

Teorya fizycznego stanu kuli ziemskiej

przez

M. P. Rudzkiego.

Rozprawa konkursowa odznaczona nagrodą im. Kopernika, dnia 3. maja 1899 r.

Motto: „Neque enim ultra superficiem penetrare
nobis datum est“.

Leibnitz. Protogaea §. III.

PRZEDMOWA.

Stosownie do tematu ogłoszonego przez Akademię starałem się w niniejszej pracy przedstawić obecny stan wiadomości o wnętrzu ziemi i, jeśli się da, posunąć teorię stanu wnętrza ziemi pod jakimkolwiek względem.

Omawiając obecny stan naszych wiadomości o wnętrzu ziemi, musiałem naturalnie poświęcić dużo miejsca zestawieniu badań innych autorów, którzy zajmowali się rozmaitemi kwestyami należącemi do teoryi stanu wnętrza ziemi.

Opracowałem jednak zadanie o Eulerowskiej perturbacji u ciała sprężystego w sposób nowy, inny aniżeli to n. p. uczynił Hough. Co do zadania o perturbacji sprężystego ciała pokrytego oceanem, wyłożonego w rozdz. V-tym; to, o ile mi wiadomo, te zadanie dotąd przez nikogo ściśle traktowane nie było. Przedstawia ono wielkie podobieństwo ze zadaniem opracowanem w IV-tym rozdziale [Eulerowska perturbacja u ciała sprężystego niepokrytego oceanem]; mimo to nie mogłem połączyć tych dwóch zadań w jedno ze względu na pewne zasadnicze różnice pochodzące stąd, że uwzględniając wpływ oceanu na perturbację, musimy wprowadzić pewne nowe warunki zachodzące

w powierzchni oceanu. Staralem się tylko o ile możności skrócić zadanie wyłożone w rozdz. V-tym powołując się na wyniki poprzednio otrzymane w rozdz. IV-tym.

W rozdziale VI. starałem się zużytkować prędkości rozchodzenia się drgań podczas trzęsień ziemi jako kryterium do rozstrzygnięcia pytania o stanie wnętrza, przyczem zaznaczyłem tę okoliczność, że rozchodzenie się drgań w pokładach ziemskich nie może być bez zastrzeżeń podciągnięte pod teorię rozchodzenia się drgań w ośrodkach doskonale sprężystych izotropowych.

Nareszcie w rozdziale VII. okazałem, że ani zjawiska wulkaniczne, ani tworzenie się gór nie stoją w sprzeczności z postulatami teorii sztywnego wnętrza.

W ciągu całego tego badania pamiętałem o Newtonowskiem „*hypotheses non fingo*“, jeżeli pomimo tego treść tej pracy wygląda tak, jak apologia teorii sztywnego czy raczej zachowującego się we wielu przypadkach tak jak ciało sztywne, wnętrza ziemi; to należy powiedzieć, że znane nam obecnie fakty widocznie lepiej godzą się właśnie z tą teorią a nie z inną.

Niektóre dopiski i drobne zmiany zrobiłem już po ogłoszeniu wyniku konkursu w przerwie czasu między konkursem a rozpoczęciem druku, uczyniłem to w tym celu, aby uwzględnić nowe prace, nowe badania aż do ostatniej chwili t. j. do końca czerweca 1899 roku.

ROZDZIAŁ I.

Związek między stanem wnętrza ziemi a jej figurą. Rozkład siły ciężkości w powierzchni geoidy. Kompensacya i izostazyja.

Od czasu, kiedy poznano niektóre figury równowagi obracającego się ciekłego ciała, często wygłaszano mniemanie, że wewnątrz ziemi albo jeszcze jest ciekłe, albo przynajmniej musiało być w przeszłości ciekłe, albowiem inaczej trudno pojąć, dlaczego ziemia posiada kształt elipsoidy obrotowej t. j. właśnie kształt równowagi obracającej się ciekłej masy. Wszakże Playfair¹⁾, a później Mohr²⁾ inaczej o tem sądzili. Wedle ich mniemania elipsoidalna figura ziemi może doskonale pogodzić się z hipotezą zupełnie sztywnego wnętrza, albowiem nieustanna działalność wód (mianowicie rozplókiwanie przez wody),

¹⁾ Playfair. *Illustrations of the Huttonian Theory of the Earth*. patrz. n. p. franc. tłum. Basseta [*Explications de Playfair etc. . . . Paris 1815*]. Note XXV str. 403 i nast.

²⁾ Mohr. *Geschichte der Erde* str. 447.

która, jak wiadomo, dąży do zrównania powierzchni łądu z poziomem oceanów, musiała z czasem nadać ziemi kształt elipsoidy obrotowej. Jednakże, jak to słusznie zauważył Pfaff¹⁾, mniemanie Playfaira i Mohra jest błędne. Playfair i Mohr pomieszały dwa różne pojęcia: pojęcie poziomu oceanów u ciała składającego się ze sztywnego jądra i ciekłej hydrosfery z pojęciem powierzchni równowagi całkowicie ciekłego jednorodnego ciała. Przy odpowiednim kształcie i budowie sztywnego jądra (n. p. gdyby jądro było sześciennie), poziom otaczającego je oceanu miałby figurę zgoła różną od elipsoidy obrotowej i same splókiwanie przez wody nigdyby nie mogło doprowadzić takiego ciała do elipsoidalnego kształtu.

Natomiast należy zastanowić się nad pytaniem, czy wogóle ciało sztywne tych rozmiarów co ziemia może posiadać kształt znacznie różny od kształtu równowagi obracającej się cieczy, wiadomo bowiem, że jeżeli czy to zewnętrzna figura czy wewnętrzna budowa sztywnego ciała nie czyni zadość warunkom równowagi, to wewnątrz tego ciała muszą istnieć odpowiednie ciśnienia i ciągnienia. Jeżeli ciało jest wielkie a odstępstwa od budowy i figury równowagi znaczne, to owe ciśnienia i ciągnienia łatwo mogą przewyższyć wytrzymałość najmocniejszych materyałów. Tak n. p. G. H. Darwin²⁾ obliczał różnice ciśnień³⁾ wewnątrz jednorodnej elipsoidy tych rozmiarów co ziemia w razie, gdy spłaszczenie elipsoidy różni się o $\frac{1}{1000}$ od spłaszczenia odpowiadającego warunkom równowagi przy prędkości kątowej obrotu naokoło stałej osi równej prędkości kątowej obrotu ziemi i znalazł, że w środku elipsoidy różnice ciśnień dochodziłyby do tego natężenia, przy którym mosiądz poczyną pękać.

Ten przykład wskazuje nam z jednej strony, że ciało sztywne tych rozmiarów co ziemia ale posiadające budowę znacznie różną od budowy czyniącej zadość warunkom równowagi poprostu nie mogłoby istnieć⁴⁾, z drugiej zaś strony wskazuje nam, że gdyby się okazało, że figura ziemi w czemś nie czyni zadość warunkom równowagi, to „eo ipso“

1) Pfaff. Geologie als exacte Wissenschaft. Leipzig 1874 str. 4.

2) On the Stresses, due to the Weight of Continents. Phil. Trans. 1882 r., str. 204.

3) Wiadomo, że przy jednakowem ze wszec stron ciśnieniu ciało może być zmiażdżone, ale o pękaniu, łamaniu się, rozstrzygają różnice ciśnień w głównych kierunkach.

4) Przypominamy tu analogiczną kwestyę co do natury pierścieni Saturna. Te pierścienie nie mogą być jednolitemi bryłami, muszą składać się z oddzielnych drobnych ciałek, albowiem pierścień jest figurą równowagi niestałej. O ile się zdaje, nowsze spektroskopiczne badania Seeligera, Keelera i innych potwierdzają ten postulat teoryi.

mielibyśmy ważną wskazówkę co do budowy i stanu wnętrza ziemi. Gdyby się n. p. okazało, że odstępstwa od kształtu i budowy czyniących zadość warunkom równowagi są dość znaczne, to trzeba by koniecznie przypuścić, iż materiały, z których ziemia jest zbudowana, posiadają wielką wytrzymałość i t. d.

Zaraz jednak zobaczymy, że te kryterium jest zawodne. Wiadomo, że obrotowa elipsoida jest figurą równowagi jednolitego ciekłego ciała, obracającego się ze stałą kątową prędkością naokoło stałej osi. Wprawdzie prócz obrotowej elipsoidy istnieją jeszcze inne figury stałej równowagi właściwe jednolitej cieczy n. p. trójosiowe elipsoidy Jacobiego ¹⁾ oraz jeszcze inne figury ²⁾, lecz te figury równowagi odpowiadają o wiele większym prędkościom kątowym niżli ta, z którą obraca się nasza ziemia. Tymczasem elipsoida obrotowa jest właśnie tą figurą równowagi stałej, która odpowiada rzeczywistej kątowej prędkości obrotu ziemi.

Lecz ziemia nie jest jednolitem ciałem, przeciwnie gęstość we wnętrzu ziemi z pewnością wzrasta w kierunku od powierzchni ku środkowi, nasuwa się zatem pytanie jakie są figury równowagi cieczy niejednorodnych. Na to pytanie należy odpowiedzieć, że nie znamy ściśle figur równowagi niejednorodnej cieczy. Wiemy tylko z badań p. Hamy ³⁾, że właściwie elipsoidy nie mogą być ani zewnętrzną powierzchnią niejednorodnej cieczy, ani też żadną z powierzchni oddzielających warstwy o rozmaitej gęstości, ale jednocześnie jeszcze z badań Clairaut'a wiemy, że przy tej prędkości obrotowej, którą posiada ziemia, tak zewnętrzna powierzchnia, jak powierzchnie oddzielające warstwy o różnej gęstości muszą być bardzo podobne do elipsoid obrotowych. Dalej z badań Clairaut'a wiemy, że spłaszczenie tych niby elipsoidalnych powierzchni musi być tem mniejsze, im dana powierzchnia znajduje się bliżej środka. Jednakże nie znając prawa gęstości nie możemy obliczyć ani spłaszczenia tych wewnętrznych niby elipsoid, ani też zewnętrznej powierzchni. Wiemy tylko, że w warunkach podobnych do warunków ziemskich spłaszczenie zewnętrznej powierzchni musi być zawarte mię-

¹⁾ Jeżeli jak zwykle oznaczymy przez a , b i c , największą, średnią i najmniejszą półosie elipsoidy, to elipsoida Jacobiego będzie taką, dla której spełniona jest nierówność:

$$\frac{1}{c^2} > \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

²⁾ Porównaj Poincaré. Sur les figures d'équilibre... etc... Acta Mathematica VII tom.

³⁾ Theorie de la figure des planètes. Journal de mathématiques pures et appl. (Liouville'a) 1890 r. str. 69—143, mianowicie str. 143.

dzy granicami $\frac{1}{232}$ i $\frac{1}{578}$, albowiem $\frac{1}{232}$ jest to spłaszczenie jednolitej ciekłej masy o gęstości równej średniej gęstości ziemi t. j. o gęstości 5,5¹⁾ obracającej się tą samą kątową prędkością co ziemia, zaś $\frac{1}{578}$ jestto spłaszczenie elipsoidy, obracającej się również z tą samą kątową prędkością co ziemia, ale posiadającej wszędzie gęstość równą zero z wyjątkiem środka, w którym wyobrażamy sobie punkt materyalny o masie równej masie ziemi.

Zamiast tych nazbyt już szerokich granic, można jednak podać nieco ciaśniejsze. Jako dolną granicę spłaszczenia można wziąć liczbę $\frac{1}{412}$. Jest to spłaszczenie ciekłego ciała posiadającego średnią gęstość 2,65 t. j. gęstość granitów i gneisów z nieskończenie małym jądrem zawierającym w sobie całą zbywającą masę ziemi. Zamiast spłaszczenia $\frac{1}{232}$ można wziąć jako górną granicę spłaszczenia liczbę $\frac{1}{297,3}$ t. j. granicę wskazaną przez Poincarégo. Kilka lat temu Callandreau, Radau, Tisserand i Poincaré²⁾ zajmowali się kwestyą prawa rozkładu

¹⁾ Przytoczmy tu rezultaty najnowszych pomiarów średniej gęstości ziemi. Gęstość ta wynosi wedle Cornu i Baille od: 5,50 (serya zimowych pomiarów) do: 5,56 (serya letnich pomiarów). Wedle Poyntinga: 5,52 (1-sza serya pomiarów) albo: 5,46 (2-ga serya pomiarów). Wedle Wilsinga: 5,59, a wedle drugiej seryi pomiarów dokonanych ulepszoną metodą: 5,577. Wedle Boysa [Newtonian Constant of gravitation. Phil. Trans. tom 186 A.] średnia gęstość ziemi wynosi: 5,5268, wedle Richarza i Krigar-Menzla [Wied. Ann. 1898 r. tom 66]: 5,505 ± 0,009, a wedle S. Brauna [Denkschriften Akad. Wiss. Wien. z 1897 r. str. 187—258]: 5,52945 ± 0,00170. Widzimy więc, że najwięcej zgodnemi między sobą są liczby podane przez Boysa i Brauna. Z dalszych pomiarów przytoczymy: Cavendish'a: 5,45, Reicha: 5,49 oraz: 5,58 i Baily: 5,67. Wszyscy trzej posługiwali się metodą Cavendisha.

²⁾ Porówn. Tisserand. Méc. celeste. tom II (Paryż 1890 r.) rozdz. XIV, dalej cały szereg prac wymienionych autorów w Bulletin Astr. tomy: I, II, V i VI, dalej pracę Callandreau w XIX tomie Annales de l'Observatoire, oraz cytowaną pracę Hamy'ego w Journal des math. pures et appl. z 1890 r. Właściwie pierwszy zajmował się tą kwestyą d'Alembert w swym sławnym traktacie „Sur la precession des Equinoxes 1749 r. [patrz: Todhunter. History of the Theories of Attraction. I tom (1873 r.) str. 264]. Około 1840 r. tą samą kwestyą zajmował się też francuzki matematyk E. Roche. Jego prace drukowane w mało dostępnych i rzadkich „Memoires de l'Academie de Montpellier“, znane mi są tylko z cytat u Tisseranda, G. H. Darwina i innych autorów. Roche twierdził, że istnieje pewna acz bardzo mała niezgodność między stałemi precesyji i nutacyji, spłaszczeniem ziemi oraz pewnemi stałemi, figurującemi w teorii perturbacyi ruchów księżycza, a zależnemi od rozkładu mas we wnętrzu ziemi, jeżeli założymy, że budowa ziemi ściśle czyni zadość warunkom równowagi, t. j. że jest zupełnie taką, jak budowa uwarstwowanego ciekłego ciała. Zacytujemy tu jeszcze

gęstości we wnętrzu ziemi, przyczem z ich prac, osobliwie zaś z pracy Poincarégo, okazało się, że spłaszczenie zewnętrznej powierzchni ciekłego ciała znajdującego się w tych samych co ziemia warunkach, nie może być większe jak $\frac{1}{297,3}$, jeżeli stosunek różnicy głównych momentów bezwładności do większego z pomiędzy tych momentów t. j. wielkość:

$$\frac{C - A}{C}$$

u rozpatrywanego ciekłego ciała ma posiadać tę samą liczebną wartość $\frac{1}{306}$, co u ziemi.

Aby zastosować te wyniki teorii do przypadku ziemi, należy wziąć na uwagę spłaszczenie geoidy (t. j. poziomu morza) albo raczej spłaszczenie tak zwanej ziemskiej elipsoidy t. j. tej elipsoidy, dla której sumą kwadratów odległości od poziomu morza jest najmniejszością, albowiem mówiąc o ogólnym kształcie ziemi nie można brać na uwagę jej fizycznej powierzchni, która jako nazbyt nieregularna, nie nadaje się do takiego porównania. Zresztą wiemy, że fizyczna powierzchnia ziemi w okolicy mórz jest identyczna z geoidą, o ile naturalnie nie jest zakłócona przez fale, przypływy i t. d., zaś w okolicy lądów jest po większej części mało różna od geoidy, a zatem tak na morzu jak na lądzie fizyczna powierzchnia ziemi jest mało różna od ziemskiej elipsoidy i zboczenia fizycznej powierzchni ziemi od ziemskiej elipsoidy, należy uważać jako zboczenia drugorzędne. A zatem można spłaszczenie ziemskiej elipsoidy porównać ze spłaszczeniem figur równowagi cieczy i jeśliby się okazało, że spłaszczenie ziemskiej elipsoidy jest różne od spłaszczenia właściwego odpowiedniej figurze równowagi cieczy, to mielibyśmy już pewien dowód na korzyść sztywności wnętrza ziemi.

Z nowszych autorów tylko Clarke podaje spłaszczenie, przekraczające granicę Poincarégo, mianowicie $\frac{1}{293,5}$ (z geodezyjnych pomiarów), inni autorowie podają spłaszczenie mniejsze od granicznego spła-

pracę Wiecherta. Ueber die Massenvertheilung im Inneren der Erde, Göttinger Nachr. 1897 r. str. 221—243. Wiechert także znajduje, że prawdopodobnie istnieje pewna niezgodność między obserwowanym spłaszczeniem ziemskiej elipsoidy a spłaszczeniem czyniącym zadość warunkom równowagi, lecz rozważa tylko specjalny przypadek sferoidu składającego się z jednorodnej skorupy o pewnej mniejszej i również jednorodnego jądra o pewnej większej gęstości. Szczegółów tej pracy przytaczać tynie mogą. Zauważę tylko mimochodem, że to, co Wiechert mówi o rozchodzeniu się drgań sejsmicznych, prawdopodobnie rozmija się z istotnym stanem rzeczy.

szczenia Poincarégo. Tak Helmert podaje $\frac{1}{299,26}$ z pomiarów siły ciężkości i $\frac{1}{297,8}$ z perturbacyi w ruchu księżycy, Harkness (1893 r.) na podstawie bardzo licznych danych podaje liczbę $\frac{1}{300,2}$, Żdanow (też w 1893 r.), który mógł już korzystać z najnowszych pomiarów geodezyjnych dokonanych w Rosyi, podaje liczbę: $\frac{1}{299,7}$. Wogóle wpośród geodetów panuje przekonanie, że liczby podane przez Clarke'a są za wielkie. W jego obliczeniach dużą rolę odgrywają wyniki geodezyjnych pomiarów w Indjach Wschodnich, wiadomo zaś, że rozkład siły ciężkości w tym kraju przedstawia pewne znaczne miejscowe anomalie, być więc może, że i geoida przedstawia tu pewne anomalie, odbijające się w wartości spłaszczenia w ten sposób, że powiększają jego wartość. Wszyscy autorowie, którzy pracowali nad tą samą kwestyą po Clarke'u, zawsze otrzymywali mniejsze niż on spłaszczenie. Wskutek tego sądzimy, że rzeczywiste spłaszczenie ziemskiej elipsoidy jest mniejsze od granicznego spłaszczenia Poincarégo, że zatem jest zawarte we wskazanych wyżej granicach $\frac{1}{412}$ i $\frac{1}{297,3}$, przyczem jednakże jest bardzo bliskie górnej granicy t. j. granicy Poincarégo. Otrzymaliśmy zatem rezultat negatywny. Skoro zaś spłaszczenie jest zawarte w podanych granicach, więc ściśle mówiąc nie mamy prawa do żadnych określonych wniosków, ale ze względu na to, iż rzeczywiste spłaszczenie ziemskiej elipsoidy jest prawdopodobnie bardzo mało różne od górnej granicy, nie można powstrzymać się od uwagi, że sam kształt tej elipsoidy już zdaje się na to wskazywać, że budowa ziemi prawdopodobnie nie zupełnie ściśle czyni zadość warunkom równowagi.

Schubert i Clarke sądzili, że geoida ma kształt elipsoidy trójosiowej¹⁾. Ponieważ w ziemskich warunkach figurą równowagi stałej jest nie trójosiowa a obrotowa elipsoida, więc gdyby się okazało, że geoida jest trójosiową a nie obrotową elipsoidą, to mielibyśmy nowe odstępstwo od kształtu stałej równowagi. Z góry jednak trzeba powiedzieć, że istnienie tego rodzaju zbożenia od kształtu równowagi jest

¹⁾ Fergola nosił się nawet pewien czas z myślą, że geoida jest trójosiową elipsoidą, której najmniejsza oś nie jest bynajmniej identyczna ale przeciwnie znacznie różna od ziemskiej osi obrotu. Pomysł ten chyba nie może być zaliczony do szczęśliwych. Pomijamy też próby Bowditcha, Clarke'a, Pauckera i Rittera, aby przedstawić geoidę jako obrotową, ale nieelipsoidalną figurę. Naturalnie wszystkie te próby okazały się jako najzupełniej nieudatne.

bardzo wątpliwe. Wedle Schuberta ¹⁾ równik jest elipsą. Połowa wielkiej osi tej elipsy jest o 368,3 sążnie dłuższa od połowy małej osi. Geogr. długość punktu, gdzie większa oś przebija powierzchnię ziemi wynosi $58^{\circ} 44'$ na zach. od Greenwich. Wedle Clarke'a ²⁾ różnica między połowami długości obu równikowych osi wynosi 1524 stóp ang., zaś geograficzna długość większej osi równa się $8^{\circ} 15'$ na zach. od Greenwich, wreszcie wedle Słudzkiego ³⁾, który z danych Clarke'a ponownie obliczał położenie i długość równikowych osi wedle innej (swojej własnej) metody, różnica między połowami równikowych osi wynosi 6296 stóp ang., zaś geogr. długość większej osi wynosi: $7^{\circ} 43'$ na zach. od Greenwich.

Jak widzimy różnica w długości równikowych osi jest w każdym razie bardzo mała, różnica zaś między orientacją osi u Schuberta i u Clarke'a jasno wskazuje, że obliczone przez nich różnice długości osi i położenie głównych osi równikowej elipsy prawdopodobnie nie odpowiadają żadnej rzeczywistości, lecz są zupełnie przypadkowe. Liczby obliczone przez Schuberta i Clarke'a dowodzą tylko tyle, że pomiary geodezyjne, które wziął na uwagę Schubert w 1854 roku przypadkowo lepiej przystawały do pewnej trójosiowej elipsoidy (zresztą bardzo mało różniącej się od obrotowej elipsoidy), niż do elipsoidy obrotowej, zaś pomiary, które wziął Clarke na uwagę we 26 lat później (w 1880 r.) przypadkowo lepiej przystawały do trochę innej i trochę inaczej zorientowanej elipsoidy trójosiowej (też naturalnie bardzo mało różnej od obrotowej), niż do ściśle obrotowej elipsoidy. Dalej poza ten wniosek iść nie można.

Zauważmy tu, że wogóle kształt geoidy prawdopodobnie mało się różni od elipsoidy obrotowej. Z syntetycznych badań Helmerta nad rozkładem siły ciężkości w poziomie morza wynika, że odległości między powierzchnią geoidy i powierzchnią ziemskiej obrotowej elipsoidy nigdzie nie mogą przewyższać ± 440 metrów ⁴⁾, a prawdopodo-

¹⁾ Essai d'une détermination de la véritable figure de la Terre. Mem. Acad. St. Petersb. ser. VII. tom I, str. 32.

²⁾ Geodesy. Londyn 1880 r. str. 308 i 309.

³⁾ Opredzielenie rozmiarów ziemi iz gradusnych izmierienij po nowomu sposobu. Matemat. Sbornik. Tom XVI. (1892 r.) str. 512.

⁴⁾ Die Theorieen der höheren Geodäsie II tom rozdz. 4-ty §. 37. i karta w tym samym tomie. Słudzki też zajmował się tą samą kwestyą [O strojenii ziemnoy kory. Matemat. Sbornik tom XVI.] i znalazł jako maximum odległości między obu powierzchniami ± 500 metrów. Jego założenia zresztą wręcz przeciwne założeniom Helmerta [u Helmerta zupełny brak kompensacyi, u Słudzkiego nadmierna kompensacya] można uważać za przesadzone, bo zamiast oceanicznej siły ciężkości bierze wszędzie większą od niej siłę ciężkości na wyspach.

bnie nie przewyższają ± 200 metrów, a zatem geoida [i fizyczna powierzchnia ziemi] ma w ogólnych swych zarysach kształt elipsoidy obrotowej, przy czem zboczenia kształtu geoidy od elipsoidy obrotowej są nieregularne.

A więc ostatecznie przychodzimy do wniosku, że zboczenie kształtu ziemi od kształtu figury równowagi w rodzaju tego, które podejrzewali Clarke i Schubert, prawdopodobnie wcale nie istnieje, jednocześnie zaś widzimy, że nieregularne zboczenia figury geoidy od elipsoidy istnieją, ale są prawdopodobnie po większej części tak małe, że nie można z ich istnienia wysnuć żadnych pozytywnych wniosków co do natury wnętrza ziemi, albowiem tak małe zboczenia mogą się łatwo pogodzić z każdą hipotezą o budowie ziemi, nawet z hipotezą o ognistopłynnem wnętrzu.

Z całego zatem badania kształtu geoidy, godną uwagi pozostaje tylko ta okoliczność, [na którą zresztą już wyżej wskazaliśmy], że rzeczywiste spłaszczenie ziemi jest bardzo blizkie górnej granicy spłaszczenia podanej przez Poincaré'go. Wydaje się, że rzeczywiste spłaszczenie ziemi odpowiada trochę większej kątowej prędkości obrotu, aniżeli ta, którą ziemia obecnie posiada. Stąd wypadałoby wnosić, iż albo cała ziemia jest sztywna, albo przynajmniej posiada grubą zewnętrzną sztywną skorupę, inaczej bowiem niemożna zrozumieć, jak mogłoby się utrzymać spłaszczenie nieodpowiadające warunkom równowagi. Ale ponieważ spłaszczenie bądź co bądź jest prawdopodobnie nieco mniejsze, niż graniczne spłaszczenie Poincaré'go, więc również możebną jest rzeczą, iż rzeczywisty (a niestety nieznan nam) rozkład gęstości we wnętrzu ziemi jest właśnie taki, iż spłaszczenie geoidy czyni zadość warunkom równowagi.

Oczywistą jest rzeczą, że przy takim stanie kwestyi pozytywne wnioski są niemożebne i dalsze zapuszczanie się w dyskusję byłoby zupełnie płonne.

Zauważmy tu mimochodem, że gdyby spłaszczenie ziemi rzeczywiście odpowiadało większej kątowej prędkości, aniżeli ta, którą ziemia obecnie posiada, a z drugiej strony hipoteza, iż ziemia była kiedyś ciekłym ciałem, była słuszną, to w takim razie musielibyśmy przyjść do wniosku, iż stwardnienie ziemi nastąpiło właśnie w epoce gdy jej obrotowa prędkość była większa niż obecnie, i możnaby postawić cały szereg nowych pytań, 1) jaką była owa prędkość obrotu, przy której ziemia stwardniała, 2) jak odległą jest owa epoka, w której nastąpiło stwardnienie. Nie myślimy jednak wdawać się w roztrząsanie tych pytań, bo czyż warto rozważać wnioski, wynikające z kombinacyi kilku niepewnych hipotez?

Rozpatrując kształt geoidy przyszliliśmy zatem wniosku, że w ogólnych swych rysach zewnętrzny kształt ziemi bardzo mało się różni od kształtu, czyniącego zadość warunkom równowagi ciekłej obracającej się masy. Lecz prócz tego istnieją niewątpliwe już acz drugorzędne zбочenia kształtu fizycznej powierzchni ziemi od kształtu geoidy a jednocześnie od kształtu czyniącego zadość warunkom równowagi. Mówimy tu o nierównościach fizycznej powierzchni ziemi w okolicy lądów. Prócz nierówności powierzchni ziemi w okolicy lądów, należy wziąć na uwagę i to, że wogóle budowa zewnętrznych warstw ziemi, daleką jest od budowy ciała złożonego z różnorodnych cieczy. Geologiczna budowa lądów jest nieregularna, dno morskie także przedstawia nieregularne wzniesienia i zagłębienia i znacznie się różni od powierzchni równowagi i t. d. A zatem mamy cały szereg drugorzędnych odstępstw od budowy czyniącej zadość warunkom równowagi. Wskutek tego powstaje pytanie, czy albo całe wnętrze ziemi albo przynajmniej bardzo gruba zewnętrzna skorupa nie musi posiadać znaczną sztywność, aby módz wytrzymać ciśnienia i ciągnienia, spowodowane przez odstępstwa w budowie zewnętrznej skorupy ziemskiej od budowy czyniącej zadość warunkom równowagi, t. j. przez łądy, góry, wyżyny, podmorskie wzniesienia i t. d. Aby wyjaśnić o co chodzi, rozpatrzmy prosty przykład. Weźmy ciało nie posiadające ruchu obrotowego ¹⁾, figurą równowagi takiego ciała odosobnionego w przestrzeni jest kula, a jeśli ciało składa się z różnorodnych materiałów, to warunki równowagi dla wnętrza wymagają, aby powierzchnie oddzielające warstwy posiadające różną gęstość, były kulami współśrodkowymi z zewnętrzną kulistą powierzchnią. We wnętrzu takiej kuli ciśnienie tak normalne jak styczne jest funkcją promienia i w każdej kulistej powierzchni współśrodkowej z zewnętrzną powierzchnią jest zupełnie stałe. Naturalnie, jeżeli rozważane ciało jest ciekłe, to gęstość musi wzrastać od powierzchni ku środkowi.

Załóżmy teraz, że nasze ciało jest ciekłe oprócz zewnętrznej skorupy o dowolnej grubości, która jest ciałem sztywnem, następnie zaś załóżmy, że na zewnętrzną powierzchnię ciała kładziemy w kilku miejscach obce masy sztywne; oczywiście rozkład ciśnień natychmiast się zmieni, ciśnienie nie będzie już funkcją promienia i w każdej kulistej współśrodkowej powierzchni ciśnienie nie będzie stałe ale zmienne, warunki równowagi będą naruszone i jeżeli tylko zewnętrzna twarda

¹⁾ Oczywiście to założenie ułatwia rozumowanie, zaś wnioski zeń wynikające, „mutatis mutandis“, mogą być zastosowane do ciała posiadającego ruch obrotowy.

skorupa nie posiada dostatecznej sztywności, to musi się pogiąć lub połamać, zaś owe obce masy pozapadają się i t. d.

Im większe i cięższe są owe nieregularnie na powierzchni ciała rozłożone masy, tem zewnątrz twarda skorupa musi być albo grubsza albo bardziej sztywna, aby nie ugiąć się lub nie pęknąć.

Zastosowanie tego rozumowania do przypadku ziemi jest oczywiste. Jeżeli na ziemi istnieją lądy, t. j. innymi słowami niewątpliwe zбочenia od budowy czyniącej zadość warunkom równowagi, to we wnętrzu ziemi muszą istnieć niezrównoważone ciśnienia skorupa ziemiska musi być czy to dostatecznie grubą, czy też dostatecznie sztywną, czy wreszcie jednocześnie dostatecznie grubą i dostatecznie sztywną, aby utrzymać ciężar lądów, nie ugiąć się, nie pęknąć, bo inaczej lądy musiałyby się pozapadać. Taką jest osnowa rozumowań G. H. Darwina w jego znanej rozprawie o ciśnieniach we wnętrzu ziemi sprawionych przez ciężar lądów¹⁾. G. H. Darwin oblicza te ciśnienia i dochodzi do wniosku, że na głębokości 1700 kilometrów pokłady muszą posiadać co najmniej wytrzymałość granitu, albowiem różnice ciśnień sprawionych przez ciężar lądów mniej więcej na tylko co wskazanej głębokości dochodzą do tak znacznych rozmiarów, że mniej wytrzymałe niż granit materiały musiałyby popękać, uleść zmiażdżeniu i t. d. Stąd znowu G. H. Darwin wnosi, że cienka (t. j. posiadająca grubość kilkudziesięciu lub kilkuset *km.*) skorupa nie mogłaby wytrzymać ciężaru lądów, popękałaby, a lądy musiałyby się zapaść.

Słabą stroną tego rozumowania jest to, iż polega ono na pewnej dowolnej hipotezie, mianowicie na hipotezie, że skorupa składa się ze współśrodkowych regularnych warstw. Nazywamy tę hipotezę dowolną, albowiem bardzo być może, że ta hipoteza wcale nie stosuje się do ziemi. Załóżmy n. p., że skorupa posiada pod lądami mniejszą gęstość niż pod oceanami, a wtedy obliczone przez G. H. Darwina różnice ciśnień staną się mniejsze albo nawet zupełnie znikną i okaże się, że nawet niebardzo gruba i niebardzo sztywna skorupa z łatwością może wytrzymać ciężar lądów, przez co naturalnie dalsze wnioski G. H. Darwina natychmiast upadną.

Lecz co gorzej, fakty dowodzą, że hipoteza G. H. Darwina jest nie tylko niepewna, ale prawdopodobnie wprost fałszywa.

Helmert²⁾ syntetycznie obliczał rozkład siły ciężkości w powierzchni geoidy w razie, gdyby ziemia składała się ze współśrodkowych jednorodnych warstw [jest to właśnie hipoteza G. H. Darwina o budo-

¹⁾ On Stresses due to the Weight of Continents. Phil. Trans. 1882 r.

²⁾ Höhere Geodäsie. Tom II-gi, rozdz. 4-ty, § 37.

wie ziemi], zaś lądy spoczywały na tak zbudowanej ziemi, jakby jakieś obce ciała, jakby jakieś narośle. Z rachunków Helmerta okazało się, że w takim razie średnie przyspieszenie siły ciężkości na lądach powinny być o 1,7 mm. na sekundę większe od średniego przyspieszenia na oceanach. Tymczasem w rzeczywistości średnia siła ciężkości na wyspach jest o tyle większa od lądowej¹⁾, że nawet po odjęciu wszelkich możliwie wielkich poprawek na przyciąganie samych wysp pozostała t. j. oceaniczna siła ciężkości wypada co najmniej równa, a właściwie większa od lądowej. Aby otrzymać rozkład siły ciężkości podobny do rzeczywistego, trzeba założyć, że pod lądami zalegają pokłady stosunkowo lżejsze od tych, które zalegają pod dnem oceanów. Jest to postulat wprost przeciwny założeniom G. H. Darwina, a zatem jego obliczenia i wnioski z nich wysnute nie mają realnej podstawy.

Wogóle należy zauważyć, że zadanie, którem zajmował się G. H. Darwin, jest do pewnego stopnia nieokreślone, bo rezultaty w znacznej części zależą od obranej hipotezy o budowie ziemi. Tak n. p. fakt istnienia lądów daje się najzupełniej pogodzić nawet z hipotezą zupełnie ciekłego jądra pokrytego skorupą o bardzo nieznacznej grubości t. j. wynoszącej tylko jakie kilkadziesiąt kilometrów. Już kilkadziesiąt lat temu Airy²⁾ wykazał tę możliwość. Rzeczywiście trzeba tylko, aby skorupa pływała po ciekłym jądrze tak, jak kra lodowa pływa po wodzie. Samo przez się rozumie się, że wedle tej hipotezy jądro znajduje się w równowadze. Wedle hipotezy Airy'ego lądy są to albo lżejsze albo też grubsze części owej kry, albowiem wedle znanych praw hydrosta-

¹⁾ Niestety dotychczas nie posiadamy przyrządu za pomocą którego możnaby mierzyć siłę ciężkości na okrętach z równą dokładnością jak n. p. za pomocą waha-dła na lądzie. Batymetr Siemens'a, na którym pokładano przez pewien czas duże nadzieje, okazał się zupełnie zawodny.

²⁾ On the Computation etc. . . . Phil. Trans. 1855 r. str. 101—104. Zwolennikiem tej hipotezy jest O. Fisher [Physics of the Earth's Crust. Londyn 1889 r.]. Pilar [Grundzüge der Abyssodynamik. Zagrzeb 1880 r.] rozważał podobną hipotezę. Naturalnie przytoczeni tu autorzy nie są jedynymi zwolennikami hipotezy ciekłego jądra, która przez pewien czas prawie wyłącznie panowała w geologii i geofizyce, ale chodzi tu o autorów, którzy zajmowali się pytaniem, o ile fakt istnienia lądów daje się pogodzić z hipotezą ciekłego jądra. Pomiędzy zwolennikami ciekłego jądra są tacy, którzy nie tylko nie próbowali przystosować tę hipotezę do warunków wynikających z faktu istnienia lądów, ale nawet przypuszczali, że w ustroju skorupy są jeszcze inne odstępstwa od kształtu zadość czyniącego warunkom równowagi. Tak n. p. Hennesy [On the phys. structure of the Earth. Phil. Magazine 5 ser. XXII tom (1886 r.) str. 223—251] przypuszcza, że wewnątrz ziemi jest ciekłe, zaś skorupa jest cieńsza na równiku niż na biegunach, przyczem jednocześnie zakłada, że zewnętrzna powierzchnia ciekłego jądra jest powierzchnią równowagi. Naturalnie w hypotetycznej skorupie Hennesyego musiałyby panować znaczne nierównoważone ciśnienia i ciągnienia.

tyki lżejsze lub grubsze kry muszą wznosić się wyżej od innych. Ta hipoteza ma następujące zalety: po pierwsze zgadza się z faktem, iż jądro posiada większą gęstość niż skorupa, po drugie nie stoi w sprzeczności z żadną z uznanych geologicznych teorii, po trzecie dobrze zgadza się z rzeczywistym rozkładem siły ciężkości w powierzchni geoidy, albowiem jeżeli założymy, że lądy odpowiadają lżejszym częściom skorupy, to przyciąganie w powierzchni geoidy w okolicy lądów musi być stosunkowo mniejsze, albowiem i sam ląd i skorupa tuż pod lądem składa się ze stosunkowo lżejszych materiałów; jeżeli zaś założymy, że średnia gęstość materiałów skorupy jest wszędzie jednakowa, ale lądy odpowiadają grubszym częściom skorupy, to przyciąganie w okolicy lądów musi znowu być stosunkowo mniejsze niż na oceanie i na wyspach, albowiem w okolicy lądów ciężkie materiały jądra znajdują się dalej od powierzchni geoidy aniżeli w okolicy oceanów.

Naturalnie kry, z których wedle tej hipotezy składa się zewnętrzna skorupa, podlegałyby pewnym niezrównoważonym wewnętrznym ciśnieniom, albowiem trudno przypuścić, aby kształty wszystkich kawałów kry czyniły ściśle zadość warunkom równowagi. Wskutek tego n. p. rozmiary kawałów kry mogłyby być do pewnego stopnia ograniczone. Taka więc skorupa składałaby się z mniejszych lub większych brył oddzielonych jedna od drugiej szczelinami. Oczywiście jest rzeczą, że te szczeliny w żadnym razie nie pozostałyby otwarte, ale tak samo jak zwykle szczeliny w pokładach byłyby wypełnione gruzem, żyłami stwardniałej lawy i t. d.

Nie będziemy dalej rozwijać tej hipotezy, bo nie przywiązujemy do niej żadnego osobliwego znaczenia. Rozpatrywaliśmy ją tylko dlatego, aby pokazać, że fakt istnienia lądów i nierówności dna morskiego daje się doskonale pogodzić z hipotezą ciekłego jądra, pokrytego cienką twardą skorupą, że zatem nie można zeń, jak to sądził G. H. Darwin, wysnuć żadnych wniosków na korzyść hipotezy sztywnego jądra.

Streszczając poprzednie rozumowania możemy powiedzieć, że ani główne, ani drugorzędne rysy kształtu ziemi nie dają podstawy do pewnych niewątpliwych wniosków o stanie jej wnętrza. Wszystkie fakty z tej dziedziny dają się pogodzić z hipotezą ciekłego jądra, choć z drugiej strony nie dają żadnych pewnych dowodów na korzyść tej hipotezy, albowiem gdyby ziemia miała nawet ściśle kształt równowagi cieczy, to zawsze pomimo tego mogłaby być sztywnym ciałem, albowiem sztywne ciało może posiadać kształt różny od kształtu równowagi, ale może też równie dobrze posiadać kształt czyniący za-

dość warunkom równowagi, osobliwie jeżeli założymy, że to ciało sztywne było kiedyś ciekłe, a następnie stwardniało.

Wnioski, które można wysnuć z rozkładu siły ciężkości na powierzchni ziemi, są też dosyć ograniczone. O ile wiadomo z pomiarów siły ciężkości na różnych stacyach, rozsianych po całej kuli ziemskiej, rzeczywisty rozkład siły ciężkości w powierzchni geoidy mało różni się od teoretycznego rozkładu siły ciężkości w powierzchni elipsoidy obrotowej. Wiadomo, że rozkład siły ciężkości w powierzchni figury równowagi, mającej kształt obrotowej elipsoidy albo wogóle obrotowej sferoidy o małym spłaszczeniu, daje się z wielkiem przybliżeniem przedstawić za pomocą wzoru [zwanego wzorem Clairaut'a]:

$$I \quad g_{\varphi} = g_0 [1 + k \sin^2 \varphi]$$

gdzie g_{φ} oznacza siłę ciężkości pod geogr. szerokością φ
 " g_0 " " " " na równiku " "

$k = e - \frac{5}{2}m$, gdzie e oznacza spłaszczenie, zaś m stosunek siły odśrodkowej do siły ciężkości na równiku.

Rzeczywisty rozkład siły ciężkości w powierzchni geoidy daje się również przybliżyć przedstawić za pomocą takiego samego wzoru. Anomalie, t. j. zboczenia spostrzeganych wartości g od wartości obliczonych z interpolacyjnego wzoru powyższego kształtu, o ile dziś wiadomo, stoją w bliskim związku z orograficzną i geologiczną budową zewnętrznych warstw. Tak n. p. bardzo często się zdarza, że anomalie zmieniają znak gdy przechodzimy z gór na równiny lub odwrotnie. Dalej, co osobliwie godne uwagi, zmiany w charakterze anomalii bywają częstokroć tak nagle, że mimowoli musimy przypuścić, iż przyczyny istnienia anomalii tkwią właśnie w zewnętrznych warstwach, albowiem gdyby skrywały się gdzieś daleko w głębi ziemi, to zmiany w charakterze anomalii musiałyby być o wiele powolniejsze. Wszystko to dobrze się zgadza z widomą nieprawidłowością kształtów i budowy zewnętrznych warstw, zaś potwierdza domysły o stosunkowo znacznie regularniejszej budowie głębokich warstw.

Powiedzieliśmy wyżej, że jeżeli będziemy badać rozkład siły ciężkości w powierzchni idealnego ciała podobnego do ziemi posiadającego nierówności w rodzaju łądów i t. d., to aby w powierzchni tego ciała otrzymać rozkład siły ciężkości podobny do rzeczywistego rozkładu siły ciężkości w powierzchni ziemi, trzeba założyć, że łądy i pokłady zalegające tuż pod łądami składają się ze stosunkowo lżej-

szych pokładów niż reszta skorupy. W ten sposób potraciliśmy o tak zwaną kompensacyę widomych wzniesień przez miejscowe defekta gęstości. Ze wspomnianych wyżej badań Helmerta wypada, że prawdopodobnie łądy są do pewnego stopnia skompensowane. Liczne zaś bezpośrednie spostrzeżenia dowodzą, że prawo kompensacyi z pewnością odnosi się do wielu gór i wyżyn.

Pierwsi Bouguer i Condamine spostrzegli w Peru, że Chimborazo okazuje nazbyt małe przyciąganie na pion, wskutek czego Bouguer przypuszczał, że we wnętrzu góry muszą się znajdować obszerne jaskinie. Boscovich ¹⁾ mówiąc o spostrzeżeniach Bougeura wprost domyśla się kompensacyi, jednakże te uwagi, jak później podobne uwagi Laplace'a, Petita i innych, mało wzbudzały zajęcia. O wiele więcej interesowano się skonstatowaniami w pierwszej połowie bieżącego stulecia [przez Lütkego, Freycineta, Duperrey'a, Sabine'a, Forstera i innych] znacznymi dodatnimi anomaliami siły ciężkości na wyspach oceanicznych. Mniej więcej 20 — 30 lat temu rozpowszechniło się nawet fałszywe mniemanie, [głównie dzięki książce Filipa Fischera o figurze ziemi wydanej w 1868 r.], że owe dodatnie anomalie na wyspach pochodzą stąd, że w okolicy oceanów geoida zapada się na setki a nawet tysiące metrów pod powierzchnię elipsoidy. Dopiero Faye ²⁾ zwrócił uwagę na to, że przecie siła ciężkości na wyspach nie jest bynajmniej identyczna ze siłą ciężkości na sąsiednich oceanach, że wyspiarska siła ciężkości z powodu przyciągania samej wyspy musi być większą od siły ciężkości na sąsiednim oceanie, a zatem chcąc ze siły ciężkości na wyspie obliczyć siłę ciężkości na oceanie, trzeba od pierwszej odjąć przyciąganie samej wyspy. Okazało się też, że po wykonaniu poprawek wskazanych przez Faye'a, owe wielkie dodatnie anomalie siły ciężkości na wyspach albo znacznie się zmniejszają albo nawet znikają.

Anomaliami siły ciężkości w górach zainteresowano się więcej dopiero od czasu dokonania geodezyjnych pomiarów w Indiach wschodnich. Spodziewano się, że przy tych pomiarach w dolinie Gangesu, osobliwie zaś u podnóża Himalayów okaże się znaczne odchylenie pionu w stronę gór, tymczasem oczekiwania te nie sprawdziły się. Pratt ³⁾, który się tą kwestyą zajął i na różne sposoby próbował objaśnić ów

¹⁾ Todhunter. History of the Theories of Attraction I tom str. 248 i 313.

²⁾ Sur la constitution de la croûte terrestre C. R. tom 90 (1880 r.) str. 1185—1191.

³⁾ On the attraction of Himalaya. Phil. Trans 1855 r.

On the Deflection of the Plumb-Line in India. Ph. Tr. 1859 r.

On the Influence of the Ocean. Ph. Tr. 1859 r.

On the Constitution of the solid Crust of the Earth. Ph. Tr. 1871 r.

brak odchylenia pionu w stronę gór, doszedł ostatecznie do przekonania, że Himalaje składają się ze stosunkowo lekkich materyałów i że prawdopodobnie pod temi górami zalegają też stosunkowo lekkie pokłady. W ostatniej ze swoich prac Pratt wypowiada zdanie, „że kompensacya widomych wzniesień przez mniejszą gęstość składających je pokładów jest ogólnem prawem¹⁾, że jeżeli podzielimy ziemię na elementarne stożki posiadające ten sam kąt wierzchołkowy [wierzchołki tych stożków należy sobie wyobrazić w środku ziemi, zaś podstawy w jej fizycznej powierzchni], to każdy taki elementarny stożek będzie zawierać jedną i tęsamą ilość materyi“. Późniejsze pomiary siły ciężkości w Himalayach, wykonane przez kapitanów Basevi i Heaviside'a potwierdziły wnioski wypływające ze spostrzeżeń nad odchyleniem pionu. Siła ciężkości w Himalayach okazała się wszędzie za mała, zaś na stacyi Moré położonej na wysokości 4696 metrów nad poziomem morza wahadło wykonywało o 22 wahnięcia na dobę mniej aniżeli się spodziewano. Wedle obliczeń Helmertha siła ciężkości na stacyi Moré po zredukowaniu do poziomu morza jest o 5,15 mm. na sek. mniejsza od normalnej, zaś niezredukowana do poziomu morza siła ciężkości na tejże stacyi jest prawie ściśle taką, jaką powinna być siła ciężkości w powietrzu na wysokości 4700 metrów nad poziomem morza, t. j. siła ciężkości jest tu taką, jak gdyby i sama góra, na której położoną jest stacya Moré, i inne okoliczne ogromne góry wcale nie istniały. Te fakty zwróciły na siebie uwagę, ponieważ zaś dawniejsze pomiary siły ciężkości były wykonywane przeważnie po wielkich miastach t. j. po większej części na równinach, a przytem stacye, na których siła ciężkości była dokładnie określona, znajdowały się po większej części w znacznych odległościach jedna od drugiej, więc w ostatnich czasach wykonano całe szeregi nowych pomiarów wedle innego planu. Robiono spostrzeżenia w górach i na równinach, na stacyach blizkich jedna od drugiej rozłożonych wzdłuż pewnych linii przecinających okolice różne od siebie pod względem orograficznym i geologicznym.

Ze względu na zakres niniejszej rozprawy nie możemy wdawać się w dokładne omówienie tej kwestyi. Powiemy tylko, że już obecnie mamy dużo pomiarów siły ciężkości dopełnionych w różnych krajach, ale najlepiej zbadanem pod względem grawitacyjnym państwem jest austro-węgierska monarchia. Jest to głównie zasługą pułkownika Sternecka, który zbudował nowe wahadło dogodnie do przewożenia, wyko-

¹⁾ Niejaki Rateau sądzi nawet, że pod łądami znajdują się próżnie wypełnione przez gazy. Patrz C. R. 1893 r. [117. tom, str. 370—373.].

nał sam mnóstwo pomiarów a wreszcie dał impuls do całego szeregu pomiarów wykonanych bądź przez oficerów sztabu generalnego austriackiego [w zachodniej Galicyi wahadłami i metodą Sternecka wykonał liczne pomiary prof. Birkenmajer], bądź przez oficerów marynarki austriackiej. Ci ostatni wykonali liczne pomiary poza granicami Austro-Węgier w portach oceanów: Atlantyckiego, Spokojnego i Indyjskiego, na morzu Czerwonym, na Spitzbergu i t. d.

Naturalnie nie możemy tu przytaczać tej ogromnej masy spostrzeżeń, wskażemy tylko na rezultaty. Przedewszystkiem okazuje się, że anomalie siły ciężkości nie są przypadkowe. Są całe okolice, gdzie siła ciężkości jest nazbyt wielka, są inne, gdzie jest nazbyt mała. W górach przeważają anomalie odjemne [tak jest n. p. na Kaukazie, w Alpach i w Karpatach], natomiast w zapadlinach [n. p. nizina węgierska, nizina lombardzka], na wybrzeżach oceanów, na wyspach, nawet na wybrzeżach mórz wewnętrznych [Adryatyk, morze Czerwone] napotykamy wyłącznie albo prawie wyłącznie dodatnie anomalie. Natomiast, o ile się zdaje ¹⁾, niema żadnego stałego związku między anomaliami siły ciężkości i petrograficznym charakterem skał zalegających tuż pod powierzchnią. Największe odjemne anomalie niekoniecznie i nie zawsze trafiają się wśród najwyższych gór, przeciwnie trafiają się górzyste okolice, w których mamy nawet dodatnie anomalie tak jak z drugiej strony bywają przypadki [n. p. w okolicy Moskwy], że wśród równiny, daleko od gór natrafiamy na okolicę o wydatnej odjemnej anomalii ²⁾.

¹⁾ Sterneck. Mittheilungen des Militärgeogr. Institutes in Wien. Tom XIV, str. 280 i 281.

²⁾ Czytelników, którzy chcą zapoznać się z oryginalnymi pomiarami i wogóle z obecnym stanem tej kwestyi, odsyłamy do następujących źródeł:

Mittheilungen des k. k. Militärgeogr. Institutes in Wien, tomy XIII i XIV.

Comptes rendus des séances de la Commission permanente de l'Association géodésique internationale z lat 1894, 1895, 1897 i t. d.

Comptes rendus des Conférences generales de l'Association Géodésique internationale, tom XI.

Helmert. Die Schwerkraft im Hochgebirge. Berlin 1890.

Helmert. Die Theorieen der höheren Geodäsie. 2 tomy (1880 i 1884 r.).

Defforges. C. R. de l'Académie des Sciences. Paris, tom 117 (1893 r.) str. 209

i następne.

Zapiski ces. rosyjskiego geograficznego Towarzystwa. Dział ogólnej geografii, tom XXX. Spozstrzeżenia Iweronowa i Sokołowa.

Commission geodesique Suisse. Procès verbal de la 31 seance.

Veröffentlichungen des hydrographischen Amtes der k. k. Kriegsmarine. Relative Schwerebestimmungen. I Heft. Pola 1897. Oraz inne wydawnictwa. Krótkie spra-

Wiadomo, że właściwie jeden i ten sam rozkład siły ciężkości w powierzchni przyciągającego ciała oraz w całej zewnętrznej przestrzeni może być wywołany przez nieskończoną ilość równoważnych ale między sobą różnych rozkładów gęstości we wnętrzu przyciągającego ciała. Jeżeli więc można stawiać jakiegokolwiek wnioski na podstawie rozkładu siły ciężkości w zewnętrznej przestrzeni, to tylko dzięki temu, że ze względu na przeróżne warunki owa nieskończona różnorodność teoretycznie możebnych rozkładów jest w praktyce znacznie ograniczona. Pewne rozkłady gęstości są prawdopodobne, fizycznie możebne, podczas gdy inne są wprost fizycznie niemożliwe. Mimo to muszą jednak wnioski posiadać do pewnego stopnia charakter ogólny.

