_{n+2}^n \psi^{(2p-n-2)} u^{n,1} + \dots - c_o \psi u^{m,2p-n-1}. \end{aligned} \tag{27}$$

Wzór ten jednak bardzo się upraszcza. Okażemy naprzód, że wyrażenia

$$w^{m,n} = \begin{cases} \text{stała} & m = n \\ 0 & m > n \end{cases} \qquad m - n \leqq 2p - 1.$$

Jakoż, z równości (25) otrzymujemy, ze względu na (19), (20), (24)

$$\begin{aligned} c_p w^{o,o} &= -\psi(z) u^{o,2p-1} \\ &= (-1)^{p+1} \left(\frac{1.3.\dots(2p-3)}{2^{p-2}}\right)^2 \pi i, \end{aligned}$$

czyli z uwagi, że według (4')

$$c_p = (-1)^{p+1} \frac{1.3\dots(2p-3)}{2^{3p}.\, p!},$$

zaś

$$\psi^{(2p)} = 2p!,$$

będziemy mieli:

$$w^{o,o} = \frac{2^4}{2p-1} \pi i. \tag{28}$$

Biorąc pochodne wyrażenia (28) względem z i zważając na to że stosownie do naszych oznaczeń, jest

$$\frac{dw^{o,o}}{dz} = w^{1,o} + u^{o,o} = w^{1,o},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{dw^{k,o}}{dz} = w^{k+1,o} + u^{k,o},$$

zaś

$$u^{k,o} = -u^{o,k} = 0 \qquad \text{dla } k = 1, 2, \dots (2p-2),$$

mamy

$$w^{n,0} = 0 \,, \qquad n = 1, 2, \ldots, 2p-1 \,.$$

Nadto, przypuszczając, że nasze twierdzenie: $w^{n,n}$ = Const, i t. d. jest prawdziwie dla $n = 0, 1, \ldots n$, okażemy, że jest także prawdziwe dla $n+1$, to jest, że także $w^{n+1,\, n+1}$ = Const i t. d.

Jakoż wówczas z równości (26) otrzymujemy:

$$d_0^{n+1} \psi^{(2p)} w^{n+1,\, n+1} = d_1^{n+1} \psi^{(2p-1)} w^{n+1,\, n} - d_2^{n+1} \psi^{(2p-2)} w^{n+1,\, n-1} + \ldots - \psi(z)\, u^{n+1,\, 2p-n-2}.$$

Lecz według przypuszczenia i wzorów (19) (20) wszystkie wyrazy prawej strony są równe zeru z wyjątkiem ostatniego, który według (24)

$$\text{jest równy } (-1)^{n+p} \left(\frac{1.3 \ldots (2p-3)}{2^{p-2}} \right)^2 \pi i \,.$$

Jest więc istotnie $w^{n+1,\, n+1}$ = Const., a stąd przez różniczkowanie otrzymujemy:

$$w^{n+k,\, n+1} = 0 \,, \qquad k = 2, \ldots 2p \,.$$

Mamy więc z uwagi, że twierdzenie (28) jest sprawdzone dla $n = 0$ istotnie:

$$w^{n,n} = \frac{(-1)^{n+p-1}}{d_0^n \cdot (2p)!} \left(\frac{1.3 \ldots 2p-3}{2^{p-2}} \right)^2 \pi i \qquad n = 0, 1, \ldots p-1, \tag{29}$$

$$w^{n+k,\, n} = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots 2p-1.$$

Dla $m < n$ tj. $n = m + r$ otrzymujemy ze wzoru (27), uwzględniając (29), związek

$$w^{m,\, m+r} = e_1^{m+r} \psi^{(2p-1)} w^{m,\, m+r-1} - e_2^{m+r} \psi^{(2p-2)} w^{m,\, m+r-2} - \ldots + + (-1)^{r-1} e_r^{m+r} \psi^{(2p-r)} w^{m,\, m}, \tag{30}$$

gdzie $e_i^{m+r} = \dfrac{1}{\psi^{(2p)}} \dfrac{d_i^{m+r}}{d_0^{m+r}}$, $m = 0, 1, \ldots (p-1)$, $r = 1, 2, \ldots (p-m-1)$.