W danym razie rozkład siły ciężkości w powierzchni tłumaczy się naturalnie w ten sposób, że rzeczywiście góry i pokłady pod górami prawdopodobnie posiadają stosunkowo mniejszą, zaś pokłady zalegające pod zapadlinami stosunkowo większą gęstość. Jednakże należy przyznać, że ta kompensacja wzniesień i zapadlin przez odpowiednie zmiany gęstości pokładów prawdopodobnie nie jest wszędzie dokładną i zupełną, że czasem bywa może nadmierną, a czasem niedostateczną, że podlega częstym wyjątkom. Innemi słowy można powiedzieć, że w budowie skorupy ziemskiej daje się spostrzedz jakby pewna dążność do zadośćuczynienia warunkom równowagi, ale że jednocześnie trafiają się często wypadki, w których równowaga jest tylko częściowo osiągnięta albo wcale nie istnieje.

Anomalie siły ciężkości niestojące w związku z orograficzną budową kraju są łatwo zrozumiałe wobec niewątpliwej nieregularności w geologicznej budowie zewnętrznej skorupy.

O ile się zdaje, kompensacja stale przytrafia się we wielkich górach oraz wielkich zapadlinach. Wielkim łańcuchom gór stale towarzyszą odjemne, wielkim zapadlinom [Senkungsgebiete] dodatnie anomalie. A więc wydaje się, że kompensacja stale przytrafia się tam, gdzie w braku jej ciśnienia i ciągnięcia spowodowane przez odstępstwa orograficznej budowy skorupy od budowy zadość czyniącej warunkom równowagi musiałyby być bardzo znaczne i przekraczałyby pewne granice zależne od wytrzymałości pokładów. Natomiast na małych górach [n. p. Schöckl koło Gracu] przytrafiają się nawet niekiedy dodatnie anomalie, jak gdyby nie było żadnej kompensacji.

wozdania o rezultatach pomiarów siły ciężkości w różnych krajach, znajdują się rokrocznie w Geographisches Jahrbuch Wagnera oraz w znanem czasopiśmie Petermann's Mittheilungen, w tak zwanych Litteraturberichte w dziale matematycznej geografii i geofizyki.

Swoją drogą należy pamiętać i o tem, że z wielkości anomalii można tylko jakościowo ale nie ilościowo ocenić kompensację, n. p. może się zdarzyć, iż w pewnej miejscowości w górach odjemna anomalia wydaje się nam nazbyt małą. Niemożna jednak stąd wnosić, że kompensacja w tej właśnie miejscowości jest niedostateczna, bo jeżeli kompensujące lekkie masy właśnie pod tą miejscowością leżą głęboko, to kompensacja może być zupełna, a nawet zbyt duża, a anomalia siły ciężkości ze względu na większą odległość kompensujących mas może być stosunkowo nieznaczna.

Tak więc, choć nie możemy z rozkładu siły ciężkości na powierzchni ziemi wyprowadzić ściśle określonych wniosków, jednakże każdy chyba przyzna, że rozkład ten wskazuje na możliwość pewnego przybliżonego przystosowania budowy skorupy ziemskiej do warunków równowagi. Wracając raz jeszcze do teorii G. H. Darwina możemy powiedzieć, iż teoria ta była w każdym razie nieudatna, albowiem jeżeli łądy są skompensowane choćby tylko częściowo, to różnice ciśnień we wnętrzu ziemi muszą być o wiele mniejsze niż te, które obliczył G. H. Darwin; ponieważ zaś wcale nie wiemy, o ile łądy są skompensowane, więc obliczenie różnic ciśnień we wnętrzu ziemi jest zgoła niemożliwe.

W związku z kompensacją gór i wzniesień stoi teoria izostazy Duttona ¹⁾. Jeżeli założymy, że budowa ziemi jest ściśle czy przybliżenie poddana prawom hydrostatyki, to nowo obciążone części skorupy powinny zapadać się, natomiast te części skorupy, które tracą na wadze, powinny podnosić się. Innemi słowy powinny zapadać się te okolice dna morskiego, oraz te niziny, na których osiada „detritus“ przyniesiony przez rzeki i prądy, natomiast powinny podnosić się góry i wyżyny, skąd właśnie rzeki wynoszą „detritus“. Jako dowód przytacza Dutton fakt, że miejsca, gdzie tworzyły się (i tworzą) wielkie serye nowych pokładów, z pewnością jednocześnie zapadały się i zapadają. Wiadomo, że w dolinach Padu, Nilu, Gangesu ²⁾ i mnóstwa innych wielkich rzek pokłady aż do głębokości sięgających po sto i więcej metrów pod poziom morza składają się tylko z rzecznych osadów. Wiadomo dalej, że w Apalachach, na Koloradzkiej wyżynie i wielu a wielu innych miejscach zalegają serye pokładów o grubości kilku tysięcy metrów osadzone niechybnie w płytkim

¹⁾ On some grander Problems etc. . . . Phil. Soc. Washington, tom XI (1892 r.) str. 281, patrz także ref. w Peterm. Mitth. 1894 r. Literaturbericht, str. 7.

²⁾ Porównaj: Penck. Morphologie der Erdoberfläche. tom II. (1894 r.), str. 14 i następne.

morzu. Należy więc koniecznie przypuścić, że tworzeniu się tych nowych pokładów towarzyszyło zapadanie się dna ¹⁾.

Wedle hipotezy Duttona istnieje zatem ciągła dążność do przystosowywania się do warunków równowagi. Że taka dążność może istnieć, to jest *à priori* prawdopodobne, albowiem niema pokładów absolutnie sztywnych, tylko są pokłady mniej lub więcej sztywne, które pod ciśnieniem muszą ugiąć się, kurczyć się i t. d. ²⁾ Fakty przytoczone przez Duttona na pierwszy rzut oka bardzo silnie popierają to mniemanie, co więcej zdają się świadczyć, iż dążność do przystosowania się do warunków równowagi musi być bardzo wybitna. Jednak jeżeli bliżej wnikniemy w istotę rzeczy, to zobaczymy, że fakty te mogą być interpretowane w zupełnie inny sposób. Rzeczywiście, o ile sam fakt zapadania się tych okolic dna morskiego i tych nizin, na których tworzą się nowe pokłady, nie ulega wątpliwości, o tyle z drugiej strony wcale nie wiemy, które z tych dwóch zjawisk jest przyczyną, a które skutkiem ³⁾. Rzeczywiście założmy, że wskutek jakichkolwiek przyczyn pewna część dna morskiego czy też jakaś część lądu poczyna zapadać się; nieuchronnie ze wszech stron utworzą się pochyłości skierowane ku nowej zapadli-

¹⁾ Podobną hipotezę wcześniej od Duttona głosił Jamieson [On the cause of Depression... Geolog. Magaz. 2 ser. tom IV, 1882 i IX, 1887 r.]. Jamieson twierdził, że w czasie lodowej epoki lądy musiały się zapaść pod ciężarem lodowców.

²⁾ Już po napisaniu i odesłaniu niniejszej rozprawy do Akademii autor jej zajmował się hipotezą Jamiesona, o której była mowa przed chwilą w jednym z przypisków. Badania te zostały ogłoszone w Rozprawach Akademii Umiejętności pod tytułem „O odkształceniach ziemi pod ciężarem wielkich lodowców“. Na tem miejscu jednak wspomniamy w kilku słowach o głównych wynikach tych badań, albowiem mają one pewne znaczenie dla poruszonych tu kwestyi; powiemy mianowicie, że nawet w razie gdyby ziemia wcale nie była plastyczna, gdyby posiadała własności doskonale sprężystego ciała, to pod ciężarem wielkich lodowców takich n. p. jakie istniały w czasie lodowej epoki musiałyby się znacznie odkształcić. Okazało się mianowicie, że gdyby nawet średnie współczynniki sztywności i ścisłości kuli ziemskiej były mniej więcej takie jak stali, to pod ciężarem lodowców powierzchnia lądów musiałyby się ugiąć i zniżyć. Gdybyśmy n. p. założyli, że na obu półkulach znajdują się obszerne lodowce pokrywające całą powierzchnię ziemi od biegunów aż do 60 stopnia szerokości geograf. północnej i południowej o średniej grubości wynoszącej 2000 metrów, to na biegunach zniżenie powierzchni wynosiłoby prawie 500 metrów.

Tak samo naturalnie muszą tworzyć się zapadliny tam, gdzie osiadają nowe pokłady i wzajemnie pokłady muszą rozprężyć się i wyginać w górę tam, gdzie ciężar przyeiskających warstw zmniejsza się wskutek rozmycia.

³⁾ Studer, Dana i wielu innych sądzą, że właśnie tworzenie się zapadlin jest przyczyną, a osiadanie nowych pokładów skutkiem. Patrz: Penck. Morphologie der Erdoberfläche. I tom (1894 r.) str. 471.

nie, ponieważ zaś rzeki przynoszące „detritus“ kierują się ku najniższym miejscom, więc skierują się ku nowo tworzącym się zapadlinom i właśnie w zapadającej się okolicy z przyniesionych przez te rzeki namulów piasków i żwirów muszą tworzyć się pokłady; tak samo jeżeli gdziekolwiek tworzą się nowe wzniesienia, nowe góry, to tem samem tworzą się nowe stoki, które muszą uleść silniejszemu rozmywaniu.

A zatem widzimy, że każda hytoteza o wewnętrznym ustroju ziemi musi się liczyć z faktami przytoczonymi przez Duttona i jeśli się z nimi nie zgadza, to musi być uważane za fałszywą, ale właśnie dlatego, że nie wiemy, czy zapadanie się jest przyczyną tworzenia się nowych pokładów, czy też odwrotnie tworzenie się nowych pokładów jest przyczyną zapadania się, nie można z tych faktów wysnuć żadnego pozytywnego wniosku.

Willis i Hayes¹⁾ próbowali zastosować teorię izostazyi do teoryi tworzenia się gór, mianowicie zaś gór Apallachskich²⁾.

ROZDZIAŁ II.

Związek między stanem fizycznym ziemi a niektórymi zjawiskami, jak n. p. przypyły i odpływy morza, precessya oraz peryodyczne zmiany geograficznych szerokości.

W pierwszej połowie bieżącego stulecia Hopkins³⁾ wpadł na myśl, że charakter precessyi i nutacyi powinien być zależny od fizycznego stanu ziemi, specyjalnie zaś badał kwestyę, jak powinny wyglądać te zjawiska w razie, gdyby ziemia zawierała duże ciekłe jądro. W rezultacie przyszedł do przekonania, że twarda, zupełnie niepodatna skorupa ziemi powinna posiadać grubość równą co najmniej $\frac{1}{4}$ promienia ziemskiego, inaczej bowiem perturbacye w ruchu ziemi znane pod nazwą precessyi i nutacyi wyglądałyby zupełnie inaczej aniżeli podobne perturbacye w ruchu zupełnie sztywnego sferoidu. Dowodzenia Hopkinsa sprawiły pewne wrażenie, albowiem wiadomo, że cała teorya precessyi i nutacyi ziemskiej jest żywcem wzięta z teoryi ruchu ab-

¹⁾ Conditions of Apallachian Faulting. Amer. Journ. of Science, 46 tom (1893 r.) str. 257—269.

²⁾ Późniejszy przypisek autora. Tę samą teorią podnosi też G. Johnstone Stoney, patrz: Denudation and Depression. Phil. Mag. 5 ser. tom 47 (1899 r.) str. 372—375 i 557—565, porównaj także: Chree, tamże, str. 494—497.

³⁾ Researches in Phys. Geogr. Phil. Trans. za 1839 r. str. 381—424.
1840 r. str. 193—208.
1842 r. str. 43—55.

solutnie sztywnego ciała, a więc, jeżeli ta teoria jest zgodna z rzeczywistością a jednocześnie precessya i nutacya napółciekłego ciała powinny być różne od precessyi i nutacyi sztywnego, to stąd prosty wynika wniosek, że ziemia musi być sztywnem ciałem. Nie brakło jednak i krytyki. Podnoszono przeciw teorii Hopkinsa różne zarzuty. Niektóre z nich jak n. p. zarzuty Delaunay'a¹⁾ oparte na doświadczeniach Chancourtois'a nad ruchem wody w próżnej szklanej kuli obracającej się naokoło stałej osi były wprawdzie słuszne ale niezupełnie przekonujące, bo opierały się na doświadczeniach wykonanych w innych warunkach, ale zawsze pozostawał ważny zarzut, że zawsze pozostawał ważny zarzut, że same dowodzenia Hopkinsa nie są ściśle, że w jego matematycznych wywodach są luki, dowolne przypuszczenia i t. d. Wreszcie kilkanaście lat temu niezależnie od siebie G. H. Darwin²⁾ i Oppenheimer³⁾ ponownie zajęli się zadaniem Hopkinsa traktując je z o wiele większą ścisłością. Z ich prac okazało się zgodnie, że wprawdzie ściśle mówiąc precessya i nutacya całkowicie ciekłej ziemi musiałyby być różną od precessyi i nutacyi absolutnie sztywnej ziemi ale że różnice te byłyby tak nieznaczne, iż z pewnością nie dałyby się spostrzedz. W ten sposób wnioski Hopkinsa zostały obalone, a jednocześnie okazało się, że zjawisko precessyi i nutacyi nie może posłużyć za kryterium do oceny fizycznego stanu ziemi.

W. Thomson (lord Kelvin), który przez pewien czas zgadzał się w swoich poglądach z Hopkinsem, jeszcze przed ogłoszeniem tylko co przytoczonych prac G. H. Darwina i Oppenheimera przyszedł do przekonania, że teoria Hopkinsa jest błędna, natomiast wskazał na inne zjawisko zdające się dowodzić, że ziemia uważana jako całość okazuje własności wielce sztywnego ciała. Jego rozumowanie daje się streścić w następujący sposób.

Przyciąganie księżyca i słońca, wywołujące przyływy i odpływy wód w oceanie powinno też sprawiać przyływy i odpływy w samej ziemi t. j. powinno sprawiać peryodyczne odkształcenia ziemi, albowiem tylko absolutnie sztywne ciało może zupełnie nie poddawać się działaniu sił odkształcających. Załóżmy, że ziemia składa się z ciężkiej cieczy pokrytej cienką warstwą lżejszej cieczy t. j. wody. Załóżmy, że obie cieczy odkształcają się w taki sposób, że ich powierzchnie wciąż pozostają powierzchniami równowagi. Odległości pomiędzy temi

¹⁾ Sur l'hypothèse de la fluidité C. R. 67 tom (1868 r.) str. 65—70.

²⁾ On the precession of a viscous spheroid. Phil. Trans. za 1879 r. str. 447—538,

³⁾ Ueber die Rotation etc. . . Sitzb. Acad. Wiss. Wien. 92 tom 1886 r. (Math. Nat. Wiss. Classe) str. 528—575.

tak bliskimi od siebie powierzchniami równowagi wszędzie pozostają w ciągu odkształceń prawie absolutnie stałe, t. j. i dno i powierzchnią oceanu opadają i podnoszą się jednocześnie, odległość powierzchni morza od dna jest prawie stała, zaś przypiływy i odpływy morskie są zupełnie nieznaczne. Jeżeli wewnętrzna ciecz jest oddzielona od zewnętrznej twardą ale cienką skorupą, to ta ostatnia nie może się oprzeć działaniu sił odkształcających i parciu wewnętrznej cieczy, opada i podnosi się wraz z wewnętrzną cieczą tak, że przypiływy i odpływy i w tym przypadku są zupełnie nieznaczne. Natomiast jeśli jądro ziemi jest sztywne, albo jeśli ziemia posiada grubą sztywną skorupę, to wtedy musi skutecznej opierać się działaniu sił odkształcających, dno oceanu musi mniej podnosić się i mniej opadać niż zewnętrzna powierzchnia, przypiływy i odpływy morza powinny być znaczniejsze. Nakoniec, jeżeli ziemia jest absolutnie sztywnem ciałem, to wysokość przypiływów i odpływów powinna dochodzić do „maximum“.

A więc widoma wysokość przypiływów w oceanie zależy od deformacji ziemi a względnie od jej sztywności i z wysokości przypiływów można określić sztywność ziemi.

Jak widzimy, w całym tem rozumowaniu bezwładność poruszających się mas nie jest uwzględniona i całe zjawisko jest traktowane z punktu widzenia statycznej teoryi przypiływów. Aby więc nieuwzględnienie wpływu bezwładności przy przypiływach sprawiło jak najmniejsze błędy, trzeba przy obliczeniu współczynnika sztywności naszej ziemi wziąć na uwagę tylko przypiływy o długich peryodach. Z pomiędzy tych ostatnich przypiływy roczne i półroczne podlegają interferencyi z peryodycznymi rocznymi zmianami poziomu wywołanymi przez tajanie śniegów i lodów to na jednej to na drugiej półkuli, przez zmiany prądów, przez peryodyczne deszcze spadające w ciepłych strefach i t. d., a zatem należy oprzeć obliczenie głównie na dwutygodniowych przypiływach.

G. H. Darwin ¹⁾ opracował tę teoryę Kelvina i znalazł, że dwutygodniowe przypiływy morskie są mało co mniejsze od tych, które istniałyby na zupełnie sztywnej ziemi, że przeto ziemia musi być bardzo sztywnem ciałem, co najmniej tak sztywnem, jak stalowa kula tych co ziemia rozmiarów. Jednakże te rezultaty nie są bynajmniej pewne, przeciwnie obliczenia G. H. Darwina spoczywają na bardzo kruchej podstawie. Przedewszystkiem dwutygodniowe przypiływy są tak małe, że bardzo trudno wyróżnić je przez analizę obserwowanych przypiły-

¹⁾ Thomson i Hail. Treat. on Nat. Phil. II tom, str. 460.

On bodily Tides. Phil. Trans. 1879 r. str. 1-36.

wów, które są kombinacją kilkunastu fal o różnych peryodach i amplitudach z dodatkiem pewnych nieregularnych zmian poziomu wód spowodowanych przez zmiany ciśnienia, wiatry i t. d. Następnie, jak to pokazał Poincaré ¹⁾, wpływ konfiguracji lądów i dna morskiego na przyprływy nie jest w teorii Kelvina—Darwina należycie uwzględniony. Wpływ ten powinien ujawnić się we wzorach pod postacią pewnego szeregu, tymczasem metoda Kelvina—Darwina polega na tem, że właściwie uwzględnia się tylko pierwszy wyraz tego szeregu, podczas gdy w wielu przypadkach niektóre dalsze wyrazy tego szeregu mogą posiadać tę samą liczebną wartość co pierwszy. Z drugiej strony sam G. H. Darwin przekonał się, że nie należało pomijać wpływu bezwładności wód na dwutygodniowe przyprływy, albowiem własne jego dalsze badania pokazały, że dynamiczne dwutygodniowe przyprływy powinny być mniej więcej dwa razy mniejsze od dwutygodniowych statycznych przyprływów. W ten sposób okazało się, że rzeczywiste dwutygodniowe przyprływy są niejako za duże i O. Fisher ²⁾ robi złośliwą uwagę, że dowód G. H. Darwina dowodzi więcej niż potrzeba. Sam zaś G. H. Darwin ³⁾ przyznaje, że sztywność ziemi wcale nie daje się ocenić ze spostrzeżeń nad morskimi przyprływami. Można przystać na to zdanie, tembardziej, że dalsze prace samego Darwina ⁴⁾, dalej prace Bürgena ⁵⁾, Hougha ⁶⁾, oraz wyżej przytoczona praca Poincarégo wprawdzie znacznie posunęły naprzód teorię morskich przyprływów, ale nie przyczyniły się do usunięcia trudności, z któremi jest połączone wykonanie zadania wskazanego przez Kelvina, przeciwnie można nawet powiedzieć, że tylko wyjaśniły dawniej znane albo wy dobyły na jaw nowe dawniej niedostrzegane przeszkody.

Można więc tylko co najwyżej twierdzić, że sam fakt istnienia długoperyodycznych przyprływów jest do pewnego stopnia jakościowym dowodem sztywności wnętrza ziemi, albowiem na zupełnie niesztymnej ziemi takie przyprływy i odpływy morza powinnyby być zupełnie nieznaczne.

Nasuwa się tu pytanie, czy nie można bezpośrednio obserwować przyprływów ziemskich, t. j. peryodycznych odkształceń ziemi, spowodowanych przez przyciąganie księżyca i słońca. Na to należy odpo-

¹⁾ Sur l'équilibre et les mouvements des mers. Journ. des math. pures et appl. V ser. 2-gi tom (1896 r.), str. 57—102 i 217—262, osobliwie zaś 79—81.

²⁾ Physics of the Earth's Crust. Londyn 1889, str. 41.

³⁾ On the dynamic Theory of the Tides of long Period. Nature 35 tom, str. 287.

⁴⁾ Rep. Br. Ass. (Southport. 1883 r.).

⁵⁾ Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie.

⁶⁾ Proceedings of the Royal Society. Tom LXI (1897 r.).

wiedzieć, że może już posiadamy obserwacye nad ziemskimi przypiływami. Mianowicie Rebeur — Paschwitz ¹⁾ pokazał, że poziome wahadło codziennie wykonywa pewne ruchy, które może są wywołane przez „ziemskie przypiływy“. Możliwy więc za pomocą poziomego wahadła bezpośrednio obserwować ziemskie przypiływy, a znając je, wprost z nich obliczyć współczynnik sztywności ziemi.

Analityczna strona podobnego zadania byłaby łatwiejszą i prostszą niż w przypadku, w którym chodzi o określenie współczynnika sztywności ze spostrzeżeń nad morskimi przypiływami, albowiem właśnie teoria morskich przypiływów jest głównym „kamieniem obrazu“ w tamtem zadaniu. Tu można by rozważać peryodyczne odkształcenia izotropowej sprężystej kuli tych co ziemia rozmiarów pod wpływem przyciągania księżycy i słońca i porównać z niemi ²⁾ rzeczywiste odkształcenia ziemi. Swoją drogą należałoby w tem zadaniu uwzględnić tę okoliczność, że ziemia jest pokryta oceanami, a dalej i tę okoliczność, że oceany odkształcają się t. j. podlegają przypiływowi, albowiem wskutek morskich przypiływów znaczne masy wody przewalają się z miejsca na miejsce. Pod ciężarem tych mas ziemia powinna ugiąć się t. j. powinny tworzyć się chwilowe zagłębienia pod grzbietem fali przypiływów, co naturalnie musi zmieniać własne odkształcenia sprężystego jądra. Ale uwzględnienie przypiływów morskich w tem zadaniu byłoby o tyle łatwiejsze, że można by wziąć w rachubę obecność morza i wpływ morskich przypiływów jako pewien fakt empiryczny znany ze spostrzeżeń, wcale nie wdając się w samą teorię morskich przypiływów.

Niestety jeszcze nie można skorzystać z tych obserwacyi w celu obliczenia współczynnika sztywności, a to dla kilku przyczyn. Najpierw dla tego, że samych spostrzeżeń mamy jeszcze mało, powtóre dla tego, że same poziome wahadło jest przyrządem stosunkowo nowym i że jeszcze nie znamy dobrze wszystkich przyczyn mogących oddziaływać na ruch tego przyrządu, po trzecie dla tego, że codzienne odkształcenia wywołane przez przyciąganie księżycy i słońca kombinują się z mnóstwem innych peryodycznych i nieperyodycznych odkształceń tak samo nieznacznych jak one, ale zupełnie z niemi porównywalnych.

¹⁾ Horizontalpendelbeobachtungen etc. . . . Beitr. zur Geophysik. tom II, str. 274—339.

²⁾ W czwartym i piątym rozdziale będziemy uważać pewne zadanie odnoszące się do innego fizycznego zjawiska, ale analiza odkształceń sprężystej kuli zawarta w tych rozdziałach może być mutatis mutandis zastosowana do zadania, o którym tu mówimy. Jeszcze lepiej byłoby traktować je z punktu widzenia teorii drgań sprężystej kuli.

Tak n. p. z powodu zmian temperatury powierzchni warstwy gruntu codziennie trochę rozszerzają się i podnoszą w ciągu dnia a opadają w ciągu nocy, przytem góry i pagórki więcej rozszerzają się ze strony wystawionej na promienie słoneczne. W miejscowościach położonych w pobliżu morza grunt wykonywa pewne oscyllacye. spowodowane przez to, że sąsiednie dno morskie uginając się pod ciężarem fali przyływu pociąga za sobą i wybrzeże. Dalej mamy odkształcenia powierzchniowych warstw, pochodzące ze zmian w zawartości wilgoci oraz odkształcenia zależne od zmian w rozkładzie atmosferycznego ciśnienia. Wreszcie mamy powolne odkształcenia zależne od przyczyn orogenicznych (górotwórczych).

Prócz tu wyliczonych przyczyn wywołujących odkształcenia powierzchniowych warstw może jeszcze istnieją jakieś inne nam niewiadome, albowiem już niejednokrotnie konstatowano jakieś ruchy delikatnych i czułych przyrządów takich n. p. jak horyzontalne wahadło, nadirana Abbadiego albo wielkie libelle i t. d., których nie można było wytłumaczyć w sposób racjonalny. Cała ta kwestya jest bardzo zawila i tem trudniejsza do badania, że konstatujemy te deformacye za pomocą przyrządów grawitacyjnych, które nietylko zmieniają położenie wskutek odkształceń gruntu, na którym stoją, ale jednocześnie reagują na drobne zmiany kierunku siły ciężkości, spowodowane przez zmiany w rozkładzie mas towarzyszące odkształceniom.

Kwestya ta pospolicie znana pod nazwą kwestyi zmian kierunku pionu ma dość obszerną literaturę. Jeszcze w przeszłym stuleciu niektórzy astronomowie spostrzegli, że obserwatorya astronomiczne, słupy, na których stoją przyrządy i t. d., doznają pewnych drobnych odkształceń. Specyjalnie tą kwestyą zajmowali się: Plantamour, Abbadie, J. Milne, C. Davison, Rebeur - Paschwitz, G. H. Darwin i inni¹⁾.

¹⁾ Czytelników pragnących zapoznać się z tą kwestyą odsyłam do następujących źródeł:

J. Milne. Seismology. Londyn 1898. Rozdz. XIII i nast.

G. H. Darwin. The Tides and kindred Phenomena in the solar System. Londyn 1898. Rozdz. VI i VII.

Te dwie pierwsze książki są więcej popularne, pozostałe mają czysto naukowy charakter:

G. H. Darwin i Horacy Darwin. Report Br. Ass. (York) 1881.

" " " " " " " " (Southampton) 1882.

C. Davison. Note on Mr. Plantamour's etc. . . . Phil. Mag. 1889 r. (I sem.).

" " History of the . . . Pendulums. Rep. Br. Ass. (Ipswich) 1895 r.

Dalej w Rep. Br. Ass. z lat 1896, 1897 i t. d. Sprawozdania o badaniach seismologicznych [Seismological Investigation. Report of the Commitee].

G. H. Darwin ¹⁾ próbował nawet obliczyć sztywność zewnętrznych przynajmniej pokładów z obserwowanych odchyień pionu. Ze względu na co tylko wskazaną zawilosość sprawy uważamy próbę przezeń podjętą za przedwczesną i z tego powodu niekoniecznie udatną. G. H. Darwin znajduje, że widome odchylenia pionu są większe aniżeli te, które musiałyby istnieć w razie, gdyby ziemia posiadała sztywność szkła, i z tego powodu wnosi, że chyba muszą tu działać jakieś inne przyczyny t. j., że zjawisko nie zależy tylko od prostego sprężystego uginania się zewnętrznych pokładów. Nie możemy zaprzeczyć temu wnioskowi G. H. Darwina, bo sami tylko co mówiliśmy o tem, jak rozliczne są przyczyny sprawujące odkształcenia zewnętrznych warstw, musimy jednakże zauważyć, że w tem zadaniu Darwin zupełnie pominął ściślwość zewnętrznych pokładów, czego, jak sądzimy, właśnie w tym przypadku czynić nie należało, albowiem zewnętrzne pokłady są dosyć ściśliwe, a nawet ze względu na pewną porowatość pewno więcej ściśliwe niżeli n. p. metale. Zresztą odchylenia pionu i t. p. zjawiska jako zależne przedewszystkiem od własności powierzchniowych pokładów nie mogą nam dać informacyi o własnościach głębokich pokładów.

Powiedzieliśmy przed chwilą, że G. H. Darwin w tylko co wspomnianem zadaniu pominął wpływ ściślwości. Warto może tu zaznaczyć, że również w owem sławnem zadaniu Kelvina — Darwina o przyptywach wpływ ściślwości został pominięty. Było to właściwie „malum necessarium“, bo nie można określić dwóch współczynników (ściślwości i sztywności) wtedy, gdy zadanie daje tylko jedno równanie dla określenia obydwóch. Trzeba więc albo założyć, że ciało jest nieściśliwe, albo przyjąć pewien dowolny a prawdopodobny stosunek między współczynnikami sztywności i ściślwości. Ta druga droga wydaje się na pierwszy rzut oka bardziej stosowna, albowiem doświadczenia pokazują, że w ciałach stałych ten stosunek jest po większej części zawarty w pewnych wcale nie szerokich granicach, należy jednak powiedzieć na usprawiedliwienie znakomitych angielskich fizyków, że tak w teorii „ziemskich przyptyków“ jak w wielu innych podobnych zadaniach założenie, że ciało jest nieściśliwe prawie wcale nie zmienia ostatecznych rezultatów rachunku, ma zaś

Rebeur — Paschwitz. Das Horizontalpendel. Nova Acta K. Leop. Car. Akad. 1892 r. tom LX. Nr. 1. Ta rozprawa zawiera ogromny spis dzieł i rozpraw należących do literatury przedmiotu.

¹⁾ On the variations of the vertical. Phil. Magaz. 1882 r. ser. V., tom 14, str. 409—427.

tę zaletę, iż upraszcza wzory. Zaznaczył to już Kelvin a H. Love ¹⁾ stwierdził w osobnej pracy.

Przejdziemy teraz do pewnego innego zjawiska, które w ostatnich czasach zajmowało bardzo i jeszcze zajmuje tak astronomów, jak geofizyków. Mamy tu na myśli perturbacje w ruchu ziemi, objawiające się przez peryodyczne zmiany geograficznych szerokości.

Aby tę rzecz dobrze wyjaśnić, przypomnimy najpierw niektóre dobrze znane rezultaty z teorii kręcenia się absolutnie sztywnego ciała około jego środka masy. Oznaczając, jak zwykle przez p , q , r rzuty prędkości kątovej na główne osie elipsoidy centralnej, zaś przez A , B i C momenty bezwładności, względem tych samych osi, jeżeli siły zewnętrzne działające na ciało są równe zeru, mamy znane równania Eulera:

$$A \frac{dp}{dt} - (B - C) rq = 0$$

$$B \frac{dq}{dt} - (A - C) rp = 0$$

$$C \frac{dr}{dt} - (A - B) pq = 0.$$

Ponieważ w przypadku ziemi można założyć, że równikowe momenty bezwładności są prawie równe, więc założymy, że

$$B = A$$

i rozpatrzmy dokładniej przypadek taki, w którym zachodzi ta ostatnia równość. Jeżeli $A = B$, to powyższym równaniom różniczkowym można uczynić zadość przez system rozwiązań

$$p = 0, \quad q = 0, \quad \text{oraz } r = \text{stałej},$$

$$\text{albo przez } p = k \cdot \cos \lambda t$$

$$q = k \cdot \sin \lambda t$$

$$r = \text{stałej} \quad \text{n. p.} = \omega,$$

gdzie k jest stałą dowolną, zaś

$$\lambda = \frac{C - A}{A} \cdot \omega.$$

Pierwszy system odpowiada stałemu obrotowi naokoło głównej osi największego momentu bezwładności, drugi zaś odpowiada obrotowi naokoło osi głównej największego momentu bezwładności, połączonemu

¹⁾ On lord Kelvin's Estimate of the Rigidity of the Earth. Cambr. Phil. Trans. tom XV, str. 107—118.

z pewnem wahaniem się ciała naokoło dwóch innych głównych osi, przyczem peryod wahań tak się ma do czasu trwania jednego obrotu, jak się ma $\omega : \lambda$, t. j. zawiera w sobie tyle dni, ile jednostek mieści się w liczbie, wyrażającej stosunek:

$$\frac{A}{C - A}.$$

Ponieważ z obserwacji nad precessją¹⁾ wynika, że w przypadku ziemi:

$$\frac{C - A}{A} = \frac{1}{305},$$

przeto w przypadku ziemi peryod perturbacji powinien wynosić 305 dni.

Te wahania naokoło głównych osi równikowych składają się z obrotem naokoło głównej polarnej osi na obrót o stałą kątową prędkości naokoło zmiennej osi chwilowej, która toczy się wewnątrz ciała ze stałą prędkością po krągłym stożku mającym za oś — oś główną polarną. Oś chwilowa obchodzi stożek w ciągu 305 dni. Widzimy stąd, że oś chwilowa różni się od osi głównej polarnej. Tak samo oś chwilowa różni się od osi wypadkowego momentu, ale kąt między osią chwilową i osią wypadkowego momentu jest zawsze o wiele mniejszy niż między tą ostatnią a główną osią polarną. Ponieważ oś wypadkowego momentu jest nieruchoma w przestrzeni, więc oś chwilowa będąc ruchomą względem ciała jest prawie nieruchoma w przestrzeni, natomiast oś główna polarna jest nieruchoma względem ciała ale ruchoma w przestrzeni i okrąża nieruchomą w przestrzeni oś największego momentu bezwładności również ze stałą prędkością i również raz w ciągu 305 dni. W ten sposób dochodzimy do drugiego tłoma-

¹⁾ Stała precessyi wynosi wedle Nyřena [Bull. Acad. St. Petersb. XIV tom], 50'', 1882 (dla 1800 r.) a wedle Bessla [Oppolzer. Lehrbuch der Bahnbestimmung, franc. tłóm. Pasquier, Paryż 1886 r. tom I, str. 180], 50'', 2357. Jak widzimy, te dwa określenia różnią się między sobą bardzo nieznacznie i wogóle przy terażniejszej dokładności astronomicznych obserwacji błąd w określeniu tej stałej musi być bardzo nieznaczny. Wprawdzie w obliczeniu stosunku $\frac{C - A}{A}$ prócz stałej precessyi wchodzą jeszcze inne mniej dokładnie znane wielkości, ale w najgorszym razie pochodzące stąd błędy mogłyby zmienić wartość stosunku $\frac{C - A}{A}$ co najwyżej o kilka jednostek w mianowniku. Warto też sobie przypomnieć, że tak precessya ciekłej jak precessya sztywnej ziemi, jako ruch bardzo powolny jest prawie taka sama. O pracach G. H. Darwina i Oppenheimera, którzy to dowiedli analitycznie, była mowa na początku tego rozdziału, a zatem błąd pochodzący stąd, że przy obliczeniu stałej precessyi postępujemy tak, jakby ziemia była sztywna, błąd ten powiadamy, musi być w każdym razie bardzo nieznaczny.

czenia zjawiska i widzimy, że geograficzne szerokości punktów znajdujących się na powierzchni ciała muszą ulegać peryodycznym zmianom (przyczem peryod wynosi 305 dni), albowiem oczywistą jest rzeczą, że gdy główna oś ciała kręci się w przestrzeni, to i same ciało jako nieruchomo z nią związane musi także kręcić się w przestrzeni.

Ponieważ Euler pierwszy zwrócił uwagę na tego rodzaju perturbację, więc nazwano ją perturbacją Eulera (Cycle Eulerien). Od dawna przypuszczano, że podobna perturbacja może istnieć w ruchu ziemi, albowiem wskutek przemian w rozkładzie mas n. p. dzięki wulkanicznym wybuchom i t. d. może się zdarzyć, że główna oś bezwładności ziemi pocznie oddalać się od osi obrotu. Skoro się to stanie, to stała k w poprzednich wzorach nie może być równa zeru, albowiem tangens kąta między osią chwilową i osią główną polarną jest właśnie równy stosunkowi: $\frac{k}{\omega}$, w takim zaś razie ruch systemu wyraża się przez wzory

$$p = k \cdot \cos \lambda t$$

$$q = k \cdot \sin \lambda t$$

$$r = \omega,$$

co znaczy, że Eulerowska perturbacja musi powstać.

Eulerowska perturbacją zajmował się kiedyś Bessel. Próbował on skonstatować czy w ruchu ziemi ta perturbacja istnieje czy nie, ale nie otrzymał żadnych określonych rezultatów. Potem astronomowie pułkowskiego obserwatorium Peters (1842—43), Gylden (1863—70) i Nyren (1871—73), dalej Maxwell, Downing, Fergola, Gaillet, Nobile ¹⁾ starali się skonstatować peryodyczne zmiany geogr. szerokości, ale udało się to właściwie dopiero Küstnerowi w Berlinie [metodą Talcotta i Horrebowa]. Właściwie już niektórzy z wyżej wymienionych badaczy spostrzegali zmiany geograficznych szerokości, ale nie byli pewni swoich rezultatów, bo 1-mo zmiany te były tak małe, że nie wychodziły poza granicę możliwych błędów obserwacji, 2-do spostrzegane zmiany po większej części nie zgadzały się z przewidywanym 305 dniowym peryodem. Do wyjaśnienia sprawy przyczyniło się zastosowanie metody obserwacji Talcotta i Horrebowa dającej bardzo dokładne rezultaty a także przypadkowa okoliczność. Mianowicie około 1889 i 1890 roku amplituda zmian geograficznej szerokości czasowo znacznie się zwiąk-

¹⁾ Porównaj Helmert. Theorieen der höheren Geodäsie. II tom. Lipsk 1884 r. Rozdział V.

Tisserand. Traité de mécanique céleste. tom II-gi. Paryż 1891, rozdział XXIX i XXX.

szyla i już nie można było zwalić tych zmian na karb błędów obserwacyi.

A więc na ziemi szerokości geograficzne zmieniają się i przyczyną tych zmian jest Eulerowska perturbacya w ruchu obrotowym ziemi nie zaś jakieś peryodyczne zmiany refrakeyi spowodowane przez peryodyczne zmiany w stanie atmosfery, jak to niektórzy sądzili¹⁾. Widać to stąd, że zmiany szerokości geograficznych na stacyach, których długości różnią się o 180^0 mają wprost przeciwny charakter. Stwierdzili to najpierw Marcuse i Preston, którzy umyślnie w 1892 roku jeździli na wyspy Hawaj, aby zbadać jak wyglądają zmiany geograficznych szerokości na drugiej półkuli. Zresztą od kilku lat astronomowie wciąż śledzą zmiany szerokości na europejskich i amerykańskich obserwatoryach a także w Tokio i Kapstadcie i rezultaty wszystkich tych obserwacyi zgodnie wskazują, że mamy rzeczywiście do czynienia z pewną perturbacją w ruchu obrotowym nie zaś z peryodycznymi zmianami refrakeyi.

Wyżej wyłożona teoria Eulerowskiej perturbacyi polega na założeniu, że ziemia jest absolutnie sztywnem ciałem, wiemy zaś, że jeżeli ciało nie jest absolutnie sztywne, to perturbacje w jego obrotowym ruchu mogą znacznie różnić się od podobnych perturbacyi w ruchu absolutnie sztywnego ciała. Tymczasem właśnie tak z dawniejszych jak z nowszych spostrzeżeń nad zmianami geograficznych szerokości wynika, że niema żadnego 305 dniowego peryodu perturbacyi, natomiast wedle Chandlera²⁾, który sięgnął aż do obserwacyi Bradleya, w zmianach geograficznych szerokości daje się zauważyć peryod wynoszący około 427 dni, przyczem średnia amplituda zmian geogr. szerokości wynosi około $0''$, 3. Astronomowie pułkowscy: Nyřen, Kostyński, Iwanow i Sokolow³⁾ z rozmaitych seryi spostrzeżeń znaleźli prawie ten sam peryod. Tak n. p. Nyřen znalazł peryod 433 dniowy dla epoki 1882—1891 i 425 dniowy dla 1875—78, Kostyński z innej seryi obserwacyi znalazł 412 dniowy peryod, Iwanow 433,4 dniowy dla lat 1863—1875 i średnią amplitudę $0''$, 4, Sokolow znów z innej seryi obserwacyi oblicza peryod 430 dniowy i średnią amplitudę $0''$, 32. Wreszcie Mendenhall⁴⁾ ze spostrzeżeń Smitha w Rockville w Stanach Zjednoczonych

¹⁾ Ze zmianą stanu atmosfery zmienia się refrakcyja, a zatem peryodyczne zmiany stanu atmosfery mogą spowodować peryodyczne błędy w obserwacyach nad wysokością bieguna.

²⁾ Patrz Bull. Astr. IX tom (1892 r.), str. 424. Astrom. Journ. N. 239 i inne.

³⁾ Mélanges Astr. tom VII (1893 r.), str. 2—3, oraz Dziennik 9 zjazdu rosyjskich przyrodników [Moskwa 1894 r.] N. 6, str. 13, N. 8, str. 4.

⁴⁾ Peterm. Mitth. 1894 r. Litteraturb. str. 3.

w 1891—1892 roku oblicza peryod 430 dniowy, Gonnessiat ¹⁾ z analizy spostrzeżeń poczynionych na Lyońskim obserwatorium również znajduje peryod 430 dniowy.

Od początku 1890 roku na kilkunastu astronomicznych obserwatoriach wciąż śledzą zmiany geograficznych szerokości, zaś prof. Albrecht w Berlinie corocznie ogłasza rezultaty tych spostrzeżeń. Z tych sprawozdań ²⁾ widać, że rzeczywista perturbacja, sprawiąca zmiany geogr. szerokości jest dość zawiła, ale jednocześnie widać, że ów 14 miesięczny peryod Chandlera bynajmniej nie jest nieuzasadniony. Rzeczywiście z rysunków, załączonych we wspomnianych sprawozdaniach widać, że polodya t. j. tor północnego bieguna osi chwilowej po powierzchni ziemi nie jest kołem ani nawet zamkniętą krzywą, ale widać też, że oprócz epoki: wiosna 1894 — jesień 1895 w czasie której tor bieguna osi chwilowej był bardzo nieregularny, pełen jakichś zawrotów, oprócz tej epoki powiadamy, bieguna osi chwilowej przechodzi

¹⁾ Recherches... etc.... porówn. Raport Radau'a [bo sama praca podobno jeszcze się nie pojawiła w druku] w C. R. tom CXXXVI, str. 710 — 712. Gonnessiat znajduje, że zmiany geograficznych szerokości dają się wyrazić wzorami zawierającymi tak jak u Chandlera, najpierw wyrazy o peryodzie rocznym i 14 miesięcznym, ale prócz tego jeszcze wyrazy o peryodzie wynoszącym 1,8 roku i o peryodzie wynoszącym 9,3 roku. Ten ostatni peryod jest prawie równy połowie peryodu, w ciągu którego kończy się cykl faz księżyca, zaś co do wyrazu o peryodzie 1,8 roku, to trzeba zauważyć, że odpowiedni argument jest wymierny z argumentami wyrazów o rocznym i 14 miesięcznym peryodach.

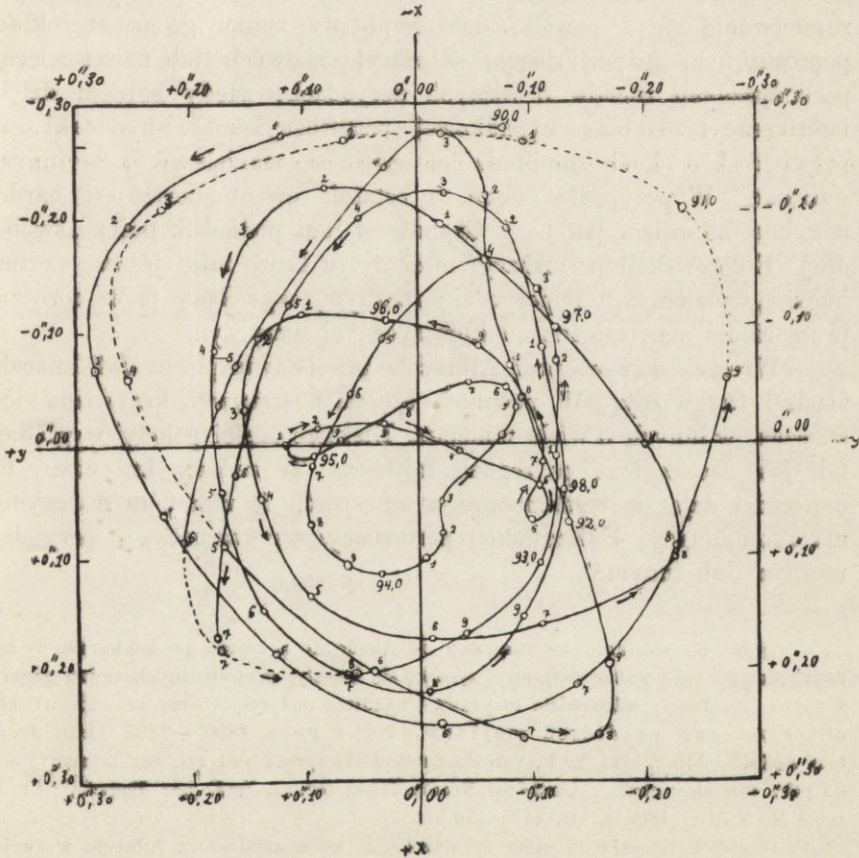
²⁾ Berichte über den Stand der Erforschung der Breiterevariationen, wydawnictwo centralnego międzynarodowego biura dla pomiarów ziemi. Takie sprawozdanie wychodzi co roku na wiosnę i zawiera wiadomości o rezultatach spostrzeżeń mniej więcej aż do jesieni ubiegłego roku.

Załączona tu krzywa, wyobraża polodyę t. j. tor północnego bieguna chwilowej osi obrotu na powierzchni ziemi. Skopiowałem ją z rysunków zamieszczonych w sprawozdaniach prof. Albrechta już po ogłoszeniu konkursu t. j. w maju 1899 roku. Wskutek tego zawiera ona już wyniki spostrzeżeń dokonanych w 1898 roku aż do pierwszych dni września. Od początku 1890 roku aż do początku 1895 roku załączona tu krzywa jest kopią krzywej zamieszczonej w sprawozdaniu prof. Albrechta z grudnia 1897 roku, zaś od początku 1895 roku aż do września 1898 kopią krzywej zamieszczonej w sprawozdaniu prof. Albrechta z grudnia 1898. Pierwszą część polodyi należy uważać za ostatecznie oznaczoną, co do drugiej części to prawdopodobnie ulegnie ona jeszcze pewnym niewielkim zmianom, gdy wszystkie serie spostrzeżeń zostaną ostatecznie obliczone. Tak n. p. rysunek w sprawozdaniu grudniowym 1887 zawierał przebieg polodyi w 1895—1896 aż do lipca 1897 roku, ale rysunek w sprawozdaniu z grudnia 1898 podaje trochę inny przebieg dla tego samego odstępu czasu; mianowicie gdy dokładniej zbadano wagę, którą należy przydać różnym seryom spostrzeżeń, to się okazało, że trzeba poczynić niektóre drobne zmiany.

Przyjemnie mi tu wspomnieć, że możność skorzystania z ostatniego sprawozdania prof. Albrechta zawdzięczam uprzejmości prof. Karlińskiego.

przez jeden i ten sam południk w odstępach czasu, rzeczywiście wynoszących mniej więcej około 14 miesięcy. To samo wskazują tablice spostrzeżeń poczynionych na oddzielnych stacjach, zamieszczone w sprawozdaniach prof. Albrechta. Wskutek tego sądzimy, że ów Chandlerowski 430 dniowy peryod choć jeszcze nie jest pewnikiem naukowym, jednakże nie jest bynajmniej czczym wymysłem i z tego powodu użyjemy go w dalszym ciągu jako kryterium do sądzenia o stanie wnętrza ziemi.

Rycina 1.



Rok podzielony na 10 równych części.

Oś $+x$, $-x$ identyczna z Greenwich'skim południkiem, przyczem Greenwich znajduje się od strony $+x$.

Kropkowana linia oznacza te części południ, których przebieg jest mniej pewny jak przebieg pozostałej krzywej.

Z krzywych prof. Albrechta widać, że od 1890 r. do wiosny 1894 r. amplituda zmian geogr. szerokości zmniejszała się, po zaburzeniach, które nastąpiły w epoce: wiosna 1894 — jesień 1895 amplituda znów się powiększyła. Zmniejszanie się amplitudy w pewnej epoce i ponowne jej powiększanie się w innej może n. p. pochodzić stąd, że dzięki wewnętrznemu tarciu i odkształceniom, dążącym do przystosowania się do równowagi na około pewnej nowej średniej osi, kąta między osią chwilową i główną osią staje się z czasem coraz mniejszym póki nowe jakieś przesunięcia mas ponownie nie oddalą osi głównej od osi chwilowej; ale tak samo można tłumaczyć kolejne zmniejszanie się i powiększanie amplitudy zmian geogr. szerokości prosto tem, że perturbacja składa się z dwóch (lub nawet więcej) peryodycznych ruchów o różnych peryodach; wtedy bowiem dzięki interferencyi przebieg wypadkowej perturbacji może być taki, że w pewnych epokach amplituda jej będzie się zmniejszać, a w innych wzrastać. W przypadku ziemi ta ostatnia ewentualność jest bardzo możebną, albowiem jak to i Chandler i inni podnosili, prócz „swobodnej“ Eulerowskiej perturbacji możemy tu łatwo mieć jeszcze perturbacją „wymuszoną“ o peryodzie rocznym, wywołaną przez coroczne przesunięcia mas, zależne od klimatycznych przyczyn.

Wreszcie krzywa prof. Albrechta przedstawia pewne dość znaczne zmiany krzywizny. W pewnych częściach krzywej krzywizna jest znaczna, w innych o wiele mniejsza. Niektóre części połudzi wyglądają tak jak zaokrąglone po rogach trójkąty. Te zmiany krzywizny też najłatwiej dają się wytłumaczyć w ten sposób, iż mamy tu do czynienia z kombinacją Eulerowskiej perturbacji z perturbacją o peryodzie rocznym lub innym¹⁾.

¹⁾ Już po odesłaniu tej rozprawy do Akademii a nawet po konkursie do rąk moich doszły dwie ważne rozprawy, dotyczące się kwestyi peryodycznych zmian geograficznych szerokości, mianowicie rozprawa Chandlera pod tyt. *Comparison of the observed and predicted motions of the pole 1890 — 1898* (Astr. Journ. tom XIX. N. 446.), oraz E. F. van de Sande Bakhuyzena pod tyt. *Sur le mouvement du pôle terrestre etc. . .* [Archives Néerlandaises etc. . . (red. par Bosscha) ser. II, tome II, 5 Livr. 1899 r. str. 447—486.].

Chandler rozważa te same spostrzeżenia, które zamieszcza Albrecht w swoich sprawozdaniach i znajduje, że dobrze zgadzają się z hipotezą, iż ruch bieguna składa się z dwóch peryodycznych ruchów, jednego o czternastomiesięcznym a drugiego o rocznym peryodzie, że od 1825 roku czternastomiesięczny peryod wynosi prawdopodobnie średnio 428 dni z pewnym ułamkiem i że należy przypuścić, iż tak peryod jak amplituda tej perturbacji podlegają pewnym niewielkim zmianom. O tej zmienności peryodu i amplitudy Chandler pisał już w poprzednich swoich pracach.

Natomiast Bakhuyzen zbija zapatrywania się Chandlera utrzymując, że peryod

ROZDZIAŁ III.

Eulerowska perturbacja u ciał nieodkształcających się, u których zachodzą ruchy wewnętrzne.

Teorią ruchu obrotowego układów niesztynnych zajmowało się wielu autorów, pomiędzy którymi byli tak wydatni uczeni jak n. p. Liouville i Gylden¹⁾, ale większość tych prac nie ma dla nas interesu. Niektóre n. p. traktują rzecz z nazbyt ogólnego stanowiska tak, że trudno z tych prac wyciągnąć wnioski wprost odnoszące się do obchodzącego nas konkretnego przypadku, w innych autor miał głównie analityczną stronę zadania na oku, w innych znowu jak n. p. u Schiaparellego²⁾ założenia są bardzo ogólne a rachunki nazbyt niedokładne.

Nie będziemy więc rozwozić się nad temi pracami. Natomiast zastanowimy się nad takimi pracami, w których pewna specjalna hipoteza została szczegółowo opracowana, albowiem te prace dają możność wysnuć pewne konkretne wnioski dające się zastosować do ziemi. Badanie nasze rozdzielimy na dwie części. W niniejszym rozdziale będziemy badać systemy, w których zewnętrzna powierzchnia się nie odkształca i momenty bezwładności pozostają stałe chociaż we-

perturbacji jest stały [z teoretycznego punktu widzenia oczywiście Bakhuyzen ma rację, bo zmienny peryod to „*contradictio in adjecto*“] i że wynosi raczej 431 aniżeli 428 dni. Zresztą jego wnioski zgadzają się z wnioskami Chandlera.

Bakhuyzen znajduje, że można przedstawić ruch północnego bieguna począwszy od 1890 roku przez kombinację ruchu po kole o peryodzie 431 dni i ruchu po elipsie o peryodzie rocznym. Oba ruchy odbywają się w tym samym kierunku co obrót ziemi, t. j. z zachodu na wschód. Długość średnicy koła wynosi około $0''{,}3$, środek jego jest identyczny ze środkiem polodyi Albrechta. Co do elipsy, to środek jej nie znajduje się w środku polodyi, osie tworzą kąty z Greenwichskim południkiem, długości głównych osi wynoszą $0''{,}24$ i $0''{,}12$. Zresztą należy zauważyć, że Chandler już w 1894 przedstawiał ruch roczny jako ruch po elipsie, tylko jego elipsa była inaczej zorientowana jak elipsa Bakhuyzena. Różnice pomiędzy polodyą Albrechta i teoretyczną polodyą Bakhuyzena nie są bardzo znaczne ale też nie tak małe, aby je można pominąć. Jeżeli zaś zwrócimy uwagę na tę okoliczność, że spostrzeżenia nad zmianami geogr. szerokości należą do najtrudniejszych, bo chodzi tu o pomiar drobniotkich różnic i zmian, to będziemy musieli przyznać, że jeszcze nie można rozstrzygnąć o tem, czy kombinacja dwóch ruchów jednego o 14 miesięcznym, a drugiego o rocznym peryodzie jest wystarczająca, czy też należy razem z Gonnessiatem założyć, że wchodzą tu w grę jeszcze inne ruchy o innych peryodach. Dla nas wszakże przedewszystkiem ważną jest ta okoliczność, że tak polodya Albrechta jak analiza Chandlera i Bakhuyzena jednoznacznie wykazują istnienie perturbacji posiadającej 14 miesięczny (430 dniowy) peryod.

¹⁾ Tisserand. *Traité de méc. cel.* II tom. (Paryż 1891 r.) str. 514—527.

²⁾ De la Rotation de la Terre. Petersburg 1889, albo włoskie tłumaczenie Dr. Tedone w *Nuovo Cimento*, tom XXX, 3 ser. 1891 roku.

wnątrz tych systemów zachodzą rozmaite ruchy. Odształcające się systemy rozpatrzmy w następnych rozdziałach. W ten sposób ułatwimy sobie zadanie a jednocześnie lepiej rozpoznamy jaki wpływ mają różne czynniki na charakter perturbacji.

Najpierw zastanowimy się nad hipotezą ciekłego jądra. Folie¹⁾ sądzi, iż dość jest założyć, że wewnątrz sztywnej skorupy znajduje się ciekłe jądro a przynajmniej dość znaczna warstwa cieczy tak, że skorupa może poruszać się do pewnego stopnia niezależnie od jądra i „viceversa“, ale jego dowodzenia nie mają żadnego znaczenia; Folie bowiem do jądra kwestyi nie dotarł, rachunki zaś oparł na założeniach po części zgoła dowolnych.

O wiele dokładniej badali tę kwestyę Słudzki i Hough²⁾. Zakładają oni, że mamy absolutnie sztywną elipsoidałą skorupę, wypełnioną doskonałą cieczą, następnie zakładają, że wskutek jakiegokolwiek przy czyny położenie głównych osi tej ostatniej zmienia się. W ten sposób główne osie skorupy i jądra nie są już identyczne i ruch systemu nie może być czystym obrotowym ruchem naokoło stałej osi.

Naturalnie założenie, że skorupa jest absolutnie sztywna, jest fizycznie niemożliwe a przytem w danym przypadku modyfikuje ruch układu, albowiem wskutek absolutnej niepodatności skorupy ciekłe jądro musi zachować stały kształt zewnętrzny. Również fizycznie niemożliwą jest owa doskonała wewnętrzna ciecz pozbawiona lepkości. Jednakże rozważanie konsekwencji tej hipotezy nie jest płonne, albowiem w każdym razie może się przyczynić do wyświeślenia pewnej strony kwestyi. W zadaniu Hougha i Słudzkiego wpływ wewnętrznej

¹⁾ Acta math. Tom 16. str. 365—384.

²⁾ Słudzki. De la Rotation de la Terre Bull. Soc. Imp. des naturalistes. Moscou 1895 r. str. 285—318 i 1896 r. str. 162—173.

Hough. The Oscillations of a Rotating Ellipsoidal Shell containing Fluid. Phil. Trans. London, tom 186 A. Część I. str. 469—506.

Analizy Słudzkiego i Hougha są właściwie identyczne, tylko ostateczne wnioski są różne ale prosto dla tego, że Słudzki nie zadał sobie trudu aby dokładnie rozpatrzeć swoje własne wzory. W drugiej części swej pracy Słudzki rozpatruje inne kwestye n. p. wpływ oceanów na perturbacje w ruchu ziemi ale ta część pracy jest mniej dokładną i choć w przyszłości będziemy zajmowali się poruszonemi tam kwestyami na Słudzkiego powoływać się nie będziemy. Zauważmy tu, że już Hopkins (patrz rozdz. I.) rozpatrywał te same zadania, ale za jego czasów Hydrodynamika była mniej wydoskonalona niż obecnie a wskutek tego jego analizie zbywa na ścisłości. Ruchem doskonałej cieczy, której zewnętrzna powierzchnia ma kształt elipsoidy, zajmował się też Tedone. Atti della Accad. dei Lincei. Ser V. Rendiconti cl. sc. fis. mat. et nat. tom II, sem. I. (1898 r.) str. 123—130. Ruch rozpatrywany przez Tedone jest wirowy.

cieczy na ruch skorupy objawia się tylko przez pośrednictwo ciśnień, które ciecz wywiera na wewnętrzne ściany skorupy. Wskutek tego zadanie, rozważane przez Studzkiego i Hougha daje właśnie możliwość oddzielnie zbadać wpływ ciśnienia wewnętrznej cieczy na perturbacje w ruchu systemu. Zresztą należy zauważyć, że Hough rozważa tę hipotezę tylko na próbę.

Przedstawmy w krótkości te badania. Zakładamy, że mamy układ składający się z absolutnie sztywnej skorupy i elipsoidalnego jądra wypełnionego doskonałą nieściśliwą cieczą. Zakładamy dalej, że główne osie centralnej elipsoidy bezwładności ciekłego jądra są identyczne z takimiż osiami skorupy, dalej, że sił zewnętrznych niema, zaś pierwotny impuls był momentem nie naokoło jednej z głównych osi ale naokoło innej osi, przechodzącej przez środek masy układu. Dzięki temu ostatniemu założeniu możemy zbadać co się stanie, jeżeli oś obrotu ziemi wskutek jakiejś przemiany w rozkładzie mas n p. wskutek wulkanicznego wybuchu przestanie być osią główną systemu.

Przypuściliśmy, że pierwotny impuls był momentem naokoło osi przechodzącej przez środek masy układu, bo gdyby ta oś nie przechodziła przez środek masy, to prócz kręcenia się układu koło środka masy otrzymalibyśmy jeszcze pewien ruch postępowy całego układu, który naturalnie żadnego nie przedstawia interesu.

Założymy nareszcie, że jądro ma kształt elipsoidy obrotowej, zaś jednocześnie momenty bezwładności skorupy naokoło obu osi głównych równikowych są równe. Założenia te są w obecnym przypadku, gdzie chodzi o zastosowanie do ziemi, najzupełniej dozwolone. Weźmy prostokątne osie x, y, z nieruchomo związane ze skorupą. Założymy, że środek współrzędnych znajduje się w środku masy układu, zaś oś z jest identyczna z małą osią elipsoidy ograniczającej wewnętrzną ciecz. Oznaczmy jak zwykle przez p, q, r rzuty prędkości kątowej układu osi x, y, z na też same osie x, y, z . Ponieważ te osie są nieruchomo związane ze skorupą więc p, q, r wyznaczają w zupełności ruch skorupy. Co zaś do ruchu wewnętrznej cieczy, to oczywiście można zawsze rozłożyć ten ruch na ruch obrotowy naokoło osi x, y, z i pewien ruch dodatkowy. Oznaczmy rzuty prędkości obrotowej cieczy na ruchome osie x, y, z przez ξ, η, ζ , przyczem ξ, η, ζ są małe różne od p, q, r , dalej oznaczmy rzuty prędkości dodatkowych na osie x, y, z przez u, v, w . Wtedy rzuty prędkości punktów skorupy na osie współrzędnych są:

$$\left. \begin{aligned} u &= qz - ry \\ v &= rx - pz \\ w &= py - qx \end{aligned} \right\} \quad \text{I}$$

zaś rzuty prędkości cieczy na teź osie ruchome są:

$$\text{II} \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \eta z - \zeta y + u_1 \\ v = \zeta x - \xi z + v_1 \\ w = \xi y - \eta x + w_1. \end{array} \right.$$

Załómy, że ruch dodatkowy cieczy posiada potencyał. Wtedy wedle znanego hydrodynamicznego zadania o niewirowym ruchu cieczy w poruszającym się elipsoidalnem wydrążeniu:

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$v_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$w_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

przyczem

$$\varphi = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} z (y\omega_1 - x\omega_2)$$

gdzie a i c oznaczają połowy osi głównych elipsoidy, zaś:

$$\omega_1 = p - \xi$$

$$\omega_2 = q - \eta$$

a prócz tego

$$\omega_3 = r - \zeta$$

Teraz możemy napisać wzory II w kształcie:

$$\text{II bis} \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \eta z - \zeta y - \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} \cdot \omega_2 z \\ v = \zeta x - \xi z + \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} \cdot \omega_1 z \\ w = \xi y - \eta x + \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} (\omega_1 y - \omega_2 x). \end{array} \right.$$

Wielkości ξ , η , ζ jako rzuty prędkości obrotowych są jednocześnie rzutami prędkości ruchu wirowego na osie x , y , z , muszą tedy zadość czynić znanym równaniom różniczkowym Helmholtza, które odniesione do osi ruchowych x , y , z będą miały następujący kształt:

$$\frac{d\xi}{dt} = r\eta - q\zeta + \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = p\zeta - r\xi + \xi \frac{\partial v}{\partial x} + \eta \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = q\xi - p\eta + \xi \frac{\partial w}{\partial x} + \eta \frac{\partial w}{\partial y} + \zeta \frac{\partial w}{\partial z}$$

zaś po podstawieniu wartości na u , v , w z równań II bis oraz zważywszy, że $\omega_1 = p - \xi$, $\omega_2 = q - \eta$ i t. d., otrzymamy z tylko co napisanych równań następujące:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\zeta}{dt} &= r\eta - \frac{2a^2}{a^2 + c^2} q\zeta + \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} \cdot \eta\zeta \\ \frac{d\eta}{dt} &= -r\zeta + \frac{2a^2}{a^2 + c^2} p\zeta - \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} \zeta\zeta \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \frac{2c^2}{a^2 + c^2} (q\zeta - p\eta) \end{aligned} \right\} \quad \text{III}$$

Oznaczając rzuty momentów ilości ruchu przez H_x , H_y , H_z , mamy znane równania:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dH_x}{dt} - H_y r + H_z q &= 0 \\ \frac{dH_y}{dt} - H_x p + H_z r &= 0 \\ \frac{dH_z}{dt} - H_x q + H_y p &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{IV}$$

Rzuty momentów ilości ruchu H_x , H_y , H_z wyrażają się tu przez wzory:

$$\begin{aligned} H_x &= A_1 p + \iiint \rho (wy - vz) dx dy dz \\ H_y &= A_1 q + \iiint \rho (uz - wx) dx dy dz \\ H_z &= C_1 r + \iiint \rho (vx - uy) dx dy dz \end{aligned}$$

gdzie A_1 i C_1 oznaczają główne momenty bezwładności skorupy, ρ gęstość cieczy, u , v , w rzuty prędkości cieczy na osie x , y , z , zaś całkowanie odnosi się do całej przestrzeni zajętej przez ciecz. Podstawiając w ostatnie wzory wartości na u , v i w ze wzorów II bis, oznaczając przez A_2 i C_2 momenty bezwładności ciekłego jądra, otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} H_x &= (A_1 + \alpha) p + (A_2 - \alpha) \xi \\ H_y &= (A_1 + \alpha) q + (A_2 - \alpha) \eta \\ H_z &= C_1 r + C_2 \zeta \end{aligned} \right\} \quad \text{V}$$

gdzie

$$\alpha = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} \cdot [C_2 - A_2] .$$

Teraz zaś podstawiając te ostatnie wyrażenia na H_x , H_y , H_z w równania IV otrzymamy zamiast równań IV równania:

$$\text{VI} \quad \left\{ \begin{array}{l} (A_1 + \alpha) \frac{dp}{dt} + (A_2 - \alpha) \frac{d\zeta}{dt} + (C_1 - A_1 - \alpha) qr \\ \quad - (A_2 - \alpha) r\eta + C_2 q\zeta = 0 \\ (A_1 + \alpha) \frac{dq}{dt} + (A_2 - \alpha) \frac{d\eta}{dt} - (C_1 - A_1 - \alpha) pr \\ \quad + (A_2 - \alpha) \zeta r - C_2 p\zeta = 0 \\ C_1 \frac{dr}{dt} + C_2 \frac{d\zeta}{dt} - (A_2 - \alpha) (\zeta q - \eta p) = 0. \end{array} \right.$$

Z trzeciego równania III i trzeciego równania VI wypada:

$$C_1 \frac{dr}{dt} + \left[\frac{2c^2}{a^2 + c^2} \cdot C_2 - (A_2 - \alpha) \right] (\zeta q - \eta p) = 0.$$

Lecz

$$\frac{2c^2}{a^2 + c^2} \cdot C_2 - A_2 + \alpha = \frac{C_2 (a^2 + c^2) - 2a^2 A_2}{a^2 + c^2} = 0,$$

albowiem

$$A_2 = \frac{a^2 + c^2}{5} M_2$$

$$C_2 = \frac{2a^2}{5} M_2$$

(gdzie M_2 oznacza masę ciekłego jądra), zaś

$$\alpha = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} \cdot (C_2 - A_2).$$

Widzimy stąd, że trzecie równ. III i trzecie równ. VI dają równanie:

$$C_1 \frac{dr}{dt} = 0,$$

skąd

$$r = \text{stałe}.$$

Możemy położyć

$$r = \omega,$$

rozumiejąc pod ω kątową prędkość obrotu ziemi.

Zauważmy teraz, że p , q , ζ i η , jeżeli chodzi o zastosowanie do ziemi, muszą być bardzo małymi wielkościami, a zatem można opuścić iloczyny i kwadraty tych wielkości w równaniach III i VI. Lecz wtedy z trzech równań III i VI wypada:

$$\zeta = \text{stałe}.$$

Można oczywiście też położyć:

$$\zeta = \omega,$$

poczem pierwsze dwa równania III przybiorą następującą postać:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\zeta}{dt} + \frac{2a^2}{a^2 + c^2} \omega \cdot (g - \eta) &= 0 \\ \frac{d\eta}{dt} - \frac{2a^2}{a^2 + c^2} \omega (p - \zeta) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{VII}$$

zaś pierwsze dwa równania VI po wyrugowaniu z nich pochodnych $\frac{d\zeta}{dt}$ i $\frac{d\eta}{dt}$ przy pomocy tylko co napisanych równań VII przybiorą następujący kształt:

$$\left. \begin{aligned} (A_1 + \alpha) \frac{dp}{dt} + \left[C_1 - A_1 + \alpha \frac{(a^2 - c^2)}{a^2 + c^2} \right] \omega q + \\ + \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} (A_2 - \alpha) \omega \eta &= 0 \\ (A_1 + \alpha) \frac{dq}{dt} - \left[C_1 - A_1 + \alpha \frac{(a^2 - c^2)}{a^2 + c^2} \right] \omega p - \\ - \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} (A_2 - \alpha) \omega \zeta &= 0. \end{aligned} \right\} \text{VIII}$$

Równania VII i VIII są to zwykle równania różniczkowe liniowe, których całkowanie nie przedstawia żadnych trudności. Kładąc:

$$\begin{aligned} p &= P e^{i\lambda t} \\ q &= Q e^{i\lambda t} \\ \zeta &= \Xi e^{i\lambda t} \\ \eta &= H e^{i\lambda t} \end{aligned}$$

gdzie P, Q etc. ... są to pewne stałe, otrzymamy z równań VII i VIII następujące równanie na określenie wykładnika λ :

$$\begin{vmatrix} i\lambda & m\omega & 0 & n\omega \\ m\omega & -i\lambda & n\omega & 0 \\ 0 & k\omega & i\lambda & -k\omega \\ k\omega & 0 & -k\omega & -i\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

t. j.

$$\lambda^4 - (m^2 + 2kn + k^2) \omega^2 \lambda^2 + (m + n)^2 k^2 \omega^4 = 0, \quad \text{IX}$$

gdzie

$$\begin{aligned} k &= \frac{2a^2}{a^2 + c^2} = \frac{C_2}{A_2} \\ m &= \frac{C_1 - A_1 + \alpha \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2}}{A_1 + \alpha} \end{aligned}$$

$$n = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} \cdot \frac{A_2 - \alpha}{A_1 + \alpha} = \frac{C_2 - A_2}{A_1 + a} \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{A_2}\right).$$

Mamy więc:

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{2} [m^2 + 2kn + k^2 \pm \sqrt{(m^2 + 2kn + k^2)^2 - 4k^2 \cdot (m + n)^2}]$$

albo też po łatwych przeróbkach:

$$X \quad \lambda^2 = \frac{\omega^2}{2} [m^2 + 2kn + k^2 \pm (k - m) \sqrt{(k + m)^2 + 4kn}].$$

Z tych wzorów widać, że λ^2 może być tylko dodatne albo urojone, jednak znaczenie wchodzących w te wzory wyrazów jest takie, że w warunkach, odpowiadających warunkom ziemskim, λ^2 nie może przybrać wartości urojonej tylko dodatnią, co znaczy, że perturbacja w ruchu obrotowym jest peryodyczna [przypominamy, że $p = Pe^{i\lambda}$ etc. ...].

Dla przykładu rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy jądro ma kształt kulisty. Wtedy

$$\begin{aligned} c &= a \\ \alpha &= n = 0 \\ k &= 1. \end{aligned}$$

Z równania X otrzymujemy wtedy:

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &= \omega^2 \\ \lambda_2^2 &= \omega^2 \cdot \left[\frac{C_1 - A_1}{A_1} \right]^2 \end{aligned}$$

gdzie A_1 i C_1 oznaczają główne momenty bezwładności skorupy. Od razu widzimy, że ani wyrażenia prędkości kątowej ani wyrażenia peryodu nie zawierają momentów bezwładności jądra ani wogóle niczego, coby było zależne od elementów jądra. W rezultacie tym niema nic dziwnego, albowiem oczywistą jest rzeczą, że gdy jądro jest kuliste a ciecz wypełniająca jądro jest pozbawiona lepkości, to skorupa może kręcić się tak jak gdyby wewnętrzna ciecz wcale nie istniała. Ale w takim razie równanie IX właściwie nie powinno już być stosowane, dalej równania III właściwie nie mają już żadnego znaczenia, wreszcie:

$$\begin{aligned} \varphi &= 0 & u_1 &= v_1 = w_1 = 0 \\ H_x &= A_1 p \\ H_y &= A_1 q \\ H_z &= C_1 r \end{aligned}$$

a równania VIII przywodzą się do zwykłych równań określających kręcenie się sztywnego ciała [którego dwa momenty bezwładności są równe] naokoło punktu t. j. do równań:

$$\begin{aligned} A_1 \frac{dp}{dt} + (C_1 - A_1) \omega q &= 0 \\ A_1 \frac{dq}{dt} - (C_1 - A_1) \omega p &= 0 \\ C_1 \frac{dr}{dt} &= 0, \quad \text{t. j. } r = \omega. \end{aligned}$$

Wskutek tego równanie służące dla określenia λ przywodzi się do

$$\lambda^2 = \omega^2 \left[\frac{C_1 - A_1}{A_1} \right]^2.$$

A zatem pierwszy pierwiastek równania IX t. j. pierwiastek: $\lambda_1^2 = \omega^2$ nie ma właściwie żadnego znaczenia, nie odpowiada żadnej rzeczywistej perturbacyi, natomiast drugi pierwiastek równania IX t. j. pierwiastek:

$$\lambda_2^2 = \omega^2 \left[\frac{C_1 - A_1}{A_1} \right]^2$$

odpowiada Eulerowskiej perturbacyi. Peryod tej perturbacyi wynosi w tym razie:

$$\frac{A_1}{C_1 - A_1} \text{ dni.}$$

Skoro jądro redukuje się do zera, to wtedy A_1 i C_1 stają się równe A i C , t. j. momentom bezwładności całego układu, zaś peryod perturbacyi wynosi 305 dni, gdyż stosunek:

$$\frac{A}{C - A}$$

ma wartość 305 w przypadku ziemi.

Jeżeli jednak jądro nie jest kuliste, wtedy φ nie jest równe zeru, u_1 , v_1 , w_1 też nie są równe zeru, ruch skorupy nie jest niezależny od tego, co się dzieje z ciekłym jądrem, równania III muszą być uwzględnione narówni z równaniami VIII i oba pierwiastki równania IX odpowiadają pewnym perturbacyom. Jeżeli oznaczymy większy z tych pierwiastków przez λ_1 , a mniejszy przez λ_2 , to $\frac{\omega}{\lambda_2}$ równa się ilości dni peryodu Eulerowskiej perturbacyi, zaś $\frac{\omega}{\lambda_1}$ ilości dni peryodu innej perturbacyi, na którą wskazywał już Hopkins. Z charakteru swego ta

perturbacja byłaby podobna do nutacji, ale byłaby to swobodna nutacja, swobodna, bo niezależna od przyciągania innych ciał niebieskich. Zauważmy zresztą, że o ile wiadomo, takiej swobodnej nutacji dotąd nie spostrzeżono, jeżeli zatem istnieje, to amplituda jej musi być bardzo mała.

Załóżmy na chwilę, że skorupa jest nieskończenie cienka, że zatem jej momenty bezwładności A_1 i C_1 są nieskończenie małe, wtedy:

$$m = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2}$$

$$k = \frac{2a^2}{a^2 + c^2}$$

$$\alpha = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} (C_2 - A_2)$$

$$n = \frac{A_2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} (C_2 - A_2)}{C_2 - A_2}$$

Lecz

$$A_2 = \frac{M_2}{5} (a^2 + c^2) \quad C_2 = \frac{M_2}{5} 2a^2$$

(gdzie naturalnie M_2 teraz oznacza masę całego ciała), a zatem:

$$n = \frac{a^2 + c^2}{a^2 - c^2} - \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} = \frac{1}{m} - m.$$

Równanie IX będzie teraz wyglądać w następujący sposób:

$$\lambda^4 - \omega^2 \lambda^2 \left[(k - m)^2 + \frac{2k}{m} \right] + \frac{\omega^4 \cdot k^2}{m^2} = 0.$$

Lecz

$$k - m = 1$$

zaś

$$\frac{k}{m} = \frac{2a^2}{a^2 - c^2}$$

$$(k - m)^2 + \frac{2k}{m} = \frac{5a^2 - c^2}{a^2 - c^2}$$

a więc otrzymamy w dalszym ciągu zamiast równania IX równanie:

$$\lambda^4 - \frac{(5a^2 - c^2)}{a^2 - c^2} \omega^2 \lambda^2 + \frac{4a^4 \omega^4}{(a^2 - c^2)^2} = 0.$$

Skąd:

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{2} \frac{5a^2 - c^2 \pm \sqrt{(5a^2 - c^2)^2 (a^2 - c^2)}}{a^2 - c^2}$$

Ten ostatni wzór po łatwych przekształceniach przechodzi na:

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{4} \left[1 \pm \sqrt{\frac{9a^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \right]^2.$$

Oczywiście, jeżeli

$$a > c$$

to oba pierwiastki równania są dodatnie i rzetelne.

Oznaczając spłaszczenie przez e , t. j. kładąc:

$$e = \frac{a - c}{a},$$

podstawiając e w co tylko otrzymany wzór na λ a wreszcie opuszczając kwadraty spłaszczenia jako kwadraty bardzo małej wielkości, otrzymamy:

$$\lambda_1^2 = \frac{\omega^2}{4} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{e}} \right)^2$$

$$\lambda_2^2 = \frac{\omega^2}{4} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{e}} \right)^2$$

Stąd zaraz widzimy, że peryody obu perturbacji w ruchu ciekłego ciała posiadającego te same spłaszczenie co ziemia byłyby kilkanaście razy krótsze od doby. A więc możemy powiedzieć, że o ile nie uwzględniamy odkształceń towarzyszących perturbacji, to obecność ciekłego jądra powinna się przyczynić do skrócenia jej peryodu. Zaraz przekonamy się o tem gruntowniej za pomocą następującego rozumowania. Założmy mianowicie, że grubość twardej skorupy, o której przed chwilą założyliśmy, że jest nieskończenie cienka, że ta grubość poczyna wzrastać, przyczem jednak budowa całego układu wciąż czyni zadość warunkom równowagi. Naturalnie zakładamy, że tak spłaszczenie jądra jak spłaszczenie skorupy są małymi wielkościami, albowiem zawsze nam chodzi tylko o takie wyniki, które mogą być następnie zastosowane do ziemi. Stosunki:

$$\frac{c}{a}, \frac{A_2}{C_2} \quad \text{i} \quad \frac{A_1}{C_1}$$

są mniejsze ale bliskie od jedności, w miarę tego jak grubość skorupy wzrasta, wszystkie te trzy stosunki wzrastają; gdy wreszcie jądro staje się nieskończenie małe i znika, to ze względu na to, że nieskończenie małe jądro musi mieć kształt kulisty (bo wedle znanych zasad teorii figur równowagi spłaszczenie jest tem mniejsze, im dana powierzchnia równowagi jest bliższa środka masy), dwa pierwsze sto-

sunki stają się równe jedności, zaś trzeci stosunek $\frac{A_1}{C_1}$ staje się równy stosunkowi $\frac{A}{C}$ momentów bezwładności całego układu, który to stosunek w przypadku ziemi wynosi $\frac{305}{306}$. Ale gdy stosunki $\frac{c}{a}$, $\frac{A_2}{C_2}$, $\frac{A_1}{C_1}$ wzrastają, to wielkości k , m i n zmniejszają się, a zatem możemy powiedzieć, że te wielkości zmniejszają się w miarę tego jak grubość skorupy wzrasta, przyczem k jest wciąż większe od jedności ale zbliża się do niej w miarę tego jak grubość skorupy wzrasta i staje się równe jedności, gdy jądro znika. Wielkości m i n są też mniejsze od jedności, jeżeli tylko skorupa nie jest bardzo cienka.²

A teraz gdy już wytworzyliśmy sobie pojęcie o liczebnych wartościach i charakterze zmian wielkości k , m i n , weźmy wzór X tj. wzór:

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{2} [m^2 + 2kn + k^2 \pm \sqrt{(m^2 + 2kn + k^2)^2 - 4k^2(m+n)^2}]$$

i przyjrzymy mu się bliżej. Oczywiście większy pierwiastek t. j. ten, który odpowiada sumie wyrazów stojących w nawiasie, wciąż zmniejsza się, gdy k , m i n zmniejszają się, a zatem możemy powiedzieć, że większy pierwiastek zmniejsza się w miarę tego jak skorupa staje się grubsza. Co do mniejszego pierwiastka t. j. co do pierwiastka odpowiadającego różnicy wyrazów stojących w nawiasie, to wiemy już z poprzednich rozumowań, że dla nieskończenie cienkiej skorupy ten pierwiastek jest paręset razy większy niż ω^2 , zaś dla nieskończenie małego jądra jest około 90000 razy mniejszy niż ω^2 , albowiem wtedy mamy:

$$\lambda_2^2 = \frac{\omega^2}{(305)^2}.$$

Ale chociaż znamy wartości tego drugiego pierwiastka odpowiadające skrajnym założeniom co do grubości skorupy, jednakże nie wiemy w jaki sposób ten pierwiastek zmienia się, gdy zakładamy różne grubości skorupy pośrednie między skrajnymi wartościami. Trzeba więc jeszcze zastanowić się nad temi zmianami. Otóż zauważmy przedewszystkiem, że ponieważ:

$$m = \frac{C_1 - A_1}{A_1 + z} + \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2}\right)^2 \cdot \frac{C_2 - A_2}{A_1 + z}$$

zaś

$$n = \frac{C_2 - A_2}{A_1 + z} - \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2}\right)^2 \frac{C_2 - A_2}{A_1 + z}$$

przeto mamy (ściśle) związek:

$$m + n = \frac{C - A}{A_1 + z}$$

gdzie C i A oznaczają momenty bezwładności całego układu.

Następnie zauważmy, że skoro tylko skorupa nie jest bardzo cienka a zatem A_1 nie jest bardzo małe wobec C_2 i A_2 , to wtedy w wyrażeniu na m drugi wyraz po prawej stronie jest z powodu czynnika $\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2}\right)^2$ bardzo mały wobec pierwszego, co zaś do wyrażenia na n , to w tem ostatniem drugi wyraz jest naturalnie zawsze bardzo mały wobec pierwszego, a zatem w pierwszym przybliżeniu można najczęściej te drugie wyrazy w wyrażeniach na m i n opuścić t. j. można przybliżenie położyć:

$$m = \frac{C_1 - A_1}{A_1 + z}$$

$$n = \frac{C_2 - A_2}{A_1 + z} = \frac{C - A}{A_1 + z} - m.$$

A zatem można przybliżenie położyć:

$$m^2 + 2kn + k^2 = \left(\frac{C_1 - A_1}{A_1 + z}\right)^2 - 2k \frac{C_1 - A_1}{A_1 + z} + k^2 + 2k \frac{C - A}{A_1 + z}$$

$$= \left(k - \frac{C_1 - A_1}{A_1 + z}\right)^2 + 2k \frac{C - A}{A_1 + z}.$$

Oznaczając zatem:

$$\left[k - \frac{(C_1 - A_1)}{A_1 + z}\right]^2 \text{ przez } \rho$$

$$2k \cdot \frac{C - A}{A_1 + z} \text{ przez } \sigma$$

otrzymamy przybliżenie:

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{2} [\rho + \sigma \pm \sqrt{(\rho + \sigma)^2 - \sigma^2}].$$

Korzystając z tego, że tak ρ jak σ są dodatnimi wielkościami, a zatem zawsze:

$$\rho + \sigma > \sigma$$

możemy rozwinąć pierwiastek za pomocą wzoru Newtona¹⁾ i otrzymamy:

¹⁾ Gdybyśmy we wzorze na λ^2 pozostawili ściśle wyrażenia, to także możnaby rozwinąć pierwiastek za pomocą wzoru Newtona, bo przy tych wartościach na k , m i n ,

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{2} (\rho + \sigma) \left\{ 1 \pm \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\rho + \sigma} \right)^2 - \frac{1}{2^3} \left(\frac{\sigma}{\rho + \sigma} \right)^4 - \dots \text{in inf.} \right] \right\}$$

A zatem mniejszy pierwiastek ma przybliżoną wartość:

$$\lambda_2^2 = \omega^2 \left[\frac{\sigma^2}{2^2 (\rho + \sigma)} + \frac{\sigma^4}{2^4 (\rho + \sigma)^3} + \dots \right]$$

Lecz dalsze wyrazy będą zazwyczaj tak małe, że można je opuścić, a zatem podstawiając napowrót wartość na ρ i σ otrzymamy przybliżenie:

$$\lambda_2^2 = \omega^2 \left[\frac{k(C - A)}{A_1 + \alpha} \right]^2 \cdot \frac{1}{\left[k - \frac{(C_1 - A_1)}{A_1 + \alpha} \right]^2 + 2k \frac{(C - A)}{A_1 + \alpha}}$$

t. j.

$$\lambda_2^2 = \frac{\omega^2 \cdot (C - A)^2}{\left[(A_1 + \alpha) - \frac{(C_1 - A_1)}{k} \right]^2 + \frac{2}{k} (C - A)(A_1 + \alpha)}$$

Jeżeli skorupa staje się grubszą a ciekłe jądro coraz mniejszem, to C_1 i A_1 rosną, α zmniejsza się, k zbliża się do jedności [C i A są naturalnie stałe], a zatem mianownik w wyrażeniu na λ_2^2 rośnie, zaś pierwiastek λ_2^2 zmniejsza się. Gdy jądro zupełnie znika, to otrzymujemy:

$$\lambda_2^2 = \frac{\omega^2 (C - A)^2}{(C - A)^2 + A^2}$$

Właściwie jeżeli jądro znika, powinniśmy otrzymać:

$$\lambda_2^2 = \frac{\omega^2 (C - A)^2}{A^2}$$

Ta niezgodność pochodzi stąd, że gdy jądro znika, to właściwie równania różniczkowe odnoszące się do jądra odpadają, więc odpadają równania III oraz pochodzące od nich równania VII, a zatem równanie IX, którego pierwiastkami λ_1^2 i λ_2^2 tu się zajmujemy, właściwie nie istnieje. [Już raz wyżej na str. 267 była o tem mowa]. Zresztą różnica między obu wartościami na λ_2^2 jest bardzo nieznaczna, albowiem:

$$\left(\frac{C - A}{A} \right)^2 = \frac{1}{(305)^2}$$

Znaleźliśmy zatem, że gdy skorupa nie jest bardzo cienka, to drugi pierwiastek równania IX zmniejsza się w miarę tego jak skorupa

które odpowiadają warunkom ziemskim, mamy zawsze:

$$k^2 + 2kn + m^2 > 2k(m + n).$$

staje się coraz grubsza, ale w ciągu całego rozumowania wciąż rozważaliśmy przypadek, w którym skorupa nie jest bardzo cienką. Należałoby więc osobno rozważać przypadek, gdy skorupa jest cienka, ale to nie jest konieczne, albowiem już z rozważania przypadku, w którym skorupa jest nieskończenie cienką, wiemy, że wtedy oba pierwiastki równania IX mają wartości większe niż ω^2 . Ponieważ zaś peryody perturbacji są odwrotnie proporcjonalne do pierwiastków λ_1 i λ_2 , przeto wnosimy, że skoro skorupa jest bardzo cienka, to wtedy peryod Eulerowskiej perturbacji jest bardzo krótki, krótszy nawet od jednej doby, im skorupa jest grubsza tem peryod tej perturbacji staje się dłuższy, wreszcie gdy ciekłe jądro całkiem znika, wtedy peryod Eulerowskiej perturbacji osiąga swą największą wartość równą 305 dniom.

Biorąc liczby odpowiadające warunkom ziemskim Hough¹⁾ oblicza, że gdyby gęstość skorupy i jądra były jednakowe, to peryod Eulerowskiej perturbacji wynosiłby:

36 dni	gdy	średnia	grubość	skorupy	równa	się	100 mil. ang.	²⁾
84	"	"	"	"	"	"	250	" "
149	"	"	"	"	"	"	500	" "
284	"	"	"	"	"	"	1000	" "
301	"	"	"	"	"	"	2000	" "

wreszcie 305 dni, gdy średnia grubość skorupy równa się około 3955 mil ang. t. j. średniemu promieniowi ziemskiemu.

Ale przedstawione tu zadanie Słudzkiego i Hougha jest bardzo specjalne i zawiera cały szereg ograniczających założeń; zakłada się n. p., że ciecz jądra jest pozbawiona lepkości, że ruch jej jest ruchem niewirowym. Co do tego drugiego ograniczenia, to należy zauważyć, iż właśnie w danym przypadku nie ma ono żadnego wpływu na rezultaty. Mianowicie w drugiej części swojej pracy na podstawie pewnych badań Poincarégo, zawartych w jego sławnej rozprawie o figurach równowagi cieczy [Acta Math. tom VII.] Hough dowodzi, że póki mamy do czynienia z ruchem cieczy nielepkiej mało różniącym się od czysto-obrotowego ruchu, to wszelki ruch dodatkowy cieczy daje się przedstawić jako suma dwóch ruchów, z których jeden nie posiada żadnego wpływu na ruch skorupy, a drugi posiada wpływ na ruch skorupy, ale jest właśnie tym samym niewirowym ruchem, który był tu rozpatrywany. Stąd widzimy, że zadanie Hougha i Słudzkiego wy-

¹⁾ Loc. cit. str. 478.

²⁾ Mila ang. = 1609,329 metrom.

starcza do zbadania wpływu cieczy nielepkiej na ruch skorupy dotąd, póki odstępstwa od czysto obrotowego ruchu są nieznaczne; ponieważ zaś, skoro chodzi o zastosowanie do ziemi, te odstępstwa są z pewnością bardzo małe, przeto zadanie Słudzkiego i Hougha jest pod pewnym względem zupełnie wystarczającym dla celów geofizyki. Ale, jak powiedzieliśmy, prace wspomnianych autorów nie uwzględniają lepkości wewnętrznej cieczy. Wprawdzie Słudzkiemu wydawało się, że ruch rozpatrywany w tem zadaniu mógłby istnieć w cieczy lepkiej, ale sam przyznaje ¹⁾, że wtedy warunki graniczne nie mogłyby być spełnione. W rzeczywistości zaś w cieczy lepkiej mielibyśmy inny ruch niż w cieczy pozbawionej lepkości i trzeba jeszcze zastanowić się nad pytaniem, o ile dzięki lepkości ruch cieczy a względnie ruch skorupy może ulec pewnym modyfikacyom.

Jeżeli wewnętrzna ciecz jest lepka, to perturbacya nie może być ściśle peryodyczną, albowiem ruch skorupy i ruch jądra muszą z czasem wyrównywać się i zdążać do ruchu obrotowego na podobieństwo obrotu sztywnego ciała naokoło pewnej stałej osi. Wskutek tego amplituda zmian geograficznej szerokości musi z czasem zmniejszać się, o ile nie zdarzają się nowe jakieś przesunięcia mas w skorupie, sprawiające nowe perturbacye w ruchu. Chcąc jednak dokładnie zbadać charakter perturbacyi w razie, gdy wewnętrzna ciecz jest lepka, należałoby rozwiązać następujące analityczne zadanie.

Załóżmy, że rzuty prędkości cząstek skorupy na osie ruchome są jak wprzód:

$$\begin{aligned}u &= qz - ry \\v &= rx - pz \\w &= py - qx.\end{aligned}$$

Co do rzutów prędkości cieczy na też same osie ruchome, to można napisać je w kształcie:

$$\begin{aligned}u &= qz - ry + u' \\v &= rx - pz + v' \\w &= py - qx + w',\end{aligned}$$

gdzie u' , v' i w' oznaczają rzuty względnej prędkości cieczy na osie ruchome. Dla porównania wskażemy, że te rzuty w poprzednim zadaniu były:

$$u' = -\frac{2a^2}{a^2 + c^2} \omega_2 z + \omega_3 y$$

¹⁾ Loc. cit. Bull. 1895 r. str. 306.

$$v' = \frac{2a^2}{a^2 + c^2} \omega_1 z - \omega_3 x$$

$$w' = -\frac{2c^2}{a^2 + c^2} (\omega_1 y - \omega_2 x).$$

W razie gdy ciecz jest lepka, prędkości względne czynią zadość równaniom różniczkowym:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw'}{dt} - 2r v' + 2q w' - y \frac{dr}{dt} + z \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k \nabla^2 u' \\ \frac{dv'}{dt} - 2p w' + 2r u' - z \frac{dp}{dt} + x \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \nabla^2 v' \\ \frac{dw'}{dt} - 2q u' + 2p v' - x \frac{dq}{dt} + y \frac{dp}{dt} &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + k \nabla^2 w' \end{aligned} \right\} \text{XI}$$

oraz:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0,$$

przyczem:

$$\frac{du'}{dt} = \frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} + w' \frac{\partial u'}{\partial z}$$

i t. d.

Równanie ciągłości napisaliśmy w kształcie właściwym cieczy nieściśliwej, albowiem można zawsze wprowadzić założenie, że ciecz jest nieściśliwa, bo choć naturalnie warunki zadania i rezultaty są inne, jeżeli ciecz jest ściśliwa, a inne jeżeli ciecz jest nieściśliwa, jednak dla ruchu skorupy, o który nam głównie chodzi, te różnice mają małe znaczenie.

W powyższych wzorach oznaczyliśmy przez k współczynnik wewnętrznej tarcia a raczej iloraz tego współczynnika na gęstość cieczy. W zastosowaniu do ziemi należałoby sobie wyobrazić ten współczynnik jako bardzo wielki. Dalej w tychże wzorach figuruje symbol φ wprowadzony dla krótkości, mamy zaś:

$$\varphi = V - \frac{P}{\rho} + \psi,$$

gdzie V oznacza potencjał przyciągania

„ P „ ciśnienie wewnątrz cieczy

„ ρ „ gęstość cieczy

zaś ψ ... oznacza potencjał sił odśrodkowych, mianowicie:

$$2\psi = x^2(q^2 + r^2) + y^2(p^2 + r^2) + z^2(p^2 + q^2) - 2xyprq - 2xzpr - 2yzqr.$$

Ze względu na to, że należy sobie wyobrazić wewnętrzną ciecz jako lepką, bardzo lepką, trzeba przypuścić, że zupełnie przylega do wewnętrznej powierzchni skorupy, a zatem w tej powierzchni prędkości względne powinny być równe zeru. Mielibyśmy więc warunek:

$$u' = v' = w' = 0$$

w wewnętrznej powierzchni skorupy.

Naturalnie równania, którym czynią zadość momenty ilości ruchu, pozostają w swej sile, mamy więc tak samo jak w poprzednim zadaniu:

$$\text{XII} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dH_x}{dt} - H_y r + H_z q = 0 \\ \frac{dH_y}{dt} - H_x p + H_z r = 0 \\ \frac{dH_z}{dt} - H_x q + H_y p = 0, \end{array} \right.$$

gdzie, oznaczając jak wprzódy momenty bezwładności całego układu przez A i C ,

$$H_x = A p + m_x$$

$$H_y = A q + m_y$$

$$H_z = C r + m_z$$

zaś

$$m_x = \iiint \rho (w'y - v'z) dx dy dz$$

$$m_y = \iiint \rho (u'z - w'x) dx dy dz$$

$$m_z = \iiint \rho (v'x - u'y) dx dy dz,$$

przyczem należy rozciągnąć całkowanie do całej przestrzeni zajętej przez ciecz.

Równania XII mają zawsze jedną całkę, mianowicie:

$$\text{XIII} \quad H_x^2 + H_y^2 + H_z^2 = \text{stałej.}$$

Gdyby momenty ruchu względnego m_x , m_y , m_z były stałe, to mielibyśmy jeszcze drugą całkę równań XII, ale właśnie w tym przypadku nie można zrobić tego założenia, przeciwnie z natury zadania wynika, że momenty ruchu względnego m_x , m_y , m_z muszą być funkcjami czasu. Mamy więc razem 7 równań różniczkowych XI i XII a tylko jedną znaną całkę, mianowicie całkę XIII. Chcąc całkować ten system równań musielibyśmy najpierw ogólnie zcałkować równania XI, uważając w nich p , q i r za pewne dane choć tymczasem jeszcze nieokreślone funkcje czasu, następnie mając już u' , v' i w' jako pewne funkcje czasu, współrzędnych i funkcji p , q , r należałoby najpierw poddać je

warunkom granicznym w wewnętrznej powierzchni skorupy, następnie obliczyć momenty m_x , m_y i m_z , a wreszcie podstawić je w równania XII. Po takim podstawieniu równania XII nie zawierałyby innych zmiennych jak tylko p , q , r , a zatem całkując te trzy równania otrzymalibyśmy p , q i r jako pewne funkcje czasu a jednocześnie otrzymalibyśmy wszystkie dane potrzebne do określenia charakteru perturbacji.

Leż oczywiście całkowanie równań XI napotyka na ogromne trudności nawet wtedy, gdy poczynimy niektóre ułatwiające a w danym razie dozwolone założenia. Tak n. p. ze względu na to, że u' , v' , w' i ich pochodne muszą być małymi wielkościami, można opuścić kwadraty i iloczyny tych prędkości i ich pochodnych a zatem można zamiast

$$\frac{du'}{dt} = \frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{du'}{dx} + v' \frac{\partial v'}{\partial y} + w' \frac{\partial w'}{\partial z}$$

i t. d.

wziąć po prostu $\frac{\partial u'}{\partial t}$ i t. d.

Następnie ze względu na to, że p i q są to bardzo małe wielkości możnaby opuścić p^2 , q^2 oraz pq . Ale pomimo tych ułatwień zadanie pozostaje jeszcze tak trudne, że nie możemy kusić się o ściśle jego rozwiązanie i musimy zadowolić się niektórymi ogólnymi uwagami. Powiedzieliśmy wyżej, że ruch skorupy nie mógłby być ściśle peryodycznym; natomiast z natury rzeczy wynika, że p , q i r muszą być funkcjami o charakterze podobnym do charakteru funkcji:

$$\text{stała} + e^{-\mu t} (a \cos rt + b \sin rt).$$

Dalej wiemy, że z powodu lepkości cieczy, którą należy sobie wyobrazić jako bardzo wielką, nawet na początku perturbacji prędkości względne u' , v' i w' a co zatem idzie i momenty ruchu względnego m_x , m_y , m_z musiałyby być „ceteris paribus“ znacznie mniejsze niż wtedy, gdy ciecz jest zupełnie pozbawiona lepkości, stąd wnosimy, że argument r musiałyby „ceteris paribus“ znacznie mniej różnić się od $\frac{C-A}{A} \omega$ aniżeli w przypadku cieczy nielepkiej, a zatem wielkość odpowiadająca peryodowi Eulerowskiej perturbacji musiałaby być o wiele bliższą do 305 dni aniżeli w takim razie, gdyby ciecz była zupełnie pozbawiona lepkości. Można nawet zupełnie stanowczo twierdzić, że peryod Eulerowskiej perturbacji musiałby być tem większy t. j. ściślej

mówiąc tem bliższy¹⁾ do 305 dni im lepkość cieczy jest większa. A więc n. p. gdy wedle Hougha przy skorupie, której grubość wynosi 250 mil ang., peryod Eulerowskiej perturbacji wynosi 84 dni, jeżeli ciecz jest pozbawiona lepkości; to w przypadku cieczy lękiej ten peryod wynosiłby o wiele więcej niż 84 dni i byłby tem bliższy do 305 dni im lepkość cieczy byłaby większa. Co do współczynników w rodzaju μ , oznaczających prędkość zanikania ruchu względnego, to te naturalnie muszą być tem większe im większy jest współczynnik wewnętrznej tarcia k ; dla nieskończenie wielkiego k współczynniki w rodzaju μ musiałyby też być nieskończenie wielkimi.

Całą kwestyę wpływu wewnętrznej cieczy na peryod Eulerowskiej perturbacji jądra można przedstawić w następujący sposób. Pomyślmy sobie, coby się stało, gdyby wcale nie było wewnętrznej cieczy. Peryod perturbacji musiałby zawsze być mniejszy niż 305 dni, bo dla samej skorupy stosunek: $\frac{C-A}{A}$ musi być koniecznie mniejszy niż dla całej ziemi, jeżeli tylko budowa ciała przynajmniej przybliżenie czyni zadość warunkom równowagi. Ale Eulerowska perturbacja polega na pewnych peryodycznych oscylacjach skorupy naokoło głównych równikowych osi. Jeżeli wewnątrz skorupy znajduje się lepka ciecz, to wpływ jej na peryodyczne oscylacje skorupy musi przedewszystkiem zasadać się na pewnego rodzaju neutralizowaniu (Dämpfung) ruchu, które wywołuje przedłużenie peryodu oscylacji. Największą możliwą wartość 305 dni peryod osiąga wtedy, gdy ciecz jest nieskończenie lepka.

Stąd wnosimy, że można ogólnie powiedzieć, iż gdy jądro jest zapełnione cieczą czy to lepka, czy nie lepka, to peryod Eulerowskiej perturbacji powinien być krótszy ale nie dłuższy od 305 dni. Naturalnie ten wniosek istnieje tylko dotąd, dopóki trwamy przy założeniu, że skorupa jest absolutnie niepodatna, albowiem jeżeli założymy, że skorupa może się odkształcać, to wtedy postać rzeczy zaraz się odmieni.

Wzory, którymi tu posługiwaliśmy się, dają możność także ocenić wpływ a raczej pewną stronę wpływu oceanów na perturbacje w ruchu obrotowym ziemi. Jeżeli założymy, że powierzchnia oceanu się nie odkształca, to wpływ oceanu na perturbację będzie oczywiście zupełnie takisam jak wpływ ciekłego nieodkształcającego się jądra, a zatem pomijając wpływ odkształceń, którymi będziemy się zajmować w dalszych rozdziałach, możemy na podstawie poprzednich

¹⁾ Należy pamiętać o tem, że systemy rozpatrywane w obecnym rozdziale nie odkształcają się, że zatem momenty bezwładności skorupy i jądra pozostają pomimo wewnętrznych ruchów niezmiennione.

wzorów ocenić wpływ względnego ruchu oceanów na perturbację, naturalnie tylko tego względnego ruchu, który jest spowodowany przez samą perturbację. Podobnie jak ciekłe jądro, oceany i, powiedzmy, atmosfera, jako ciała nieszttywne i nieszttywnie bo tylko przez pośrednictwo pewnych taré połączone ze ziemią, oczywiście słaby tylko przyjmują udział w perturbacji i jakby przyzostają wobec ruchów ziemi sprawionych przez perturbację. W ten sposób powstaje pewien ruch względny, który też przed chwilą nazwaliśmy ruchem względnym spowodowanym przez perturbację. Momenty tego ruchu: m_x , m_y , m_z są zawsze bardzo małe wobec momentów ilości ruchu całego systemu, albowiem masa oceanów i atmosfery jest mała wobec masy całego układu.

Rzeczywiście masa oceanów równa się zaledwie $\frac{1}{4600}$ masy ziemi, zaś względne prędkości pochodzące z przyzostawania oceanów wobec perturbacyjnego ruchu ziemi są wielkościami tego samego rzędu co Rp , Rq i $R(\omega - r)$, gdzie p , q , r i ω mają te same co wprzódy znaczenie, zaś R oznacza średni promień ziemi. Oznaczmy jeszcze przez M' masę oceanów, wtedy momenty m_x , m_y i m_z są wielkościami tego samego rzędu, co:

$$M' R^2 p, \quad M' R^2 q \dots$$

Te wielkości stoją w równaniach obok momentów ilości ruchu całego układu t. j. obok wielkości Ap , Aq i Cr czyli obok wielkości tego samego rzędu, co

$$\frac{2}{5} M \cdot R^2 p, \quad \frac{2}{5} M \cdot R^2 q.$$

Ponieważ $M = 4600 M'$, więc momenty m_x , m_y i t. d. są po kilka tysięcy razy mniejsze od momentów Ap , Aq , nie mówiąc już o momencie Cr , który jest co najmniej kilka milionów razy większy niż m_x , m_y ...

Wskutek tego ten względny ruch oceanów i atmosfery ma wprawdzie taki sam wpływ na perturbację jak względny ruch ciekłego jądra, ale wpływ ten jest bardzo nieznaczny, podczas gdy wpływ względnego ruchu ciekłego jądra mógłby być bardzo znacznym, gdyby tylko to ostatnie miało duże rozmiary.

Ale prócz względnych ruchów, spowodowanych przez samą perturbację, w oceanach i atmosferze nie tylko mogą istnieć ale rzeczywiście istnieją pewne ruchy o wiele zresztą od tamtych prędsze. Mówimy tu o prądach morskich i stawiamy pytanie, w jaki sposób te prądy oddziaływują na perturbację w ruchu obrotowym ziemi.

Teorią wpływu prądów morskich (i atmosferycznych) na ruch obrotowy ziemi zajmował się Vito Volterra w szeregu pięknych i interesujących rozpraw. Jego badania obejmują znacznie obszerniejszy zakres aniżeli ten, który jest potrzebny do naszych celów. Dlatego też skorzystamy tylko z niektórych rezultatów, otrzymanych przez Vita Volterre¹⁾. Oznaczmy momenty prądów morskich przez m_x , m_y i m_z , momentów prądów atmosferycznych nie będziemy osobno uwzględniać, bo wszystko, co powiemy o momentach prądów morskich będzie naturalnie stosować się także do momentów prądów atmosferycznych.

Prędkości prądów morskich wyjątkowo dochodzą do trzech mil morskich na godzinę, zazwyczaj są znacznie mniejsze, najczęściej nie dochodzą nawet do jednej mili morskiej na godzinę. Wiadomo przytem, że najznaczniejsze prędkości przytrafiają się tylko na samej powierzchni albo w pobliżu powierzchni, a im dalej od powierzchni tem są zazwyczaj mniejsze. Wogóle prądy nie sięgają głęboko, zaś wielkie głębiny oceanów są wypełnione wodą nie posiadającą prawie żadnego ruchu. Wskutek tego średnia absolutna prędkość ruchu oceanicznych wód jest bardzo nieznaczna, prawdopodobnie nie przewyższa jakiej jednej dziesiątej mili morskiej na godzinę, co mniej więcej odpowiada pięciu centymetrom na sekundę²⁾.