Podstawiając w (30) — przy stałem m — zamiast r kolejno $1, 2, \ldots, r$, otrzymamy, po prawej stronie równości (30), funkcyą całkowitą wymierną argumentu z stopnia r-go kształtu:

$$w^{m,\, m+r} = (-1)^r w^{m,\, m} \sum e_{i, j, \ldots k, l} \left[\psi^{(2p-i)}\right]^{m_i} . \left[\psi^{(2p-j)}\right]^{m_j} \ldots \left[\psi^{(2p-k)}\right]^{m_k} . \left[\psi^{(2p-l)}\right]^{m_l}, \tag{30'}$$

gdzie $i < j < \ldots < k < l$ mogą przyjmować wartości z szeregu liczb $1, 2, \ldots, r$; wykładniki $m_i, m_j, \ldots m_k, m_l$ czynią zadość równości: $i\, m_i + j\, m_j + \ldots + k\, m_k + l\, m_l = r$, zaś spółczynnik

$$e_{i, j \ldots k, l} = (-1)^{i+j+\ldots+k+l} \sum \prod_{s=0}^{s=m_i-1} e_i^{m+r-si} . \prod_{s=0}^{s=m_j-1} e^{m_j+r-im_i-sj} \ldots \prod_{s=0}^{s=m_l-1} e^{m_l+r-im_i-jm_j-\ldots km_k-sl}$$

Znak Σ oznacza sumę iloczynów otrzymanych z wyrażenia stojącego pod znakiem Σ przez permutacye dolnych wskaźników, przyczem pamiętać należy o tem, że, jeżeli w iloczynie zastąpimy naprzykład: $e_s^{m+r-\sigma}$ przez $e_t^{m+r-\sigma}$ a ($e_t^{m+r-\tau}$ przez $e_s^{m+r-\tau}$), to w następujących po $e_s^{m+r-\sigma}$ czynnikach: $e_{s_1}^{m+r-\sigma-s}$, $e_{s_2}^{m+r-\sigma-s}, \ldots$ należy we wskaźnikach górnych odejmować t zamiast s, to jest: otrzymamy iloczyn $\ldots e_t^{m+r-\sigma}\ e_{s_1}^{m+r-\sigma-} \ldots$

Mamy więc twierdzenie:

Związki (29):

$$\left.\begin{aligned} & w^{n+r,\, n} = 0 \\ & w^{n,\, n} = \frac{(-1)^{n+p+1}}{d_0^n\, (2p)\,!} \left(\frac{1.\, 3. \ldots (2p-3)}{2^{p-2}}\right)^2 \pi i \\ & \text{i związki (30)} \\ & w^{n,\, n+r} = g_{n,\, r}(z) \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} & n = 0, 1, \ldots (p-1) \\ & r = 1, 2, \ldots, p-n-1 \end{aligned}$$

przedstawiają wszystkie p^2 związków dwuliniowych między peryodami całek gatunku 1-go, a peryodami całek gatunku 2-go.

§. 6.

Co się tyczy związków dwuliniowych między peryodami całek gatunku drugiego, to kładąc:

$$v^{m,\, n} = \sum_{i=0}^{i=p} (\alpha_i^{(m)}\, \beta_i^{(n)} - \alpha_i^{(n)}\, \beta_i^{(m)}) \qquad m < n = 0, 1, \ldots (p-1),$$

otrzymamy na podstawie (25) i (26) wzory:

$$\begin{aligned} & d_0^n\, \psi^{(2p)}\, v^{m,\, n} = d_1^n\, \psi^{(2p-1)}\, v^{m,\, n-1} - d_2\, \psi^{(2p-2)}\, v^{m,\, n-2}, + \ldots + \\ (31) \quad & + (-1)^n\, d_n^n\, \psi^{(2p-n)}\, v^{m,\, 0} + (-1)^{n+1}\, d_{n+1}^n\, \psi^{(2p-n-1)}\, w^{0,\, m} + \ldots + \\ & + (-1)^{m+n+1}\, \psi^{2p-m-n-1}\, w^{m,\, m}. \end{aligned}$$

Ze wzoru tego łatwo dostrzedz, że $v^{m,n}$ jest funkcyą zmiennej z całkowitą, wymierną, stopnia $(m+n+1)$-go.