Na podstawie karty prądów morskich w atlasie Berghausa³⁾ oraz za pomocą pewnych przybliżonych rachunków, których tu powtarzać nie będę, znajduję, że absolutna wartość momentu m_x (co do znaku m_x jest odjemne⁴⁾), jeżeli kierunek, w którym się ziemia obraca uważamy za dodatni) co najwyżej wynosi około:

$$\frac{5 \cdot M_1 \cdot R}{7} \quad \text{w jedn. } C. G. S.,$$

gdzie przez M_1 oznaczyliśmy masę oceanu, zaś przez R jak zwykle długość średniego promienia ziemi. Oczywiście m_x i m_y są wielkościami

¹⁾ Prace V. Volterry, o których mówimy, są następujące: najpierw 7 małych rozprawek, zawartych w XXX tomie Atti della reale Accad. di Scienze di Torino, dalej „Sulla teoria dei movimenti... etc...” Astron. Nachr. tom 138. Nr. 3291—3292, „Sulle rotazioni permanenti... etc...” Annali di matematica pura ed applicata tom 23, „Sulla rotazione di un corpo... etc...” w tem samym wydawnictwie tom 24., wreszcie „Sulla rotazione di un corpo... etc...” Rendiconti della R. Accad. dei Lincei. ser. V. tom IV. 2 sem.

²⁾ Właściwie trochę więcej niż 5 cent. na sek., bo mila morska = 1852 metrom.

³⁾ Berghaus'. Physik. Atlas, nowe wydanie, karta Nr. 21.

⁴⁾ Absolutne średnie wartości i absolutne skrajne wartości momentów m_x i m_y w wypadku ziemi powinny być mniejsze od absolutnej wartości momentu m_z .

tego samego rzędu co m_z . Porównajmy tę wartość z absolutną wartością momentu obrotowego ziemi $C\omega$ oraz z absolutną wartością momentu ruchu perturbacyjnego:

$$A\sqrt{p^2 + q^2}.$$

Wartość absolutną $C\omega$ można napisać w następującym kształcie:

$$C\omega = \frac{2}{5} M \cdot R \cdot 46500 \text{ w jedn. } C \cdot G \cdot S.$$

gdzie M oznacza masę oceanu.

Ponieważ:

$$M = 4883 M_1,$$

przeto stosunek między $C\omega$ i absolutną wartością momentu m_z wynosi przybliżenie:

$$127\,140\,000.$$

Z drugiej strony:

$$\frac{A\sqrt{p^2 + q^2}}{C \cdot \omega} = \frac{305}{306} \cdot tg \sigma,$$

gdzie σ oznacza kąt między osią główną i osią chwilowego obrotu. Wnosząc z obserwowanej amplitudy zmian geograficznej szerokości, kąt σ nie przewyższa $\frac{1}{3}$ sekundy, przeto można przyjąć

$$tg \sigma = \sigma$$

i napisać:

$$\frac{A\sqrt{p^2 + q^2}}{C \cdot \omega} = \frac{305}{306} \cdot \frac{2\pi}{360 \times 60 \times 60 \times 3} = \frac{1}{620770}.$$

Ponieważ $C\omega$ jest 620770 razy większe od $A\sqrt{p^2 + q^2}$, zaś 127 140 000 razy większe od absolutnej wartości momentu prądów m_z , przeto $A\sqrt{p^2 + q^2}$ jest około 205 razy większe od absolutnej wartości momentu m_z .

Prądy morskie podlegają pewnym corocznym zmianom, właściwie więc podana tu hypotetyczna wartość momentu m_z ma znaczenie pewnej średniej. Ocenie znaczenie tych corocznych zmian momentów bardzo trudno, w każdym razie atoli, ponieważ coroczne zmiany w rozkładzie prądów są nieznaczące i co więcej nie mogą głęboko sięgać; więc należy uważać amplitudy corocznych zmian momentów m_x, m_y, m_z za wielkości znacznie mniejsze od samych momentów.

Tu t. j. w niniejszej pracy będziemy najpierw rozważać wpływ¹⁾ prądów morskich przy założeniu, że m_x , m_y i m_z są stałe. Tego rodzaju założenie jest równoznaczne założeniu, że pomijamy coroczne zmiany prądów i uważamy je za stacjonarne. W dalszym ciągu rozważymy także wpływ peryodycznych zmian momentów m_x , m_y i m_z . Gdy m_x , m_y i m_z są stałe, to równania XII mają dwie całki, mianowicie:

$$\text{XIII} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{oraz} \\ Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{stałe} \\ H_x^2 + H_y^2 + H_z = \text{stałe} \end{array} \right.$$

przyczem

$$\begin{aligned} H_x &= Ap + m_x \\ H_y &= Bq + m_y \\ H_z &= Cr + m_z. \end{aligned}$$

Ponieważ równania XII mają w tym razie dwie całki, więc dalsze całkowania sprowadzają się do kwadratur, zaś funkcyje p , q i r dają się wyrazić przez funkcyje eliptyczne. Cały proces całkowania równań XII przy m_x , m_y i m_z stałych jest wyłożony u Vita Volterry w wyżej cytowanych pracach. Prace te zawierają też geometryczną interpretacyę ruchu, analizę warunków trwałości ruchu i t. d. Ale ponieważ rozważanie ogólnego przypadku, w którym $A \geq B$, jest dla naszych celów zbyt trudne, więc ograniczymy się do rozważania przypadku, gdy $A = B$, przyczem postaramy się o ile można uprościć analizę. Zauważmy najpierw, że gdy $A = B$, to wtedy obracając osie x i y naokoło osi z zawsze możemy sprawić to, że albo m_x albo m_y zniknie, mianowicie jeżeli obrócimy osie tak, aby płaszczyzna xz była równoległa do kierunku wypadkowego momentu:

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2},$$

to $m_y = 0$, gdy zaś obrócimy je tak, aby do kierunku wypadkowego momentu równoległą była płaszczyzna yz , to $m_x = 0$. Weźmy n. p.

$$m_y = 0$$

a prócz tego dla ułatwienia zadania załóżmy raz, że:

$$m_x = 0, \quad m_z \geq 0,$$

¹⁾ Mówimy tu o wpływie prądów na perturbacyę Eulerowską. Ogólniejszej kwestyi o wpływie prądów na ruch obrotowy ziemi nie będziemy tu poruszać jako niemającej bezpośredniego związku z naszym właściwym zadaniem. Zresztą kwestya ta jest zupełnie opracowana w powyżej cytowanych rozprawach V. Volterry.

a drugi raz, że:

$$m_x = 0, \quad m_z \geq 0.$$

Bierzemy najpierw pierwszy przypadek t. j. przypadek, gdy:

$$m_x = 0, \quad m_y = 0, \quad m_z = \text{stałe}.$$

Ponieważ przytem:

$$B = A,$$

więc

$$H_x = Ap, \quad H_y = Aq, \quad H_z = Cr + m_z,$$

zaś równania XII przybierają następującą postać:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + qr(C - A) + qm_z &= 0 \\ A \frac{dq}{dt} - pr(C - A) - pm_z &= 0 \\ C \frac{dr}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad \text{XII bis.}$$

Stąd najpierw

$$r = \text{const.}$$

Naturalnie możemy położyć:

$$r = \omega,$$

gdzie ω jak zwykle oznacza kątową prędkość dziennego obrotu ziemi.

Pozostałe dwa pierwsze równania XII bis przechodzą na:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \lambda q &= 0 \\ \frac{dq}{dt} - \lambda p &= 0 \end{aligned}$$

gdzie:

$$\lambda = \left[\frac{C - A}{A} + \frac{m_z}{A\omega} \right] \omega.$$

A więc mamy:

$$\begin{aligned} p &= K \cos \lambda(t - t_0) \\ q &= K \sin \lambda(t - t_0), \end{aligned}$$

t. j. mamy najzwyczajniejszą Eulerowską perturbację ale o zmienionym peryodzie, bo

$$\lambda = \left[\frac{C - A}{A} + \frac{m_z}{A\omega} \right] \omega,$$

nie zaś

$$\lambda = \frac{C - A}{A} \cdot \omega.$$

Ale w tej chwili spostrzegamy, że zmiana peryodu jest zupełnie znikomą, albowiem wedle poprzednich rachunków i rozumowań stosunek: $\frac{m_x}{A\omega}$ jest ułamkiem o liczniku jednośc i mianowniku wynoszącym co najmniej jakie 120 milionów, a zatem jest to liczba zupełnie znikająca wobec liczby:

$$\frac{C - A}{A} = \frac{1}{305}.$$

Na to, aby peryod perturbacyi stał się równy Chandlerowskiemu peryodowi potrzeba, aby było:

$$\frac{C - A}{A} + \frac{m_x}{A\omega} = \frac{1}{430}$$

t. j. aby

$$\frac{m_x}{A\omega} = - \frac{(430 - 305)}{305 \times 430} = (\text{około}) - \frac{1}{1037}$$

co jest zupełnie niemożliwe.

Bierzemy teraz z kolei drugi przypadek t. j. przypadek, gdy

$$m_x = \text{stałej}, \quad m_y = 0, \quad m_z = 0.$$

Równania XII przybiorą teraz postać następującą:

$$\text{XII ter} \quad \left\{ \begin{array}{l} A \frac{dp}{dt} + q r (C - A) = 0 \\ A \frac{dq}{dt} - p r (C - A) + m_x r = 0 \\ C \frac{dr}{dt} - m_x q = 0. \end{array} \right.$$

Zaś całki XIII będą teraz miały następujący kształt:

$$\text{XIII bis} \quad \left\{ \begin{array}{l} A(p^2 + q^2) + C r^2 = 2h \\ (A p + m_x)^2 + A^2 q^2 + C^2 r^2 = G^2, \end{array} \right.$$

gdzie h i G^2 są to pewne stałe.

Drugie z pomiędzy równań XIII bis może być napisane w kształcie

$$A^2(p^2 + q^2) + C^2 r^2 + 2A p m_x = G^2 - m_x^2.$$

Jeżeli wyrugujemy zeń $p^2 + q^2$ za pomocą pierwszego równania XIII bis, to otrzymamy:

$$A(2h - Cr^2) + C^2 r^2 + 2Ap m_x = G^2 - m_x^2,$$

skąd znowu

$$p = \frac{G^2 - m_x^2 - 2Ah - C(C - A)r^2}{2A m_x}.$$

Jeżeli

$$m_x = 0,$$

to wtedy:

$$G^2 - 2Ah = C(C - A)r^2$$

przeto:

$$G^2 - 2Ah$$

jest wtedy wielkością koniecznie dodatnią, ponieważ zaś, jak to się wyżej okazało z naszych rachunków, m_x musi być bardzo małe wobec momentów Cr i $A\sqrt{p^2 + q^2}$ i t. d., więc:

$$G^2 - 2Ah - m_x^2$$

będzie też dodatnią wielkością.

Położmy w dalszym rachunku dla symetrii:

$$G^2 - m_x^2 = D^2 \mu^2$$

$$2h = D\mu^2,$$

a więc nowe stałe D i μ są związane z poprzednimi w taki sposób, że

$$D = \frac{G^2 - m_x^2}{2h}$$

$$\mu^2 = \frac{4h^2}{G^2 - m_x^2}.$$

Podstawiając D i μ zamiast poprzednich stałych, otrzymamy:

$$p = \frac{(D - A)D\mu^2 - (C - A)Cr^2}{2A m_x}.$$

Lecz:

$$q^2 = \frac{2h - Cr^2}{A} - p^2$$

a zatem:

$$q^2 = \frac{D\mu^2 - Cr^2}{A} - \frac{[(D - A)D\mu^2 - (C - A)Cr^2]^2}{4A^2 m_x^2}.$$

Kładąc dla krótkości:

$$\begin{aligned} C(C - A) &= N_1 \\ D C(D - A)(C - A)\mu^2 - 2A C m_x^2 &= N_2 \\ D^2(D - A)^2\mu^4 - 4A D m_x^2\mu^2 &= N_3 \end{aligned}$$

otrzymamy:

$$\text{XIV} \quad 4A^2 m_x^2 q^2 = -N_1^2 \left[r^4 - \frac{2N_2}{N_1^2} \cdot r^2 + \frac{N_3^2}{N_1^2} \right].$$

Kładąc znowu:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{N_2 - \sqrt{N_2^2 - N_1^2 N_3^2}}{N_1^2} \\ \omega_2^2 &= \frac{N_2 + \sqrt{N_2^2 - N_1^2 N_3^2}}{N_1^2} \end{aligned}$$

możemy napisać poprzednie wyrażenie w kształcie:

$$4A^2 m_x^2 q^2 = -N_1^2 (r^2 - \omega_1^2)(r^2 - \omega_2^2).$$

Gdy m_x jest małą wielkością, to N_2 jest dodatnie, $N_2^2 - N_1^2 N_3^2$ jest także dodatnie, a zatem ω_1^2 i ω_2^2 są dodatnimi rzetelnymi wielkościami, przyczem

$$\omega_2 > \omega_1.$$

Weźmy teraz trzecie z pomiędzy równań różniczkowych XII *ter.* t. j. równanie:

$$C \frac{dr}{dt} - m_x q = 0.$$

Podstawmy w to równanie zamiast q jego wartość z równania XIV, otrzymamy wtedy równanie:

$$2A C \cdot \frac{dr}{dt} = N_1 \sqrt{-(\omega_1^2 - r^2)(\omega_2^2 - r^2)}.$$

Położmy teraz:

$$k^2 = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2}.$$

Aby pierwiastek był rzetelny, trzeba, aby r^2 było wciąż zawarte między ω_1^2 i ω_2^2 t. j. trzeba, aby ciągle było:

$$\omega_1^2 < r^2 < \omega_2^2.$$

W dalszym ciągu użyjemy przekształcenia:

$$r^2 = \omega_2^2 (1 - k^2 u^2),$$

skąd

$$dr = k^2 \omega_2 \cdot \frac{u du}{\sqrt{1 - k^2 u^2}}$$

zaś:

$$\sqrt{-(\omega_1^2 - r^2)(\omega_2^2 - r^2)} = k^2 \omega_2^2 u \sqrt{1 - u^2},$$

a więc otrzymamy:

$$\frac{2A \cdot C}{\omega_2} \cdot \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}} = N_1 dt.$$

Skąd kładąc jeszcze:

$$\frac{N_1 \omega_2}{2AC} (t - t_0) = \tau$$

gdzie t_0 jest to zupełnie dowolna stała, otrzymamy:

$$u = sn \tau.$$

Lecz:

$$r^2 = \omega_2^2 (1 - k^2 u^2) = \omega_2^2 (1 - k^2 sn^2 \tau),$$

a zatem wedle znanych związków między funkcjami eliptycznymi $sn \tau$, $cn \tau$ i $dn \tau$

$$r = \omega_2 \cdot dn \tau.$$

Stąd znowu na mocy znanych własności funkcji eliptycznej $dn \tau$ wnosimy, że r nigdy nie staje się zerem. Z drugiej strony, podstawiając tę wartość na r we wzory na p i q , otrzymamy te ostatnie zmienne, wyrażone przez funkcje eliptyczne. Podstawień tych nie potrzebujemy wykonywać, zauważymy tylko, że ponieważ r jest proporcjonalne do $dn \tau$, zaś p i q jako dające się wyrazić przez r tem samem dają się wyrazić przez $dn \tau$, przeto na mocy znanego wzoru:

$$dn(\tau + 2K) = dn(\tau)$$

wszystkie trzy zmienne p , q i r są funkcjami peryodycznymi zmiennej τ o peryodzie $2K$, przyczem:

$$2K = \pi \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots \text{in inf.} \right]$$

W ten sposób peryod perturbacji jest $2K$, jeżeli liczymy czas w jednostkach zmiennej τ . Aby zbadać wartość tego peryodu, trzeba zbadać moduł k . Poprzednio założyliśmy, że

$$k^2 = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{2 \sqrt{N_2^2 - N_1^2 N_3^2}}{N_2 + \sqrt{N_2^2 - N_1^2 N_3^2}}. \quad \text{XIV}$$

Ale:

$$N_2^2 - N_1^2 N_3^2 = 4A C^2 m_x^2 [A m_x^2 + D(C - A)(C - D) \cdot \mu^2]$$

zaś

$$N_2 = D \cdot C \cdot (D - A)(C - A) \mu^2,$$

A zatem N_2 jest niezależne od m_x , podczas gdy licznik wyrażenia na k^2 jest proporcjonalny do m_x i znika razem z m_x t. j. mamy:

$$k = 0, \quad \text{gdy } m_x = 0.$$

Wszystkie te wzory zawierają nieokreślone dotąd stałe D i μ^2 . Oczywiście D jest pewnym momentem bezwładności, μ pewną kątową prędkością. D jest większe niż A , ale trochę mniejsze niż C . Ponieważ dla $m_x = 0$

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 = \frac{D \cdot C \cdot (D - A) (C - A) \mu^2}{C^2 (C - A)^2}$$

przyczem wspólną wartością na ω_1 i ω_2 jest ω t. j. kątowna prędkość dziennego obrotu ziemi, przeto można napisać:

$$\text{XV} \quad \omega^2 = \frac{D}{C} \cdot \frac{D - A}{C - A} \cdot \mu^2$$

a dalej można napisać:

$$N_2^2 - N_1^2 N_3^2 = 4A^2 C^2 m_x^2 \left[m_x^2 + \frac{C}{A} (C - A)^2 \frac{(C - D)}{D - A} \cdot \omega^2 \right].$$

Z drugiej strony mamy:

$$\begin{aligned} N_2^2 &= D \cdot C (D - A) (C - A) \mu^2 - 2A C m_x^2 \\ &= C^2 (C - A)^2 \omega^2 - 2A C m_x^2 \\ &= N_1^2 \omega^2 - 2A C m_x^2. \end{aligned}$$

A teraz zauważmy, że wedle poprzednich obliczeń m_x jest co najmniej 8 do 9 milionów razy mniejsze niż $C\omega$ [a właściwie z pewnością kilkaset milionów razy mniejsze niż $C\omega$], ponieważ zaś

$$A\omega : C\omega = 305 : 306,$$

więc $(C - A)\omega$ jest co najmniej około 30 000 razy większe niż m_x .

Dalej zauważmy, że: $\frac{C}{A} \cdot \frac{C - D}{D - A}$ jest wielkością tego samego rzędu¹⁾ co stosunek:

¹⁾ Rzeczywiście, gdy założymy, że $m_x = 0$, to wtedy ze wzorów na p , q i r otrzymamy znane wzory odnoszące się do Eulerowskiej perturbacji w ruchu absolutnie sztywnego obrotowego ciała. Mianowicie podstawiając:

$$dn^2\tau = 1 - k^2 sn^2\tau$$

i przechodząc do granic dla $m_x = 0$, otrzymamy:

$$k = 0, \quad dn\tau = 1, \quad sn\tau = \sin\tau, \quad cn\tau = \cos\tau$$

a dalej:

$$r = \text{stałe} = \omega, \quad p = -\mu \sqrt{\frac{D}{A} \cdot \frac{C - D}{C - A}} \cdot \cos 2\tau, \quad q = -\mu \sqrt{\frac{D}{A} \cdot \frac{C - D}{C - A}} \cdot \sin 2\tau$$

$$\frac{p^2 + q^2}{\omega^2} = tg^2 \sigma.$$

Już wyżej znaleźliśmy, że liczebna wartość $tg \sigma$ zapewne nie przewyższa:

$$\frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 3}$$

a zatem $\frac{C}{A} \cdot \frac{(C-D)}{(D-A)}$ będzie również liczebnie bardzo małą wielkością.

Która z tych dwóch wielkości

$$\frac{m_x^2}{(C-A)^2 \omega^2} \quad \text{i} \quad \frac{C}{A} \frac{(C-D)}{D-A}$$

będzie mniejszą, o tem trudno rozstrzygnąć, bo nie możemy ściśle obliczyć m_x , ale nie o to nam chodzi, tylko o to, że dzięki małej liczebnej wartości tych wielkości wyraz:

$$\sqrt{N_2^2 - N_1^2 N_3^2} = 2A C \cdot (C-A) m_x \sqrt{\frac{m_x^2}{(C-A)^2} + \frac{C}{A} \cdot \frac{C-D}{D-A}} \cdot \omega^2$$

jest o wiele mniejszy aniżeli:

$$N_2 = C^2 (C-A)^2 \omega^2 - 2A C \cdot m_x^2,$$

po drugie, że w tem ostatniem wyrażeniu na N_2 można pominąć wyraz zawierający m_x^2 wobec wyrazu zawierającego $(C-A)^2 \omega^2$.

Wskutek tego w wyrażeniu kwadratu modułu XIV po podstawieniu wartości na N_1 , N_2 i N_3 można pominąć niektóre wyrazy i napisać:

$$h^2 = \frac{4A C \cdot m_x \sqrt{m_x^2 + (C-A)^2 \frac{(C-D)}{D-A} \frac{C}{A}} \omega^2}{C^2 (C-A)^2 \omega^2}$$

lecz dla $m_x = 0$

$$2\tau = \omega \frac{(C-A)}{A} \cdot t$$

zaś wyrażając μ przez ω przy pomocy wzoru XV otrzymamy:

$$p = -\omega \sqrt{\frac{C}{A} \cdot \frac{C-D}{D-A}} \cdot \cos \left(\frac{C-A}{A} \right) \omega t$$

$$q = -\omega \sqrt{\frac{C}{A} \cdot \frac{C-D}{D-A}} \cdot \sin \left(\frac{C-A}{A} \right) \omega t$$

skąd wypada:

$$\frac{p^2 + q^2}{\omega^2} = \frac{C}{A} \cdot \frac{C-D}{D-A}$$

co usprawiedliwia naszą uwagę, zrobioną w tekście.

t. j.

$$k^2 = \frac{4A}{C-A} \cdot \frac{m_x}{C\omega} \sqrt{\frac{m_x^2}{(C-A)^2\omega^2} + \frac{C}{A} \cdot \frac{C-D}{D-A}}$$

Z tego, cośmy wyżej powiedzieli wypada, że wartość pierwiastka będzie wielkością wyrażającą się przez ułamek, którego licznik jest jednością zaś mianownik liczbą zawierającą co najmniej kilkanaście tysięcy jednostek, ponieważ zaś w wyrażeniu na k^2 figurują jeszcze dwa czynniki oba mniejsze od jedności a jeden z nich, mianowicie:

$$\frac{m_x}{C\omega},$$

nawet co najmniej kilkadziesiąt tysięcy razy mniejszy od jedności, przeto k^2 będzie małą liczbą jakie kilkanaście milionów razy mniejszą od jedności. Wskutek tego szereg:

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^2 + \dots$$

prawie nieróżni się od jedności, a zatem peryod Eulerowskiej perturbacji

$$2K = \pi \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \dots \right]$$

prawie nie różni się od π . Lecz $2K$ jest to peryod perturbacji mierzony w jednostkach zmiennej τ . Skoro od tej zmiennej przejdziemy do zmiennej t , to zważywszy jeszcze, że ω_2 zaledwie o jakiś milionowy ułamek różni się od ω , znajdziemy, że peryod perturbacji jest:

$$\frac{2\pi A C}{C(C-A)\omega} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \dots \right]$$

t. j.

$$\frac{2\pi A}{(C-A)\omega} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \dots \right]$$

ale jeżeli

$$m_x = 0,$$

to ten sam peryod wynosi ściśle

$$\frac{2\pi A}{C-A}$$

a zatem ze względu na to, że k^2 jest tak małą liczbą, przy

$$m_x \geq 0$$

peryod perturbacji jest prawie ściśle równy peryodowi perturbacji odpowiadającemu przypadkowi, gdy momenty prądów są ściśle równe

zeru. Z tych przykładów wnosimy, że stałe a tak samo i niestałe prądy morskie i atmosferyczne nie mogą mieć żadnego spostrzegalnego wpływu na peryod swobodnej Eulerowskiej perturbacji. Absolutnie te same rezultaty otrzymalibyśmy, gdybyśmy nie kładli oddzielnie raz $m_x = 0$ a drugi raz $m_z = 0$ (przypominamy, że $m_y = 0$ dzięki odpowiedniej orientacji osi współrzędnych) ale od razu założyli, że tak m_x jak m_z są różne od zera. Cała różnica zasadzałaby się tylko na tem, że analiza nasza byłaby więcej skomplikowana.

Ponieważ dotąd zakładaliśmy, że momenty m_x , m_y i m_z są stałe, więc należy jeszcze rozważyć przypadek, gdy m_x , m_y i m_z są zmienne, mianowicie peryodycznie zmienne. Ten przypadek zasługuje na uwagę, albowiem prądy morskie i atmosferyczne podlegają corocznym zmianom. Należy więc przedstawić m_x , m_y i m_z jako pewne peryodyczne funkcey czasu o peryodzie rocznym. Właściwie należałoby napisać

$$m_x = \alpha_0 + \alpha_1 \cos \frac{2\pi t}{T} + \alpha_2 \cos \frac{4\pi t}{T} + \alpha_3 \cos \frac{6\pi t}{T} + \dots$$

$$+ \beta_1 \sin \frac{2\pi t}{T} + \beta_2 \sin \frac{4\pi t}{T} + \beta_3 \sin \frac{6\pi t}{T} + \dots$$

$$m_y = \dots\dots\dots$$

$$m_z = \dots\dots\dots$$

(gdzie $T =$ jednemu rokowi, zaś $\alpha_0, \alpha_1 \dots \beta_1$ i t. d. oznaczają pewne stałe) t. j. innemi słowy szeregi Fourriera¹⁾ wyrażające momenty prądów powinny zawierać wyrazy o peryodach równych połowie, $\frac{1}{3}$ i t. d. roku. Wskutek tego w szeregach Fourriera przedstawiających zmiany geograficznych szerokości powinnyby też figurować funkcey kołowe o peryodach równych połowie, $\frac{1}{3}$ i t. d. roku, ale w danym razie możemy się ograniczyć do pierwszych wyrazów t. j. do wyrazów z argumentem $\frac{2\pi}{T} t$.

Niestety, gdy m_x , m_y i m_z są zmienne, to ściśle całkowanie równań XII jest niemożliwe, albowiem mamy wtedy tylko całkę momentów

$$H_x^2 + H_y^2 + H_z^2 = \text{stałej},$$

zaś druga całka (całka zachowania energii) nie istnieje. Musimy więc w takim razie ograniczyć się do pewnych przybliżonych rachunków.

¹⁾ Szeregi te mogą być skończone.

Zadanie, o którym mówimy, traktował Vito Volterra w rozprawie „Sui moti periodici...“¹⁾. Przytoczymy tutaj pokrótce treść tej rozprawy. Zakładamy jak zwykle

$$B = A.$$

Zamiast równań XII mamy teraz równania:

$$\text{XVI} \quad \left\{ \begin{array}{l} A \frac{dp}{dt} + (C - A)qr + m_x q - m_y r + \frac{dm_x}{dt} = 0 \\ A \frac{dq}{dt} - (C - A)pr + m_x q - m_x p + \frac{dm_y}{dt} = 0 \\ C \frac{dr}{dt} + m_y p - m_x q + \frac{dm_z}{dt} = 0. \end{array} \right.$$

Założmy że:

$$r = \omega + \varepsilon,$$

gdzie ε jest bardzo małą wielkością w porównaniu z ω tak samo jak p i q , zresztą ω jest stałe zaś ε zmienne.

Z ostatniego równania XVI wypada, że:

$$m_x = m_x^0 - \int_0^t (m_y p - m_x q) dt - C\varepsilon = m_x^0 + u$$

gdzie m_x^0 jest stałe zaś u zmienne. Wtedy można napisać dwa pierwsze równania XVI w postaci:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \left[\frac{C-A}{A} \cdot (\omega + \varepsilon) + \frac{m_x^0 + u}{A} \right] q &= -\frac{1}{A} \left[\frac{dm_x}{dt} - m_y (\omega + \varepsilon) \right] \\ \frac{dq}{dt} - \left[\frac{C-A}{A} \cdot (\omega + \varepsilon) + \frac{m_x^0 + u}{A} \right] p &= -\frac{1}{A} \left[\frac{dm_y}{dt} + m_x (\omega + \varepsilon) \right]. \end{aligned}$$

Możemy tu opuścić małe wyrazy drugiego rzędu t. j. możemy opuścić

$$\frac{u p}{A}, \frac{u q}{A}, \frac{m_x \varepsilon}{A}, \frac{m_y \varepsilon}{A}, \frac{C-A}{A} p \varepsilon, \frac{C-A}{A} q \varepsilon.$$

Położmy teraz

$$\frac{C-A}{A} \omega + \frac{m_x^0}{A} = \lambda = \text{stałe}$$

a otrzymamy przybliżenie:

$$\frac{dp}{dt} + \lambda q = -\frac{1}{A} \left(\frac{dm_x}{dt} - m_y \omega \right)$$

¹⁾ W XXX tomie Atti della Accad. di Scienze di Torino.

$$\frac{dq}{dt} - \lambda p = -\frac{1}{A} \left(\frac{dm_y}{dt} + m_x \omega \right).$$

Stosownie do hipotezy, że m_x i m_y zmieniają się peryodycznie, po-
łożmy n. p.

$$\begin{aligned} m_x &= \alpha_0 + \alpha_1 \cos \lambda_1 t \\ m_y &= \beta_0 + \beta_1 \sin \lambda_1 t \end{aligned}$$

gdzie

$$\lambda_1 = \frac{\omega}{366,25},$$

bo rok równa się prawie ściśle 366,25 dobom gwiazdowym. Stąd
wypada:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{A} \left[\frac{dm_x}{dt} - m_y (\omega + \varepsilon) \right] &= \frac{\omega}{A} \beta_0 + \frac{\beta_1 \omega + \alpha_1 \lambda_1}{A} \sin \lambda_1 t \\ -\frac{1}{A} \left[\frac{dm_y}{dt} + m_x (\omega + \varepsilon) \right] &= -\frac{\omega}{A} \alpha_0 - \frac{\alpha_1 \omega + \beta_1 \lambda_1}{A} \cos \lambda_1 t. \end{aligned}$$

A więc z dwóch pierwszych równań XVI otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \lambda q &= \frac{\omega}{A} \beta_0 + \frac{(\beta_1 \omega + \alpha_1 \lambda_1)}{A} \sin \lambda_1 t \\ \frac{dq}{dt} - \lambda p &= -\frac{\omega}{A} \alpha_0 - \frac{(\alpha_1 \omega + \beta_1 \lambda_1)}{A} \cos \lambda_1 t. \end{aligned}$$

Są to zwykłe liniowe różniczkowe równania. Jeżeli je zcałkujemy, to
otrzymamy:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\omega \alpha_0}{A \lambda} + C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t \\ &- \frac{[(\lambda \alpha_1 + \lambda_1 \beta_1) \omega + \lambda \lambda_1 \beta_1 + \lambda_1^2 \alpha_1]}{A (\lambda_1^2 - \lambda^2)} \cos \lambda_1 t \\ q &= \frac{\omega \beta_0}{A \lambda} + C_1 \sin \lambda t + C_2 \cos \lambda t \\ &- \frac{[(\lambda_1 \alpha_1 + \lambda \beta_1) \omega + \lambda_1^2 \beta_1 + \lambda \lambda_1 \alpha_1]}{A (\lambda_1^2 - \lambda^2)} \sin \lambda_1 t. \end{aligned}$$

Wyrazy zawierające $\cos \lambda t$ i $\sin \lambda t$ przedstawiają zwykłą swo-
bodną Eulerowską perturbację, wyrazy zawierające $\sin \lambda_1 t$ i $\cos \lambda_1 t$
przedstawiają wymuszoną perturbację o rocznym peryodzie zresztą
zupełnie podobną do swobodnej Eulerowskiej perturbacji. Należy więc
tylko przekonać się, czy amplituda wymuszonej perturbacji może być
dość znaczną, aby była spostrzegalną. Dla skrócenia rachunku, bo tu
przecież chodzi tylko o ocenę liczbowych wartości, połączmy:

$$\alpha_1 = \beta_1.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\omega} &= tg \sigma = \sigma = \frac{\alpha_1 \omega (\lambda + \lambda_1) + \alpha_1 \lambda_1 (\lambda + \lambda_1)}{A \omega (\lambda_1^2 - \lambda^2)} \\ &= \frac{\alpha_1 (\omega + \lambda)}{A \omega (\lambda_1 - \lambda)}. \end{aligned}$$

Wedle założenia:

$$\lambda_1 = \frac{\omega}{366,25}.$$

Co do λ , to należy oczywiście położyć:

$$\lambda = \frac{\omega}{430}$$

t. j. dla swobodnej Eulerowskiej perturbacji należy przyjąć peryod Chandlera. Amplituda wymuszonej perturbacji wynosi wedle p. Gonessiat ¹⁾ $0'', 125$. Położmy n. p. że:

$$\begin{aligned} tg \sigma = \sigma &= 0'', 125 \\ &= \frac{2\pi}{360 \times 60 \times 60 \times 8}. \end{aligned}$$

Ale natenczas z powyżej znalezionej wzoru:

$$\sigma = \frac{\alpha_1 (\omega + \lambda)}{A \omega (\lambda_1 - \lambda)}$$

natychmiast otrzymamy:

$$\frac{\alpha_1}{A \omega} = \left(\frac{1}{366,25} - \frac{1}{430} \right) \frac{2\pi}{360 \times 60 \times 60 \times 8} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{366,25}}.$$

Po wykonaniu rachunków znajdziemy, że $\frac{\alpha_1}{A \omega}$ wynosi mniej więcej:

$$\frac{1}{4089} \cdot \frac{1}{10^6}$$

gdyby więc amplituda corocznych zmian momentu prądów morskich wynosiła około:

$$\frac{1}{4089} \cdot \frac{1}{10^6} \cdot A \omega,$$

to amplituda wymuszonej perturbacji wynosiłaby $0'', 125$, t. j. tyle, ile wedle Gonessiat'a wynosi rzeczywista amplituda wymuszonej pertur-

¹⁾ Recherches sur la loi des variations de la latitude. Patrz sprawozdanie Radau'a w C. R. tom CXXVI. str. 710-712.

bacyi o rocznym peryodzie. Pozostaje więc tylko pytanie, czy można przypuścić, że

$$\alpha_1 = \frac{A \omega}{4089} \cdot \frac{1}{10^6}.$$

Z kart letniego i zimowego rozkładu prądów morskich w Oceanie Spokojnym ¹⁾ widać, że w epoce: lipiec — wrzesień wszystkie powierzchniowe prądy są przesunięte na północ a w epoce: styczeń — marzec na południe od swej średniej pozycyi. Przesunięcia wynoszą po kilka stopni geograficznych, wyjątkowo dochodzą do dziesięciu stopni. Jeżeli weźmiemy 5° jako średnie przesunięcie, to będzie zupełnie dosyć, prędzej za wiele niż za mało.

Wedle założenia mamy:

$$m_x = \alpha_0 + \alpha_1 \cos \lambda_1 t$$

α_0 jest to średnia wartość momentu m_x , zaś α_1 amplituda (czy raczej połowa amplitudy) zmian tego momentu. Gdyby system prądów przesunął się tak jak ciało sztywne, to przy przesunięciu o 5° musiałoby być:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \sin 5^\circ = 0,08716.$$

Naturalnie moglibyśmy przyjąć ten stosunek i w danym przypadku gdyby nie to, że podane tu coroczne przesunięcia prądów tyczą się tylko powierzchniowych warstw; już na niewielkich stosunkowo głębokościach przesunięcia muszą być o wiele mniejsze, o ile, tego zupełnie nie wiemy, a zatem stosunku $\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$ obliczyć nie możemy, możemy tylko powiedzieć, że wartość jego jest z pewnością daleko mniejsza niż 0,08716.

Z drugiej strony wyżej znaleźliśmy, że absolutna średnia wartość momentu m_x może co najwyżej wynosić

$$\frac{C \omega}{127} \cdot \frac{1}{10^6}.$$

Stosunek między tą wielkością i wielkością:

$$\frac{A \omega}{4089} \cdot \frac{1}{10^6}$$

wynosi 32, ale absolutna średnia wartość momentu m_x powinna

¹⁾ Deutsche Seewarte. Stiller Ocean. Ein Atlas etc. . . . Hamburg 1896.

być, jak to wyżej wspomnieliśmy, mniejsza ¹⁾ niż takąż wartość na m_z t. j. α_0 jest z pewnością nie 32, a co najwyżej kilka razy większe od

$$\frac{A \omega}{4089} \cdot \frac{1}{10^6}$$

ponieważ zaś stosunek $\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$ jest dużo mniejszy od 0,08716, więc α_1 powinno okazać się znacznie mniejszem od:

$$\frac{A \omega}{4089} \cdot \frac{1}{10^6}$$

W ten sposób przychodzimy do wniosku, że peryodyczne coroczne zmiany momentów prądów morskich prawdopodobnie nie wystarczają do objaśnienia wymuszonej Eulerowskiej perturbacji o rocznym peryodzie. To samo da się powiedzieć o momentach prądów atmosferycznych a nawet o połączonych momentach prądów atmosferycznych i morskich, albowiem i same momenty i zmiany momentów prądów atmosferycznych są małe nawet w porównaniu z momentami i zmianami momentów prądów morskich. Dlatego też należy przypuścić, że przyczyna wymuszonej perturbacji o peryodzie rocznym przedewszystkiem polega na pewnych peryodycznych corocznych zmianach momentów bezwładności ziemi spowodowanych przez klimatyczne przyczyny. Momenty bezwładności ziemi mogą podlegać i podlegają drobnym corocznym zmianom najpierw z powodu kolejnego gromadzenia się śniegów i lodów na przemian to na jednej to na drugiej półkuli, następnie z powodu pewnych przez meteorologiczne przyczyny spowodowanych przyływów i odpływów wód oceanicznych zależnych od corocznego przesuwania się prądów morskich, od przyboru wód w czasie wiosennego tajania śniegów i t. p. przyczyn, dalej te momenty podlegają zmianom z powodu przesunięć znacznych mas powietrza, towarzyszących corocznym zmianom w rozkładzie ciśnień i wiatrów ²⁾. Te meteorologiczne przyczyny mogą kombinować się z wpływem bardzo drobnych deformacji oceanu i samej ziemi spowodowanych przez grawitacyjny

¹⁾ Przyczyna tego jest następująca. Prądy morskie tworzą kilka systemów cyrkulacji. Można rozróżnić 5 głównych systemów, jeden w Oceanie Indyjskim, po dwa w Atlantyckim i Spokojnym. W wyrażeniach na m_x i m_y wpływy tych systemów wzajemnie się po części neutralizują, zaś w wyrażeniu na m_z wszystkie wpływy sumują się.

²⁾ Cf. Spitaler „Die Ursache der Breitenschwankungen“ Denkschr. der mat. naturw. Cl. der k. k. Akad. der Wiss. in Wien LXIV tom, także L. Grabowski. Sitzb. tejsze Akad. tejsze klasy mat. przyr. tom CVII. Abt. II a. (1898 r.) str. 507—514.

coroczny przyływ i odpływ¹⁾. Ale w rozstrząsanie tych różnorodnych czynników nie będziemy się tu wdawać, wszystkie bowiem te czynniki mają znaczenie tylko dla teorii wymuszonej Eulerowskiej perturbacji o peryodzie rocznym, która to teoria nie może nam dać kryterium do jakiegokolwiek wniosków o stanie wnętrza ziemi. Pod tym względem możnaby coś wyciągnąć tylko z owych możebnych drobnutkich deformacji spowodowanych przez coroczne zmiany słonecznego przyciągania, o których tylko co wspomnieliśmy, ale i te nie dałyby się zużytkować, bo wpływ ich byłby z konieczności zakryty przez wpływy klimatyczno-meteorologicznych czynników.

Natomiast swobodna Eulerowska perturbacja może nam dostarczyć żądane kryterium. Przekonamy się o tem w następnych rozdziałach.

Dotychczasowe badania pokazały nam, że peryod swobodnej perturbacji wprawdzie jest do pewnego stopnia zależny od ruchów oceanu i atmosfery ale jednocześnie pokazały nam, że zmiany peryodu swobodnej perturbacji spowodowane przez te ruchy są zupełnie nieznaczne, że nie mogą nawet być porównane ze spostrzeganem przedłużeniem peryodu z 305 na 430 dni. Przedtem jeszcze przekonaliśmy się, że ruchy wewnętrznego ciekłego jądra spowodowane przez swobodną perturbację mogą tylko skrócić ale nie mogą przedłużyć jej peryodu. Inne zaś samodzielne nie pozostające w przyczynowym związku ze samą perturbacją ruchy wewnętrznego ciekłego jądra są zgoła nieprawdopodobne, bo nie dostrzegamy żadnej przyczyny, któraby je mogła wywołać. Nie wierzymy w możliwość jakiejś cyrkulacji prądów w wewnętrznym ciekłym jądrze, bo niema żadnej zewnętrznej przyczyny, któraby je mogła podtrzymywać. Wszak n. p. prądy atmosferyczne i oceaniczne istnieją tylko dzięki nieustannemu dopływowi słonecznej energii i gdyby ten dopływ ustał, to po pewnym czasie wewnętrzne tarcia zniweczyłyby wszelkie ruchy w oceanie i w atmosferze.

ROZDZIAŁ IV.

Eulerowska perturbacja u sprężystego ciała i wpływ odkształceń na tę perturbację.

W niniejszym rozdziale będziemy badać swobodną Eulerowską perturbację zakładając, że ziemia jest ciałem sprężystym.

¹⁾ W potencyale sprawiającym przyływy figuruje także drobny wyraz o peryodzie rocznym.

Już z dawniejszych prac Newcomba ¹⁾, autora tej rozprawy ²⁾ i Hougha ³⁾ wiadomo, że dzięki odkształceniom peryod 305 dniowy, może być przedłużony do 430 dni. Należy przytem zauważyć, że Newcomb starał się acz w gruby i przybliżony sposób uwzględnić odkształcenia oceanów. W mojej własnej rozprawie zrobiłem te same założenia co Newcomb, tylko obliczenia odkształceń dokonałem za pomocą ściślejszej metody. Dzięki użyciu innej metody przyszedłem do wniosku, że przy założeniach Newcomba średni współczynnik sztywności ziemi powinien wypaść dwa razy większy niż współczynnik sztywności stali, podczas gdy Newcomb sam — znalazł współczynnik tylko trochę większy niż współczynnik sztywności stali. Najobszerniejszą z tu wymienionych prac jest praca Hougha. Analiza, którą posługuje się Hough, metody, któremi się posługuje, są w znacznej części bardzo podobne do tych, któremi ja się posługiwałem ⁴⁾, ale podstawowe założenia tej pracy są nieco inne niż u Newcomba i u mnie, albowiem Hough wcale nie bierze na uwagę deformacji oceanu. Hough znajduje, że na to, aby peryod Eulerowskiej perturbacji mógł przedłużyć się z 305 na 430 dni, trzeba aby średni współczynnik sztywności ziemi był trochę większy niż współczynnik sztywności stali. Różnica między tym rezultatem a rezultatem znalezionym przeze mnie tylko częściowo pochodzi z różnicy w metodzie obliczania, głównie zaś po-

¹⁾ Monthly Notices Roy. Astr. Soc. 1892 r. str. 336—341.

²⁾ Phil. Magaz. 5 ser. XXXVIII tom, str. 218 i nast.

³⁾ Rotation of a Rigid Spheroid. Philos. Trans. serya A, tom 187, (1896 r.) str. 319—344.

⁴⁾ C. Hillebrand w rozprawie pod tyt. Einfluss der Elasticität auf die Schwankungen der Polhöhe. Denkschr. Akad. der Wiss. Wien, tom LXIV. (1897 r.) str. 283—308 używa analizy podobnej jak ja i Hough ale nie dochodzi do tych samych wniosków, albowiem wcale nie rozważa zmian w rozkładzie sił odśrodkowych towarzyszących Eulerowskiej perturbacji a wskutek tego naturalnie nie dochodzi do rezultatu, że deformacje spowodowane przez zmiany w rozkładzie sił odśrodkowych mogą zmienić ten peryod. Natomiast Hillebrand rozważa takie pytania, jak n. p. czy naturalne sprężyste drgania nie mogą sprawić zmian geograficznej szerokości, ale za przykładem Lamba znajduje, że wprawdzie sprężyste drgania mogłyby sprawić pewne peryodyczne zmiany geograficznej szerokości ale tylko o bardzo krótkich peryodach (około 1 do 2 godzin). Dalej rozważa, jaki wpływ na zmiany geograficznej szerokości mogłyby mieć perturbacje w ruchu obrotowym ziemi wywołane przez przyciąganie innych ciał niebieskich t. j. innymi słowy perturbacje wywołane przez „ziemskie przypływy“ i dochodzi do wniosku, że takie perturbacje musiałyby być znacznie mniejsze od właściwej Eulerowskiej perturbacji (patrz strona 306 na dole i 307). Zresztą jasno widać, że C. Hillebrand wyobraża sobie, iż Eulerowska perturbacja musi mieć 10-miesięczny peryod. Widocznie nie czytał ani rozprawki Newcomba ani mojej, choć pierwsza wyszła w 1892 a druga w 1894 roku.

chodzi stąd, że gdy uwzględniamy deformacje oceanu, to „eo ipso“ przychodzimy do wniosku, że deformacje samej bryły ziemskiej są mniejsze, a zatem jej sztywność większa. Rzeczywiście, gdybyśmy dokonali obliczenia przy pomocy naszych wzorów ale nie uwzględnili deformacji oceanów, tobyśmy otrzymali współczynnik sztywności wprawdzie większy od współczynnika sztywności Hougha ale tylko w stosunku mniej więcej $\frac{11}{9}$.

W niniejszym rozdziale rozpatrzmy zadanie o Eulerowskiej perturbacji u całkowicie sprężystego ciała, w następnym zaś o takiej samej perturbacji u ciała sprężystego pokrytego wodnym oceanem i postaramy się określić współczynnik sztywności odpowiadający 430 dniowemu peryodowi w pierwszym i drugim przypadku. W dalszym ciągu okaże się, dla czego zajmiemy się obu zadaniami oddzielnie. W rachunkach użyjemy metod ściślejszych aniżeli nasi wymienieni wyżej poprzednicy.

Weźmy równania ruchu względnego odniesionego do osi prostokątnych przecinających się w środku bezwładności ciała i kręcących się z kątową prędkością, której rzuty na kręcące się osie ruchome są: p, q, r . Będą to równania analogiczne do równań XI poprzedniego rozdziału, będą zaś wyglądać w następujący sposób:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2r \frac{dy}{dt} + 2q \frac{dz}{dt} - y \frac{dr}{dt} + z \frac{dq}{dt} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{\rho} X \\ \frac{d^2y}{dt^2} - 2p \frac{dz}{dt} + 2r \frac{dx}{dt} - z \frac{dp}{dt} + x \frac{dr}{dt} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{\rho} Y \\ \frac{d^2z}{dt^2} - 2q \frac{dx}{dt} + 2p \frac{dy}{dt} - x \frac{dq}{dt} + y \frac{dp}{dt} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{\rho} Z \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

gdzie ρ oznacza gęstość:

$$\varphi = V + \psi$$

V oznacza potencjał przyciągania

zaś ψ „ „ „ sił odśrodkowych, mianowicie:

$$\psi = \frac{\rho}{2} [x^2(q^2 + r^2) + y^2(p^2 + r^2) + z^2(p^2 + q^2) - 2xypq - 2xzpr + 2yzyr]$$

wreszcie X, Y, Z oznaczają składowe innych sił działających na ciało. Ponieważ chodzi nam o deformacje sprężystego ciała, przeto otrzymamy z tych równań równania różniczkowe teorii sprężystości, gdy zamiast X, Y, Z napiszemy składowe sił sprężystych obliczone względem osi ruchomych.

Nie możemy powiedzieć, że osie współrzędnych są nieruchomo związane z ciałem, bo same ciało podlega odkształceniom, ale obieramy je tak, że gdyby nie było odkształceń, to współrzędne każdego punktu ciała x, y, z byłyby stałe. Środek umieszczamy w środku masy nieodkształconego ciała [potem się okaże, że odkształcenie nie zmienia położenia środka masy]. Kierunek osi z obieramy tak, aby ta oś była identyczna z jedną z osi głównych nieodkształconego ciała, mianowicie z tą, która jest osią największego momentu bezwładności nieodkształconego ciała.

Ponieważ, gdyby nie było odkształcenia, to współrzędne każdego punktu byłyby stałe, więc, oznaczając owe stałe współrzędne przez x_0, y_0, z_0 zaś przesunięcia przez ξ, η, ζ mamy:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \xi \\y &= y_0 + \eta \\z &= z_0 + \zeta.\end{aligned}$$

Załóżmy dalej, że rozpatrywane ciało jest jednorodne i izotropowe, wtedy składowe sił sprężystych będą:

$$\begin{aligned}X &= n \nabla^2 \xi + \left(k + \frac{1}{3} n\right) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\Y &= n \nabla^2 \eta + \left(k + \frac{1}{3} n\right) \frac{\partial \theta}{\partial y} \\Z &= n \nabla^2 \zeta + \left(k + \frac{1}{3} n\right) \frac{\partial \theta}{\partial z}\end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \theta &= \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\end{aligned}$$

gdzie następnie n oznacza współczynnik sztywności zaś k odwrotność współczynnika ściśliwości t. j., jak go można nazwać, współczynnik nieściśliwości.

Ponieważ przesunięcia ξ, η, ζ są bardzo a bardzo małe w porównaniu ze współrzędnymi, można tedy zamiast

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial (x_0 + \xi)} \quad \text{i t. d.}$$

wziąć wprost

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \quad \text{i t. d.,}$$

dalej można zamiast

$$x r^2 = (x_0 + \xi) r^2 \quad \text{i t. d.}$$

wziąć wprost:

$$x_0 r^2 \text{ i t. d.}$$

Ponieważ atoli ciągle pisanie symbolów x_0, y_0, z_0 byłoby niedogodne, więc będziemy w dalszym ciągu pisać znowu x, y, z zamiast x_0, y_0, z_0 , przyczem naturalnie będziemy odtąd pod x, y, z rozumieć niezmiennie współrzędne elementu, które element posiadałby, gdyby nie było deformacji.

Ponieważ zaś:

$$\frac{d}{dt}(x_0 + \xi) = \frac{d\xi}{dt} \text{ i t. d.}$$

bo x_0, y_0, z_0 są stałe, przeto równania I należy napisać tak:

$$\left. \begin{aligned} \rho \left[\frac{d^2 \xi}{dt^2} - 2r \frac{d\eta}{dt} + 2q \frac{d\zeta}{dt} - y \frac{dr}{dt} + z \frac{dq}{dt} \right] &= \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + n \nabla^2 \xi + \left(k + \frac{1}{3} n \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \rho \left[\frac{d^2 \eta}{dt^2} - 2p \frac{d\zeta}{dt} + 2r \frac{d\xi}{dt} - z \frac{dp}{dt} + x \frac{dr}{dt} \right] &= \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + n \nabla^2 \eta + \left(k + \frac{1}{3} n \right) \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \rho \left[\frac{d^2 \zeta}{dt^2} - 2q \frac{d\xi}{dt} + 2p \frac{d\eta}{dt} - x \frac{dq}{dt} + y \frac{dp}{dt} \right] &= \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + n \nabla^2 \zeta + \left(k + \frac{1}{3} n \right) \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{aligned} \right\} \text{ I (a)}$$

Całkowanie tych równań przedstawia naturalnie równie wielkie trudności jak całkowanie równań XI poprzedniego rozdziału. Trzeba więc je uprościć. Przypomnijmy sobie, iż z powodu długości peryodu perturbacji odkształcenia muszą być bardzo powolne a ze względu na to, że odkształcające siły są stosunkowo bardzo małe, muszą być też bardzo nieznaczne. Dodajmy do tego, że skoro mamy do czynienia z ciałem posiadającym jaką taką sztywność, to współczynniki k i n muszą być liczebnie znacznymi wielkościami. Dzięki tym przyczynom wyrazy stojące po lewej stronie równań I (a) powinny być bardzo małe w porównaniu z wyrazami stojącymi po prawej stronie tychże równań. Korzystając z tego można zupełnie opuścić wyrazy stojące po lewej stronie i sprowadzić w ten sposób zadanie dynamiczne do pewnego zadania statycznego t. j. traktować te zadanie w podobny sposób jak Kelvin i Darwin traktowali zadanie o przyptywach ziemskich. Przypomnijmy tu mimochodem, że w zadaniu Kelvina—Darwina nie zanie-

dbanie bezwładności cząsteczek samej ziemi ale zaniedbanie bezwładności oceanów okazało się szkodliwe. W myśl naszego założenia napiszemy nasze równania w kształcie:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + n \nabla^2 \xi + \left(k + \frac{1}{3} n\right) \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0.$$

.....

Ale tylko część potencjału φ sprawia odkształcenia, albowiem gdyby ziemia obracała się naokoło głównej osi ze stałą kątową prędkością ω , to wtedy nie byłoby żadnych odkształceń. Przeto nie φ ale tylko

$$W = \varphi - \varphi_0$$

sprawia odkształcenia, gdzie φ_0 jest potencjałem siły ciężkości przy obrocie nieodkształconego ciała z kątową prędkością ω naokoło osi głównej t. j.

$$\varphi_0 = V_0 + \rho \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2)$$

gdzie V_0 oznacza potencjał przyciągania nieodkształconego ciała. Teraz równania nasze przejdą na:

$$\text{II} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial W}{\partial x} + n \nabla^2 \xi + \left(k + \frac{1}{3} n\right) \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial y} + n \nabla^2 \eta + \left(k + \frac{1}{3} n\right) \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial z} + n \nabla^2 \zeta + \left(k + \frac{1}{3} n\right) \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0. \end{array} \right.$$

Zauważmy teraz, że ponieważ ziemia jest przybliżenie kulista, więc możemy obliczyć odkształcenia wywołane przez potencjał W w taki sposób jakby to były odkształcenia kuli. To założenie bardzo ułatwia rachunki a błąd stąd pochodzący jest bardzo nieznaczny, bo n. p. błąd w liczebnej wartości danego przesunięcia będzie w stosunku do samego przesunięcia wielkością tego samego rzędu co stosunek $e:1$, gdzie e oznacza spłaszczenie ziemi.

Przypatrzmy się teraz potencjaloowi W . Ten potencjał składa się z dwóch wyrazów: $V - V_0$ t. j. różnicy potencjałów przyciągania odkształconego i nieodkształconego ciała i $\psi - \psi_0$ t. j. różnicy potencjałów siły odśrodkowej w przypadku, gdy ciało obraca się około zmiennej osi chwilowej z kątową prędkością, której rzuty na osie współrzędne są p , q , r , oraz w przypadku, gdy ciało obraca się ze stałą kątową prędkością ω około stałej osi identycznej z główną

polarną osią. Wyrażenie na $\psi - \psi_0$ możemy od razu napisać, mianowicie mamy:

$$\psi - \psi_0 = \\ = \frac{\rho}{2} [x^2(q^2 + r^2 - \omega^2) + y^2(p^2 + r^2 - \omega^2) + z^2(p^2 + q^2) - 2xy pq - 2xz pr - 2yz qr]$$

$\psi - \psi_0$ jest jednorodną funkcją drugiego stopnia, jeżeli zaś założymy, że:

$$p^2 + q^2 + r^2 - \omega^2 = 0,$$

to suma współczynników przy kwadratach x^2 , y^2 i z^2 będzie równa zeru i $\psi - \psi_0$ będzie kulistą funkcją drugiego stopnia. Wprawdzie w rzeczywistości powinno być

$$p^2 + q^2 + r^2 - \omega^2 > 0,$$

ale różnica ta jest małą wielkością drugiego rzędu i można założyć, że jest równa zeru. Założenie to ma bardzo wielką doniosłość, albowiem gdy $\psi - \psi_0$ jest kulistą funkcją, to wszystkie rachunki znacznie się upraszczają. Będziemy więc odtąd zakładać, że:

$$p^2 + q^2 + r^2 - \omega^2 = 0,$$

różnicę $\psi - \psi_0$ jako funkcję kulistą drugiego stopnia oznaczymy przez ψ_2 i napiszemy ją, korzystając z tylko co zrobionego założenia w kształcie:

$$\psi_2 = -\frac{\rho}{2} \cdot [x^2 p^2 + y^2 q^2 - z^2 (p^2 + q^2) + 2xy pq + 2xz pr + 2yz qr]. \quad \text{III}$$

Teraz przypatrzmy się bliżej potencjałowi przyciągania $V - V_0$. Tak V jak V_0 są to potencjały przyciągania wewnątrz ciała, V_0 przed odkształceniem, V po odkształceniu, zatem wedle ogólnych własności potencjału mamy:

$$\nabla^2 V = -4\pi\rho$$

oraz

$$\nabla^2 V_0 = -4\pi\rho_0$$

gdzie ρ i ρ_0 oznacza gęstość po i przed odkształceniem. Z tylko co napisanych równań wypada

$$\nabla^2 (V - V_0) = -4\pi(\rho - \rho_0).$$

Ale w dalszym ciągu i tak założymy, że ciało jest nieściśliwe, bo, podobnie jak w zadaniu Kelvina — Darwina, to założenie prawie nie ma wpływu na ostateczne rezultaty a wysoce upraszcza rachunki i uwalnia nas od konieczności obierania jakiegoś dowolnego związku między

współczynnikami sztywności i ściśliwości. Zróbmy więc to założenie już tutaj, wtedy zaraz otrzymamy:

$$\rho - \rho_0 = 0,$$

a wskutek tego

$$\nabla^2 (V - V_0) = 0,$$

a więc potencjał $V - V_0$ czyni zadość równaniu Laplace'a i da się przedstawić pod postacią szeregu funkcyi kulistych, ponieważ zaś $\psi - \psi_0$ jest także funkcyą kulistą, a zatem cały potencjał W sił odkształcających czyni zadość równaniu Laplace'a i może być rozwinięty w szereg funkcyi kulistych.

Co do warunków granicznych, to należy zauważyć, że ponieważ niema żadnych nowych dodatkowych ciśnień lub ciągnięć działających w zewnętrznej powierzchni ciała prócz tych, które działają na nieodkształcone ciało, zatem warunek graniczny w zewnętrznej powierzchni przywodzi się do równań oznaczających, że ciśnienie jest w zewnętrznej powierzchni równe zeru. Ale zamiast warunku w powierzchni odkształconej lepiej wziąć warunki w powierzchni nieodkształconej. W tej ostatniej ciśnienia po odkształceniu nie będą równe zeru ale będą równe składowym ciężaru nierówności wytworzonych przez odkształcenie. Jeżeli oznaczymy przez α, β, γ dostawy kierunkowe normalnej wystawionej w pewnym punkcie nieodkształconej powierzchni, zaś przez h najkrótszą odległość między odkształconą i nieodkształconą powierzchnią (w tym samym punkcie), to składowe ciśnienia na jednostkę powierzchni sprawionego przez ciężar nierówności będą:

$$-g\rho h\alpha, \quad -g\rho h\beta, \quad -g\rho h\gamma,$$

gdzie g oznacza przyspieszenie siły ciężkości, ρ gęstość, zatem $g\rho h$ oznacza ciężar kolumny o wysokości h i podstawie równej jednostce powierzchni. Ale składowe ciśnienia w trzech kierunkach są:

$$P\alpha + U\beta + T\gamma$$

$$U\alpha + Q\beta + S\gamma$$

$$T\alpha + S\beta + R\gamma$$

gdzie

$$P = \left(k - \frac{2}{3}n\right)\theta + 2n\frac{\partial\xi}{\partial x}$$

$$Q = \left(k - \frac{2}{3}n\right)\theta + 2n\frac{\partial\eta}{\partial y}$$

$$R = \left(k - \frac{2}{3}n\right)\theta + 2n\frac{\partial\zeta}{\partial z}$$

$$S = n \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)$$

$$T = n \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)$$

$$U = n \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right).$$

Ponieważ umówiliśmy się obliczać odkształcenia w taki sposób jak gdyby nieodkształcone ciało było kulą, przeto oznaczając średni promień geoidy przez R , możemy napisać warunki graniczne w następującym kształcie:

$$\left. \begin{aligned} P\alpha + U\beta + T\gamma + \rho g h \alpha &= 0 \\ U\alpha + Q\beta + S\gamma + \rho g h \beta &= 0 \\ T\alpha + S\beta + R\gamma + \rho g h \gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \text{IV}$$

gdzie $r = R$.

Teraz należy zcałkować równania II przy granicznych warunkach IV. Różniczkując pierwsze równanie II względem x , drugie względem y , trzecie względem z i dodając je do siebie otrzymamy:

$$\left(k + \frac{4}{3} n \right) \nabla^2 \theta + \nabla^2 W = 0,$$

gdzie ∇^2 oznacza znany symbol Laplace'a

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Dzięki założeniom, które tu zrobiliśmy, mamy:

$$\nabla^2 W = 0,$$

ale jednocześnie ze względu na to, że między naszymi założeniami było też założenie, że ciało jest nieściśliwe, mamy:

$$\theta = 0, \quad k = \infty.$$

Dogodniej zatem będzie chwilowo rozumować tak jak w ogólnym przypadku t. j. chwilowo nie zakładać jeszcze $k = \infty$, $\theta = 0$, tylko wyciągając konsekwencye z równania:

$$\left(k + \frac{4}{3} n \right) \nabla^2 \theta + \nabla^2 W = 0,$$

a następnie dopiero przejść do granic $\theta = 0$, $k = \infty$.

Ponieważ wedle założenia

$$\nabla^2 W = 0,$$

więc z naszego równania wypada też:

$$\nabla^2 \theta = 0,$$

t. j. można nie tylko W ale i θ przedstawić jako szereg funkcyj kulistych. Oznaczając więc funkcyje kuliste stopnia i przez θ_i , W_i możemy napisać:

$$W = \Sigma W_i$$

$$\theta = \Sigma \theta_i \quad (= 0),$$

przyczem należy pamiętać, że i może przyjmować tylko całe i dodatnie wartości. Odjemne wartości są wykluczone, bo w środku kuli funkcyje kuliste stopni odjemnych stają się nieskończenie wielkimi.

Napiszmy chwilowo:

$$\lambda_i = \frac{1}{n} \left(k + \frac{1}{3} n \right) \theta_i + \frac{1}{n} W_i = \frac{m \theta_i + W_i}{n}$$

gdzie

$$m = k + \frac{1}{3} n.$$

Wtedy można napisać równania II w postaci:

$$\nabla^2 \xi + \sum \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = 0$$

$$\nabla^2 \eta + \sum \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} = 0$$

$$\nabla^2 \zeta + \sum \frac{\partial \lambda_i}{\partial z} = 0.$$

Ponieważ pochodne $\frac{\partial \lambda_i}{\partial x}$ i t. d. są funkcyjami kulistymi stopnia $(i-1)$, więc ze względu na znany związek¹⁾:

$$\nabla^2 (r^2 \theta_i) = 2(2i+3)\theta_i,$$

któremu zadość czynią funkcyje kuliste, najogólniejsze całki powyższych równań są:

$$V \left\{ \begin{array}{l} \xi = \Sigma \xi_i - \frac{r^2}{2} \sum \frac{1}{2i+1} \cdot \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} \\ \eta = \Sigma \eta_i - \frac{r^2}{2} \sum \frac{1}{2i+1} \cdot \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} \\ \zeta = \Sigma \zeta_i - \frac{r^2}{2} \sum \frac{1}{2i+1} \cdot \frac{\partial \lambda_i}{\partial z} \end{array} \right.$$

¹⁾ Porówn. Thomson i Tait. Treat. on Nat. Phil. 2-gie wydanie 1883 roku część I. str. 179, wzór 12. Wogóle używamy tu analizy podobnej do analizy Thomsona i Taita (porówn. 2-gą część tego samego dzieła str. 286 i następane).

gdzie ξ_i , η_i , ζ_i też oznaczają kuliste funkcyje stopnia i . Ale:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \theta, \quad \text{IV}$$

zaś z drugiej strony:

$$\nabla^2 \lambda_i = 0, \quad \text{IVV}$$

a jednocześnie ze względu na to, że λ_i jest jednorodną funkcją stopnia i :

$$x \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} + y \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} + z \frac{\partial \lambda_i}{\partial z} = i \lambda_i,$$

a więc różniczkując pierwsze równanie V względem x , drugie względem y , trzecie względem z i dodając je do siebie, otrzymamy:

$$\theta = \Sigma \theta_i = \Sigma \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x} + \frac{\partial \eta_i}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_i}{\partial z} \right) - \Sigma \frac{i}{2i+1} \cdot \lambda_i.$$

Teraz właśnie należy znowu wprowadzić założenie, że ciało jest nieściśliwe t. j. że:

$$\theta = 0.$$

Równanie $\theta = 0$ rozpada się na tyleż oddzielnych równań, ile w wyrażeniu dla θ jest oddzielnych kulistych funkcyi różnych stopni, albowiem wedle znanych własności funkcyi kulistych równaniu

$$\Sigma \theta_i = 0,$$

można uczynić zadość tylko kładąc z osobna:

$$\theta_0 = 0, \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0 \dots \text{etc.} \dots \quad \theta_i = 0 \dots \text{etc.} \dots$$

A więc otrzymamy szereg równań następującego kształtu:

$$\frac{i}{2i+1} \lambda_i = \frac{\partial \xi_{i+1}}{\partial x} + \frac{\partial \eta_{i+1}}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_{i+1}}{\partial z} \quad \text{VI}$$

gdzie $i = 0, 1, 2 \dots \text{etc.} \dots$

albowiem tak λ_i jak pochodne $\frac{\partial \xi_{i+1}}{\partial x}$ i t. d. są to kuliste funkcyje stopnia i .

Wprowadźmy tu pewną nową zmienną, mianowicie:

$$\mu = r h,$$

gdzie, podobnie jak wyżej w równaniach granicznych, h oznacza przesunięcie w kierunku promienia. Z określenia μ wypada, że:

$$\mu = x \xi + y \eta + z \zeta = \Sigma (x \xi_i + y \eta_i + z \zeta_i) - \Sigma \frac{r^2}{2} \cdot \frac{i}{2i+1} \cdot \lambda_i$$

albo, ze względu na równanie VI, kładąc dla krótkości:

$$\text{VII} \quad f_i = \frac{\partial \xi_{i+1}}{\partial x} + \frac{\partial \eta_{i+1}}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_{i+1}}{\partial z}$$

$$\text{VIII} \quad r h = \mu = \Sigma (x \xi_i + y \eta_i + z \zeta_i) - \frac{r^2}{2} \Sigma f_i.$$

Jednocześnie zaś ze względu na te same równanie VI można zamiast równań V napisać równania:

$$\text{V (a)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \Sigma \xi_i - \frac{r^2}{2} \Sigma \frac{1}{i} \frac{\partial f_i}{\partial x} \\ \eta = \Sigma \eta_i - \frac{r^2}{2} \Sigma \frac{1}{i} \frac{\partial f_i}{\partial y} \\ \zeta = \Sigma \zeta_i - \frac{r^2}{2} \Sigma \frac{1}{i} \frac{\partial f_i}{\partial z}. \end{array} \right.$$

Teraz weźmy równania graniczne IV i podstawmy w nich wartości na P, Q etc..., następnie zaś wykonajmy niektóre przekształcenia. Najpierw zauważmy, że:

$$\alpha = \frac{x}{r}, \quad \beta = \frac{y}{r}, \quad \gamma = \frac{z}{r},$$

zamiast $x \xi + y \eta + z \zeta$ napiszmy μ , dalej zwróćmy uwagę na to, że:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial x} &= \xi + x \frac{\partial \xi}{\partial x} + y \frac{\partial \eta}{\partial x} + z \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \mu}{\partial y} &= \eta + x \frac{\partial \xi}{\partial y} + y \frac{\partial \eta}{\partial y} + z \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \mu}{\partial z} &= \zeta + x \frac{\partial \xi}{\partial z} + y \frac{\partial \eta}{\partial z} + z \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{aligned}$$

oraz że:

$$\frac{\partial \mu}{\partial r} = x \frac{\partial \mu}{\partial x} + y \frac{\partial \mu}{\partial y} + z \frac{\partial \mu}{\partial z}$$

a będziemy mogli napisać te równania w kształcie:

$$\begin{aligned} \left[\left(k - \frac{2}{3} n \right) \theta + g \rho \frac{\mu}{r} \right] x + n \left[r \frac{\partial \xi}{\partial r} - \xi + \frac{\partial \mu}{\partial x} \right] &= 0 \\ \left[\left(k - \frac{2}{3} n \right) \theta + g \rho \frac{\mu}{r} \right] y + n \left[r \frac{\partial \eta}{\partial r} - \eta + \frac{\partial \mu}{\partial y} \right] &= 0 \\ \left[\left(k - \frac{2}{3} n \right) \theta + g \rho \frac{\mu}{r} \right] z + n \left[r \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \zeta + \frac{\partial \mu}{\partial z} \right] &= 0. \end{aligned}$$

W równaniach tych figuruje iloczyn $k \theta$, w którym ze względu na hipotezę nieściślności:

$$k = \infty, \quad \theta = 0,$$

ale który tem niemniej jest wielkością skończoną. Rzeczywiście wiemy z poprzednich równań, że:

$$\theta = \Sigma \theta_i = \sum \frac{(n \lambda_i - W_i)}{k + \frac{1}{3} n},$$

a zatem dla $k = \infty$

$$\left(k - \frac{2}{3} n\right) \theta = \Sigma (n \lambda_i - W_i)$$

albo jeżeli podstawimy f_i zamiast λ_i

$$\left(k - \frac{2}{3} n\right) \theta = \sum \left(n \cdot \frac{2i+1}{i} f_i - W_i\right)$$

gdzie f_i ma znaczenie podane w równaniu VII. Wskutek tego można napisać równania graniczne IV w kształcie:

$$\left[\sum \left\{\frac{2i+1}{i} n f_i - W_i\right\} + g \rho \frac{\mu}{r}\right] x + n \left[r \frac{\partial \xi}{\partial r} - \xi + \frac{\partial \mu}{\partial x}\right] = 0$$

$$\left[\sum \left\{\frac{2i+1}{i} n f_i - W_i\right\} + g \rho \frac{\mu}{r}\right] y + n \left[r \frac{\partial \eta}{\partial r} - \eta + \frac{\partial \mu}{\partial y}\right] = 0$$

$$\left[\sum \left\{\frac{2i+1}{i} n f_i - W_i\right\} + g \rho \frac{\mu}{r}\right] z + n \left[r \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \zeta + \frac{\partial \mu}{\partial z}\right] = 0$$

dla $r = R$

gdzie R oznacza promień zewnętrznej powierzchni nieodkształconej kuli. Gdy pierwsze z tych równań pomnożymy przez x , drugie przez y , trzecie przez z i dodamy je do siebie, to ze względu na to, że:

$$\frac{\partial \mu}{\partial r} = x \frac{\partial \mu}{\partial x} + y \frac{\partial \mu}{\partial y} + z \frac{\partial \mu}{\partial z}$$

oraz, że:

$$\mu = x \xi + y \eta + z \zeta$$

otrzymamy:

$$\sum \left[\frac{2i+1}{i} n f_i - W_i\right] + g \rho \frac{\mu}{r} + \frac{2n}{r^2} \left(r \frac{\partial \mu}{\partial r} - \mu\right) = 0 \quad \text{IX}$$

dla $r = R$.

Z tego zaś wzoru i z poprzednich przez eliminację wyrazu:

$$\sum \left(\frac{2i+1}{i} n f_i - W_i\right) + g \rho \frac{\mu}{r}$$

otrzymamy równania graniczne IV w kształcie:

$$\text{X} \quad \left\{ \begin{array}{l} r \frac{\partial \xi}{\partial r} - \xi + \frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{2x}{r^2} \left(r \frac{\partial \mu}{\partial r} - \mu \right) = 0 \\ r \frac{\partial \eta}{\partial r} - \eta + \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{2y}{r^2} \left(r \frac{\partial \mu}{\partial r} - \mu \right) = 0 \\ r \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \zeta + \frac{\partial \mu}{\partial z} - \frac{2z}{r^2} \left(r \frac{\partial \mu}{\partial r} - \mu \right) = 0 \end{array} \right.$$

dla $r = R$.

Właściwie więc obecnie zamiast trzech równań granicznych IV mamy aż cztery równania graniczne t. j. jedno równanie IX i trzy równania X. Naturalnie tylko trzy z pomiędzy tych równań są od siebie niezależne, co zresztą jest od razu widoczne ze względu na sposób, w jaki wyprowadziliśmy te równania.

Wzory w rodzaju wzorów X przedstawiają pewną niedogodność, mianowicie w tych wzorach figurują wyrazy w rodzaju n. p. $x\mu$ etc..., które nie są funkcyjami kulistymi, a zatem w dalszych rachunkach, gdzie ciągle będziemy się posługiwać funkcyjami kulistymi, mogłyby nam sprawić pewien kłopot, należy więc nieco przekształcić te wyrazy. W tym celu można użyć tożsamości:

$$\text{XI} \quad \begin{aligned} x \xi_i &= \frac{1}{2i+1} \left[r^2 \frac{\partial \xi_i}{\partial x} - r^{2i+3} \frac{\partial}{\partial x} (\xi_i r^{-2i-1}) \right] \\ y \eta_i &= \frac{1}{2i+1} \left[r^2 \frac{\partial \eta_i}{\partial y} - r^{2i+3} \frac{\partial}{\partial y} (\eta_i r^{-2i-1}) \right] \end{aligned}$$

i innych podobnych. Na mocy tych tożsamości ze wzoru:

$$\mu = \Sigma (x \xi_i + y \eta_i + z \zeta_i) - \frac{r^2}{2} \Sigma f_i$$

otrzymamy po łatwych przekształceniach:

$$\text{XII} \quad \mu = - \sum \frac{1}{2i+1} \left[(2i-1) \frac{r^2}{2} \cdot f_{i-1} + \varphi_{i+1} \right]$$

gdzie:

$$\text{XIII} \quad \varphi_{i+1} = r^{2i+3} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\xi_i r^{-2i-1}) + \frac{\partial}{\partial y} (\eta_i r^{-2i-1}) + \frac{\partial}{\partial z} (\zeta_i r^{-2i-1}) \right]$$

φ_{i+1} jest również funkcyją kulistą stopnia $(i+1)$.

Ze wzoru XII wynikają wzory:

$$\text{XIV} \quad \begin{aligned} r \frac{\partial \mu}{\partial r} &= - \sum \frac{i+1}{2i+1} \left[(2i-1) \frac{r^2}{2} f_{i-1} + \varphi_{i+1} \right] \\ r \frac{\partial \mu}{\partial r} - \mu &= - \sum \frac{i}{2i+1} \left[(2i-1) \frac{r^2}{2} \cdot f_{i-1} + \varphi_{i+1} \right] \end{aligned}$$

a dalej:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = - \sum \frac{1}{2i+1} \left[(2i-1) x f_{i-1} + (2i-1) \frac{r^2}{2} \frac{\partial f_{i-1}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial x} \right]$$

skąd, posługując się tożsamościami w rodzaju tożsamości XI, po łatwych przekształceniach otrzymamy wzory:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = - \sum \frac{r^2}{2} \frac{\partial f_{i-1}}{\partial x} + \sum \frac{1}{2i+1} \left[r^{2i+1} \frac{\partial}{\partial x} (f_{i-1} r^{-2i+1}) - \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial x} \right] \quad \text{XV}$$

oraz podobne wzory dla $\frac{d\mu}{dy}$ i $\frac{d\mu}{dz}$.

Tak samo, pisząc wzory V w nieco odmiennym kształcie, mamy:

$$\xi = \sum \xi_i - \frac{r^2}{2} \sum \frac{1}{i-1} \cdot \frac{\partial f_{i-1}}{\partial x}$$

$$\eta = \sum \eta_i + \frac{r^2}{2} \sum \frac{1}{i-1} \cdot \frac{\partial f_{i-1}}{\partial y}$$

$$\zeta = \sum \zeta_i - \frac{r^2}{2} \sum \frac{1}{i-1} \cdot \frac{\partial f_{i-1}}{\partial z}$$

skąd wynika wzór:

$$r \frac{d\xi}{dr} = \sum i \left(\xi_i - \frac{r^2}{2} \frac{1}{i-1} \frac{\partial f_{i-1}}{\partial x} \right)$$

i podobne wzory na:

$$r \frac{d\eta}{dr} \quad \text{i} \quad r \frac{d\zeta}{dr}$$

Z tych ostatnich wzorów i ze wzoru XV oraz analogicznych wzorów na $\frac{\partial \mu}{\partial y}$ i $\frac{\partial \mu}{\partial z}$ otrzymamy:

$$\begin{aligned} r \frac{\partial \xi}{\partial r} - \xi + \frac{\partial \mu}{\partial x} = & \quad \text{XVI} \\ = \sum (i-1) \xi_i - \sum r^2 \frac{\partial f_{i-1}}{\partial x} + \sum \frac{1}{2i+1} \left[r^{2i+1} \frac{\partial}{\partial x} (f_{i-1} r^{-2i+1}) - \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

oraz podobne wzory na:

$$r \frac{\partial \eta}{\partial r} - \eta + \frac{\partial \mu}{\partial y} \quad \text{i} \quad r \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \zeta + \frac{\partial \mu}{\partial z}$$

Posługując się tymi ostatnimi wzorami, dalej wzorem XIV i tożsamościami XI oraz innymi podobnymi, możemy napisać wzory X w kształcie:

$$X(a) \left\{ \begin{aligned} & \Sigma(i-1)\zeta_i - \sum \frac{i+1}{2i+1} r^2 \frac{\partial f_{i-1}}{\partial x} - \sum \frac{i-1}{2i+1} r^{2i+1} \frac{\partial}{\partial x} (f_{i-1} r^{-2i+1}) \\ & - \sum \frac{1}{2i+1} \cdot \frac{3}{2i+3} \cdot \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial x} - \\ & - \sum \frac{2i}{2i+1} \cdot \frac{1}{2i+3} r^{2i+3} \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_{i+1} r^{-2i-3}) = 0 \end{aligned} \right.$$

dla $r = R$

i podobne dwa równania też zachodzące dla $r = R$, a zawierające $\Sigma(i-1)\eta_i$ i $\Sigma(i-1)\zeta_i$.

Te równania rozpadną się na szereg oddzielnych równań, albowiem współczynnik każdej oddzielnej kulistej powierzchniowej funkcji stopnia i musi być oddzielnie równy zeru. Ponieważ ζ_i etc.

$r^{2i+1} \frac{\partial}{\partial x} (f_{i-1} r^{-2i+1})$ i t. d., $\frac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial x}$ i t. d. zawierają kuliste powierzchniowe funkcyje stopnia i , zaś $\frac{\partial f_{i-1}}{\partial x}$ i t. d. zawierają kuliste powierzchniowe funkcyje stopnia $i-2$, wreszcie $\frac{\partial}{\partial x} (\varphi_{i+1} r^{-2i-3})$ i t. d. zawierają kuliste powierzchniowe funkcyje stopnia $i+2$, więc tylko co napisane równania rozpadają się na równania następującego kształtu:

$$(i-1)\zeta_i - \frac{i+3}{2i+5} r^2 \frac{\partial f_{i+1}}{\partial x} - \frac{i-1}{2i+1} r^{2i+1} \frac{\partial}{\partial x} (f_{i-1} r^{-2i+1}) - \frac{1}{2i+1} \cdot \frac{3}{2i+3} \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial x} - \frac{2(i-2)}{(2i-1)(2i-3)} r^{2i-1} \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_{i-1} r^{-2i+1}) = 0$$

dla $r = R$

$i = 0, 1, 2, 3 \dots$ i t. d. oraz podobne równania zawierające $(i-1)\eta_i$ oraz $(i-1)\zeta_i$.

W napisanem przed chwilą równaniu wyrazy pierwszy, trzeci i czwarty mają kształt funkcji kulistych (objętościowych)¹⁾, drugi wyraz przybierze kształt funkcji kulistej objętościowej, jeżeli napiszemy zamiast:

$$r^2 \frac{\partial f_{i+1}}{\partial x}, \quad R^2 \frac{\partial f_{i+1}}{\partial x}$$

a piąty, jeżeli napiszemy zamiast:

¹⁾ Na wzór angielskich autorów funkcją kulistą objętościową nazywamy funkcją kulistą trzech zmiennych x, y, z albo r, θ i ψ , zaś funkcją kulistą powierzchniową nazywamy funkcją kulistą dwóch zmiennych θ i ψ . Otrzymujemy powierzchniową funkcję z objętościowej kładąc $r = \text{stała}$.

$$r^{2i-1} \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_{i-1} r^{-2i+1}), \quad \frac{r^{2i+1}}{R^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_{i-1} r^{-2i+1}).$$

Taka przemiana jest najzupełniej dozwolona, albowiem równanie zachodzi właśnie przy $r = R$. Ale jeżeli ją dopełnimy, to okaże się, iż nasze równania właściwie wyrażają ten fakt, że w powierzchni $r = R$ suma pięciu funkcyi kulistych tego samego stopnia równa się zeru. Wedle znanych własności funkcyi kulistych ¹⁾ ta suma musi być równa zeru nie tylko dla $r = R$ ale w całej przestrzeni. A zatem z warunkowych równań X otrzymujemy zachodzące w całej przestrzeni równania:

$$\left. \begin{aligned} (i-1) \zeta_i - \frac{i+3}{2i+5} R^2 \frac{\partial f_{i+1}}{\partial x} - \frac{i-1}{2i+1} r^{2i+1} \frac{\partial}{\partial x} (f_{i-1} r^{-2i+1}) \\ - \frac{1}{2i+1} \cdot \frac{3}{2i+3} \cdot \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial x} - \\ - \frac{2(i-2)}{(2i-1)(2i-3)} \frac{r^{2i+1}}{R^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_{i-1} r^{-2i+1}) = 0 \end{aligned} \right\} \text{XVII}$$

dla $i = 0, 1, 2, 3 \dots$

oraz dwa podobne zawierające $(i-1) \eta_i$ i $(i-1) \zeta_i$.

Jeżeli przeróżniczkujemy pierwsze równanie XVII względem x , drugie względem y , trzecie względem z i dodamy je do siebie, jeżeli następnie weźmiemy w uwagę tę okoliczność, że:

$$\nabla^2 f_{i+1} = 0, \quad \nabla^2 \varphi_{i+1} = 0,$$

a wreszcie weźmiemy na uwagę wzory VII i XIII, to otrzymamy wzór:

$$(i-1)(i+1) R^2 f_{i-1} + \frac{2i(i-2)(2i+1)}{(2i-3)(2i-1)} \cdot \varphi_{i-1} = 0$$

albo pisząc i zamiast $i-1$

$$\varphi_i = -R^2 A_i f_i$$

gdzie:

$$A_i = \frac{i(i+2)(2i-1)(2i+1)}{2(i-1)(i+1)(2i+3)}$$

Z drugiej strony, jeżeli w równaniu IX podstawimy wartości na μ i $r \frac{d\mu}{dr} - \mu$ ze wzorów XII i XIV. a następnie przyrównamy do zera

¹⁾ Funkcye kuliste czynią zadość równaniu Laplace'a. Skoro zaś funkcya czyniąca zadość temu równaniu równa się zeru w powierzchni pewnej kuli, to musi być równą zeru w całym wnętrzu tej kuli. Jest to specjalny przykład pewnej ogólnej własności funkcyi czyniących zadość równaniu Laplace'a.

oddzielnie każdą sumę wyrazów zawierających funkcyę kuliste tego samego stopnia, to po łatwych rachunkach, rozumując w podobny sposób jak poprzednio, otrzymamy równania kształtu:

$$\frac{2i-1}{2i+1} \cdot \left[\frac{(2i+1) - i(i-1)}{i-1} \cdot n - \frac{1}{2} g \rho R \right] R^2 f_{i-1} - R^2 \cdot W_{i-1} - \frac{1}{2i-3} \cdot [2(i-2)n + g \rho R] \varphi_{i-1} = 0$$

albo kładąc wszędzie i zamiast $i-1$

$$\frac{2i+1}{2i+3} \left[\frac{(2i+3) - i(i+1)}{i} n - \frac{1}{2} g \rho R \right] R^2 f_i - R^2 W_i$$

$$\text{XIX} \quad - \frac{2}{2i-1} \left[(i-1)n + \frac{1}{2} g \rho R \right] \varphi_i = 0.$$

Z tego równania i z równania XVIII zaraz znajdziemy:

$$\left. \begin{array}{l} f_i = \frac{C_i W_i}{B_i} \\ \varphi_i = - R^2 \cdot \frac{D_i}{B_i} W_i \end{array} \right\} \text{gdzie:}$$

$$\text{XX} \quad \left. \begin{array}{l} B_i = (i-1) [2(i+1)^2 + 1] n + i(2i+1) \frac{1}{2} g \rho R \\ C_i = \frac{(i-1) i (i+1) (2i+3)}{2i+1} \\ D_i = \frac{i^2 (i+2) (2i-1)}{2} \end{array} \right\}$$

Podstawiając wartości na φ_i i f_i z tylko co otrzymanych wzorów we wzory XVII, obliczymy ξ_i , η_i , ζ_i jako funkcyę zmiennej W_i . Ponieważ równania XVII jako też równania, któremi tu posługiwaliśmy się dla wyprowadzenia wzorów XX pochodzą od równań wyrażających warunki graniczne, a zatem otrzymane w ten sposób wyrażenia na ξ_i , η_i , ζ_i będą czynić zadość warunkom granicznym. Posiadając wyrażenia na ξ_i , η_i , ζ_i i f_i zaraz otrzymamy wyrażenia na przesunięcia ξ , η i ζ , przyczem naturalnie te przesunięcia będą wyrażone jako funkcyę zmiennych W_0 , W_1 , W_2 etc..., ale właśnie te zmienne W_1 , W_2 etc. dotąd nie zostały określone, musimy więc zająć się nimi bliżej. Aby określić W_1 , W_2 etc... trzeba obliczyć wyrażenie dla potencyału W .

Potencyał W jest sumą dwóch potencyałów: potencyału $\psi - \psi_0$ sił odśrodkowych, który, jak wyżej znaleźliśmy, jest funkcyą kulistą

drugiego stopnia (funkcję tę oznaczyliśmy przez ψ_2) oraz potencjału przyciągania $V - V_0$, który czyni zadość równaniu Laplace'a a zatem może być przedstawiony przez szereg funkcyj kulistych. Potencjał $V - V_0$ jest, jak wiemy, różnicą potencjałów przyciągania odkształconego i nieodkształconego ciała, ponieważ zaś, jak to wyżej założyliśmy, ciało jest nieściśliwe, więc $V - V_0$ jest potencjałem przyciągania pewnej warstwy o zmiennej grubości składającej się z materiału o dodatniej gęstości ρ w tych miejscach, gdzie powierzchnia odkształconego ciała przechodzi ponad powierzchnią nieodkształconego, oraz z materiału o ujemnej gęstości $-\rho$ w tych miejscach, gdzie powierzchnia odkształconego ciała przechodzi po pod powierzchnią nieodkształconego. Lecz ponieważ odkształcenie jest bardzo nieznaczne i warstwa, której potencjałem jest $V - V_0$, jest wszędzie bardzo cienką, więc można przyciąganie tej warstwy zamienić przez przyciąganie pewnej nieskończenie cienkiej warstwy o powierzchniowej gęstości zmieniającej się wedle prawa:

$$\text{gęst.} = \rho h$$

gdzie h oznacza odległość między powierzchnią odkształconego i nieodkształconego ciała. Jednocześnie ze względu na to, że można zaniedbać nieskończenie małe drugiego rzędu, h oznacza przesunięcie w kierunku promienia. Błąd pochodzący stąd, że zamiast przyciągania pewnej warstwy o bardzo małej ale skończonej grubości wprowadzamy w rachunek przyciąganie nieskończenie cienkiej warstwy jest w całej przestrzeni zajętej przez ciało zupełnie nieznaczny, wyjątek stanowią tylko te punkty, które znajdują się w najbliższym sąsiedztwie owej skondensowanej warstwy, ale ten lokalny, jeśli można tak się wyrazić, błąd niema żadnego znacniejszego wpływu na ostateczne rezultaty naszych dalszych rachunków.

Ale:

$$\rho h = \rho \frac{\mu}{r} \quad \text{dla } r = R$$

a zatem wedle wzoru VIII:

$$\rho h = -\rho \sum \frac{1}{2i+1} \cdot \left[\frac{(2i-1)}{2} R f_{i-1} + \frac{1}{R} \varphi_{i+1} \right]$$

przezem naturalnie f i φ powinny posiadać te wartości, które odpowiadają hipotezie $r=R$. A zatem wedle znanych twierdzeń¹⁾ o przyciąganiu nieskończenie cienkiej warstwy, rozpostartej na powierzchni

¹⁾ Porów. Treat. on Nat. Phil. II część str. 84.

kuli, potencjał przyciągania $V - V_0$ we wnętrzu kuli (bo tu chodzi o wnętrze) będzie:

$$V - V_0 = - 4\pi \rho R^2 k \sum \frac{1}{2i+1} \left[\frac{1}{2} f_{i-1} + \frac{1}{R^2} \cdot \frac{1}{2i+3} \cdot \varphi_{i+1} \right].$$

W tym ostatnim wzorze k oznacza chwilowo stałą przyciągania, funkcje f i φ są nieograniczenie zmienne t. j. przybierają w każdym punkcie wnętrza kuli te wartości, które właśnie odpowiadają danemu punktowi. We wzorze na potencjał $V - V_0$ można zastąpić f_i i φ_i przez W_i , mianowicie:

$$f_{i-1} = \frac{C_{i-1}}{B_{i-1}} \cdot W_{i-1},$$

$$\varphi_{i+1} = - \frac{D_{i+1}}{B_{i+1}} \cdot R^2 W_{i+1}.$$

Zamieńmy też stałą przyciągania przez jej wartość

$$k = \frac{3g}{4\pi R}$$

gdzie g oznacza przyspieszenie siły ciężkości na powierzchni ziemi; po dopełnieniu tych podstawień otrzymamy:

$$V - V_0 = - \rho 3g R \sum \frac{1}{2i+1} \left[\frac{1}{2} \frac{C_{i-1}}{B_{i-1}} W_{i-1} - \frac{1}{2i+3} \cdot \frac{D_{i+1}}{B_{i+1}} \cdot W_{i+1} \right]$$

albo porządkując:

$$V - V_0 = - \rho 3g R \sum \frac{1}{B_i} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{C_i}{2i+3} - \frac{1}{2i-1} \cdot \frac{D_i}{2i+1} \right] W_i.$$

Lecz wedle założeń uczynionych na początku naszych rozumowań:

$$W = V - V_0 + \psi_2 = \Sigma W_i,$$

a zatem otrzymamy równanie:

$$- 3g R \Sigma \frac{1}{B_i} \left[\frac{1}{2} \frac{C_i}{2i+3} - \frac{1}{2i-1} \cdot \frac{D_i}{2i+1} \right] W_i + \psi_2 = \Sigma W_i,$$

które ze względu na własności funkcji kulistych rozpada się na tyleż równań, ile jest funkcji kulistych różnych stopni. W ten sposób dla

$$i = 0, 1, 3, 4 \dots \text{ i t. d.}$$

otrzymujemy równania kształtu:

$$\left[1 + 3g R \frac{1}{B_i} \left(\frac{1}{2} \frac{C_i}{2i+3} - \frac{1}{2i-1} \cdot \frac{D_i}{2i+1} \right) \right] W_i = 0,$$

z których jako jedyne możebne rozwiązanie natychmiast otrzymujemy:

$$W_i = 0$$

albowiem współczynnik przy W_i nie może być równy zeru. Tylko dla

$$i = 2$$

otrzymujemy:

$$\left[1 + 3gR \frac{1}{B_2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{C_2}{7} - \frac{1}{3} \cdot \frac{D_2}{5} \right) \right] W_2 = \psi_2.$$

Ale wedle wzorów XX

$$C_2 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{5}$$

$$D_2 = 3 \cdot 8$$

$$B_2 = 19n + 5g\rho R.$$

Podstawiając te wartości w tylko co otrzymany wzór na W_2 , znajdziemy

$$W_2 = \frac{B_2}{F_2} \psi_2$$

gdzie, jak wprzódy:

$$B_2 = 19n + 5g\rho R$$

zaś

$$F_2 = B_2 - 3gR = 19n + 2gR.$$

XXI

Ponieważ wszystkie inne W_i są równe zeru, przeto wyrażenie potencjału W redukuje się do

$$W = W_2$$

t. j. do funkcyi kulistej drugiego stopnia. Stosownie do wzorów XX wszystkie funkcyje f i φ są równe zeru prócz tylko:

$$f_2 = \frac{C_2 W_2}{B_2} = \frac{C_2}{F_2} \psi_2$$

$$\varphi_2 = - \frac{R^2 \cdot D_2}{B_2} W_2 = - \frac{R^2 \cdot D_2}{F_2} \cdot \psi_2.$$

XX (a)

Powracając do wzorów XVII natychmiast spostrzegamy, że wszystkie funkcyje ξ , η , ζ muszą być równe zeru prócz tylko

$$\xi_1, \eta_1, \zeta_1 \quad \text{i} \quad \xi_3, \eta_3, \zeta_3,$$

a więc wzory V (a) przywodzą się do:

$$\text{XXII} \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \xi_1 + \xi_3 - \frac{r^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \eta = \eta_1 + \eta_3 - \frac{r^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \zeta = \zeta_1 + \zeta_3 - \frac{r^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{array} \right.$$

Ale podczas gdy ξ_3 , η_3 , i ζ_3 mogą być określone ze wzorów XVII, ξ_1 , η_1 , ζ_1 nie dają się określić z tych wzorów, albowiem ξ_1 , η_1 , ζ_1 występują w nich ze współczynnikiem równym zeru. Dla $i = 1$ wzory XVII sprowadzają się do:

$$\begin{aligned} \frac{4}{7} R^2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{1}{5} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} &= 0 \\ \frac{4}{7} R^2 \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{1}{5} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} &= 0 \\ \frac{4}{7} R^2 \frac{\partial f_2}{\partial z} + \frac{1}{5} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} &= 0, \end{aligned}$$

co najzupełniej zgadza się ze związkiem XVII t. j. ze związkiem:

$$\varphi_2 = -R^2 A_2 f_2$$

albowiem:

$$A_2 = \frac{4 \cdot 5}{7}.$$

Ale wzory te pozostawiają ξ_1 , η_1 i ζ_1 nieokreślonymi. Pochodzi to stąd, że do przesunięć ξ , η , ζ można zawsze dodać nieskończenie mały obrót około dowolnej osi przechodzącej przez środek, przyczem warunki zadania w niczem nie zostaną naruszone. Ponieważ taki obrót [obróć w rodzaju obrotu ciała sztywnego] właściwie nie oznacza odkształcenia tylko inne zorientowanie ciała, więc postaramy się określając ξ_1 , η_1 , ζ_1 wyeliminować ten dodatkowy obrót. Uczynimy to w następujący sposób. Wedle wzoru VII pamiętając o tem, że wszystkie funkcyje f oprócz f_2 są równe zeru, mamy:

$$f_0 = \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial z} = 0.$$

Z tego ostatniego wzoru i ze wzoru XIII zaraz wypada:

$$\text{XXIII} \quad \varphi_2 = r^5 \left[\frac{\partial}{\partial x} (\xi_1 r^{-3}) + \frac{\partial}{\partial y} (\eta_1 r^{-3}) + \frac{\partial}{\partial z} (\zeta_1 r^{-3}) \right] = -3(x\xi_1 + y\eta_1 + z\zeta_1).$$

Ale jako funkcyje kuliste pierwszego stopnia ξ_1 , η_1 , ζ_1 mają następujący kształt:

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \eta_1 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ \zeta_1 &= a_3 x + b_3 y + c_3 z\end{aligned}$$

gdzie a_1, b_1 i t. d. są to pewne stałe. Gdybyśmy podstawili te wartości na ζ_1, η_1 i ζ_1 w równaniu XXIII, to ze względu na to, że φ_2 jest funkcją kulistą, zaraz znaleźlibyśmy warunek:

$$a_1 + b_2 + c_3 = 0.$$

Z drugiej strony ponieważ φ_2 a więc tak samo $-\frac{1}{3}\varphi_2$ jest funkcją kulistą drugiego stopnia, więc musi być:

$$-\frac{1}{3}\varphi_2 = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz,$$

gdzie a, b i t. d. są to pewne stałe. Pomiędzy temi stałemi musi istnieć związek:

$$a + b + c = 0.$$

Dalej, aby uczynić zadość równaniu XXIII, między stałemi a, b i t. d. z jednej oraz a_1, b_1 i t. d. z drugiej strony muszą istnieć następujące związki:

$$\begin{aligned}a_1 &= a, & b_2 &= b, & c_3 &= c, \\ a_2 + b_1 &= 2d, & c_1 + a_3 &= 2e, & b_3 + c_2 &= 2f.\end{aligned}$$

Tym ostatnim związkiem uczynimy zadość kładąc:

$$\begin{aligned}a_2 &= d + \omega_3, & b_1 &= d - \omega_3 \\ c_1 &= e + \omega_2, & a_3 &= e - \omega_2 \\ b_3 &= f + \omega_1, & c_2 &= f - \omega_1\end{aligned}$$

gdzie $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ są zupełnie dowolne. W ten sposób otrzymamy:

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= ax + dy + ez + \omega_2 z - \omega_3 y = -\frac{1}{2 \cdot 3} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \omega_2 z - \omega_3 y \\ \eta_1 &= dx + by + fz + \omega_3 x - \omega_1 z = -\frac{1}{2 \cdot 3} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \omega_3 x - \omega_1 z \\ \zeta_1 &= ex + fy + cz + \omega_1 y - \omega_2 x = -\frac{1}{2 \cdot 3} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \omega_1 y - \omega_2 x.\end{aligned}$$

Wyrazy zawierające $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ oznaczają właśnie ów dowolny obrót około dowolnej osi przechodzącej przez środek współrzędnych. Ponieważ, jakśmy już wyżej zauważyli, taki obrót nie jest wcale odkształceniem, więc należy go zupełnie pominąć t. j. należy położyć:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0,$$

a zatem pozostaje:

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= -\frac{1}{2 \cdot 3} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \\ \eta_1 &= -\frac{1}{2 \cdot 3} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \\ \zeta_1 &= -\frac{1}{2 \cdot 3} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}.\end{aligned}$$

Jednocześnie ze wzorów XVII natychmiast otrzymamy:

$$\zeta_3 = \frac{1}{7} r^2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{1}{3 \cdot 5} \frac{r^2}{R^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{5}{7} x f_2 - \frac{1}{3} \frac{x}{R^2} \varphi_2$$

oraz dwa inne zupełnie podobne wzory na η_3 i ζ_3 .

A zatem ostatecznie wedle wzoru XXII po pewnem uporządkowaniu otrzymamy:

$$\text{XXIV} \quad \xi = \frac{1}{3R^2} \left(\frac{r^2}{5} - \frac{R^2}{2} \right) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{3}{4 \cdot 7} r^2 \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{5}{7} x f_2 - \frac{1}{3} \frac{x}{R^2} \varphi_2$$

oraz dwa zupełnie podobne wzory na η i ζ .

Teraz należy podstawić wartości na φ_2 i f_2 ze wzorów XX (a). Po łatwych ruchunkach znajdziemy, kładąc jak we wzorach XXI

$$F_2 = 19n + 2g\rho R,$$

$$\text{XXV} \left\{ \begin{aligned}\zeta &= \frac{1}{F_2} \left[\left(4R^2 - \frac{5}{2} r^2 \right) \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + 2x \psi_2 \right] \\ \eta &= \frac{1}{F_2} \left[\left(4R^2 - \frac{5}{2} r^2 \right) \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + 2y \psi_2 \right] \\ \zeta &= \frac{1}{F_2} \left[\left(4R^2 - \frac{5}{2} r^2 \right) \frac{\partial \psi_2}{\partial z} + 2z \psi_2 \right]\end{aligned}\right.$$

oraz:

$$\mu = rh = \frac{1}{F_2} \cdot (8R^2 - 3r^2) \psi_2$$

gdzie:

$$2\psi_2 = -\rho [x^2 p^2 + y^2 q^2 - z^2 (p^2 + q^2) + 2xypq + 2xzpr + 2yzqr].$$

Obliczywszy przesunięcia ξ , η i ζ dokonaliśmy połowy zadania, trzeba teraz dokonać drugiej połowy t. j. rozpatrzyć ruch odkształcającego się ciała. W drugiej części zadania musimy wziąć na uwagę tę okoliczność, że choć odkształcenia obliczaliśmy dla kuli, jednak w rzeczywistości nieodkształcone ciało jest elipsoidą obrotową. Swoją drogą odkształcenie, spowodowane przez siły odśrodkowe symetryczne wzglę-

dem osi wciąż przechodzącej przez dawny środek masy, nie zmienia położenia środka masy, a zatem punkt

$$x = y = z = 0$$

jest środkiem masy odkształconego ciała. Równania różniczkowe określające kręcenie się ciała dokoła środka masy są to te same równania, którymi posługiwaliśmy się w poprzednim rozdziale (w poprzednim rozdziale równania, o których mowa, były oznaczone numerem IV, a potem XII)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dH_x}{dt} - H_y r + H_z q &= 0 \\ \frac{dH_y}{dt} - H_z p + H_x r &= 0 \\ \frac{dH_z}{dt} - H_x q + H_y p &= 0 \end{aligned} \right\} \text{XXVI}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} H_x &= m_x + Ap - Fq - Er \\ H_y &= m_y - Fp + Bq - Dr \\ H_z &= m_z - Ep - Dq + Cr. \end{aligned}$$

W tych wzorach m_x , m_y i m_z oznaczają jak w poprzednim rozdziale momenty ruchu względnego, A , B i C jak zwykle momenty bezwładności względem osi współrzędnych, zaś D , E i F tak zwane iloczyny bezwładności względem tychże osi. Wprowadziliśmy iloczyny bezwładności dlatego, że osie współrzędnych zostały obrane w taki sposób, że D , E i F są równe zeru wtedy, gdy niema odkształcenia, skoro zaś jest odkształcenie, to D , E i F nie są już równe zeru.

Trzeba przedewszystkiem obliczyć wyrazy m_x i t. d., A i t. d. D i t. d. Aby uniknąć dwuznaczności znowu chwilowo wprowadzamy symbole x_0 , y_0 , z_0 zamiast x , y , z na oznaczenie współrzędnych elementu w razie gdy nie ma odkształcenia, przyczem kładziemy:

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2.$$

Pod x , y , z będziemy znowu chwilowo rozumieć współrzędne elementu gdy ciało jest odkształcone, a zatem będziemy pisać tak samo jak w początku rozdziału:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \xi \\ y &= y_0 + \eta \\ z &= z_0 + \zeta. \end{aligned}$$

A zatem będziemy mieli oznaczając, jak to się zwykle robi, przez m masę elementu:

$$m_x = \Sigma m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = \Sigma m \left[(y_0 + \eta) \frac{d}{dt} (z_0 + \zeta) - (z_0 + \zeta) \frac{d}{dt} (y_0 + \eta) \right]$$

$$m_y = \Sigma m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = \Sigma m \left[(z_0 + \zeta) \frac{d}{dt} (x_0 + \xi) - (x_0 + \xi) \frac{d}{dt} (z_0 + \zeta) \right]$$

$$m_z = \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \Sigma m \left[(x_0 + \xi) \frac{d}{dt} (y_0 + \eta) - (y_0 + \eta) \frac{d}{dt} (x_0 + \xi) \right]$$

Lecz z jednej strony x_0, y_0, z_0 są niezależne od czasu, zaś z drugiej:

$$\Sigma m \left(\eta \frac{d\zeta}{dt} - \zeta \frac{d\eta}{dt} \right) \text{ i t. d.}$$

są bardzo małemi wielkościami wobec pozostałych wyrazów, a zatem można napisać:

$$\text{XXVII} \quad \left\{ \begin{array}{l} m_x = \Sigma m \left(y_0 \frac{d\zeta}{dt} - z_0 \frac{d\eta}{dt} \right) \\ m_y = \Sigma m \left(z_0 \frac{d\xi}{dt} - x_0 \frac{d\zeta}{dt} \right) \\ m_z = \Sigma m \left(x_0 \frac{d\eta}{dt} - y_0 \frac{d\xi}{dt} \right). \end{array} \right.$$

Dalej mamy:

$$A = \Sigma m (y^2 + z^2) = \Sigma m [(y_0 + \eta)^2 + (z_0 + \zeta)^2] \text{ i t. d.}$$

a więc, odrzucając znowu małe wyrazy drugiego rzędu oraz oznaczając momenty bezwładności nieodkształconego ciała przez A_0, B_0 i C_0 , znajdziemy:

$$\text{XXVIII} \quad \left\{ \begin{array}{l} A = A_0 + 2 \Sigma m (y_0 \eta + z_0 \zeta) \\ B = B_0 + 2 \Sigma m (x_0 \xi + z_0 \zeta) \\ C = C_0 + 2 \Sigma m (x_0 \xi + y_0 \eta). \end{array} \right.$$

Wreszcie mamy:

$$D = \Sigma m y z = \Sigma m (y_0 + \eta) (z_0 + \zeta) \text{ i t. d.}$$

a więc, odrzucając znowu małe wyrazy drugiego rzędu i zważywszy, że dzięki odpowiedniemu wyborowi osi współrzędnych iloczyn bezwładności nieodkształconego ciała są równe zeru, otrzymamy:

$$\text{XXIX} \quad \left\{ \begin{array}{l} D = \Sigma m (y_0 \zeta + z_0 \eta) \\ E = \Sigma m (z_0 \xi + x_0 \zeta) \\ F = \Sigma m (y_0 \xi + x_0 \eta). \end{array} \right.$$

W potencjale sił odśrodkowych ψ_2 możemy też odrzucić wyrazy zawierające p^2 i q^2 oraz iloczyn pq , albowiem te wyrazy będą bardzo małe wobec pozostałych. W ten sposób pozostanie:

$$\psi_2 = -\rho r z_0 (p x_0 + q y_0),$$

a więc:

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x} = -\rho p r z_0, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial y} = -\rho q r z_0, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = -\rho r (p x_0 + q y_0).$$

Wskutek tego równania XXV przejdą na równania:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -\frac{\rho}{F_2} \left[\left(4R^2 - \frac{5}{2} r_0^2 \right) p r z_0 + 2x_0 z_0 r (p x_0 + q y_0) \right] \\ \eta &= -\frac{\rho}{F_2} \left[\left(4R^2 - \frac{5}{2} r_0^2 \right) q r z_0 + 2y_0 z_0 r (p x_0 + q y_0) \right] \\ \zeta &= -\frac{\rho}{F_2} \left[\left(4R^2 - \frac{5}{2} r_0^2 \right) r (p x_0 + q y_0) + 2z_0^2 r (p x_0 + q y_0) \right] \end{aligned} \right\} \text{XXV (a)}$$

Skoro podstawimy te wyrażenia na ξ , η i ζ w poprzednio otrzymane wzory na m_x , m_y , m_z , A , B , C i t. d. i pocniemy wykonywać całkowania; to wszystkie wyrazy, w których którakolwiek ze zmiennych x_0 , y_0 , z_0 występuje w pierwszej potędze, znikną; oznaczając zaś połowy wielkiej i małej osi nieodkształconego ciała, które uważamy za elipsoidę obrotową, przez a i c a masę jego przez M otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma m x_0^2 &= \Sigma m y_0^2 = \frac{M}{5} a^2 \\ \Sigma m z_0^2 &= \frac{M}{5} c^2 \\ \Sigma m x_0^4 &= \Sigma m y_0^4 = \frac{3}{5 \cdot 7} M a^4 \\ \Sigma m x_0^2 y_0^2 &= \frac{1}{5 \cdot 7} M \cdot a^4 \\ \Sigma m x_0^2 z_0^2 &= \Sigma m y_0^2 z_0^2 = \frac{1}{5 \cdot 7} M a^2 c^2 \\ \Sigma m z_0^4 &= \frac{3}{5 \cdot 7} M \cdot c^4 \\ \Sigma m r_0^2 x_0^2 &= \Sigma m r_0^2 y_0^2 = \frac{1}{5 \cdot 7} M (4a^4 + a^2 c^2) \\ \Sigma m r_0^2 z_0^2 &= \frac{1}{5 \cdot 7} M \cdot (3c^4 + 2a^2 c^2). \end{aligned} \right\} \text{XXX}$$

Dalej zauważmy, że ponieważ x_0 , y_0 , z_0 są od czasu niezależne, więc pochodna od ψ_2 względem czasu zawiera tylko pochodne względem czasu od p , q i r .