§. 7.

Nakoniec także i wyprowadzenie związku stopnia $(2p)$-go między peryodami całek gatunku 1-go i peryodami całek gatunku 2-go nie przedstawia trudności.

Związek ten otrzymamy, obliczając wyznacznik:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & a_2, & b_2 & \ldots & a_p, & b_p \\ a'_1, & b'_1, & a'_2, & b'_2 & \ldots & a'_p, & b'_p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{(p-1)}, & b_1^{(p-1)}, & a_2^{(p-1)}, & b_2^{(p-1)} & \ldots & a_p^{(p-1)}, & b_p^{(p-1)} \\ \alpha_1, & \beta_1, & \alpha_2, & \beta_2 & \ldots & \alpha_p, & \beta_p \\ \alpha_1^{(1)}, & \beta_1^{(1)}, & \alpha_2^{(1)}, & \beta_2^{(1)} & \ldots & \alpha_p^{(1)}, & \beta_p^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{(p-1)}, & \beta_1^{(p-1)}, & \alpha_2^{(p-1)}, & \beta_2^{(p-1)} & \ldots & \alpha_p^{(p-1)}, & \beta_p^{(p-1)} \end{vmatrix}.$$

Okażemy naprzód, że wyznacznik Δ ma wartość stałą, niezależną od z.

Jakoż, pomnóżmy $(p+1)$-szy $(p+2)$-gi, ... $(2p)$-ty wiersz tego wyznacznika odpowiednio przez $d_0^0\,\psi^{(2p)}$, $d'_0\,\psi^{(2p)}$, ..., $d_0^{(p-1)}\,\psi^{(2p)}$ i podstawny zamiast $d_0^n\,\psi^{(2p)}\,\alpha_i^{(n)}$ i $d_0^n\,\psi^{(2p)}\,\beta_i^{(n)}$ $(n=0,1,\ldots(p-1)$ $i=1,2,\ldots p)$ wyrażenia (25) i (26), to otrzymamy po przestawieniu wierszy:

$$(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \prod_{n=0}^{n=p-1} d_0^n.\,[\psi^{(2p)}]^p\,\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & , b_1 & \ldots a_p & , b_p \\ a'_1 & , b'_1 & \ldots a'_p & , b'_p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{(2p-1)}, & b_1^{(2p-1)} & \ldots a_p^{(2p-1)}, & b_p^{(p2-1)} \end{vmatrix} \times [\psi(z)]^p.$$

Lecz wyznacznik stojący po prawej stronie, jako utworzony przez $2p$ całek równania (4') i ich $(2p-1)$ pochodnych, jest równy

$$c\,.\,e^{-\int \frac{p\,\psi'}{\psi}dz} = \frac{c}{[\psi(z)]^p}\,.$$

Jest więc istotnie

$$\Delta = \text{stałej}.$$

Dla obliczenia tej stałej możemy użyć jakiegolwiek szczególnego przypadku naprzykład przyjąć $z = 0$, $\psi(x) = x^{2p} - 1$, a otrzymamy

$$\Delta = (-1)^{\frac{3p}{2}} \frac{3 . 5^2 . 7^3 \ldots (2p-3)^{p-2}}{(4p-3)(4p-5)^2 \ldots (2p+3)^{p-2}} \frac{2^{4p} \pi^p}{(2p+1)^{p-1}(2p-1)^{p+1}}.$$