Podstawiając rzeczywiście wartości na ξ , η i ζ ze wzorów XXV (a) we wzory XXVII otrzymamy najpierw:

$$m_x = \frac{\rho}{F_2} \frac{d}{dt} (qr) \Sigma m \left(4R^2 - \frac{5}{2} r_0^2 \right) (z_0^2 - y_0^2)$$

$$m_y = \frac{\rho}{F_2} \frac{d}{dt} (pr) \Sigma m \left(4R^2 - \frac{5}{2} r_0^2 \right) (x_0^2 - z_0^2)$$

$$m_z = \frac{\rho}{F_2} \frac{d}{dt} (pq) \Sigma m \left(4R^2 - \frac{5}{2} r_0^2 \right) (y_0^2 - x_0^2)$$

a następnie korzystając ze wzorów XXX a zarazem biorąc w uwagę tę okoliczność, że wyraz zawierający iloczyn pq powinien być pominięty wobec innych:

$$m_x = \frac{\rho}{F_2} \frac{d}{dt} (qr) \left[4R^2 \cdot \frac{M}{5} (c^2 - a^2) - \frac{1}{2 \cdot 7} M (a^2 c^2 + 3c^4 - 4a^2) \right]$$

$$m_y = \frac{\rho}{F_2} \frac{d}{dt} (pr) \left[4R^2 \frac{M}{5} (a^2 - c^2) - \frac{1}{2 \cdot 7} M \cdot (4a^4 - a^2 c^2 - 3c^4) \right]$$

$$m_z = 0.$$

Zauważmy tu mimochodem, że otrzymalibyśmy te same wartości na m_x , m_y , m_z , gdybyśmy zamiast przybliżonego wyrażenia na ψ_2 użyli w rachunku ściśle wyrażenie oraz gdybyśmy wogóle wszystkie rachunki dokonali nie przybliżenie ale ściśle; albowiem tylko te wyrazy, które występują w tylko co napisanych wzorach nie znikają, pozostałe znikają wskutek symetrii nieodkształconego ciała. A zatem powyższe wzory są zupełnie ściśle. Zważmy jednak po pierwsze, że

$$a^2 c^2 - 4a^4 + 3c^4 = (c^2 - a^2)(4a^2 + 3c^2),$$

po drugie, że:

$$c^2 - a^2 = c^2 + a^2 - 2a^2,$$

a wreszcie po trzecie, że dzięki temu, iż nieodkształcone ciało jest ciałem obrotowym:

$$\frac{M}{5} (a^2 + c^2) = A_0 = B_0$$

$$\frac{M}{5} 2a^2 = C_0$$

a będziemy mogli napisać poprzednie wzory w kształcie:

$$\text{XXVIII (a)} \quad \begin{cases} m_x = - \frac{\rho}{F_2} \frac{d}{dt} (qr) (C_0 - A_0) \left[4R^2 - \frac{5}{2 \cdot 7} (4a^2 + 3c^2) \right] \\ m_y = \frac{\rho}{F_2} \frac{d}{dt} (pr) (C_0 - A_0) \left[4R^2 - \frac{5}{2 \cdot 7} (4a^2 + 3c^2) \right] \\ m_z = 0. \end{cases}$$

Rozumie się, że te wzory są tak samo jak poprzednie nie przybliżone ale ściśle.

Jeżeli z kolei przejdziemy do wzorów XXVIII, to zaraz okaże się, że wyrazy

$$\Sigma m (y_0 \eta + z_0 \zeta) \text{ i t. d.}$$

są małymi wyrazami drugiego rzędu, że zatem należy pominąć zmiany momentów bezwładności jako zupełnie nieznaczne i przyjąć:

$$A = A_0, \quad B = B_0 = A_0, \quad C = C_0. \quad \text{XXVIII (a)}$$

Wreszcie podstawiając wartości na ξ , η i ζ z równań XXV (a) w równania XXIX i opuszczając małe wyrazy drugiego rzędu znajdziemy najpierw:

$$\begin{aligned} D &= -\frac{\rho q r}{F_2} \Sigma m \left[\left(4R^2 - \frac{5}{2} r_0^2 \right) (y_0^2 + z_0^2) + 4y_0^2 z_0^2 \right] \\ E &= -\frac{\rho p r}{F_2} \Sigma m \left[\left(4R^2 - \frac{5}{2} r_0^2 \right) (x_0^2 + z_0^2) + 4x_0^2 z_0^2 \right] \\ F &= 0, \end{aligned}$$

następnie, korzystając ze wzorów XXX:

$$\begin{aligned} D &= -\frac{\rho q r}{F_2} \left[4R^2 A_0 - \frac{5}{2} \cdot \frac{M}{5 \cdot 7} (4a^4 + 3a^2 c^2 + 3c^4) + \frac{4M}{5 \cdot 7} a^2 c^2 \right] \\ E &= -\frac{\rho p r}{F_2} \left[4R^2 A_0 - \frac{5}{2} \cdot \frac{M}{5 \cdot 7} (4a^4 + 3a^2 c^2 + 3c^4) + \frac{4M}{5 \cdot 7} a^2 c^2 \right] \\ F &= 0, \end{aligned}$$

wreszcie, pisząc A_0 zamiast $\frac{M}{5} (a^2 + c^2)$ oraz C_0 zamiast $\frac{M \cdot 2a^2}{5}$

$$\left. \begin{aligned} D &= -\frac{\rho \cdot q r}{F_2} \left[4R^2 A_0 - \frac{5}{2 \cdot 7} (2a^2 C_0 + 3c^2 A_0) + \frac{2}{7} c^2 C_0 \right] \\ E &= -\frac{\rho p r}{F_2} \left[4R^2 A_0 - \frac{5}{2 \cdot 7} (2a^2 C_0 + 3c^2 A_0) + \frac{2}{7} c^2 C_0 \right] \\ F &= 0. \end{aligned} \right\} \text{XXIX (a)}$$

A zatem, kładąc jeszcze dla krótkości:

$$\left. \begin{aligned} Q &= 4R^2 A_0 - \frac{5}{2 \cdot 7} (2a^2 C_0 + 3c^2 A_0) + \frac{2}{7} c^2 C_0 \\ N &= (C_0 - A_0) \left[4R^2 - \frac{5}{2 \cdot 7} (4a^2 + 3c^2) \right] \end{aligned} \right\} \text{XXXI}$$

otrzymamy:

$$\text{XXXI(a)} \left\{ \begin{array}{l} H_x = p A_0 + m_x - r E = p \left(A_0 + \frac{\rho r^2}{F_2} Q \right) - \rho \frac{d}{dt} (q r) \frac{N}{F_2} \\ H_y = q A_0 + m_y - r D = q \left(A_0 + \frac{\rho r^2}{F_2} Q \right) - \rho \frac{d}{dt} (p r) \frac{N}{F_2} \\ H_z = r C_0 - p E - q D = r \left[C_0 + \rho \frac{(p^2 + q^2) Q}{F_2} \right] \end{array} \right.$$

albo znów opuszczając wyrazy zawierające $p^2 + q^2$ jako bardzo małe wobec pozostałych:

$$H_z = r C_0.$$

Podstawiając te wartości na H_x , H_y i H_z w równania XXVI zaraz znajdziemy, że w trzeciem z pomiędzy tylko co wspomnianych równań, t. j. w równaniu:

$$\frac{dH_z}{dt} - H_x q + H_y p = 0$$

suma drugiego i trzeciego wyrazu t. j.

$$- H_x q + H_y p,$$

znów zawiera tylko kwadraty $p^2 + q^2$ oraz pochodne $p \frac{d\rho}{dt}$, $q \frac{dq}{dt}$ a zatem składa się z wyrazów, które można pominąć. W ten sposób to trzecie równanie przywodzi się do równania:

$$\frac{dH_z}{dt} = 0,$$

skąd znówu wedle ostatniego równania XXXII wypada:

$$r = \text{stałej}.$$

Oczywiście można i należy położyć:

$$r = \omega,$$

gdzie ω oznacza kątową prędkość dziennego obrotu ziemi. Ale, gdy $r = \text{stałej} = \omega$, to dwa pierwsze równania XXVI po podstawieniu w nich wartości na H_x , H_y i H_z z równań XXXII przybiorą następujący kształt:

$$\text{XXXIII} \left\{ \begin{array}{l} -\rho \frac{N\omega}{F_2} \cdot \frac{d^2 q}{dt^2} + \left[A_0 + \frac{\rho \omega^2 (Q - N)}{F_2} \right] \frac{dp}{dt} + \left[C_0 - A_0 - \rho \frac{\omega^2 Q}{F_2} \right] \omega q = 0 \\ \rho \frac{N\omega}{F_2} \cdot \frac{d^2 p}{dt^2} + \left[A_0 + \frac{\rho \omega^2 (Q - N)}{F_2} \right] \frac{dq}{dt} - \left[C_0 - A_0 - \rho \frac{\omega^2 Q}{F_2} \right] \omega p = 0 \end{array} \right.$$

Kładąc:

$$\frac{A_0 F_2 + \rho \omega^2 (Q - N)}{\rho N \omega} = \lambda \quad \text{XXXIV}$$

$$\frac{(C_0 - A_0) F_2 - \rho \omega^2 Q}{\rho N} = \mu \quad \text{XXXV}$$

możemy napisać równania XXXIII w kształcie:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d^2 q}{dt^2} + \lambda \frac{dp}{dt} + \mu q &= 0 \\ \frac{d^2 p}{dt^2} + \lambda \frac{dq}{dt} + \mu p &= 0. \end{aligned} \right\} \text{XXXIII (a)}$$

Można te dwa równania połączyć w jedno, mnożąc pierwsze na $-\sqrt{-1}$ i dodając do drugiego. W ten sposób otrzymamy równanie:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(p + \sqrt{-1} q) - \sqrt{-1} \lambda \frac{d}{dt}(p + \sqrt{-1} q) - \\ - \mu(p + \sqrt{-1} q) = 0 \end{aligned} \quad \text{XXXIII (b)}$$

skąd wedle znanych metod natychmiast otrzymamy:

$$p + \sqrt{-1} q = A e^{\sqrt{-1} \alpha_1 t} + B e^{\sqrt{-1} \alpha_2 t}$$

przyczem:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2}(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2}(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}). \end{aligned}$$

Przy wszystkich dodatnich wartościach współczynnika n wyraz:

$$\lambda^2 - 4\mu$$

jest zawsze dodatni. Ponieważ zaś tylko dodatnie wartości współczynnika n mają fizyczne znaczenie, więc możemy powiedzieć, że $\lambda^2 - 4\mu$ jest zawsze dodatnie, skąd znowu zaraz wynika, że oba pierwiastki α_1 i α_2 są zawsze rzetelne t. j. innemi słowami, że perturbacja składa się z peryodycznych ruchów. Dodajmy do tego, że w warunkach odpowiadających ziemskiemu warunkom λ^2 jest zawsze znacznie większe niż absolutna wartość wyrazu 4μ , a zatem zawsze można napisać:

$$\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} = \lambda \sqrt{1 - \frac{4\mu}{\lambda^2}} = \lambda \left[1 - \frac{1}{2} \frac{4\mu}{\lambda^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{(4\mu)^2}{\lambda^4} - \dots \right]$$

Skąd znowu:

$$\text{XXXVI} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \lambda - \frac{\mu}{\lambda} - \frac{\mu^2}{\lambda^3} - \dots \quad \text{etc.} \dots \\ \alpha_2 = \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu^2}{\lambda^3} + \dots \quad \text{etc.} \dots \end{array} \right.$$

Pierwiastek α_1 odpowiada swobodnej nutacyi zupełnie takiej samej jak ta, na którą natrafiliśmy w poprzednim rozdziale. Peryod takiej nutacyi musiałby być bardzo krótki. Nawet dla $n = 0$ t. j. dla najmniejszej możliwej wartości współczynnika n , gdy F_2 również przybiera swą najmniejszą możliwą wartość: $2g\rho R$, peryod tej nutacyi wynosilby tylko coś około $\frac{3}{4}$ sekundy. Rzeczywiście ponieważ λ^2 jest o wiele większe od absolutnej wartości μ , więc w pierwszym ze wzorów XXXVI można w przybliżonym rachunku zaniechać dalsze wyrazy wobec pierwszego i napisać

$$\alpha_1 = \lambda \quad (\text{przybl.}).$$

Ale znowu we wzorach XXXIV i XXXV można zaniechać N wobec Q , albowiem w ziemskich warunkach N jest około pięciuset razy mniejsze od Q , można więc nadając wyrazowi F_2 jego najmniejszą wartość $2g\rho R$ zamiast λ napisać:

$$\frac{2g\rho R \cdot A_0 + \rho\omega^2 \cdot Q}{\rho N\omega}$$

Dalej ze wzorów XXX i XXXI kładąc:

$$a = c = R,$$

co w warunkach ziemskich jest dozwolone, otrzymamy na Q i N przybliżone wartości:

$$\text{XXXVII} \quad Q = \frac{5}{2} A_0 R^2, \quad N = \frac{3}{2} (C_0 - A_0) R^2.$$

W ten sposób otrzymamy na α_1 następujący przybliżony wzór:

$$\alpha_1 = \frac{A_0 \left(2gR + \frac{5}{2} R^2 \omega^2 \right)}{\frac{3}{2} (C_0 - A_0) R^2 \omega}$$

t. j.

$$\alpha_1 = \frac{2}{3} \frac{A_0}{C_0 - A_0} \omega \left(\frac{2g}{R\omega^2} + \frac{5}{2} \right).$$

Lecz:

$$\frac{A_0}{C_0 - A_0} = 305,$$

zaś $\frac{g}{R\omega^2}$ jest to stosunek siły ciężkości do siły odśrodkowej na równiku, wartość tego stosunku, jak wiadomo, wynosi około 290, a zatem:

$$\frac{2g}{R\omega^2} = 580$$

zaś

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{2}{3} \cdot 305 \cdot \omega \left(580 + \frac{5}{2} \right) = \frac{2}{3} \cdot 305 \cdot \frac{1165}{2} \cdot \omega = \\ &= \frac{355\,325}{3} \omega = 118441 \frac{2}{3} \cdot \omega. \end{aligned}$$

W ten sposób okazuje się, że kątowna prędkość ruchu nazwanego w poprzednim rozdziale swobodną nutacją jest około 118 000 razy większa aniżeli kątowna prędkość dziennego obrotu ziemi, więc odwrotnie peryod tego ruchu jest około 118 000 razy krótszy od doby, a zatem wynosi, jak wyżej powiedzieliśmy, co najwyżej około $\frac{3}{4}$ sekundy. Ponieważ obserwacje nie wskazują żadnej dostrzegalnej nutacyi¹⁾ o tak krótkim peryodzie, więc należy założyć, że jej amplituda jest nieskończenie mała i niema co dalej się nią zajmować.

Ponieważ tak λ jak μ zawierają n liniowo, więc jeżeli $n = \infty$ t. j. jeżeli ciało jest absolutnie sztywne, to pierwszy wyraz w wyrażeniu na α_1 (patrz wzory XXXVI) staje się nieskończenie wielkim, drugi pozostaje skończony, a wszystkie pozostałe stają się równe zeru, mamy zatem:

$$\text{dla } n = \infty \quad \alpha_1 = \infty,$$

jednocześnie w wyrażeniu na α_2 (patrz wzory XXXVI) dla $n = \infty$ t. j. dla ciała absolutnie sztywnego wszystkie wyrazy stają się równe zeru oprócz pierwszego, mamy zatem:

$$\text{dla } n = \infty \quad \alpha_2 = \frac{\mu}{\lambda}$$

Podstawiając wartości na λ i μ ze wzorów XXXIV i XXXV a następnie przechodząc do granic znajdziemy, że:

$$\text{dla } n = \infty \quad \alpha_2 = \frac{C_0 - A_0}{A_0} \omega.$$

¹⁾ Gdyby podobna nutacja rzeczywiście istniała, to odkształceń towarzyszących tak prędkiemu ruchowi nie można by traktować metodą statyczną.

Widzimy więc, że α_2 oznacza kątową prędkość Eulerowskiej perturbacji. Oznaczając amplitudę tej perturbacji przez K i pomijając swobodną nutację jako zupełnie niedostrzegalną, możemy więc napisać:

$$\begin{aligned} p &= K \cos \alpha_2 t \\ q &= K \sin \alpha_2 t. \end{aligned}$$

Peryod perturbacji odpowiadającej kątowej prędkości α_2 jest wogóle dłuższy niż 305 dni, co dowodzi, że dzięki deformacyom peryod Eulerowskiej perturbacji staje się dłuższy. Nawzajem z obserwowanej długości tego peryodu można obliczyć średni współczynnik sztywności ziemi. Zaraz dokonamy tego obliczenia, ale przedtem zrobimy następującą uwagę.

Za pomocą naszych wzorów XXV (a) można łatwo obliczyć współrzędne rzutu jakiegokolwiek punktu znajdującego się na powierzchni ciała na płaszczyznę $z = 0$. Załóżmy, żeśmy obrali jakiś punkt n. p. punkt M , którego współrzędne, gdyby nie było odkształcenia, byłyby: x_0, y_0, z_0 . Gdy ciało jest odkształcone, to współrzędne rzutu punktu M na płaszczyznę $z = 0$ są:

$$\begin{aligned} x &= x_0 - \frac{\omega \rho}{F_2} z_0 \left[\frac{3}{2} R^2 p + 2r_0 (p x_0 + q y_0) \right] \\ y &= y_0 - \frac{\omega \rho}{F_2} z_0 \left[\frac{3}{2} R^2 q + 2y_0 (p x_0 + q y_0) \right]. \end{aligned}$$

Jednocześnie współrzędne rzutu bieguna osi chwilowej na tę samą płaszczyznę $z = 0$ są:

$$x = R \cdot \frac{p}{\omega}, \quad y = R \cdot \frac{q}{\omega}$$

albowiem w równaniach osi chwilowej:

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{\omega}$$

dla bieguna osi chwilowej należy położyć:

$$z = R \cdot \cos \beta,$$

gdzie β oznacza kąt między osią z i osią chwilową, ale ten kąt jest zawsze tak mały, że można położyć:

$$\cos \beta = 1, \quad \text{skąd } z = R$$

a więc:

$$x = R \cdot \frac{p}{\omega}, \quad y = R \cdot \frac{q}{\omega}$$

jakeśmy wyżej napisali.

W ten sposób współrzędne rzutu bieguna osi chwilowej względem rzutu punktu M są:

$$\left. \begin{aligned} X &= R \frac{p}{\omega} + \frac{\omega \varphi z_0}{F_2} \left[\frac{3}{2} R^2 p + 2x_0 (p x_0 + q y_0) \right] \\ Y &= R \frac{q}{\omega} + \frac{\omega \varphi z_0}{F_2} \left[\frac{3}{2} R^2 q + 2y_0 (p x_0 + q y_0) \right] \end{aligned} \right\} \text{XXXVIII}$$

Otóż właśnie te tylko co napisane względne współrzędne względnego toru określają zmiany geograficznych szerokości na stacyi M (znajdującej się na powierzchni ziemi), albowiem oś chwilowego obrotu ma prawie zupełnie stały kierunek w przestrzeni.

Krzywa podana przez prof. Albrechta, którą przytoczyliśmy w końcu II. rozdziału ma przedstawiać połodyę t. j. tor północnego bieguna osi chwilowej na powierzchni ziemi, czyli, co tu wszystko jedno, tor jego rzutu na płaszczyznę $z = 0$. Krzywa ta została obliczona w taki sposób, iż naprzód z bezpośrednich obserwacji kreślono krzywe przedstawiające zmiany geograficznej szerokości na każdej stacyi oddzielnie [te krzywe mogłyby zatem być bezpośrednio porównywane z teoretycznymi krzywymi XXXVIII], w dalszym ciągu z krzywych otrzymanych dla różnych stacyi obliczano połodyę północnego bieguna osi chwilowej względem jego średniego położenia i ta właśnie połodya jest przedstawiona na rysunku załączonym w II. rozdziale. Powstaje zatem pytanie, czy ta krzywa, powiedzmy krótko, krzywa prof. Albrechta przedstawia coś rzeczywistego czy nie, albowiem przy obliczaniu tej krzywej nie uwzględniono deformacyi t. j. dokonywano rachunki w taki sposób, jak gdyby współrzędnymi rzutu bieguna osi chwilowej względem rzutu punktu M były nie współrzędne podane we wzorach XXXVIII ale po prostu współrzędne odpowiadające wypadkowi absolutnie sztywnego ciała:

$$X = R \cdot \frac{p}{\omega}$$

$$Y = R \cdot \frac{q}{\omega}$$

Łatwo odpowiedzieć na postawione pytanie rozważając pewien prosty przykład. Weźmy punkt na powierzchni ziemi pod geogr. szerok. 45° na osi y t. j. punkt, którego rzut na płaszczyznę $z = 0$ posiada współrzędne:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ y_0 &= \frac{R}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Stąd wypada:

$$X = R \frac{p}{\omega} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\rho \omega^2 \cdot R^2}{\sqrt{2} \cdot F_2} \right)$$

$$Y = R \cdot \frac{q}{\omega} \left(1 + \frac{5}{2} \frac{\rho \omega^2 \cdot R^2}{\sqrt{2} \cdot F_2} \right).$$

Ale nawet wtedy, gdy założymy, że $n = 0$ a wskutek tego F_2 ma możliwie najmniejszą wartość: $F_2 = 2g \rho R$, to jeszcze

$$\frac{\rho \omega^2 R^2}{F_2} = \frac{\omega^2 R}{2g} = \frac{1}{580}$$

skąd zaraz widać, że można zaniechać wyrazy zawierające $\frac{\rho \omega^2 \cdot R^2}{F_2}$ wobec jedności i że można przyjąć, że współrzędne rzutu bieguna osi chwilowej względem rzutu punktu M są przybliżenie:

$$X = R \frac{p}{\omega}, \quad Y = R \frac{q}{\omega},$$

t. j. właśnie takie jakby ciało nie podlegało żadnej deformacji. Oczywiście otrzymalibyśmy ten sam rezultat gdybyśmy zamiast specjalnego przykładu rozpatrywali ogólny przypadek. Możemy więc powiedzieć, że można pominąć wpływ deformacji na kształt polodyi, albowiem pochodzące z tego opuszczenia błędy są bardzo nieznaczne i w każdym razie bezporównania mniejsze niż błędy obserwacji. Stąd w dalszym ciągu wypada wniosek, że krzywa prof. Albrechta przedstawia rzeczywistą polodyą naturalnie o tyle, o ile się udało przez jednoczesne uwzględnienie kilku seryi obserwacji nad zmianami geograficznych szerokości zneutralizować błędy każdej oddzielnej seryi.

A teraz obliczmy współczynnik sztywności n zakładając, że pe-ryod Eulerowskiej perturbacji wynosi 430 dni. W takim razie:

$$p + iq = C e^{\frac{i \omega}{430} t}$$

[gdzie C jest to pewna zupełnie dowolna stała, a ω jak zwykle ozna-
cza kątową prędkość dziennego obrotu ziemi] powinno czynić zadość

równaniu różniczkowemu XXXIII *ter.* Podstawiając zatem $C e^{\frac{i \omega}{430} t}$

w to równanie i skracając na $C e^{\frac{i \omega}{430} t}$ otrzymamy szukane równanie warunkowe, z którego można będzie określić współczynnik sztywności n , mianowicie otrzymamy równanie:

$$\left(\frac{\omega}{430}\right)^2 - \frac{\omega}{430} \lambda + \mu = 0.$$

Skoro podstawimy wartości na λ i μ z równań XXXIV i XXXV, to otrzymamy równanie:

$$\left(\frac{\omega}{430}\right)^2 + \frac{(C_0 - A_0) F_2 - \rho \omega^2 Q}{\rho N} - \frac{\omega}{430} \left[\frac{A_0 F_2 + \rho \omega^2 (Q - N)}{\omega \rho N} \right] = 0.$$

Skąd po łatwych przeróbkach, bacząc, że:

$$\frac{C_0 - A_0}{A_0} = \frac{1}{305},$$

otrzymamy:

$$F_2 \left(\frac{1}{305} - \frac{1}{430} \right) = \frac{\rho \omega^2}{A_0} \left[Q + \frac{(Q - N)}{430} - \frac{N}{(430)^2} \right].$$

Ponieważ N jest około 500 razy mniejsze od Q (notabene w warunkach odpowiadających ziemskiemu), a więc z pomiędzy wyrazów stojących w nawiasie po prawej stronie drugi jest około 430 razy mniejszy niż pierwszy, zaś trzeci jest nawet mniej więcej $(430)^2 \times 500$ razy mniejszy aniżeli pierwszy, można je zatem wobec pierwszego wyrazu pominąć i przybliżenie przyjąć:

$$\frac{F_2}{\rho} = \frac{430 \times 305}{430 - 305} \omega^2 \cdot \frac{Q}{A_0}.$$

Zamiast Q dość jest wziąć jego przybliżoną wartość, mianowicie wartość:

$$Q = \frac{5}{2} A_0 R^2,$$

ponieważ zaś:

$$F_2 = 19n + 2g\rho R,$$

więc można napisać:

$$\frac{n}{\rho} = \frac{1}{19} \cdot \left(\frac{430 \times 305}{430 - 305} \cdot \frac{5}{2} R^2 \omega^2 - 2gR \right).$$

Ponieważ:

$$R \omega^2 = \frac{g}{290}$$

gdzie g oznacza jak zwykle przyspieszenie siły ciężkości, więc

$$\begin{aligned} \frac{n}{\rho} &= \frac{1}{19} \left[\frac{43 \cdot 61}{290} - 2 \right] g R \\ &= \frac{1}{19} \left[\frac{2623 - 580}{290} \right] 980 \cdot 637 \cdot 10^6 \text{ w jednostkach } C. G. S. \end{aligned}$$

Po wykonaniu rachunków znajdziemy, że przybliżenie:

$$\frac{n}{\rho} = 227 \times 10^9 \text{ w jedn. } C. G. S.$$

Kładąc:

$$\rho = 5,5$$

t. j. średniej gęstości ziemi otrzymamy:

$$n = 1248,5 \times 10^9 \text{ w jedn. } C. G. S.$$

Jest to współczynnik sztywności półtora raza większy niż współczynnik sztywności stali ¹⁾. Kładąc zaś

$$\rho = 2,1$$

t. j. średniej gęstości powierzchniowych pokładów, otrzymamy

$$n = 477 \times 10^9$$

t. j. współczynnik sztywności większy niż miedzi, a mniejszy niż lanego żelaza.

W tem zadaniu przeprowadziliśmy większą część rachunków przybliżenie, pomijaliśmy różne małe wielkości drugiego rzędu, zupełnie zaniedbaliśmy spłaszczenie ziemi i t. d. Wszystkie te opuszczenia sprawiają pewne ale nieznaczne błędy. Nawet ta okoliczność, że traktowaliśmy zadanie tak, jakby to było zadanie statyczne a nie dynamiczne, jakim jest w istocie, nie mogła szkodliwie wpłynąć na rezultaty, albowiem z powodu powolności odkształceń bezwładność ma o wiele mniejszy wpływ na ich charakter aniżeli siły sprężyste i może być wobec tych ostatnich zaniechana.

Ale są jeszcze pewne okoliczności, których nie uwzględniliśmy. Mianowicie rozumowaliśmy wciąż tak, jak gdyby bryła ziemską była jednorodnym izotropowym ciałem, ponieważ jednak gęstość wzrasta od powierzchni ku środkowi ziemi, a więc gdy przyjmujemy gęstość równą średniej gęstości ziemi, to siły odśrodkowe wypadają w powierzchniowych warstwach za wielkie a w środkowych za małe i tak samo odkształcenia są w powierzchniowych warstwach za wielkie a w środkowych za małe.

Ponieważ siły działające są siłami odśrodkowymi, więc zawsze odkształcenia powierzchniowych warstw muszą być o wiele znaczniejsze od odkształcenia środkowych warstw i n. p. peryod perturbacji musi

¹⁾ Wedle Everetta dla stali	$n = 819 \times 10^9$ w jedn. <i>C. G. S.</i>
kutego żelaza	$n = 769 \times 10^9$
lanego "	$n = 532 \times 10^9$
miedzi	$n = 447 \times 10^9$
szkła	$n = 240 \times 10^9$

o wiele więcej być zależnym od odkształcenia powierzchniowych niż od odkształcenia środkowych warstw. Jednym słowem odkształcenia całego ciała wypadają za duże. Odwrotnie zatem, jeżeli chcemy z rzeczywistego odkształcenia i z rzeczywistych sił sądzić o sztywności ciała, to wydaje się nam, że rzeczywiste odkształcenie jest w stosunku do rzeczywistych sił nazbyt małe, a więc wydaje się nam, że sztywność ciała jest większa od rzeczywistej sztywności.

W ten sposób kładąc $\rho = 5,5$ otrzymujemy nazbyt wielki średni współczynnik sztywności. Dlatego też Newcomb sądzi, że lepiej zamiast $\rho = 5,5$ przyjąć mniejszą wartość na ρ , n. p. $\rho = 4,4$ (Hough obchodzi tę trudność w inny dość dowcipny sposób). Ta ostatnia hipoteza daje:

$$n = 999 \times 10^9$$

t. j. zawsze jeszcze większy współczynnik, aniżeli współczynnik sztywności stali.

W każdym razie średni współczynnik sztywności ziemi musiałby być zawarty między granicami $n = 447 \times 10^9$ oraz $n = 1248,5 \times 10^9$ odpowiadającymi hipotezom $\rho = 2,1$ i $\rho = 5,5$, gdyby nie pewna inna okoliczność, mianowicie jeszcze nie uwzględniliśmy tego, że $\frac{2}{3}$ powierzchni ziemi są pokryte oceanem. Ponieważ odkształcenie oceanu jako ciała zupełnie niesztynego muszą być znaczne, a więc wzajemnie odkształcenia samej bryły ziemskiej odpowiadające 430 dniowemu peryodowi Eulerowskiej perturbacji muszą być mniejsze, zaś współczynnik sztywności samej bryły ziemskiej musi być większy aniżeli współczynnik sztywności obliczony bez uwzględnienia wpływu oceanów. Trzeba więc przystąpić do oceny wpływu odkształceń oceanu na Eulerowską perturbację. Oceną tą zajmiemy się w następnym rozdziale.

ROZDZIAŁ V.

Eulerowska perturbacja u ciała sprężystego pokrytego oceanem.

W tym rozdziale mamy zbadać wpływ odkształceń oceanu na Eulerowską perturbację. Moglibyśmy pozostać przy hipotezach poprzedniego rozdziału dodając tylko hipotezę, że rozpatrywane sprężyste ciało jest pokryte warstwą wody o średniej grubości H . Ponieważ będziemy traktować te zadanie w podobny sposób jak zadanie z poprzedniego rozdziału, więc należy założyć, że zewnętrzna powierzchnia oceanu wciąż pozostaje powierzchnią równowagi. W rezultacie, jak to zresztą w końcu rozdziału zobaczymy, otrzymalibyśmy na n bardzo wielką wartość mianowicie znaleźlibyśmy, że:

$$n = 4453 \cdot 10^9 \text{ jedn. C. G. S.}$$

Jest to współczynnik sztywności więcej niż 5 razy większy od współczynnika sztywności stali. Tak olbrzymia sztywność jest mało prawdopodobna. Widzimy więc, że trzeba nieco zmodyfikować założenia, mianowicie trzeba postarać się bliżyć je do rzeczywistości.

W poprzednim rozdziale zakładaliśmy, że gęstość jądra jest stała i równa 5,5, wskutek tego 1) potencjał przyciągania wzniesień i zapadlin utworzonych przez odkształcenia był za wielki, albowiem te wzniesienia i zapadliny składają się wyłącznie z powierzchniowych pokładów o gęstości znacznie mniejszej niż średnia gęstość ziemi i nie przenoszącej 2,1 — 2,7, 2) wartość potencjału sił odśrodkowych odkształcających była również za wielką, albowiem te siły są większe w pobliżu powierzchni niż w środku ciała i deformacje przez nie wywołane są również większe w pobliżu powierzchni niż w środku, gdy więc zamiast gęstości zmniejszającej się od środka ku powierzchni wprowadzamy stałą gęstość równą średniej gęstości, to wprawdzie przez to nieco zmniejszamy odkształcenia centralnych części ciała, ale to zmniejszenie nie może skompensować zbyt dużego przecenienia odkształceń zewnętrznych warstw i w rezultacie integralne odkształcenie całego ciała wypada za wielkie. Dlatego to w pracy swojej Newcomb założył n. p., że efektywna gęstość (the effective density) ciała jest nie 5,5 ale 4,48.

Wskutek tego w wyrażeniu potencjału przyciągania odkształconych powierzchniowych warstw będziemy wyróżniać ich gęstość, którą oznaczymy przez ρ_s , zaś w potencyale sił odkształcających będziemy wyróżniać pewną mniejszą od rzeczywistej średniej gęstości ziemi efektywną gęstość, którą oznaczymy przez ρ_e .

Zresztą użyjemy takich samych znakowań jak w poprzednim rozdziale, a więc wszystkie symbole odnoszące się do jądra pozostaną bez zmiany, tak n. p. ρ będzie oznaczać średnią gęstość jądra. Dla oceanu te same wielkości będziemy oznaczać temi samymi literami jak dla jądra, tylko dla rozróżnienia dodamy do nich akcenty w ten sposób, że n. p. ρ' będzie oznaczać gęstość wody oceanicznej.

Równania niezależne od warunków granicznych pozostaną bez zmiany, co zaś do warunków granicznych, to po pierwsze będziemy mieli niektóre nowe warunki graniczne, po drugie dawne warunki ulegną pewnym zmianom. Weźmy najpierw warunki graniczne w powierzchni jądra, właściwie nie tam nie ulegnie zmianie, tylko zamiast ρh wypadnie wszędzie napisać:

$$\rho_s h + \rho' (H - h + h')$$

gdzie H oznacza, jak to wyżej było powiedziane, średnią głębokość oceanu, h jak w poprzednim rozdziale przesunięcie powierzchni jądra w kierunku promienia, h' takie same przesunięcie powierzchni oceanu¹⁾.

W ten sposób będziemy mieli najpierw identyczne ze wzorami poprzedniego rozdziału wzory:

$$\left. \begin{aligned} r \frac{d\zeta}{dr} - \zeta + \frac{d\mu}{dx} - \frac{2x}{r^2} \left(r \frac{d\mu}{dr} - \mu \right) &= 0 \\ r \frac{d\eta}{dr} - \eta + \frac{d\mu}{dy} - \frac{2y}{r^2} \left(r \frac{d\mu}{dr} - \mu \right) &= 0 \\ r \frac{d\zeta}{dr} - \zeta + \frac{d\mu}{dz} - \frac{2z}{r^2} \left(r \frac{d\mu}{dr} - \mu \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ I}$$

dla $r = R$
gdzie $\mu = Rh$.

Ale zamiast równania IX poprzedniego rozdziału będziemy mieli równanie:

$$\sum \left(\frac{2i+1}{i} n f_i - W_i \right) + g [\rho \cdot h + \rho' (H - h + h')] + \frac{2n}{r^2} \left(r \frac{d\mu}{dr} - \mu \right) = 0 \text{ II}$$

dla $r = R$.

Naturalnie sumowanie odnosi się tylko do dodatnich funkcji kulistych, albowiem funkcje f_i i W_i odnoszą się tylko do jądra.

W tej samej powierzchni jądra $r = R$, która jest jednocześnie dnem oceanu, mielibyśmy też specjalne warunki, którym musiałyby zadość czynić ruch wody w oceanie, gdybyśmy chcieli dokładnie określić ten ruch. Ale zadanie o ruchu oceanu przedstawia tak ogromne trudności, że musimy je pominąć. Pomimo tego zadanie o perturbacji Eulerowskiej u sprężystego, pokrytego oceanem ciała, może być doprowadzone do końca, albowiem dzięki założeniu, że zewnętrzna powierzchnia oceanu jest powierzchnią równowagi można określić kształt tej powierzchni, a zatem można obliczyć momenty i iloczyny bezwładności oceanu, nie można tylko obliczyć momentów względnego ruchu oceanów i aby je wprowadzić w rachubę trzeba poczynić pewne dodatkowe prawdopodobne hipotezy. Ponieważ jednak nie rozpatrujemy ruchu oceanów, więc naturalnie pomijamy warunki graniczne, zachodzące na dnie oceanu a służące do określenia funkcji, wyrażających prędkość ruchu wód.

Natomiast bliżej rozpatrzmy warunek odnoszący się do zewnętrznej powierzchni oceanu. Założyliśmy, że ta powierzchnia wciąż pozo-

¹⁾ Przypominamy, że traktujemy zadanie tak, jak gdyby nieodkształcone powierzchnie jądra i oceanu były współśrodkowymi kulistymi powierzchniami.

staje powierzchnią równowagi, a zatem jeśli chwilowo oznaczymy przez W' potencjał siły ciężkości dla oceanu, to w tej powierzchni będzie:

$$W' = C,$$

gdzie C oznacza pewną stałą.

Ponieważ powierzchnia:

$$W' = C$$

tylko bardzo mało się różni od powierzchni:

$$r = R',$$

t. j. od powierzchni nieodkształconego oceanu, przeto można warunek zachodzący w pierwszej powierzchni zastąpić przez łatwiejszy do wypełnienia warunek w drugiej powierzchni. Można to zaś uczynić w następujący sposób. Ponieważ odległość między odkształconą i nieodkształconą powierzchnią oceanu oznaczyliśmy przez h' , więc równanie zewnętrznej powierzchni może być napisane w kształcie:

$$r = R' + h'.$$

Oznaczmy chwilowo wartość potencjału W' w nieodkształconej powierzchni $r = R'$ przez U' . Wtedy, ponieważ powierzchnia $r = R' + h'$ jest bardzo bliska powierzchni $r = R'$, można w szeregu Taylora pominąć dalsze wyrazy i jako wartość na W' w powierzchni $r = R' + h'$ przyjąć:

$$W' = U' + h' \frac{\partial U'}{\partial h'},$$

ale poprzednio założyliśmy, że w powierzchni $r = R' + h'$ potencjał W' jest stały, mianowicie założyliśmy, że:

$$W' = C,$$

przeto mamy:

$$U' + h' \frac{\partial U'}{\partial h'} = C.$$

Ale U' i $\frac{\partial U'}{\partial h'}$ oznaczają wartość potencjału i jego pochodnej w powierzchni $r = R'$, przeto warunek w powierzchni: $r = R' + h'$ zamieniliśmy na inny warunek, zachodzący w powierzchni $r = R'$, mianowicie na tylko co napisany warunek:

$$U' + h' \frac{\partial U'}{\partial h'} = C$$

$$\text{dla } r = R'.$$

Ale

$$\frac{\partial U'}{\partial h} = - \rho' g,$$

a więc nasze równanie przechodzi na równanie:

$$U' - \rho' g h' = C$$

dla $r = R'$.

Zauważmy wszakże, że można zawsze rozłożyć U' na dwie części: na potencjał siły ciężkości nieodkształconego ciała i na potencjał sprawiony przez odkształcenie. Pierwszy potencjał jest stały, bo gdy ciało nie jest odkształcone, to powierzchnia $r = R'$ jest powierzchnią równowagi. Można przyjąć, że ta stała część potencjału jest właśnie równa stałej C , albowiem różnica między tą stałą częścią potencjału i stałą C może być tylko zupełnie nieznaczną wielkością, a zresztą do wyrażenia potencjału można zawsze dodać pewną dowolną stałą. Co do drugiej części potencjału U' zależnej od odkształcenia, to ta ostatnia będzie naturalnie rozwijalna w szereg funkcyj kulistych, a zatem, oznaczając funkcyę kulistą stopnia i przez W'_i , możemy napisać:

$$U' = C + \Sigma W'_i.$$

W ten sposób nasze równanie po podstawieniu zamiast U' jego wartości przejdzie na:

$$\Sigma W'_i - \rho' g h' = 0 \quad \text{III}$$

dla $r = R'$.

Takiem jest ostatecznie równanie równoważne warunkowi granicznemu, aby zewnętrzna powierzchnia oceanu była wciąż powierzchnią równowagi. Równanie III można bezpośrednio otrzymać z równania IX poprzedniego rozdziału, kładąc w tem ostatniem:

$$n = 0$$

i pisząc zamiast symbolów odnoszących się do ciała sprężystego symbole odnoszące się do oceanu.

Należy teraz obliczyć potencjały zależne od odkształceń tak dla jądra jak dla oceanu. Zanim przystąpimy do tego obliczenia, zauważymy jeszcze, że przesunięcie powierzchni oceanu w kierunku promienia t. j. innemi słowy odległość między odkształconą a nieodkształconą powierzchnią oceanu mierzona wzdłuż promienia, którą tu oznaczyliśmy przez h' , zawsze może być wyrażona przez szereg funkcyj kulistych powierzchniowych t. j. przez szereg funkcyj kulistych zależnych od dwóch argumentów θ i φ . Oznaczając taką powierzchniową funkcyę stopnia i przez S_i otrzymamy:

IV

$$h' = \sum_0^{\infty} S_i,$$

przyczem sumowanie odnosi się tylko do dodatnich całych wartości wskaźnika i , albowiem funkcyje kuliste powierzchniowe odjemnych stopni wcale nie istnieją.

Dla jądra potencyał W zależny od odkształceń zawiera najpierw różnicę $V - V_0$ potencyałów przyciągania odkształconego i nieodkształconego jądra. Ten potencyał będzie naturalnie zupełnie podobny do potencyału $V - V_0$ w poprzednim zadaniu. Tylko ponieważ gęstość powierzchniowych pokładów, z których właśnie składają się wzniesienia i wśród których tworzą się zagłębienia wytworzone przez odkształcenia, jest mniejsza od średniej gęstości jądra ρ i ponieważ wzniesienia powierzchni jądra wypierają wodę zaś zagłębienia wypełniają się wodą, przeto zamiast ρ figurującego w poprzednim rozdziale należy napisać:

$$\rho_s - \rho',$$

gdzie ρ_s oznacza gęstość powierzchniowych pokładów a ρ' gęstość wody oceanicznej. Podstawiając jednocześnie zamiast stałej przyciągania jej wartość ¹⁾

$$\frac{3g}{4\pi R'}$$

i traktując tak samo jak w poprzednim rozdziale potencyał warstwy o skończonej ale bardzo małej grubości h i gęstości $\rho_s - \rho'$ jako potencyał nieskończenie cienkiej warstwy o powierzchniowej gęstości $(\rho_s - \rho')h$ otrzymamy wedle znanego wzoru ²⁾

$$V - V_0 = -3g(\rho_s - \rho') \frac{R^2}{R'} \sum_{i=0}^{i=\infty} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2i+3} f_i + \frac{1}{2i-1} \cdot \frac{1}{2i+1} \cdot \frac{1}{R^2} \varphi_i \right].$$

We wzorze tym od razu uporządkowaliśmy funkcyje f i φ w taki sposób, aby funkcyje kuliste tego samego stopnia stały obok siebie. Następnie należy uwzględnić różnicę $v - v_0$ potencyałów przyciągania odkształconego i nieodkształconego oceanu. Ponieważ już uwzględniliśmy tę okoliczność, że wzniesienia dna wypierają wodę zaś zagłębienia wypełniają się wodą, więc tem samym uwzględniliśmy różnicę potencyałów przyciągania, pochodzącą stąd, że dolna powierzchnia oceanu

¹⁾ Piszemy tu R' zamiast R , które figurowało w poprzednim rozdziale, bo obecnie nie promień powierzchni jądra R ale promień powierzchni oceanu odpowiada średniemu promieniowi ziemskiej geoidy.

²⁾ Treat. on Nat. Phil. Thomsona i Taita. 2 wydanie, II część, str. 84.

t. j. dno podlega odkształceniu. Wskutek tego pozostaje nam tylko uwzględnić przyciąganie warstwy wody o grubości h' , wznoszącej się (lub zniżającej się) ponad średni poziom oceanu. Obliczymy ten potencjał zupełnie tak samo jak poprzednio potencjał wzniesień i zagłębień powierzchni jądra, zagęszczając tę warstwę wody na powierzchni: $r = R'$. Obliczymy go naturalnie za pomocą wzorów odnoszących się do potencjałów w wewnętrznej przestrzeni, albowiem ocean otacza jądro. Wedle wzoru IV

$$h' = \sum_0^{\infty} S_i,$$

a więc wedle przed chwilą cytowanych wzorów Thomsona i Taita:

$$v - v_0 = 3g\rho' \sum_0^{\infty} \frac{1}{2i+1} \left(\frac{r}{R}\right)^i S_i. \quad \text{VI}$$

Potencjał sił odśrodkowych jest naturalnie taki sam jak w poprzednim zadaniu, tylko stosownie do tego cośmy powiedzieli na początku tego rozdziału zamiast średniej gęstości jądra ρ do wyrażenia tego potencjału wprowadzimy pewną inną gęstość ρ_e (effective density). W ten sposób mamy dla jądra:

$$\psi_2 = -\frac{1}{2} \rho_e [x^2 p^2 + y^2 q^2 - z^2 (p^2 + q^2) + 2xypq + 2xzpr + 2yzqr]. \quad \text{VII}$$

Obliczymy zatem wszystkie trzy wyrazy, wchodzące w skład potencjału jądra, mamy więc wzór dla jądra:

$$W = V - V_0 + v - v_0 + \psi_2, \quad \text{VIII}$$

przyczem $V - V_0$, $v - v_0$ i ψ_2 są kolejno podane we wzorach V, VI oraz VII.

Teraz w podobny sposób obliczymy potencjał W' dla oceanu. Ten potencjał zawiera najpierw wyraz $V' - V'_0$ zależny od przyciągania jądra. Ten wyraz jest naturalnie potencjałem warstwy o zmiennej grubości h . Tę warstwę zagęszczamy na powierzchnię: $r = R$. Ponieważ zaś ocean znajduje się zewnątrz jądra, więc należy użyć wzorów, odnoszących się do zewnętrznej przestrzeni (porównaj znowu kilkakrotnie przytoczone wzory z dzieła Thomsona i Taita). Wedle tych wzorów otrzymamy:

$$V' - V'_0 = -3g(\rho_e - \rho) \frac{R^2}{R'} \sum_0^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{2i+1} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2i+3} f_i + \frac{1}{2i-1} \cdot \frac{1}{2i+1} \cdot \frac{1}{R^2} \varphi_i \right]. \quad \text{IX}$$

Dalej mamy potencjał $v' - v'_0$ zależny od odkształceń oceanu, ten potencjał jest identyczny z potencjałem $v - v_0$ dla jądra, albowiem ocean

tak samo jak jądro jest objęty powierzchnią $r = R'$, na którą zagęściliśmy warstwę wody, zawartą między odkształconą i nieodkształconą zewnętrzną powierzchnią oceanu. W ten sposób:

$$v' - v'_0 = v - v_0.$$

Potencjał sił odśrodkowych będzie naturalnie:

$$\psi_2 = -\frac{1}{2} \rho' [x^2 p^2 + y^2 q^2 - \dots] = \frac{\rho'}{\rho_0} \psi_2.$$

A więc potencjał dla oceanu będzie:

$$X \quad W' = V' - V'_0 + v - v_0 + \frac{\rho'}{\rho_0} \psi_2,$$

przyczem wartości dla $V' - V'_0$, $v - v_0$ i ψ_2 są podane we wzorach IX, VI i VII.

Obliczywszy potencjały możemy przystąpić do dalszych rachunków. W powierzchni $r = R$ mamy najpierw równania warunkowe I. Ponieważ te równania są identyczne z równaniami X poprzedniego rozdziału, więc wszystkie równania z tamtych wynikające i tu pozostają bez zmiany. W ten sposób pozostają bez zmiany równania XVII poprzedniego rozdziału i wynikające z nich równanie XVIII poprzedniego rozdziału t. j. równanie:

$$XI \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{gdzie:} \\ \varphi_i = -R^2 A_i f_i \\ A_i = \frac{i(i+2)(2i-1)(2i+1)}{2(i-1)(i+1)(2i+3)}. \end{array} \right.$$

Zamiast równania IX poprzedniego rozdziału mamy tu podobne doń równanie II. Podstawmy w to równanie wartości na h i h' . Wartość na h' podstawimy z równania IV obecnego rozdziału, co zaś do h , to jego wartość będzie ta sama co w poprzednim rozdziale, a więc wedle wzorów VIII i XII poprzedniego rozdziału otrzymamy ¹⁾:

$$h = \frac{\mu}{r} = - \sum \frac{1}{2i+1} \left[\frac{(2i-1)}{2} r f_{i-1} + \frac{1}{r} \varphi_{i+1} \right].$$

Skoro zaś podstawimy w równanie II wartości na h tylko co podaną a na h' ze wzoru IV, jeżeli dalej zamiast $r \frac{d\mu}{dr} - \mu$ podstawimy jego

¹⁾ Zwracamy tu uwagę na to, że w obecnym rozdziale h' oznacza tylko przesunięcie elementu zewnętrznej powierzchni oceanu w kierunku promienia, podobnie i h będziemy tu używać jako symbol przesunięcia elementów powierzchni jądra, tymczasem w poprzednim rozdziale używaliśmy h jako symbol przesunięcia nie tylko elementów powierzchni ale i wszelkich innych elementów ciała.

wartość z równania XIV poprzedniego rozdziału, (które naturalnie może tu być zastosowane bez żadnej zmiany) t. j. gdy podstawimy:

$$r \frac{d\mu}{dr} - \mu = - \sum \frac{i}{2i+1} \left[(2i-1) \frac{r^2}{2} f_{i-1} + \varphi_{i+1} \right],$$

to równanie II przejdzie na następujące:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2i+1}{i} n f_i - W_i \right) - gR (\rho_s - \rho') \sum_0^{\infty} \frac{1}{2i+1} \left(\frac{2i-1}{2} \cdot f_{i-1} + \frac{1}{R^2} \varphi_{i+1} \right) \\ & - 2n \sum_0^{\infty} \frac{i}{2i+1} \left(\frac{2i-1}{2} f_{i-1} + \frac{1}{R^2} \varphi_{i+1} \right) + g \rho' \sum_0^{\infty} S_i + g \rho' H = 0 \quad \text{II (a)} \\ & \text{dla } r = R. \end{aligned}$$

To równanie naturalnie rozpada się na szereg oddzielnych równań kształtu

$$\begin{aligned} (2i+1) \left\{ \frac{n}{i} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2i+3} [gR (\rho_s - \rho') + 2(i+1)n] \right\} f_i - W_i \\ - \frac{[gR (\rho_s - \rho') + 2(i-1)n]}{2i-1} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \varphi_i + g \rho' S_i = 0 \\ \text{dla } r = R \quad i = 0, 1, 2 \dots \text{ etc.} \dots \end{aligned}$$

Mamy tu przypadek zupełnie analogiczny do przypadku, z którym mieliśmy do czynienia w poprzednim rozdziale, równania przed chwilą otrzymane są analogiczne do równań, na które rozpadły się równania X (a) poprzedniego rozdziału. I tu podobnie jak tam niektóre wyrazy stojące po lewej stronie równania, mianowicie pierwszy, drugi i trzeci są to funkcje kuliste objętościowe pomnożone przez pewne stałe współczynniki, zaś ostatni wyraz po lewej stronie przybierze kształt funkcji kulistej objętościowej, skoro go pomnożymy przez $\left(\frac{R}{R}\right)^i$. W ten sposób jeżeli jeszcze wyrugujemy funkcję φ_i przy pomocy wzoru XI, to z tylko co napisanego równania otrzymamy równanie:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{(2i+1)}{i} n - \frac{1}{2} \frac{2i+1}{2i+3} \cdot [gR (\rho_s - \rho') + 2(i+1)n] - \right. \\ & \left. - \frac{[gR (\rho_s - \rho') + 2(i-1)n]}{2i-1} \cdot \frac{A_i}{R^2} \right\} f_i + g \rho' \left(\frac{r}{R}\right)^i S_i = 0, \end{aligned}$$

albo podstawiając:

$$A_i = \frac{i(i+2)(2i-1)(2i+1)}{2(i-1)(i+1)(2i+3)}$$

i odpowiednio porządkując:

$$\frac{2i+1}{(i+1)(2i+3)} \left[\frac{(2i+3)(i+1) - i}{i} n + \frac{2i+1}{2(i-1)} g R (\rho_s - \rho') \right] f_i - W_i +$$

$$\text{XII} \quad + g \rho' \left(\frac{r}{R} \right)' S_i = 0$$

dla $i = 1, 2, 3 \dots$ i t. d., gdy zaś $i = 0$, to prócz wyrazów zawartych w tylko co napisanym wzorze w równanie wchodzi jeszcze stały dodatkowy wyraz: $g \rho' H$, jak to zaraz widać, skoro przyjrzymy się wzorowi II, od którego pochodzi wzór XII.

Mamy dalej równanie warunkowe III t. j. równanie:

$$\Sigma W'_i - g \rho' h' = 0$$

dla $r = R$.

Podstawmy tu wartość na h' ze wzoru IV, a otrzymamy:

$$\Sigma W'_i - g \rho' \Sigma S_i = 0$$

dla $r = R$.

Zastanówmy się na chwilę nad tem, jakie wskaźniki obejmuje sumowanie. W drugim wyrazie mamy tylko dodatnie wskaźniki, bo h' wyraża się przez szereg funkcyj kulistych stopni dodatnich, ale w pierwszym wyrazie sumowanie musi rozciągać się na dodatnie i ujemne wskaźniki, albowiem potencyał $W = \Sigma W'_i$ oprócz funkcyj kulistych objętościowych stopni dodatnich zawiera też funkcyjne kuliste objętościowe stopni ujemnych, jak to widać ze wzorów X i IX obecnego rozdziału. Powinniśmy zatem pisać ten wzór właściwie tak:

$$\text{III (a)} \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} W'_i - g \rho' \sum_0^{\infty} S_i = 0$$

dla $r = R$.

Naturalnie wzór nasz rozpada się na szereg oddzielnych równań kształtu:

$$W'_i + W'_{-(i+1)} - g \rho' S_i = 0$$

dla $r = R$ oraz $i = 1, 2, 3 \dots$ i t. d.

albowiem, jak wiadomo, tak W'_i jak $W'_{-(i+1)}$ zawierają powierzchnię kulistą funkcyj stopnia i , mianowicie, oznaczając pewne kuliste powierzchnie funkcyjne przez σ_i i σ'_i , możemy napisać:

$$W'_i = r^i \sigma_i, \quad W'_{-(i+1)} = \frac{\sigma'_i}{r^{i+1}}.$$

a zatem równanie III (a) przywodzi się do równania:

$$(R^i)' \sigma_i + \frac{\sigma'_i}{(R^i)'^{i+1}} - g \rho' S_i = 0.$$

Podzielmy to równanie przez $(R')^i$ i jednocześnie pomnóżmy przez r^i , a potem weźmy na uwagę tylko co napisane związki:

$$W'_i = r^i \sigma_i \quad \text{i} \quad W'_{-(i+1)} = \frac{\sigma'_i}{r^{i+1}},$$

a okaże się, że nasze równanie przywodzi się do zachodzącego w całej przestrzeni związku:

$$W'_i + \left(\frac{r}{R'}\right)^{2i+1} W'_{-(i+1)} - g \rho' \left(\frac{r}{R'}\right)^i S_i = 0. \quad \text{XIII}$$

Teraz musimy na chwilę powrócić do równań V, VI, VII, VIII, IX i X. W tych równaniach występuje suma:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2i+3} f_i + \frac{1}{2i-1} \cdot \frac{1}{2i+1} \cdot \frac{1}{R^2} \varphi_i.$$

Za pomocą wzorów XI przekształcimy tę sumę na:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2i+3} \left[1 - \frac{i(i+2)}{(i-1)(i+1)} \right] f_i = - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2i+3} \cdot \frac{2i+1}{(i-1)(i+1)} f_i.$$

Dokonawszy tego przekształcenia, okreśmy na podstawie wspomnianych wzorów V, VI, VII, VIII, IX i X wartości na W_i , W'_i , $W'_{-(i+1)}$. Otrzymamy następujące wzory.

Ze wzorów VIII, V, VI i VII wypada:

$$W_i = 3g(\rho_s - \rho') \frac{R^2}{R'} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2i+3} \cdot \frac{2i+1}{(i-1)(i+1)} \cdot f_i + 3g\rho' \frac{1}{2i+1} \left(\frac{r}{R'}\right)^i S_i \quad \text{XIV}$$

dla wszystkich dodatnich całych wartości wskaźnika i oprócz przypadku $i = 2$, albowiem dla $i = 2$ mamy:

$$W_2 = 3g(\rho_s - \rho') \frac{R^2}{R'} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{5}{3} f_2 + 3g\rho' \frac{1}{5} \left(\frac{r}{R'}\right)^2 S_2 + \psi_2. \quad \text{XV}$$

Dalej ze wzorów X, IX i VI wypada:

$$W'_i = 3g\rho' \frac{1}{2i+1} \left(\frac{r}{R'}\right)^i S_i = W_i - 3g(\rho_s - \rho') \frac{R^2}{R'} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2i+3} \cdot \frac{2i+1}{(i-1)(i+1)} \cdot f_i \quad \text{XVI}$$

dla wszelkich dodatnich całych wartości wskaźnika i oprócz przypadku $i = 2$, albowiem dla $i = 2$ mamy:

$$\left. \begin{aligned} W'_2 &= 3g\rho' \frac{1}{5} \left(\frac{r}{R'}\right)^2 S_2 + \frac{\rho'}{\rho_s} \psi_2 \\ &= W_2 + \frac{\rho'}{\rho_s} \psi_2 - 3g(\rho_s - \rho') \frac{R^2}{R'} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{5}{3} f_2 - \psi_2. \end{aligned} \right\} \quad \text{XVII}$$

Jednocześnie zaś z tych samych wzorów X, IX i VI znajdziemy:

$$\text{XVIII} \quad W'_{-(i+1)} = 3g(\rho_s - \rho') \cdot \frac{R^2}{R'} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2i+3} \cdot \frac{2i+1}{(i-1)(i+1)} \cdot \left(\frac{R}{r}\right)^{2i+1} \cdot f_i.$$

Równania poczynając od XV aż do XVIII włącznie dają nam związki między funkcjami W_i i t. d. z jednej a funkcjami f_i i S_i z drugiej strony, z równań tych a także z równań XII i XIII określimy same funkce W_i , f_i i t. d.

Mnożąc równanie XII na $\left(\frac{R}{R'}\right)^i$ i dodając do równania XIII otrzymamy:

$$\text{XIX} \quad \left(\frac{R}{R'}\right)^i (H_i f_i - W_i) + W'_i + \left(\frac{r}{R'}\right)^{2i+1} W'_{-(i+1)} = 0,$$

gdzie dla krótkości położyliśmy:

$$\text{XX} \quad H_i = \frac{2i+1}{(i+1)(2i+3)} \cdot \left[\frac{(2i+3)(i+1)-i}{i} n + \frac{2i+1}{2(i-1)} g R (\rho_s - \rho') \right]$$

Te równania zachodzą dla wszelkich dodatnich i całych wartości wskaźnika i . Dla $i=0$ w równaniu XII mamy prócz tego stały wyraz $g\rho'$.

We wzorze XIX można wyrugować funkce W'_i i $W'_{-(i+1)}$ za pomocą wzorów XVI i XVIII. Ze wzorów tych wypada mianowicie:

$$\begin{aligned} & W'_i + \left(\frac{r}{R'}\right)^{2i+1} W'_{-(i+1)} = \\ & = W_i - 3g(\rho_s - \rho') \frac{R^2}{R'} \left[1 - \left(\frac{R}{R'}\right)^{2i+1} \right] \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2i+3} \cdot \frac{2i+1}{(i-1)(i+1)} \cdot f_i, \end{aligned}$$

a więc równanie XIX przechodzi na równanie:

$$\text{XIX (a)} \quad W_i \left[1 - \left(\frac{R}{R'}\right)^i \right] + \left\{ \left(\frac{R}{R'}\right)^i H_i - \left[1 - \left(\frac{R}{R'}\right)^{2i+1} \right] L_i \right\} f_i = 0,$$

gdzie dla krótkości położyliśmy:

$$\text{XXI} \quad L_i = 3g(\rho_s - \rho') \frac{R^2}{R'} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2i+3} \cdot \frac{2i+1}{(i-1)(i+1)}.$$

Teraz zaś porównajmy między sobą równania XII i XIV. Dzięki tylko co wprowadzonym symbolom H_i i L_i możemy te równania napisać krótko:

$$H_i f_i - W_i + g\rho' \left(\frac{r}{R}\right)^i S_i = 0$$

oraz

$$L_i f_i - W_i + 3g\rho' \frac{1}{2i+1} \left(\frac{r}{R}\right)^i S_i = 0.$$

Jeżeli pierwsze z tych równań pomnożymy przez $3\left(\frac{R}{r}\right)^i$ a drugie przez $(2i+1)$, zaś następnie odejmiemy pierwsze od drugiego, to otrzymamy:

$$\left[(2i+1) - 3\left(\frac{R}{r}\right)^i\right] W_i - [(2i+1)L_i - 3H_i] f_i = 0. \quad \text{XXII}$$

Tak więc z równań XII, XIII i XIV przy pomocy wzorów XVI i XVIII otrzymaliśmy dwa równania, mianowicie równania XIX (a) i XXII zawierające tylko W_i i f_i . Równania te t. j. równania XIX (a) i XXII są niezgodne, zatem jedyne możebne rozwiązanie tych równań jest:

$$W_i = 0, \quad f_i = 0,$$

stąd na mocy równania XI także:

$$\varphi_i = 0,$$

a dalej na mocy równań XVI i XVII

$$W'_i = 0, \quad W'_{-(i+1)} = 0,$$

wreszcie na mocy równania XIV

$$S_i = 0.$$

Zatem dla wszelkich wartości wskaźnika i (całych i dodatnich) wszystkie te funkcyje (W_i i t. d. . .) znikają tak samo jak w poprzednim zadaniu.

Lecz tak samo jak tam mamy wyjątki. Najpierw mógłby być wyjątek dla $i = 0$. Dla $i = 0$ w równaniu XII mamy stały wyraz $g\rho' H$ tak, że w równaniach XIX (a) i XXII zamiast:

$$H_i f_i - W_i$$

mamy:

$$H_0 f_0 + g\rho' H - W_0.$$

Lecz jak to zaraz widać z równania XX

$$H_0 = \infty,$$

a zatem musi być

$$f_0 = 0,$$

skąd znowu na mocy równania XI

$$\varphi_0 = 0.$$

Ale iloczyn $H_0 f_0$ pozostaje nieokreślony, a zatem równania XIX (a) i XXII dla $i=0$ nie mogą posłużyć do określenia funkcji czy raczej stałej W_0 . Natomiast z równań XIV i XVI ze względu na $f_0=0$ wynika

$$W_0 = W'_0 = 3g\rho' S_0,$$

ale $S_0 = H$, gdzie H oznacza średnią głębokość oceanu, a zatem

$$W_0 = W'_0 = 3g\rho' H,$$

wreszcie z równania XVIII wynika

$$W'_{-1} = 0.$$

W ten sposób widzimy, że stałe W_0 , W'_0 oraz funkcja W'_{-1} są określone, ale te stałe nie mają żadnego znaczenia, bo przesunięcia są od nich niezależne. Rezultat ten jest zupełnie naturalny, albowiem stała $g\rho'H$ przedstawia pewne równomierne ciśnienie na całej powierzchni kuli, które nie może sprawić zmiany kształtu tylko równomierne skrócenie promienia. Ale i to równomierne skrócenie promienia nie istnieje, albowiem materiał jądra jest wedle założenia nieściśliwy¹⁾. A zatem przypadek $i=0$ właściwie nie stanowi wyjątku, natomiast wyjątek zachodzi dla $i=2$. Zobaczmy zaraz, że podobnie jak w poprzednim zadaniu dla $i=2$ funkcje $f_2 \dots$, $W_2 \dots$ i t. d. nie są równe zeru.

Wprawdzie równania XII i XIII zachowują swój kształt dla $i=2$, a zatem równanie XIX także zachowuje swój kształt, ale przy rugowaniu W'_2 zamiast równania XVI trzeba użyć równanie XVII. Wskutek tego zamiast równania XIX (a) mamy równanie:

$$\begin{aligned} \left(\frac{R}{R'}\right)^2 H_2 f_2 + \left[1 - \left(\frac{R}{R'}\right)^2\right] W_2 - \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_c}\right) \psi_2 - \\ - 3g(\rho_s - \rho') \frac{R^2}{R'} \left[1 - \left(\frac{R}{R'}\right)^5\right] \frac{5}{2 \cdot 3 \cdot 7} \cdot f_2 = 0, \end{aligned}$$

albo wprowadzając wedle wzoru XXI stałą L_2 i porządkując:

$$\begin{aligned} \left[1 - \left(\frac{R}{R'}\right)^2\right] W_2 - \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_c}\right) \psi_2 + \\ \text{XIX (b)} \quad + \left\{ \left(\frac{R}{R'}\right)^2 H_2 - \left[1 - \left(\frac{R}{R'}\right)^5\right] L_2 \right\} f_2 = 0 \end{aligned}$$

przyczem wedle wzorów XX i XXI

¹⁾ A zresztą tego rodzaju odkształcenie jako istniejące nie dzięki perturbacjom ale po prostu dzięki obecności oceanu t. j. istniejące w konfiguracji zero (u nieodkształconej kuli) wcale nie wchodzi w rachubę.

$$H_2 = \frac{5}{2 \cdot 3 \cdot 7} [19n + 5gR(\rho_s - \rho')] \quad \text{XX (a)}$$

$$L_2 = \frac{5}{2 \cdot 7} g \frac{R^2}{R'} (\rho_s - \rho'). \quad \text{XXI (b)}$$

Równanie XXII także nie pozostanie bez zmiany, albowiem podczas gdy w ogólnym przypadku utworzyliśmy je z równań XII i XIV, w obecnym przypadku musimy zamiast równania XIV użyć równanie XV. Znowu używając dla krótkości symbolów H_2 i L_2 znajdziemy zamiast ogólnego równania XXII równanie:

$$\left[5 - 3 \left(\frac{R}{R'} \right)^2 \right] W_2 - (5L_2 - 3H_2) f_2 - 5\psi_2 = 0. \quad \text{XXII (a)}$$

Równania XIX (b) i XXII (a) są to liniowe równania, zawierające dwie niewiadome W_2 i f_2 i jedną wiadomą ψ_2 . Rugując W_2 zaraz z tych równań otrzymamy:

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_e} \right) \left[1 - \frac{3}{5} \left(\frac{R}{R'} \right)^2 \right] - \left[1 - \left(\frac{R}{R'} \right)^2 \right] \right\} \psi_2 \\ & - \left\{ \left(\frac{R}{R'} \right)^2 H_2 - \left[1 - \left(\frac{R}{R'} \right)^5 \right] L_2 \right\} \cdot \left[1 - \frac{3}{5} \left(\frac{R}{R'} \right)^2 \right] f_2 \\ & - \left(L_2 - \frac{3}{5} H_2 \right) \cdot \left[1 - \left(\frac{R}{R'} \right)^2 \right] f_2 = 0 \end{aligned}$$

t. j.

$$f_2 = \frac{\left\{ \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_e} \right) \left[1 - \frac{3}{5} \left(\frac{R}{R'} \right)^2 \right] - \left[1 - \left(\frac{R}{R'} \right)^2 \right] \right\} \cdot \psi_2}{\left\{ H_2 \left(\frac{R}{R'} \right)^2 - L_2 \left[1 - \left(\frac{R}{R'} \right)^5 \right] \right\} \cdot \left[1 - \frac{3}{5} \left(\frac{R}{R'} \right)^2 \right] - \left\{ L_2 - \frac{3}{5} H_2 \right\} \left[1 - \left(\frac{R}{R'} \right)^2 \right]} \quad \text{XXIII}$$

Skoro raz f_2 jest wiadome, to łatwo już określić pozostałe funkcje. Funkcję φ_2 określimy za pomocą równania XI, dalej W'_2 za pomocą równania XVIII, co do W_2 , to tak samo jak f_2 określimy je z równań XIX (b) i XXII (a), skoro zaś znajdziemy W_2 , to zaraz z równań XV i XVII określimy W'_2 i S_2 .

Średnia głębokość oceanu jest przeszło 2000 razy mniejsza od promienia ziemskiego, zaś gdybyśmy rozleli ocean jednolitą warstwą na powierzchni kuli tak wielkiej jak ziemia, to średnia jego głębokość byłaby prawie 3000 razy mniejsza od długości promienia. Jeżeli więc napiszemy

$$\frac{R' - R}{R'} = \frac{H}{R'} = \varepsilon$$

to ε będzie bardzo małą liczbą, wynoszącą coś około $\frac{1}{3000}$, jednocześnie zaś $\frac{R}{R'} = 1 - \varepsilon$ będzie liczbą bardzo nieznacznie różniącą się od jedności. Stąd wypada, że w przybliżonym rachunku można położyć:

$$R = R'.$$

Kładąc n. p. $R = R'$ w równaniu XXIII, znajdziemy:

$$\text{XXIII (a)} \quad f_2 = \frac{\left(1 - \frac{\rho'}{\rho_e}\right)}{H_2} \cdot \psi_2 \quad (\text{approx.})$$

t. j.

$$\text{XXIII (b)} \quad f_2 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{5} \frac{\left(1 - \frac{\rho'}{\rho_e}\right) \cdot \psi_2}{19n + 5gR(\rho_s - \rho')}.$$

Widzimy więc, że wyrażenie na f_2 jest podobne do wyrażenia tej samej funkcji w poprzednim zadaniu (porówn. wzór XX (a) poprzedniego rozdziału) ale nie identyczne, mianowicie mamy tu współczynnik $\left(1 - \frac{\rho'}{\rho_e}\right)$, którego tam nie było, po drugie mamy tu w mianowniku $19n + 5gR(\rho_s - \rho)$, podczas gdy tam było $19n + 2g\rho R$. Różnice naturalnie pochodzą stąd, że wskutek obecności warstwy cieczy warunki graniczne się zmieniły, że w wyrażeniach potencjału uwzględniliśmy mniejszą gęstość powierzchniowych warstw a prócz tego, że przyłączył się nowy warunek w zewnętrznej powierzchni oceanu. Gdybyśmy chcieli ze wzorów obecnego rozdziału otrzymać znów rezultaty poprzedniego, tobyśmy musieli najpierw odrzucić równanie XIII, jako pochodzące od warunków w zewnętrznej powierzchni cieczy, następnie musielibyśmy położyć $\rho' = 0$ oraz $\rho_s = \rho_e = \rho$.

Ponieważ tak samo jak w poprzednim rozdziale wszystkie funkcje f_i i φ_i są równe zeru i ponieważ z drugiej strony wyrażenia na f_2 i φ_2 są zupełnie podobne do wyrażań poprzedniego rozdziału, bo różnice jakieśmy tylko co widzieli zasadzają się tylko na pewnych różnicach wartości współczynników, więc oczywiście niema co powtarzać rachunków, za pomocą których w poprzednim rozdziale z f_2 i φ_2 i t. d. obliczyliśmy przesunięcia ξ , η i ζ , natomiast można od razu napisać:

$$\text{XXIV} \quad \xi = \frac{\left(1 - \frac{\rho'}{\rho_e}\right)}{F_2} \left[\left(4R^2 - \frac{5}{2}r^2\right) \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + 2x\psi_2 \right]$$

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{\left(1 - \frac{\rho'}{\rho_e}\right)}{F_2} \left[\left(4R^2 - \frac{5}{2} r^2\right) \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + 2y \psi_2 \right] \\ \zeta &= \frac{\left(1 - \frac{\rho'}{\rho_e}\right)}{F_2} \left[\left(4R^2 - \frac{5}{2} r^2\right) \frac{\partial \psi_2}{\partial z} + 2z \psi_2 \right]. \end{aligned} \right\} \text{XXIV}$$

Te równania są zupełnie podobne do równań XXV poprzedniego rozdziału, ale symbol F_2 ma tu inne znaczenie niż w poprzednim rozdziale, tam F_2 oznaczało stałą: $19n + 5g\rho R$, tu zaś:

$$F_2 = 19n + 5g(\rho_e - \rho')R,$$

oprócz tego ψ_2 zawiera tutaj stałą ρ_e , tam zaś zawierało stałą ρ .

Widzimy więc, że odkształcenia sprężystego jądra są najzupełniej określone. Gdybyśmy chcieli obliczyć zmiany momentów bezwładności lub iloczynów bezwład. i t. d., to dość jest wziąć wzory poprzedniego rozdziału, zamiast ρ napisać ρ_e , wprowadzić współczynnik $1 - \frac{\rho'}{\rho_e}$, i nadać stałej F_2 inną wartość, aby otrzymać szukane wielkości. Ale nie dość znać momenty bezwład. i t. d. jądra. W równaniach Eulera figurują momenty bezwład. i t. d. całego układu, trzeba więc jeszcze obliczyć zmiany momentów bezwład. i t. d. oceanu. Znalezione przez nas wzory określają kształt dna i zewnętrznej powierzchni oceanu. Znając zaś kształt oceanu możemy określić jego momenty bezwładności i iloczyny bezwładności, ale momenty względnego ruchu oceanu pozostaną nieokreślone, bo ruchu oceanu nie znamy. Będziemy więc musieli zadowolić się przybliżoną oceną momentów względnego ruchu oceanu, dopełnioną na podstawie pewnych dowolnych mniej lub więcej prawdopodobnych hipotez. Okaże się przytem, że momenty względnego ruchu nie mają znacznego wpływu na rezultaty, że natomiast liczebna wartość średniego współczynnika sztywności ziemi zależy głównie od wartości momentów bezwładności oceanu.

Ocean jest zawarty między powierzchniami

$$r = R + h$$

oraz

$$r = R' + h'.$$

Wedle równania VIII poprzedniego rozdziału, które i tu pozostaje w swej sile

$$h = \frac{\mu}{r} \quad \text{dla } r = R,$$

ale wedle równania XII poprzedniego rozdziału, które tu również pozostaje w swej sile, zważywszy, że wszystkie funkcyje f_i i φ_i oprócz f_2 i φ_2 są równe zeru, znajdziemy:

$$\mu = - \left(\frac{5}{2 \cdot 7} r^2 f_2 + \frac{1}{3} \varphi_2 \right),$$

lub korzystając ze wzoru XI obecnego rozdziału

$$\mu = - \left(\frac{5}{2 \cdot 7} r^2 - \frac{5 \cdot 4}{3 \cdot 7} \cdot R^2 \right) f_2,$$

a więc dla $r = R$

$$h = \frac{\mu}{r} = \frac{5 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 7} R f_2.$$

Z drugiej strony ponieważ wszystkie funkcyje S_i oprócz S_2 są równe zeru, więc wzór IV (obecnego rozdziału) przywodzi się do:

$$h' = S_2.$$

Lecz ze wzorów XIII i XIX, które dla $i = 2$ zostają bez zmiany wypada

$$\text{XXVII} \quad h' = S_2 = \frac{1}{g \rho'} \left(\frac{R}{R'} \right)^2 (W_2 - H_2 f_2).$$

Ponieważ, jak to zaraz widać n. p. ze wzorów XXII(a) i XXIII, W_2 , f_2 i ψ_2 są do siebie proporcjonalne, a więc biorąc n. p. ψ_2 za zmienną niezależną możemy napisać równania powierzchni ograniczających ocean pod kształtem

$$r = R + C_1 \psi_2$$

oraz

$$r = R' + C_2 \psi_2,$$

gdzie C_1 i C_2 są to pewne stałe, ponieważ zaś dalej $\psi_2 = r^2 \cdot \sigma_2$, gdzie σ_2 oznacza funkcyję argumentów θ i ψ t. j. szerokości i długości geograficznej, a więc od razu stąd widać, że obie te powierzchnie są do siebie podobne. Każdej wypukłości dna odpowiada taka sama wprost nad nią położona (tylko większa, bardziej wydatna) wypukłość zewnętrznej powierzchni oceanu. Każdemu zagłębieniu dna odpowiada takie same (tylko głębsze) zagłębienie zewnętrznej powierzchni oceanu. Gdybyśmy nie uważali ziemię za kulę t. j. gdybyśmy wzięli na uwagę rzeczywiste jej spłaszczenie, to to podobieństwo pozostałoby zachowane przynajmniej o tyle, o ile nie uwzględniamy małych wielkości drugiego rzędu.

W dalszym ciągu wyzyskamy to podobieństwo dna i zewnętrznej powierzchni oceanu.

Przed chwilą znaleźliśmy, że:

$$h = \frac{5 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 7} R f_2.$$

Nie potrzebujemy wprowadzać ścisłego wyrażenia XXIII na f_2 , możemy zadowolić się przybliżonem wyrażeniem: XXIII (a). Podstawiając zatem wartość na f_2 z równania XXIII (a) albo jeszcze lepiej z równania XXIII (b), otrzymamy

$$h = \frac{5R \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_s}\right) \psi_2}{19n + 5gR(\rho_s - \rho')} \quad \text{XXVI (a)}$$

Podobnie we wzorze XXVII trzeba wyrazić W_2 i f_2 przez ψ_2 , przy czem także można zadowolić się przybliżonymi wzorami. Wedle XXVII

$$h' = S_2 = \frac{1}{g\rho'} \left(\frac{R}{R'}\right)^2 (W_2 - H_2 f_2).$$

Ponieważ już umiemy wyrazić f_2 przez ψ_2 , a więc dość będzie z tego wzoru wyrugować W_2 . Najlepiej uczynimy to zapomocą wzoru XV. Podstawiając z tego wzoru wartość na W_2 dla $r = R'$ a jednocześnie pisząc wedle wzoru XXI (b) zamiast $\frac{5}{2 \cdot 7} g \frac{R^2}{R'} (\rho_s - \rho')$ dla krótkości L_2 , otrzymamy:

$$S_2 = \frac{1}{g\rho'} \left(\frac{R}{R'}\right)^2 \left[(L_2 - H_2) f_2 + \psi_2 + \frac{3}{5} g \rho' S_2 \right].$$

Stąd zaraz otrzymujemy:

$$\left[1 - \frac{3}{5} \left(\frac{R}{R'}\right)^2 \right] \cdot S_2 = \frac{1}{g\rho'} \left(\frac{R}{R'}\right)^2 [(L_2 - H_2) f_2 + \psi_2].$$

W tem równaniu możemy położyć $R = R'$ a jednocześnie zamiast ścisłej wartości na f_2 z równania XXIII możemy wziąć przybliżoną ze wzoru XXIII (a) lub jeszcze lepiej z XXIII (b), dalej możemy, kładąc wciąż $R = R'$, zamiast $L_2 - H_2$ napisać: $-\frac{5}{2 \cdot 3 \cdot 7} [19n + 2gR(\rho_s - \rho')]$.

Wtedy, dzieląc jeszcze całe równanie na $\frac{2}{5}$, otrzymamy:

$$h' = S_2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{g\rho'} \left[-\frac{19n + 2gR(\rho_s - \rho')}{19n + 5gR(\rho_s - \rho')} \cdot \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_s}\right) + 1 \right] \cdot \psi_2$$

t. j.

$$\text{XXVII (a)} \quad h' = S_2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{g\rho'} \cdot \frac{19n\rho' + gR(3\rho_e + 2\rho')(\rho_e - \rho')}{19n\rho_e + 5g\rho_e R(\rho_e - \rho')} \cdot \psi_2.$$

Stosownie do umowy zrobionej na początku rozdziału oznaczamy momenty i iloczyny bezwładności odkształconego oceanu przez A', B', C', D', E', F' , zaś momenty bezwładności nieodkształconego oceanu przez A'_0, B'_0, C'_0 . Co do iloczynów bezwładności, to te dla nieodkształconego oceanu są równe zeru. Dalej, dzięki hipotezom co do kształtu rozpatrywanego przez nas ciała, musimy założyć, że gdy niema odkształcenia, to ocean jest także ciałem obrotowem, a więc:

$$B'_0 = A'_0.$$

Ta ostatnia hipoteza naturalnie ani trochę nie odpowiada rzeczywistości, ale pamiętajmy o tem, że gdybyśmy założyli $B'_0 \geq A'_0$, to w końcu zadania otrzymalibyśmy te same rezultaty, zaś rachunki byłyby dłuższe. Dlatego też o wiele dogodniej od razu położyć $B'_0 = A'_0$.

Momenty bezwładności A', B' i t. d., oraz iloczyny bezwładności D' i t. d. są różnicami momentów i iloczynów bezwładności dwóch ciał o gęstości ρ' ograniczonych jedno przez zewnętrzną powierzchnię oceanu, drugie przez dno. Oznaczmy chwilowo momenty i iloczyny bezwładności pierwszego ciała przez

$$A'_e, B'_e, C'_e \text{ oraz } D'_e \text{ i t. d.,}$$

gdy to ciało jest odkształcone t. j. gdy równanie jego powierzchni jest:

$$r = R' + h',$$

zaś przez

$$A'_{oe}, B'_{oe}, C'_{oe}, \text{ oraz } D'_{oe} \text{ i t. d.}$$

gdy to ciało jest nieodkształcone t. j. gdy równanie jego powierzchni jest:

$$r = R'.$$

Naturalnie mamy przytem:

$$D'_{oe} = E'_{oc} = F'_{oc} = 0.$$

Tak samo oznaczmy chwilowo przez

$$A'_i, B'_i, C'_i \text{ oraz } D'_i, E'_i, F'_i,$$

momenty i iloczyny bezwładności drugiego ciała, gdy to ciało jest odkształcone, zaś przez:

$$A'_{oi}, B'_{oi}, C'_{oi} \text{ oraz } D'_{oi} \text{ i t. d.}$$

momenty i iloczyny drugiego ciała, gdy to ciało nie jest odkształcone, przyczem znowu naturalnie:

$$\begin{aligned} D'_{oi} &= E'_{oi} = F'_{oi} = 0 \\ B'_{oi} &= A'_{oi}. \end{aligned}$$

Stosownie do tego, cośmy przed chwilą powiedzieli, mamy:

$$\begin{aligned} A' &= A'_e - A'_i \\ B' &= B'_e - B'_i \\ &\dots \dots \dots \\ &\text{i t. d.} \end{aligned}$$

W poprzednim zadaniu równanie powierzchni ograniczającej sprężyste ciało było

$$r = R + h.$$

Wedle czwartego wzoru XXV z poprzedniego rozdziału kładąc:

$$r = R,$$

mieliśmy na h następujący wzór:

$$h = \frac{5R}{F_2} \psi_2.$$

W obecnym zadaniu równanie powierzchni sprężystego jądra t. j. równanie dna oceanu jest również

$$r = R + h,$$

przyczem stosownie do wzoru XXVI (a) mamy:

$$h = \frac{5R \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_e}\right) \psi_2}{19n + 5gR(\rho_e - \rho')}.$$

Ponieważ zaś w obecnym rozdziale dla krótkości (patrz wzór XXV) położyliśmy:

$$19n + 5gR(\rho_e - \rho') = F_2,$$

to możemy napisać:

$$h = \frac{5 \cdot R \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_e}\right) \psi_2}{F_2}.$$

Stąd widzimy, że momenty i iloczyny bezwładności drugiego t. j. wewnętrznego ciała będą zupełnie podobne do momentów i iloczynów bezwładności obliczonych w poprzednim rozdziale z tą jednak

różnicą, że trzeba zamiast ρ napisać ρ_e , wprowadzić czynnik: $1 - \frac{\rho'}{\rho_e}$ a zarazem pod F_2 rozumieć nie jego wartość $19n + 2g\rho R$ z poprzedniego rozdziału, ale obecną wartość $19n + 5gR(\rho_e - \rho')$. W ten sposób znajdziemy najpierw, że podobnie jak tam zmiany momentów bezwładności są małymi wielkościami drugiego rzędu a więc, że można napisać: (porówn. wzory XXVIII (a) poprzedniego rozdziału)

$$\text{XXVIII} \quad \left\{ \begin{array}{l} B'_i = A'_i = A'_{oi} \\ C'_i = C'_{oi}. \end{array} \right.$$

Dalej (porównaj wzory XXIX (a) poprzedniego rozdziału) rozumiejąc pod a i c połowy wielkiej i małej osi nieodkształconego jądra, znajdziemy:

$$\text{XXIX} \quad \left\{ \begin{array}{l} D' = -\frac{(\rho_e - \rho')}{F_2} qr \left[4R^2 A'_{oi} - \frac{5}{2.7} (2a^2 C'_{oi} + 3c^2 A'_{oi}) + \frac{2}{7} c^2 C'_{oi} \right] \\ E'_i = -\frac{(\rho_e - \rho')}{F_2} pr \left[4R^2 A'_{oi} - \frac{5}{2.7} (2a^2 C'_{oi} + 3c^2 A'_{oi}) + \frac{2}{7} c^2 C'_{oi} \right] \\ F'_i = 0. \end{array} \right.$$

Ale ponieważ dno jest jednocześnie zewnętrzną powierzchnią sprężystego jądra, więc możemy napisać:

$$A'_{oi} = \frac{\rho'}{\rho} A_0 \quad \text{i t. d.}$$

albowiem w obecnym rozdziale oznaczaliśmy przez A_0 i t. d. momenty i iloczyny bezwładności sprężystego jądra, zaś przez ρ i ρ' średnią gęstość jądra i gęstość oceanu. Wskutek tego możemy zamiast poprzednich równań napisać równania:

$$\text{XXVIII (a)} \quad \left\{ \begin{array}{l} B_i = A_i = \frac{\rho'}{\rho} A_0 \\ C_i = \frac{\rho'}{\rho} C_0 \end{array} \right.$$

oraz:

$$\text{XXIX (a)} \quad \left\{ \begin{array}{l} D'_i = -\frac{\rho'(\rho_e - \rho')}{\rho F_2} qr \left[4R^2 A_0 - \frac{5}{2.7} (2a^2 C_0 + 3c^2 A_0) + \frac{2}{7} c^2 C_0 \right] \\ E'_i = -\frac{\rho'(\rho_e - \rho')}{\rho F_2} pr \left[4R^2 A_0 - \frac{5}{2.7} (2a^2 C_0 + 3c^2 A_0) + \frac{2}{7} c^2 C_0 \right] \\ F'_i = 0. \end{array} \right.$$

W zupełnie taki sam sposób ¹⁾ obliczymy też momenty i iloczony

¹⁾ Metoda, którą tu posługujemy się, jest stosunkowo prostą i łatwą, ale można też obliczyć momenty i iloczyny bezwładności oceanu korzystając z tego, że

bezwładności pierwszego (zewnątrznego) ciała. Znajdziemy najpierw naturalnie:

$$\left. \begin{aligned} B'_e &= A'_e = \frac{\rho'}{\rho} A_0 + A'_0 \\ C'_e &= \frac{\rho'}{\rho} C_0 + C'_{0e}, \end{aligned} \right\} \text{XXX}$$

dalej zaś gdy przejdziemy do obliczenia iloczynów bezwładności, to przedewszystkiem oczywiście trzeba będzie we wzorach XXIX (a) poprzedniego rozdziału napisać R' zamiast R , dalej a' i c' zamiast a i c przyczem przez R' rozumiemy średni promień nieodkształconej powierzchni oceanu, zaś przez a' i c' połowy wielkiej i małej osi tej samej powierzchni. Następnie ponieważ równanie odkształcone powierzchni jest:

$$r = R' + h',$$

gdzie wedle wzoru XXVII (a)

$$h' = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{g \rho'} \cdot \frac{19 n \rho' + g R (3 \rho_e + 2 \rho') (\rho_e - \rho')}{\rho_e F_2} \cdot \psi_2,$$

a więc porównując to równanie z równaniem:

$$r = R + \frac{5 R}{F_2} \psi_2$$

i pamiętając o tem, że w poprzednim rozdziale ψ_2 zawierało stałą ρ , tu zaś zawiera stałą ρ_e widzimy, że trzeba będzie w prawą stronę równań XXIX (a) poprzedniego rozdziału wprowadzić czynnik:

$$\frac{19 n \rho' + g R (3 \rho_e + 2 \rho') (\rho_e - \rho')}{2 g \rho' \rho R}$$

i naturalnie pisać A'_{0e} zamiast A_0 i t. d. W ten sposób otrzymamy:

$$D'_e = - \frac{19 n \rho' + g R (3 \rho_e + 2 \rho') (\rho_e - \rho')}{2 g \rho' R \cdot F_2} \quad \text{XXXI}$$

$$q r \left[4 R'^2 A'_{0e} - \frac{5}{2 \cdot 7} (2 a'^2 C'_{0e} + 3 c'^2 A'_{0e}) + \frac{2}{7} c'^2 C'_{0e} \right]$$

tak dno jak zewnętrzna (odkształcona) powierzchnia są powierzchniami elipsoidalnymi. Rachunki są wtedy naturalnie dłuższe, trzeba bowiem znajdować położenie nowych osi głównych, wyrażać ich dostawy przez p , q i r i t. d. ale wzory, które otrzymamy dla iloczynów i momentów bezwładności skoro zaniechamy małe wyrazy drugiego rzędu, stają się identyczne z tu znalezionymi wzorami.

$$\text{XXXI} \left\{ \begin{array}{l} E_e = - \frac{19 n \rho' + g R (3 \rho_e + 2 \rho') (\rho_e - \rho')}{2 g \rho' R \cdot F_2} \\ p r \left[4 R'^2 A'_{oe} - \frac{5}{2 \cdot 7} (2 a'^2 C'_{oe} + 3 c'^2 A'_{oe}) + \frac{2}{7} c'^2 C'_{oe} \right] \\ F'_e = 0. \end{array} \right.$$

Ale:

$$\begin{aligned} B'_{oe} &= A'_{oe} = \frac{\rho'}{\rho} A_0 + A'_0 \\ C'_{oe} &= \frac{\rho'}{\rho} C_0 + C'_0. \end{aligned}$$

Jeżeli podstawimy te wartości w równania XXXI, to pomijając A'_{oe} wobec $\frac{\rho'}{\rho} A_0$ oraz C'_{oe} wobec $\frac{\rho'}{\rho} C_0$, bo momenty bezwładności oceanu są co najmniej po dwa lub trzy tysiące razy mniejsze od momentów bezwładności całej ziemi, a zatem A'_0 i C'_0 są po jakie czterysta do pięciuset razy mniejsze od $\frac{\rho'}{\rho} A_0$ i $\frac{\rho'}{\rho} C_0$, dalej pisząc znowu R zamiast R' , a i c zamiast a' i c' , bo R , a i c mało się różnią od R' , a' i c' ¹⁾, wreszcie kładąc tak samo jak w poprzednim rozdziale

$$\text{XXXII} \left\{ \begin{array}{l} Q = 4 R^2 A_0 - \frac{5}{2 \cdot 7} (2 a^2 C_0 + 3 c^2 A_0) + \frac{2}{7} c^2 C_0 \\ N = (C_0 - A_0) \left[4 R^2 - \frac{5}{2 \cdot 7} (4 a^2 + 3 c^2) \right] \end{array} \right.$$

możemy te równania napisać w kształcie:

$$\text{XXXI (a)} \left\{ \begin{array}{l} D'_e = - \frac{19 n \rho' + g R (3 \rho_e + 2 \rho') (\rho_e - \rho')}{2 g \rho R F_2} \cdot q r Q \\ E'_e = - \frac{19 n \rho' + g R (3 \rho_e + 2 \rho') (\rho_e - \rho')}{2 g \rho R F_2} p r Q \\ F'_e = 0. \end{array} \right.$$

Momenty bezwładności oceanu są równe różnicom między momentami bezwładności owych dwóch ciał, które dla krótkości nazwalimy zewnętrznem i wewnętrznem, podanymi we wzorach XXVIII(a) i XXX. Ponieważ momenty zewnętrznego i wewnętrznego ciała, o ile nie uwzględniamy małych wielkości drugiego rzędu mogą być uważane

¹⁾ Oczywiście robiąc te założenia trochę zmniejszamy iloczyn bezwładności oceanu ale błąd stąd pochodzący jest bardzo nieznaczny.

za stałe, przeto momenty bezwładności oceanu, o ile nie uwzględniamy małych wielkości drugiego rzędu, powinny być uważane za stałe, Zresztą z przed chwilą przytoczonych wzorów XXVIII (a) i XXX znajdziemy:

$$\left. \begin{aligned} A' &= B' = A'_0 \\ C' &= C'_0. \end{aligned} \right\} \text{XXXIII}$$

Iloczyny bezwładności oceanu są także różnicami iloczynów bezwładności zewnętrznego i wewnętrznego ciała, podanych we wzorach XXXI(a) i XXIX (a). Przeto pisząc jeszcze wzory XXIX (a) w prostszym kształcie:

$$D'_i = - \frac{\rho'}{\rho} \frac{(\rho_e - \rho')}{F_2} q r Q$$

.....

gdzie Q ma znaczenie podane w pierwszym ze wzorów XXXII a następnie tworząc różnice: $D'_e - D'_i$ i t. d. otrzymamy wzory:

$$\left. \begin{aligned} D' &= - \frac{19 n \rho' + g R [3 \rho_e (\rho_e - \rho') + 2 \rho' (\rho_e - \rho_e)]}{2 g \rho R F_2} q r Q \\ E' &= - \frac{19 n \rho' + g R [3 \rho_e (\rho_e - \rho') + 2 \rho' (\rho_e - \rho_e)]}{2 g \rho R \cdot F_2} \cdot p r Q \\ F' &= 0. \end{aligned} \right\} \text{XXXIV}$$

Mamy więc już wyrażenia momentów i iloczynów bezwładności oceanu. Momenty bezwładności jądra są także naturalnie stałe o ile nie uwzględniamy małych wielkości drugiego rzędu, a więc mamy:

$$\left. \begin{aligned} A &= B = A_0 \\ C &= C_0. \end{aligned} \right\} \text{XXXV}$$

Iloczyny bezwładności jądra są:

$$\left. \begin{aligned} D &= - \frac{(\rho_e - \rho')}{F_2} q r Q \\ E &= - \frac{(\rho_e - \rho')}{F_2} \cdot p r Q \\ F &= 0. \end{aligned} \right\} \text{XXXVI}$$

Momenty względnego ruchu jądra utworzymy wedle wzorów XXVII (a) poprzedniego rozdziału. Naturalnie trzeba przytem wprowadzić czynnik $\frac{\rho_e - \rho'}{\rho_e}$ a symbolom F_2 i ψ_2 nadać to znaczenie, które posiadają w obecnym rozdziale. Otrzymamy przeto, wprowadzając jeszcze symbol N

[którego znaczenie jest podane w drugim wzorze XXXII] następujące wzory:

$$\text{XXXVII} \quad \left\{ \begin{array}{l} m_x = -\frac{d}{dt}(qr) \frac{(\rho_e - \rho')}{F_2} N \\ m_y = \frac{d}{dt}(pr) \frac{(\rho_e - \rho')}{F_2} N \\ m_z = 0. \end{array} \right.$$

Co do momentów ruchu względnego oceanów, to założmy, że te momenty mają takie wartości, jak gdyby ocean wcale nie uczestniczył w perturbacji. W myśl tego założenia należy napisać:

$$\text{XXXVIII} \quad \left\{ \begin{array}{l} m'_x = -A'_0 p \\ m'_y = -A'_0 q \\ m'_z = -C'_0 \varepsilon, \end{array} \right.$$

gdzie ε jest małą wielkością tego samego rzędu co p i q .

Teraz możemy uformować wyrażenia momentów ilości ruchu całego ciała t. j. momentów H_x , H_y , H_z . Wyrażenia te będą wyglądać w następujący sposób:

$$\begin{aligned} H_x &= (A_0 + A'_0) p + m_x + m'_x - r(E + E') \\ H_y &= (A_0 + A'_0) q + m_y + m'_y - r(D + D') \\ H_z &= (C_0 + C'_0) r + m'_z - p(E + E') - q(D + D'). \end{aligned}$$

Podstawiając wartości na E i E' , D i D' oraz m_x , m_y , m'_x , m'_y i m'_z ze wzorów XXXIV, XXXVI, XXXVII, XXXVIII, porządkując, opuszczając wyrazy, zawierające kwadraty p^2 i q^2 jako małe wyrazy drugiego rzędu w porównaniu z innymi, wreszcie opuszczając $C'_0 \varepsilon$ jako bardzo małe w porównaniu z $C'_0 r$ a tembardziej w porównaniu z $C_0 r$, otrzymamy:

$$\text{XXXIX} \quad \left\{ \begin{array}{l} H_x = A_0 p - \frac{(\rho_e - \rho')}{F_2} N \frac{d}{dt}(qr) + \\ + \frac{19 n \rho' + g R [3 \rho_e (\rho_e - \rho') + 2 \rho' (\rho_e - \rho_e) + 2 \rho (\rho_e - \rho')]}{2 g \rho R F_2} p r^2 Q \\ H_y = A_0 q - \frac{(\rho_e - \rho')}{F_2} N \cdot \frac{d}{dt}(pr) + \\ + \frac{19 n \rho' + g R [3 \rho_e (\rho_e - \rho') + 2 \rho' (\rho_e - \rho_e) + 2 \rho (\rho_e - \rho')]}{2 g \rho R F_2} q r^2 Q \\ H_z = (C_0 + C'_0) r. \end{array} \right.$$

Skoro podstawimy te wartości na H_x , H_y i H_z w równania:

$$\frac{dH_x}{dt} - H_y r + H_z q = 0$$

$$\frac{dH_y}{dt} - H_z p + H_x r = 0$$

$$\frac{dH_z}{dt} - H_x q + H_y p = 0,$$

to tak samo jak w poprzednim zadaniu okaże się, że cały wyraz:

$$- H_x q + H_y p,$$

składa się li tylko z małych wielkości drugiego rzędu a zatem może być pominięty. W ten sposób można zamiast trzeciego z przed chwilą napisanych równań różniczkowych po prostu położyć:

$$\frac{dH_x}{dt} = 0.$$

Skąd ze względu na trzecie z pomiędzy równań XXXIX zaraz wypada:

$$r = \text{stałe},$$

przyczem naturalnie tak samo, jak w poprzednim zadaniu, można położyć:

$$r = \omega,$$

gdzie ω oznacza kątową prędkość obrotu ziemi.

Aby uprościć wzory położmy jeszcze:

$$\frac{19 n \rho' + g R [3 \rho_c (\rho_s - \rho') + 2 \rho' (\rho_s - \rho_c) + 2 \rho (\rho_c - \rho')]}{2 g \rho R \cdot F_2} = K. \quad \text{XL}$$

Teraz możemy napisać wzory XXXIX w kształcie:

$$\left. \begin{aligned} H_x &= (A_0 + K Q \omega^2) p - \frac{(\rho_c - \rho')}{F_2} N \omega \frac{dq}{dt} \\ H_y &= (A_0 + K Q \omega^2) q + \frac{(\rho_c - \rho')}{F_2} N \omega \frac{dp}{dt} \\ H_z &= (C_0 + C'_0) \omega. \end{aligned} \right\} \text{XXXIX (a)}$$

Jeżeli podstawimy te wartości na H_x , H_y i H_z w dwa pierwsze z pomiędzy równań różniczkowych:

$$\frac{dH_x}{dt} - H_y r + H_z q = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

to otrzymamy równania zupełnie podobne do równań XXXIII poprzedniego rozdziału, kładąc zaś:

$$\text{XLI} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{A_0 F_2 + [K Q F_2 - N(\rho_e - \rho')] \omega^2}{(\rho_e - \rho') N \omega} = \lambda \\ \frac{(C_0 + C'_0 - A_0) F_2 - K Q F_2 \omega^2}{(\rho_e - \rho') N} = \mu, \end{array} \right.$$

otrzymamy równania identyczne z równaniem XXXIII (a) poprzedniego rozdziału. Można więc je połączyć w jedno równanie identyczne z równaniem XXXIII (b) poprzedniego rozdziału. Wszystkie wnioski, które dotyczyły równania XXXIII (b) w poprzednim rozdziale, pozostaną bez zmiany, tembardziej, że o stałych λ i μ można w obecnym rozdziale powiedzieć to samo, co o λ i μ w poprzednim rozdziale, pomimo tego, że znaczenie tych symbolów jest nieco inne. Dzięki temu równanie służące do określenia współczynnika sztywności n będzie tu tak samo jak tam:

$$\left(\frac{\omega}{430} \right)^2 - \frac{\omega}{430} \lambda + \mu = 0.$$

Skoro w to równanie podstawimy wartości na λ i μ z równań XLI, to otrzymamy równanie:

$$\text{XLII} \quad \left\{ \begin{array}{l} N(\rho_e - \rho') \left(\frac{\omega}{430} \right)^2 - \frac{A_0 F_2 + [K Q F_2 - N(\rho_e - \rho')] \omega^2}{430} + \\ + (C_0 + C'_0 - A_0) F_2 - K Q F_2 \omega^2 = 0. \end{array} \right.$$

Jest to równanie liniowe względem n ; skoro je rozwiążemy, to otrzymamy dla n wzór kształtu:

$$n = \frac{M}{P},$$

przyczem w liczniku M będą prócz innych stać obok siebie wyrazy

$$\frac{5}{2} \omega^2 Q (\rho_e - \rho') \left(1 + \frac{1}{430} \right)$$

i

$$\omega^2 N (\rho_e - \rho') \left(\frac{1}{430} + \frac{1}{(430)^2} \right).$$

Ponieważ Q jest około 500 razy większe od N , a więc z pomiędzy dwóch tylko co napisanych wyrazów pierwszy jest około 200 000 razy większy od drugiego, ponieważ dalej N wcale nie figuruje w mianowniku, więc można w równaniu XLII całkiem pominąć wyrazy

zawierające N . Ale po odrzuceniu wyrazów zawierających N , można całe równanie XLII skrócić na F_2 . W ten sposób zamiast równania XLII otrzymamy równanie:

$$C_0 + C'_0 - (A_0 + K Q \omega^2) \cdot \left(1 + \frac{1}{430}\right) = 0. \quad \text{XLII (a)}$$

Dzieląc to równanie na A_0 , a jednocześnie przyjmując na Q przybliżoną wartość taką samą jak w poprzednim rozdziale t. j. kładąc:

$$Q = \frac{5}{2} A_0 R^2$$

otrzymamy równanie:

$$\frac{C_0 - A_0}{A_0} + \frac{C'_0}{A_0} - \omega^2 \cdot \frac{5}{2} K R^2 \left(1 + \frac{1}{430}\right) - \frac{1}{430} = 0. \quad \text{XLII (b)}$$

Ponieważ przyjmujemy, że ocean pokrywa ziemię jako warstwa wody o jednostajnej głębokości, przeto powinniśmy przyjąć, że stosunek

$$\frac{C_0 - A_0}{A_0},$$

momentów bezwładności jądra posiada prawie tę samą wartość, co podobny stosunek momentów bezwładności całej ziemi t. j. powinniśmy położyć

$$\frac{C_0 - A_0}{A_0} = \frac{1}{305}.$$

Dalej, ponieważ ocean pokrywa ziemię jednolitą warstwą stałej głębokości H , to mamy prawie alscolutnie ściśle:

$$\frac{C'_0}{A_0} = 5 \cdot \frac{\rho'}{\rho} \cdot \frac{H}{R}.$$

Średnia głębokość oceanu rozlanego po całej powierzchni ziemi wynosiłaby tylko około $\frac{1}{2662}$ promienia jądra, przeto mamy:

$$\frac{H}{R} = \frac{1}{2662},$$

ponieważ zaś

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{5,5},$$

a więc:

$$\frac{C'_0}{A_0} = \frac{5}{5,5} \cdot \frac{1}{2662} = \frac{1}{2928,2}.$$

Możnaby uwzględnić tę okoliczność, że oceany w rzeczywistości są głębsze w okolicach ekwatorialnych niż polarnych. Dzięki temu w rzeczywistości stosunek $\frac{C'_0}{A_0}$ jest z pewnością większy niż $\frac{1}{2928,2}$ ale natomiast $\frac{C_0 - A_0}{A_0}$ jest mniejsze niż $\frac{1}{305}$.

Ponieważ jednak gęstość nawet zewnętrznych pokładów jest około dwóch razy większa od gęstości wody, więc dodatni przyrost stosunku $\frac{C_0}{A_0}$ nie mógłby skompensować ujemnego przyrostu stosunku $\frac{C_0 - A_0}{A_0}$ i ostatecznie suma:

$$\frac{C_0 - A_0}{A_0} + \frac{C'_0}{A_0}$$

wypadłaby nieco mniejsza niż:

$$\frac{1}{305} + \frac{1}{2928,2}.$$

Ale będziemy wciąż się trzymać hipotezy, że ziemia jest sferoidem pokrytym jednolitą warstwą wody o stałej głębokości, bo choć ta hipoteza różni się z rzeczywistością jednakże jest dogodną, bo upraszcza rachunki a zarazem jest wystarczającą, bo przecie w takich zadaniach chodzi właściwie nie tyle o ścisłe obliczenie domniemanego średniego współczynnika sztywności ile raczej o zbadanie czy to jest wielkość dająca się porównywać ze współczynnikami sztywności skał, czy też ze współczynnikami sztywności metali i t. d. Pozostaniemy więc przy założeniu, że:

$$\frac{C_0 - A_0}{A_0} = \frac{1}{305}$$

$$\frac{C'_0}{A_0} = \frac{1}{2928,2}.$$

Ale teraz pisząc jeszcze 2928 zamiast 2928,2 oraz opuszczając mało różny od jedności czynnik

$$1 + \frac{1}{430},$$

otrzymamy zamiast równania XLII (b) równanie:

$$\frac{1}{305} + \frac{1}{2928} - \frac{1}{430} = \frac{5}{2} \cdot K R^2 \omega^2.$$

Ponieważ:

$$\frac{1}{305} - \frac{1}{430} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2623},$$

zaś

$$\frac{1}{2928} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{7320},$$

przeto otrzymamy:

$$KR^2 \omega^2 = \frac{1}{2623} + \frac{1}{7320},$$

podstawiając zaś wartość na K ze wzoru XL otrzymamy:

$$19 n \rho' + gR [3\rho_e (\rho_s - \rho') + 2\rho' (\rho_s - \rho_e) + 2\rho (\rho_e - \rho')] \cdot \frac{R \omega^2}{2g\rho F_2} =$$

$$\frac{7320 + 2623}{7320 \times 2623}.$$

Ponieważ zaś

$$\frac{R \omega^2}{g} = \frac{1}{290}$$

a wedle wzoru XXV

$$F_2 = 19n + 5gR(\rho_s - \rho'),$$

więc po łatwych rachunkach znajdziemy:

$$9943 \times 58 \times [19n\rho + 5g\rho R(\rho_s - \rho')] =$$

$$= 2623 \times 732 \times \{19n\rho' + gR[3\rho_e(\rho_s - \rho') + 2\rho'(\rho_s - \rho_e) + 2\rho(\rho_e - \rho')]\}.$$

Skąd:

$$n = \frac{gR}{19} \times$$

$$\frac{2623 \times 732 \cdot [3\rho_e(\rho_s - \rho') + 2\rho'(\rho_s - \rho_e) + 2\rho(\rho_e - \rho')] - 9943 \times 58 \times 5\rho(\rho_s - \rho')}{9943 \times 58\rho - 2623 \times 732\rho'}$$

Skorzystajmy z tego, że prawie ściśle:

$$(2623 \times 732) : (9943 \times 58) = 10 : 3$$

i skrócimy licznik i mianownik na 9943×58 . Następnie podstawmy zamiast ρ , ρ' i ρ_s ich wartości. Naturalnie

$$\rho' = 1$$

$$\rho = 5,5,$$

co do ρ_s to ponieważ ten symbol oznacza gęstość powierzchniowej warstwy, więc należy przyjąć na ρ_s taką samą wartość jak dla średniej gęstości lżejszych skał i pokładów, mianowicie położymy:

$$\rho_s = 2,2.$$

Skróciwszy licznik i mianownik na 9943×58 , podstawivszy liczebne wartości na ρ , ρ' i ρ_e , a wreszcie wykonawszy niektóre oczywiste rachunki znajdziemy:

$$n = \frac{gR}{19} \frac{126\rho_e - 66 - 3 \times 1,2 \times 27,5}{3 \times 5,5 - 10}$$

t. j.

$$n = \frac{gR}{19} \cdot \frac{126\rho_e - 165}{6,5}$$

Oczywiście n wzrasta razem z ρ_e . Jeżeli

$$\rho_e = \frac{165}{126},$$

to n staje się zerem, ale taka wartość ρ_e jest zupełnie niemożliwa, bo ρ_e musi być koniecznie większe niż średnia gęstość powierzchniowych pokładów t. j. dolną granicą ρ_e jest wartość $\rho_e = \rho' = 2,2$. Rzecz prosta, że należy wziąć na uwagę większe wartości na ρ_e niż ta dolna wartość, obliczymy więc n dla $\rho_e = 2,2$, dalej dla $\rho_e = 4$, $\rho_e = 4,5$, $\rho_e = 5,5$.

Ponieważ w jednostkach *C. G. S.*

$$g = 980 \\ R = 637 \times 10^6,$$

więc po łatwych rachunkach znajdziemy:

dla $\rho_e = 2,2$	$n =$ (przybl.)	567×10^9	w jedn. <i>C. G. S.</i>
" $\rho_e = 3,0$	$n =$	" 879×10^9	" " " " "
" $\rho_e = 4,0$	$n =$	" 1713×10^9	" " " " "
" $\rho_e = 4,5$	$n =$	" 2036×10^9	" " " " "
" $\rho_e = 5,5$	$n =$	" 2681×10^9	" " " " "

W każdym więc razie n jest zawarte między wartościami 567×10^9 i 2681×10^9 odpowiadającymi hipotezom, że efektywna średnia gęstość jest równa średniej gęstości powierzchniowej warstwy oraz, że efektywna średnia gęstość jest równa rzeczywistej średniej gęstości ziemi. Dla porównania przypominamy, że współczynnik sztywności stali wynosi 819×10^9 w jedn. *C. G. S.* oraz, że w poprzednim rozdziale gdzie oceanu nie było a średnia efektywna gęstość równała się rzeczywistej średniej gęstości ziemi, znaleźliśmy

$$n = 1250 \times 10^9.$$

Zastanówmy się teraz nad tem, co by się stało, gdybyśmy traktowali zadanie zupełnie ściśle t. j. jako zadanie dynamiczne. Co do de-

formacji jądra, to przy tak powolnych ruchach (peryod perturbacji wynosi około 430 dni) przyspieszenia pomnożone na gęstość są napewno zupełnie znikomymi wielkościami wobec siły ciężkości osobiwie zaś wobec ogromnych sił sprężystych a zatem mogą być na pewno pominięte, co zaś do oceanu, to tu wpływ bezwładności może być trochę znacniejszy, bo siły sprężyste zupełnie odpadają, ale jeżeli dwutygodniowe morskie przyływy w dynamicznej teorii wypadają o połowę mniejsze od tychże przyływów w statycznej teorii, to dla przyływów o 430 dniowym peryodzie różnica między rezultatami dynamicznej i statycznej teorii będzie o wiele mniejszą i można powiedzieć, że przy dynamicznem traktowaniu zadania n wypadłoby nie o wiele mniejszem.

Badania przeprowadzone w tych ostatnich dwu rozdziałach są do pewnego stopnia jednostronne. Bądź co bądź w osnowie tych badań leży już hipoteza, że bryła ziemiska jest ciałem sprężystem. Tymczasem w trzecim rozdziale wyłożyliśmy niektóre badania Hougha i Słudzkiego, które pokazały, że obecność ciężkiego jądra powinna przyczyniać się do skrócenia peryodu Eulerowskiej perturbacji. Gdybyśmy więc n. p. mieli system złożony z ciekłego jądra i sprężystej skorupy (pokrytej lub niepokrytej oceanem), to peryod Eulerowskiej perturbacji, o ile uwzględniamy tylko momenty względnego ruchu wewnętrznej cieczy, która w perturbacji przystaje wobec skorupy, powinien być krótszy aniżeli 305 dni, ale gdy peryod perturbacji jest krótszy od 305 dni; to na to, aby go przedłużyć do 430 dni oczywiście trzeba większych odkształceń aniżeli te, które wystarczają na przedłużenie peryodu z 305 na 430 dni. Stąd mógłby kto wnosić, że w takim razie współczynnik sztywności n znowu powinien wypaść mniejszy. Ale trzeba pamiętać o tem, że system posiadający ciekłe jądro musi łatwiej odkształcać się, niż system, w którym cała bryła ziemiska jest złożona ze sztywnych materyałów, tak samo jak łatwiej odkształca się wydrążona kula niżli pełna. A zatem wedle wszelkiego prawdopodobieństwa współczynnik sztywności ¹⁾ n dla skorupy otaczającej ciekłe jądro wypadłby większy niż dla pełnej kuli nieposiadającej ciekłego jądra.

To mniemanie staje się pewnikiem, jeżeli zważymy, że w przypadku ziemi owa wewnętrzna ciecz musiałaby być bardzo gęstą i lepka a zatem w ruchu swoim nie mogłaby tak znacznie przystawać wobec skorupy. Wskutek tego momenty ruchu względnego cieczy byłyby stosunkowo nie tak znaczne a zatem przystawanie wewnętrznej cie-

¹⁾ Naturalnie w tym wypadku mówimy o współczynniku sztywności dla skorupy.

czy nie mogłoby sprawić znacznego skrócenia peryodu, natomiast ziemia posiadająca ciekłe jądro musiałaby się znacznie odkształcić, co sprawiłoby przedłużenie peryodu Eulerowskiej perturbacji nie do 430 dni ale do znacznie dłuższego czasu. Rzeczywiście jeżeli dla pełnej jednolitej sprężystej ziemi przy sztywności większej niż sztywność stali peryod perturbacji przedłuży się wskutek odkształceń do 430 dni, to jak ogromną musiałaby być sztywność skorupy otaczającej ciekłe jądro, gdyby grubość ścian tej skorupy równała się n. p. $\frac{1}{10}$ promienia ziemskiego, jak ogromną, powtarzamy, musiałaby być sztywność skorupy, aby peryod Eulerowskiej perturbacji przedłużył się tylko do 430 dni a nie więcej ¹⁾.

ROZDZIAŁ VI.

Prędkość rozchodzenia się drgań we wnętrzu ziemi. Wnioski stąd co do stanu tego wnętrza.

Przyjrzelśmy się rozmaitym zjawiskom, na podstawie których można sądzić o stanie wnętrza. Wprawdzie okazało się, że interpretacja niektórych z tych zjawisk jest trudna, że istnieją pewne wątpliwości i t. d., wszakże stale okazywało się, że charakter tych zjawisk przemawia raczej za hipotezą całkowicie sztywnego aniżeli ciekłego wnętrza. Ale prócz rozpatrywanych istnieje jeszcze pewna kategoria zjawisk, które mogą nam dać wskazówki co do stanu wnętrza ziemi. Natura tych zjawisk jest zupełnie odmienna od natury poprzednio rozpatrywanych, wskutek czego wnioski na nich oparte są tem bardziej interesujące.

Jeszcze kilkadziesiąt lat temu obserwowano trzęsienia ziemi tylko w stosunkowo niewielkiej odległości od epicentrum. Trzeba było chyba tak gwałtownego trzęsienia ziemi jak lizbońskie w 1755 roku, aby wstrząśnienia dały się odczuć w odległościach wynoszących po parę tysięcy kilometrów. Dopiero w ostatnich czasach zbudowano seismoskopy i seismometry o tyle czułe i delikatne, że nawet bardzo słabe bez pomocy seismometrów zupełnie niedostrzegalne drgania, wywołane przez trzęsienia ziemi, których ogniska znajdują się gdzieś w Japonii

¹⁾ Późniejszy przypisek autora. Już po odesłaniu tej rozprawy do Akademii czytałem krótki artykuł [Astronom. Journ. N. 452 z d. 29 grudnia 1898 r.] pod tyt. „On the theoretical laws etc. . . .“, w którym S. Newcomb wypowiada swoje zapatrywania na teorię ruchu bieguna. Zapatrywania te są najzupełniej zgodne z wnioskami wprowadzonymi w obecnym i w poprzednich rozdziałach.

lub południowej Ameryce natychmiast bywają zanotowane na europejskich seismicznych obserwatoriach.

Przypuszczenie, że seismiczne drgania rozchodzą się tylko wzdłuż powierzchni w jakiejś cienkiej zewnętrznej warstwie jest zupełnie nieprawdopodobne, bo gdyby nawet wewnątrz ziemi było wypełnione cieczą, to ta ciecz mogłaby też przewodzić drgania. Drgania należące do trzęsienia ziemi, którego ognisko znajduje się gdzieś w Japonii albo w południowej Ameryce zapewne przychodzą do europejskich stacyi wprost przez głębokie centralne warstwy ziemi.

Ale ponieważ prędkość rozchodzenia się drgań zależy od sprężystości ośrodka, więc z prędkości rozchodzenia się drgań można sądzić o sprężystości i wogóle o fizycznych własnościach ośrodka.

Spostrzeżenia dają nam prędkości rozchodzenia się drgań ale nie rzeczywiste tylko pozorne. Rzeczywiście o prędkości rozchodzenia się drgań wnosimy ze spostrzeżeń dokonanych na powierzchni ziemi, ponieważ jednak nie wiemy jakimi drogami przychodzą drgania z ogniska do pewnej stacyi, dajmy na to stacyi A , więc nawet jeżeli znamy ten moment czasu, w którym trzęsienie ziemi zdarzyło się w ognisku i ten, w którym dosięgło stacyi A , to jednak nie możemy stąd wywnioskować z jaką rzeczywistą prędkością biegły drgania od ogniska do A .

O drodze, po której drgania przyszły z ogniska do stacyi A wiemy tylko tyle, że ta droga nie może być krótszą niż odcinek prostej łączącej ognisko ze stacyą A , a więc rzeczywista średnia prędkość nie może być w żadnym razie mniejszą aniżeli stosunek

$$\frac{D}{T}$$

gdzie przez D oznaczyliśmy prostoliniową odległość¹⁾ między ogniskiem i stacyą A , zaś przez T długość owego odstępu czasu, który upłynął między tą chwilą, w której pewne wstrząśnienie zdarzyło się w ognisku i tą, w której to samo wstrząśnienie dało się uczuć na stacyi A .

Natomiast pozorna prędkość rozchodzenia się drgań wzdłuż powierzchni od epicentrum do stacyi A może być w pewnych przypadkach mniejszą a w pewnych przypadkach większą od rzeczywistej średniej prędkości, z którą drgania przyszły z ogniska do stacyi A , choć wogóle „*ceteris paribus*“ obie prędkości wzrastają jednocześnie.

Spostrzeżenia pokazały, że nawet jedno jedyne wstrząśnienie w ognisku zazwyczaj rozszczepia się na cały szereg drgań, rozchodzących się z różnemi prędkościami i bywa odczuwane (przez seismometry)

¹⁾ T. j. odległość mierzoną wprost a nie wzdłuż powierzchni ziemi,

na stacyi *A* jako cały szereg wstrząśnień, posiadających różne natężenia. Nie wiemy więc jaką prędkość mamy wziąć za podstawę dalszych rachunków, czy prędkość pierwszych drgań, czy ostatnich, czy tych drgań, które posiadają największe amplitudy, czy może jakich innych, jednocześnie zaś widzimy, że zjawisko jest o wiele więcej skomplikowane aniżeli rozchodzenie się drgań w idealnym jednorodnym i izotropowym ośrodku, który to przypadek bywa pospolicie rozpatrywany w traktatach fizyki. W idealnym jednorodnym izotropowym sprężystym ośrodku każde wstrząśnienie powinno wytwarzać tylko dwie fale: falę dylatacyjną i falę torsyjną, tu zaś obserwujemy całe dziesiątki a może setki lub więcej fal. Wskutek tego wnioski oparte na teorii rozchodzenia się drgań w ośrodku sprężystym izotropowym nie mogą być wprost zastosowane do tego nowego przypadku. Aby mózdz teoretycznie analizować seismiczne drgania, trzeba by wprzódy utworzyć teorią rozchodzenia się drgań w ośrodkach tak ukształtowanych, aby każde wstrząśnienie wytwarzało całą gamę fal różnej prędkości i zbadać związki między temi prędkościami a rozmaitymi współczynnikami sprężystości tym ośrodkom właściwymi. Póki jednak taka teoria nie jest zrobiona i wypróbowana, należy powstrzymać się od wniosków, opartych na czysto teoretycznych rozumowaniach.

Natomiast trzeba i można badać rozchodzenie się drgań w głębokich pokładach w nieco inny nawpół teoretyczny a nawpół empiryczny sposób.

Nietylko w czasie naturalnych ale także w czasie sztucznych trzęsień ziemi, spowodowanych przez wybuchy naboju prochowego lub dynamitu, przez uderzenia wielkich młotów fabrycznych i t. d. wstrząśnienia rozszepiają się na cały szereg fal, rozchodzących się z różnemi prędkościami oraz posiadających różne amplitudy. Ale drgania obserwowane w czasie sztucznych trzęsień ziemi rozchodzą się w powierzchniowych dobrze nam znanych warstwach, a więc porównując między sobą sztuczne i naturalne trzęsienia ziemi można wyciągnąć pewne wnioski co do natury ośrodka, z którego składają się głębokie warstwy.

Przebieg naturalnego trzęsienia ziemi jest zazwyczaj taki, że wstrząśnienia zaczynają się od bardzo drobnych drgań [czasami jednakże trzęsienie ziemi zaczyna się silniejszym wstrząśnieniem, po którym następują drobne drgania] dopiero potem nadechodzą fale większej amplitudy. Ruch dochodzi do maximum najczęściej raz, niekiedy tylko kilka razy. Całe zjawisko trwa kilka, kilkanaście a na dalekich stacyach nawet po kilkadziesiąt minut lub kilka godzin. To rozciąganie się trzęsienia ziemi na co raz to dłuższy czas na co raz to bardziej odległych stacyach tłumaczy się bardzo łatwo, bo jeżeli pojedyncze fale

należące do tego samego trzęsienia ziemi rozchodzą się z różnemi prędkościami, to oczywiście czas, w ciągu którego te fale kolejno przychodzą do pewnej stacyi jest tem dłuższy, im stacya jest bardziej oddalona. Zupełnie takim samym jest przebieg trzęsienia ziemi sprawionego n. p. przez wybuch dynamitu z tą różnicą, że czas trwania zjawiska jest bezporównania krótszy. Niema w tem nic dziwnego. Sztuczne trzęsienia ziemi sprawione przez wybuch kilku lub kilkunastu kilogramów dynamitu są mikroskopijnem zjawiskiem w porównaniu z naturalnemi trzęsieniami ziemi. Wskutek tego sztuczne trzęsienia ziemi nawet przy użyciu czułych narzędzi mogą być obserwowane z odległości zaledwie jakich kilkuset metrów od ogniska wybuchu. Na tak małej odległości jednorazowe wstrząśnienie rozciąga się na bardzo krótki okres czasu wynoszący najczęściej mniej niż sekundę i trzeba specjalnych odpowiednio urządzonych przyrządów aby uchwycić bodaj tylko główne fazy zjawiska. Takie przyrządy posiadali n. p. Fouqué i Lévy¹⁾ dlatego też ich spostrzeżenia są więcej pouczające niż spostrzeżenia Abbota albo Milne'a, które choć zupełnie potwierdzają wszystko, co się okazało ze spostrzeń Fouqué'go i Lévy, ale nie dają możności tak dokładnie wejrzeć we wszystkie fazy zjawiska.

Przytoczymy tu rezultaty eksperymentów Fouqué'go i Lévy.

Stacya obserwacyjna zawsze znajdowała się na powierzchni ziemi, ognisko wstrząśnień znajdowało się niekiedy pod powierzchnią niekiedy zaś na powierzchni.

Przez prędkość oznaczano stosunek między najkrótszą odległością od stacyi obserwacyjnej do ogniska wstrząśnień a czasem, który upłynął między wybuchem w ognisku a wstrząśnieniem na stacyi; być więc może, że prędkości tu podane nie są ściśle równe rzeczywistym średnim prędkościom rozchodzenia się drgań, bo drogi, po których dążyły drgania, niekoniecznie były prostemi liniami.

Doświadczenia w Montvclq. Pokład granitowy. Wybuchy na powierzchni. Pierwsze dwa doświadczenia były nieudatne.

Doświadczenie Nr. 3.

Odległość stacyi obserwacyjnej od miejsca wybuchu: 150 metrów.

Nabój 4 kilogramy dynamitu.

Prędkość pierwszych spostrzegalnych²⁾ drgań 2450 metr. na sekundę.

¹⁾ Mission d'Andalousie. Mém. près. a l'Acad. des Sciences à Paris. Serya II, tom XXX (1889 r.) str. 57—77.

²⁾ Naturalnie mówimy o drganiach „sposrzegalnych“ za pomocą przyrządu Fouqué'go i Lévy.

Prędkość I.	maximum drgań	?? (niejasne maximum)
"	II. " "	526 metr. na sekundę
"	III. " "	232 " " "
"	ostatnich spostrzegalnych drgań	108 " " "

Doświadczenie Nr. 4.

Odległość stacyi obserwacyjnej od miejsca wybuchu 350 metrów.

Nabój 10 kilogramów dynamitu.

Prędkość	pierwszych spostrzegalnych drgań	3141 metr. na sekundę
"	I. maximum	1125 " " "
"	II. " "	459 " " "
"	ostatnich spostrzegalnych drgań	219 " " "

Doświadczenia w Commentry. Pokład: piaskowiec węglowej formacyi. Wybuchy pod ziemią.

Doświadczenie Nr. 1.

Odległość stacyi obserwacyjnej od miejsca wybuchu 158 metrów.

Nabój 3 kilogramy dynamitu.

Prędkość	pierwszych drgań	2200 metr. na sekundę
"	I. maximum	1026 " " "
"	ostatnich drgań	513 " " "

Doświadczenie Nr. 2.

Odległość stacyi obserwacyjnej od miejsca wybuchu 158 metrów.

Nabój 4 kilogramy prochu i 0,1 kilograma dynamitu.

Prędkość	pierwszych drgań	2200 metr. na sekundę
"	I. maximum	1026 " " "
"	ostatnich drgań	466 " " "

Doświadczenie Nr. 3.

Odległość stacyi obserwacyjnej od miejsca wybuchu 202 metry.

Nabój 4 kilogramy dynamitu.

Prędkość	pierwszych drgań	2200 metr. na sekundę
"	I. maximum	1164 " " "
"	ostatnich drgań	440 " " "

Doświadczenie Nr. 4.

Odległość stacyi obserwacyjnej od miejsca wybuchu 243 metry.

Nabój 4 kilogramy dynamitu.

Prędkość	pierwszych drgań	2173 metr. na sekundę
"	I. maximum	?? (niejasne)
"	ostatnich drgań	?? (niejasne)

Doświadczenie Nr. 5.

Odległość stacyi obserwacyjnej od miejsca wybuchu 344 metry.

Nabój 8 kilogramów dynamitu.

Prędkość pierwszych drgań	2526 metr. na sekundę
„ I. maximum	1805 „ „ „
„ ostatnich drgań	1222 „ „ „

Doświadczenie Nr. 6.

Przy tem doświadczeniu nie tylko miejsce wybuchu, ale i stacya obserwacyjna znajdowały się pod ziemią w kopalni.

Odległość między obu punktami wynosiła: 145 metrów.

Nabój 4 kilogramy dynamitu.

Prędkość pierwszych drgań	2000 metr. na sekundę
„ I. maximum	933 „ „ „
„ ostatnich drgań	466 „ „ „

Doświadczenia w Saligny. Pokład: marmur kambryjskiej formacyi, wybuchy na powierzchni.

Jeżeli odległości między stacyą obserwacyjną a ogniskiem wybuchu były znaczniejsze, doświadczenia zupełnie się nie udawały, bo seismometr pokazywał tylko bardzo słabe i niewyraźne ślady drgań.

Doświadczenie Nr. 1.

Odległość stacyi obserwacyjnej od ogniska wybuchu 55 metrów.

Nabój 8 kilogramów dynamitu.

Prędkość pierwszych drgań	632 metr. na sekundę
„ I. maximum	218 „ „ „
„ II. maximum	91 „ „ „
„ ostatnich drgań	42 „ „ „

Doświadczenie Nr. 2.

Odległość stacyi obserwacyjnej od ogniska wybuchu 115 metrów.

Nabój 6 kilogramów dynamitu.

Prędkość pierwszych drgań	632 metr. na sekundę.
„ I. maximum	294 „ „ „
„ II. maximum	145 „ „ „
„ ostatnich drgań	63 „ „ „

Porównajmy z tem rezultaty spostrzeżeń nad naturalnemi trzęsieniami ziemi. Przytaczać tu wszystkich spostrzeżeń nie możemy, bo

zajęłoby to nam nazbyt dużo miejsca. Ciekawych czytelników odsyłamy do prac Rebeura Paschwitza ¹⁾, Agamennone ²⁾, Milne'a ³⁾ i t. d.

Z tych spostrzeżeń okazuje się, że na stacyach znajdujących się na odległości 2000 i więcej kilometrów od ogniska trzęsienia ziemi, pozorne prędkości rozchodzenia się pierwszych dostrzegalnych drgań dochodzą do 10 i więcej kilometrów na sekundę, zaś pozorne prędkości rozchodzenia się głównej fazy t. j. maximum trzęsienia ziemi dochodzą do 3 kilometrów na sekundę.

Dla przykładu przytoczymy tu dane odnoszące się do niektórych trzęsień ziemi. Czerpiemy je głównie z przed chwilą przytoczonej rozprawy Rebeura Paschwitza ⁴⁾, tylko daty odnoszące się do trzęsienia ziemi w Assamie wzięliśmy z rozprawki Agamennone ⁵⁾.

Uprzedzamy, że pod pozorną prędkością rozumiemy prędkość liczoną tak, jak gdyby drgania biegly z epicentrum do stacyi obserwacyjnej wzdłuż powierzchni ziemi.

¹⁾ Horizontalpendelbeobachtungen. Beiträge zur Geophysik, tom II.

²⁾ Atti della reale Accad. dei Lincei. Rendiconti cl. mat. phys. z ostatnich kilku lat zawierają cały szereg drobnych rozprawek Agamennone, Bonetti'ego, Cancaniego i innych włoskich seismologów.

³⁾ Rep. Br. Ass. za 1895 r. str. 81—183 i za 1896 r. str. 180—230.

⁴⁾ Loc. cit. str. 492 oraz 517.

⁵⁾ Il terremoto dell' India del 12 giugno 1897. Atti del Accad. dei Lincei Rendic. cl. mat. phys. serya V, tom VII. I. semestr. str. 265—271.

	Data	Epicentrum	Stacya gdzie zanotowano trzęsienie ziemi	Odległość między epicentrum i stacya obserwacyjną liczona wzdłuż powierzchni ziemi	Prędkość pozorną pierzwszych drgań	Pozorna prędkość głównej fazy trzęsienia ziemi
1.	11 maja 1892	Tokio	Strassburg	9520 km.	26,4 km. na sek.	3,07 km. na sek.
2.	" " "	"	Nikołajew	7910 "	9,55 "	2,41 "
3.	18 paźdz. 1892	"	Strassburg	9520 "	5,87 "	3,83 "
4.	" " "	"	Nikołajew	7910 "	3,23 "	2,24 "
5.	4 listopada 1892	"	Strassburg	9520 "	8,10 "	2,64 "
6	" " "	"	Nikołajew	7910 "	6,28 "	2,71 "
7.	27 kwietnia 1889	"	Wilhelmshafen	9070 "	6,80 "	3,50 "
8.	" " "	"	Potsdam	8950 "	11,30 "	2,79 "
9.	23 marca 1893	"	Strassburg	9520 "	4,20 "	3,62 "
10.	16 marca 1893	w prowincyi Panga- sinan, wyspa Luzon	Nikołajew	8758 "	6,08 "	2,25 "
11.,	II. wstrząśnienie	"	"	"	5,41 "	3,00 "
12.,	20 grudnia 1892	Quettah (Beludżystan)	Strassburg	5290 "	5,65 "	2,67 "
13	" " "	"	Nikołajew	3480 "	3,86 "	2,19 "
14.	13 lutego 1893	"	Strassburg	5290 "	3,08 "	2,76 "
15.	28 kwietnia 1894	provincya Merida w Venezueli	Nikołajew	10320 "	9,01 "	? ?
16	" " "	"	Charków	10530 "	9,01 "	" "
17	27 paźdz. 1894	50 km. NNE od S. Juan w Argentynie	Kyzyn	11550 "	10,85 "	2,86 "
18	" " "	"	Charków	13580 "	12,13 "	? ?
19	" " "	"	Tokio	17400 "	16,60 "	? ?

	Data	Epicentrum	Stacya gdzie zanotowano trzęsienie ziemi	Odległość między epicentrum i stacyą obserwacyjną; liczone wzdłuż powierzchni ziemi	Pozorna prędkość pierwszych drgań		Pozorna prędkość główniej fazy trzęsienia ziemi	
					1 godz. ¹⁾	2 godz.	1 godz.	2 godz.
20	12 czerwca 1897	w Assamie (Indye wsch.)	Pawłowski	5980 km.	8 km	9,3 km.	2,59 km.	2,78 "
21	" "	" "	Potsdam	7020 "	8,9 "	11,0 "	?	?
22	" "	" "	Catania	7150 "	8,8 "	10,8 "	2,51 "	2,65 "
23	" "	" "	Portici	7150 "	8,5 "	10,3 "	2,55 "	2,69 "
24	" "	" "	Mineo	7170 "	9,9 "	12,5 "	?	?
25	" "	" "	Ischia	7170 "	9,0 "	11,1 "	2,63 "	2,78 "
26	" "	" "	Spinea	7220 "	8,1 "	9,8 "	?	?
27	" "	" "	Padwa	7240 "	9,2 "	11,4 "	2,66 "	2,81 "
28	" "	" "	Velletri	7250 "	9,2 "	11,4 "	?	?
29	" "	" "	Rocca di Papa	7260 "	8,9 "	10,9 "	2,66 "	2,82 "
30	" "	" "	Rzym	7260 "	9,2 "	11,3 "	2,67 "	2,82 "
31	" "	" "	Florenyca	7310 "	8,6 "	10,5 "	?	?
32	" "	" "	Wilhelmshafen	7330 "	8,1 "	9,7 "	2,52 "	2,66 "
33	" "	" "	Livorno	7390 "	9,4 "	11,6 "	?	?
34	" "	" "	Pawia	7440 "	8,6 "	10,5 "	2,73 "	2,90 "
35	" "	" "	Utrecht	7560 "	9,6 "	11,9 "	2,37 "	2,49 "
36	" "	" "	Grenoble	7700 "	8,4 "	10,1 "	?	?
37	" "	" "	Paryż	7840 "	5,4 "	6,0 "	?	?
38	" "	" "	Edynburg	7970 "	9,4 "	11,5 "	2,78 "	2,93 "

¹⁾ Co do momentu, w którym nastąpiło wstrząśnienie w epicentrum istnieje pewna wątpliwość tak, że wypadło zrobić obliczenie dla jednego i drugiego prawdopodobnego momentu, w którym nastąpiło wstrząśnienie.

Z tylko co przytoczonej tablicy widzimy ¹⁾, że prędkość głównej fazy jest zawarta w stosunkowo ciasniejszych granicach niż prędkość pierwszych drgań, pochodzi to stąd, że rozmaite przyrządy (poziome wahadła, długie pionowe wahadła włoskich seismologów i t. d.) są niejednakowo czule na pierwsze drgania, dalej stąd, że zależnie od odległości między ogniskiem trzęsienia ziemi i stacją obserwacyjną, od intensywności pierwszych drgań i t. d., pierwsze zanotowane przez przyrząd drgania niezawsze są identyczne z rzeczywistymi pierwszymi drganiami: zdarza się, że przyrząd poczyna poruszać się dopiero wtedy, gdy nadejdą drgania o nieco większej amplitudzie niż rzeczywiste pierwsze drgania. Dlatego może będzie lepiej, jeżeli jako kryterium użyjemy nie prędkości pierwszych drgań ale prędkości głównej fazy trzęsień ziemi. Należy je porównywać z prędkościami rozchodzenia się I. maximum w doświadczeniach Fouqué'go i Levy. W niektórych przypadkach n. p. przy sztucznych wybuchach w Montvicq notowano prócz pierwszego jeszcze drugie a nawet i trzecie maximum ruchu. Podobnie

¹⁾ Już po odesłaniu tej rozprawy do Akademii w ręce moje dostał się Report on the 67 meeting of the Br. Ass. [w Toronto 1897] wydany w Londynie 1898 roku. Zawiera on sprawozdanie Milne'a o badaniach nad trzęsieniami ziemi. Na str. 173 Milne podaje tablicę prędkości rozchodzenia się drgań. Tablica ta początki zawiera podane tu spostrzeżenia, nie zawiera danych przytoczonych pod Nr. 20 — 28, natomiast zawiera niektóre spostrzeżenia naszą tablicą nie objęte. Przytaczając te ostatnie, zaznaczamy, że te dane nie mogą mieć wpływu na dalsze nasze rozumowania, albowiem Milne przytacza tylko prędkości rozchodzenia się pierwszych drgań, podczas gdy w niniejszej rozprawie rozpatrujemy nie pierwsze drgania, ale główną fazę trzęsienia ziemi.

Przytaczamy tu tablicę Milne'a z wyjątkiem tych danych, które znajdują się w naszej tablicy w tekście i kilku błędnych danych.

(Patrz: tablica na str. 378.)

Z przytoczonych tu danych oraz z tych, które są zawarte w naszej tablicy w tekście od Nr. 1. do Nr. 2. Milne wyprowadza wniosek, że prędkość rozchodzenia się pierwszych drgań wzrasta z odległością. Mianowicie podaje (na str. 176 w cytowanej książce) następującą tabliczkę:

Odległość od epicentrum mierzona wzdłuż powierzchni ziemi	Pozorna prędkość rozcho- dzenia się pierwszych drgań wzdłuż powierzchni	Pozorna prędkość rozcho- dzenia się drgań wzdłuż prostej łączącej epicentrum ze stacją obserwacyjną
2 200 km.	2 — 3,0 km.	2 — 3 km.
5 500 "	5,0 "	5 "
8 800 "	8,0 "	7,5 "
11 100 "	10,0 "	8,8 "
13 200 "	12,0 " ?	10,0 " ?
17 700 "	16,0 "	10,5 " ?

U Milne'a	Data	Epicentrum	Stacya obserwacyjna	Odległość Hizona wzdłuż powierzchni ziemi	Pozorna prędkość pierwszych drgań	Uwaga
N. 1	3 listopada 1894	Meksyk	Nikołajew	11 300 km.	10,0 km. na sek.	
N. 2	31 paźdź. 1896	Sakata w Japonii	Catania	9 796 "	11,1 "	
N. 3	"	"	Rzym	9 564 "	11,2 "	
N. 4	"	"	Ischia	9 469 "	11,8 "	
N. 5	"	"	Wyspa Wight	9 290 "	9,7 "	
N. 6	"	"	Strassburg	9 157 "	14,2 "	
N. 7	15 czerwca 1895	Poln. wsch. wybrzeże Japonii	Ischia	9 749 "	8,7 "	
N. 8	"	"	Padwa	9 320 "	9,7 "	
N. 9	22 marca 1893	Nemuro w Japonii	Rzym	9 500 "	9,9 "	
N. 10	"	"	połudn. Kosya *)	9 477 "	8,7 "	
N. 11	"	"	Tokio	9 65 "	2,6 "	
N. 12	"	"	Strassburg **)	9 180 "	3,93 "	
N. 13	7 paźdź. 1894	Kalifornia	Charków	7 814 "	13,0 "	
N. 14	11 lipca 1889	Tokio	Wilhelmshafen	4 806 "	5,0 "	
N. 15	25 sierpnia 1889	Wienoje w Środkowej Azji	i Potsdam	1 732 "	2,59 "	
N. 16	23 maja 1893	Patras	Potsdam	1 650 "	2,4 "	
N. 17	"	Tebry	Strassburg	1 270 "	3,1 "	
N. 18	16 kwietnia 1896	Amed w Azji Mniejszej	Nikołajew	1 990 "	3,5 "	
N. 19	"	"	Strassburg	1 580 "	9,4 "	
N. 20	14 paźdź. 1892	Bakareszt	Padwa	1 450 "	2,35 "	
N. 21	13 czerwca 1892	Valona w Epirze	Strassburg	1 350 "	3,0 "	
N. 22	"	"	Nikołajew	1 270 "	3,1 "	
N. 23	25 stycznia 1893	Neapol	Strassburg	1 000 "	3,62 "	
N. 24	10 sierpnia 1893	Monte Gargano	"	1 000 "	3,62 "	
N. 25	9 grudnia 1891	Noto w Japonii	Tokio	272 "	2,3 "	
N. 26	28 paźdź. 1891	Gifu w Japonii	"	241 "	2,4 "	

*) Średnia ze sprostżeń w Charzkowie i Nikołajewie.

**) Średnia z 4 sprostżeń.

przy trzęsieniu ziemi w Kumamoto w Japonii notowano jak się zdaje w Strassburgu i Wilhelmshafen drugie maximum. Ale takie powtórne i trzecie maximum ruchu nie nadają się do porównania przede wszystkim dlatego, że występują nie zawsze ale tylko niekiedy, a zatem mają przypadkowy charakter, powtórę dlatego, że mogą pochodzić od fal odbitych.

Podane w powyższej tablicy prędkości były, jak to wiemy, obliczone w taki sposób, jak gdyby drgania rozchodziły się z epicentrum wzdłuż powierzchni. Ponieważ w poprzedniej tablicy odnoszącej się do doświadczeń Fouqué'go i Lévy'ego prędkości rozchodzenia się drgań były obliczone w myśl hipotezy, że drgania rozchodzą się prostoliniowo, przeto należy je porównać z prędkościami rozchodzenia się trzęsień ziemi obliczonymi w myśl tej samej hipotezy. Niestety, nie znając rzeczywistego położenia ognisk trzęsień ziemi przytoczonych w powyższej tablicy, musimy obliczać prędkości owego prostoliniowego rozchodzenia się także tak, jak gdyby drgania rozchodziły się z epicentrum. Jednakże błędy stąd pochodzące prawdopodobnie nie będą znaczne, albowiem u tych trzęsień ziemi, których epicentrum może być mniej więcej dokładnie oznaczone, odległość między epicentrum a ogniskiem jest zazwyczaj kilkadziesiąt razy mniejsza niż odległość między epicentrum a stacją obserwacyjną. Znając pozorne prędkości rozchodzenia się drgań z epicentrum wzdłuż powierzchni ziemi łatwo możemy obliczyć prędkość wzdłuż cięciw łączących epicentrum ze stacjami obserwacyjnymi. Dla ułatwienia rachunków pominiemy spłaszczenie ziemi, znajdziemy wtedy następujące rezultaty:

Odległość liczona wzdłuż powierzchni	Numer trzęsienia ziemi w tablicy na str. 375 i 376	Prędkość głównej fazy
9520 km.	N. 1.	2,79 km. na sek.
7910 "	N. 2.	2,26 " " "
9520 "	N. 3.	3,48 " " "
7910 "	N. 4.	2,10 " " "
9520 "	N. 5.	2,40 " " "
7910 "	N. 6.	2,54 " " "
9070 "	N. 7.	3,20 " " "
8950 "	N. 8.	2,57 " " "
9520 "	N. 9.	3,29 " " "
8758 "	N. 10.	2,08 " " "
8758 "	N. 11.	2,77 " " "
5290 "	N. 12.	2,60 " " "
3480 "	N. 13.	2,16 " " "

Odległość liczona wzdłuż powierzchni	Numer trzęsienia ziemi w tablicy na str. 375 i 376	Prędkość głównej fazy	
5290 km.	N. 14.	2,70 km. na sek.	
11550 "	N. 17.	2,48 " " "	
		1. godz.	2. godz.
5980 "	N. 20.	2,50	2,68 " " "
7150 "	N. 22.	2,38	2,51 " " "
7150 "	N. 23.	2,42	2,55 " " "
7170 "	N. 25.	2,49	2,63 " " "
7240 "	N. 27.	2,52	2,66 " " "
7260 "	N. 29.	2,46	2,67 " " "
7260 "	N. 30.	2,53	2,67 " " "
7330 "	N. 32.	2,38	2,52 " " "
7440 "	N. 34.	2,58	2,74 " " "
7560 "	N. 35.	2,23	2,35 " " "
7970 "	N. 38.	2,60	2,74 " " "

Jeżeli uporządkujemy te liczby wedle odległości, a przytem dla każdej odległości utworzymy średnie prędkości, to otrzymamy następujące rezultaty.

Dla odległości 3480 km. (liczonej wzdłuż powierzchni) prędkość obliczona przyjmując hipotezę prostoliniowego rozchodzenia się wynosi średnio 2,16 km. na sek. (jedno trzęsienie ziemi N. 13.).

Dla odległości	prędkość wynosi średnio		
5290 km.	2,65 km. na sek. (2. trz. z. N. 12 i 14.)		
5980 "	2,50 albo ¹⁾ 2,68	" " "	(1. trz. z. N. 20.)
7150 "	2,40 " 2,53	" " "	(2. trz. z. N. 22 i 23.)
7170 "	2,49 " 2,63	" " "	(1. trz. z. N. 25.)
7240 "	2,52 " 2,66	" " "	(1. trz. z. N. 27.)
7260 "	2,45 " 2,67	" " "	(2. trz. z. N. 29 i 30.)
7330 "	2,38 " 2,52	" " "	(1. trz. z. N. 32.)
7440 "	2,58 " 2,74	" " "	(1. trz. z. N. 34.)
7560 "	2,23 " 2,35	" " "	(1. trz. z. N. 35.)

¹⁾ I tu dane odnoszące się do trzęsienia ziemi w Assamie przytaczamy podwójne to jest obliczone tak dla jednego jak dla drugiego prawdopodobnego momentu, w którym zdarzyło się trzęsienie ziemi w ognisku. Naumyślnie porównywaliśmy ze sobą liczby, aby zbadać, który szereg dat należy ostatecznie przyjąć, ale okazało się, że podczas gdy prędkości głównej fazy obliczone przyjmując późniejszą datę trzęsienia ziemi za rzeczywistą lepiej się zgadzają między sobą niż prędkości obliczone na podstawie wcześniejszej daty, to z prędkościami pierwszych drgań rzecz się ma wręcz przeciwnie. Dlatego też zostawiliśmy oba szeregi liczb.

Dla odległości	prędkość wynosi średnio		
7910 km.		2,30 km. na sek.	(3. trz. z. N. 2, 4 i 6.)
7970 "	2,60 albo	2,74 " " "	(1. trz. z. N. 38.)
8758 "		2,42 " " "	(2. trz. z. N. 10 i 11.)
8950 "		2,57 " " "	(1. trz. z. N. 8.)
9070 "		3,20 " " "	(1. trz. z. N. 7.)
9520 "		2,99 " " "	(4. tr. z. N. 1, 3, 5 i 9.)
11550 "		2,48 " " "	(1. trz. z. N. 17.)

Nie możemy tu dostrzedz wyraźnego wzrastania prędkości z odległością, dlatego też jako prędkość rozchodzenia się głównej fazy 'po prostu przyjmujemy średnią z tych wszystkich prędkości. Ta prędkość będzie trochę większa lub mniejsza stosownie do tego czy dla trzęsienia ziemi w Assamie przyjmujemy późniejszą lub wcześniejszą datę t. j. stosownie do tego czy wieźmiemy pierwszą czy drugą kolumnę liczb. Przyjmując wcześniejszą datę dla trzęsienia ziemi w Assamie otrzymamy średnią prędkość 2,56 km. na sek., zaś przyjmując późniejszą datę dla tegoż trzęsienia ziemi, otrzymamy średnią prędkość 2,62 km. na sek.

Gdyby drgania rozchodziły się prostoliniowo, to prędkości przytoczone w dwóch ostatnich tablicach jak również tylko co przytoczone średnie prędkości 2,56 i 2,62 byłyby równe rzeczywistym prędkościom oraz rzeczywistym średnim prędkościom (naturalnie mówimy tu tak, jak gdyby obserwacye były dokonane bez błędu) ale jeżeli drgania rozchodzą się nie prostoliniowo, to przytoczone tu prędkości są mniejsze niż rzeczywiste, a rzeczywiste prędkości muszą wynosić coś około 3 kilometrów na sek. Z drugiej strony prędkości rozchodzenia się w doświadczeniach Fouqué'go i Lévy'go wynosiły w kambryjskim marmurze w Saligny średnio około 250 metr. na sek., w granicie w Montvicq 1125 metrów na sek., zaś w piaskowcu w Commentry średnio 1190,8 metrów na sek. Widzimy więc, że prędkość rozchodzenia się głównej fazy podczas naturalnych trzęsień ziemi (na odległych stacjach) bywa co najmniej dwa razy większa niż prędkość rozchodzenia się głównej fazy w granitach i piaskowcach.

Gdyby drgania rozchodziły się prostoliniowo, to do stacyi znajdujących się na odległości 9000—10000 kilometrów od ogniska trzęsienia ziemi musiałyby na środkowej części swej drogi przechodzić przez dosyć głębokie warstwy, albowiem środek ciężki ściągnąjącej łuk wielkiego koła, mierzący 10000 km. znajduje się w głębokości wynoszącej około 1850 kilometrów.

Istnieje pewna hipoteza, mianowicie Schmidta ze Stuttgartu, wedle której drogi, po których biegną drgania nie są prostymi ale krzywymi liniami obróconymi wypukłą swą stroną ku środkowi ziemi. Za tą hipotezą przemawiają niektóre względy. Prędkości rozchodzenia się tak pierwszych drobnych drgań jak następnie głównej fazy są zwykle na blizkich od ogniska stacyach mniejsze niż na dalekich. Ponieważ drgania prawdopodobnie dążą nie wzdłuż powierzchni ale przez głębsze warstwy, więc należy przypuścić, że głębsze warstwy są więcej sprężyste niż powierzchniowe. Przed chwilą przeprowadzone porównanie prędkości rozchodzenia się drgań podczas naturalnych trzęsień ziemi przy sztucznych eksperymentach także potwierdza ten wniosek. Wobec tego zupełnie naturalnie nasuwa się hipoteza, że sprężystość pokładów wzrasta od powierzchni ku środkowi. W takim zaś razie promienie fal seismicznych muszą wedle używanej w optyce terminologii załamywać się od prostopadłej, skąd zaraz w dalszym ciągu wynika, że drogi przebiegane przez drgania muszą być krzywymi obróconymi wypukłością ku środkowi ziemi, co jest właśnie treścią hipotezy Schmidta. W takim razie jednak drgania przychodzące do pewnej stacyi z ogniska odległego o jakie 9000 do 10000 kilometrów muszą po drodze przechodzić przez warstwy jeszcze głębsze niż te, które spoczywają na głębokości 1850 kilometrów i naturalnie po drogach dłuższych od prostych łączących ognisko trzęsienia ziemi ze stacyą obserwacyjną. W ten sposób należałoby przypuścić najpierw, że wogóle rzeczywiste prędkości rozchodzenia się drgań są większe od tu przytoczonych w tablicach na str. 379, 380 i 381, następnie, że drgania przychodzące do stacyi odległych n. p. o 10000 kilometrów od epicentrum dają nam wskazówki co do sprężystości warstw leżących głębiej niż na 1850 km. pod powierzchnią, a wreszcie, że w tych bardzo głębokich warstwach prędkości rozchodzenia się drgań osiągają wartości wynoszące po kilkanaście kilometrów na sek. podczas pierwszych drgań a po trzy co najmniej km. na sek. podczas głównej fazy.

Prawa rządzące rozchodzeniem się drgań w skałach leżących na powierzchni ziemi i w warstwach głęboko leżących mogą być tylko ilościowo różne, lecz muszą być jakościowo identyczne t. j., mówiąc innymi słowami, mogą być wyrażone przez jedne i te same różniczkowe równania, w których stosownie do tego czy chodzi o ten lub inny ośrodek stałe współczynniki przybierają inne liczebne wartości. Lecz współczynniki sprężystości (naumyślnie mówimy w liczbie mnogiej aby wskazać, że dopuszczamy możebność takich równań, w których dla wyrażenia własności ośrodka potrzeba użyć większej ilości stałych współczynników) wzrastają „*ceteris paribus*“ tak jak iloczyn: ρV^2

gdzie ρ oznacza gęstość ośrodka,
zaś V prędkość rozchodzenia się drgań.

Ponieważ gęstość głębszych warstw jest z pewnością co najmniej dwa razy większa od gęstości granitu lub piaskowca, zaś prędkość rozchodzenia się głównej fazy w głębokich warstwach co najmniej dwa lub trzy razy większa niż w granicie i piaskowcu; a więc z tego cośmy przed chwilą powiedzieli o analogii między głębokimi warstwami i powierzchniowymi skałami wypada, że współczynniki sprężystości głębokich warstw muszą być co najmniej od ośmiu do osiemnastu razy większe niż współczynniki sprężystości powierzchniowych skał takich jak granit lub piaskowiec. Współczynniki sprężystości granitu i innych skał są mało znane, ale z tego co o nich wiemy oraz z tego co wiadomo o sprężystych własnościach szkła wypada, że te współczynniki są kilka razy mniejsze niż współczynniki metali takich jak żelazo i stal. Stąd zaś wzajemnie wypada, że współczynniki sztywności głębokich warstw są prawdopodobnie nie tylko nie mniejsze jak stali i żelaza ale może nawet większe.

Możnaby też wyprowadzić ciekawe wnioski porównyując prędkości rozchodzenia się głównej fazy trzęsień ziemi z prędkością rozchodzenia się dźwięku w różnych sprężystych ośrodkach, mianowicie w metalach. Wszakże natrafiamy tu na pewną trudność pochodzącą stąd, że podczas rozchodzenia się dźwięku nie spostrzegamy owego rozszczępienia wstrząśnienia, które jest tak charakterystyczne dla rozchodzenia się drgań w skałach. Wskutek tego nie wiemy czy należy porównywać prędkość dźwięku z prędkością pierwszych drgań czy z prędkością głównej fazy trzęsienia ziemi czy też z prędkością jakiej innej fazy. Z przyczyn, o których dla krótkości mówić nie będziemy, prędkość dźwięku powinna być porównywalna z prędkością głównej fazy. Jeżeli przyjmiemy prędkość głównej fazy równą 3000 metrów na sekundę, to ta prędkość będzie większa niż prędkość rozchodzenia się dźwięku w srebrze, złocie, platynie i innych metalach, ale mniejsza niż prędkość dźwięku w stali, miedzi i aluminium.

Prędkości rozchodzenia się dźwięku wynoszą mianowicie ¹⁾:

	posiadającej gęstość			
w miedzi		8,8912	3736 metr. na sek.	
w ang. stali	" "	7,708	4936	" " "
w platynie	" "	21,2450	2643	" " "
w aluminium	" "	2,7286	5140	" " "
w srebrze	" "	10,5000	2797	" " "
w złocie	" "	19,4840	2075	" " "

¹⁾ Mercadier. Journal de l'Ecole Polytechnique 58 cah. (1889 r.) str. 164.

W każdym razie wnioski oparte na porównaniu prędkości głównej fazy trzęsień ziemi z prędkością rozchodzenia się dźwięku w metalach tylko potwierdzają to, co wynikało z porównania prędkości rozchodzenia się naturalnych trzęsień ziemi z prędkością rozchodzenia się drgań w powierzchniowych warstwach t. j. także świadczą, że współczynniki sprężystości głębokich warstw muszą być wielkościami zupełnie tego samego rzędu co podobne współczynniki metali.

Rzecz prosta, że ogromne prędkości rozchodzenia się pierwszych delikatnych drgań, wynoszące najmniej po kilka kilometrów na sek., częstokroć zaś po kilkanaście kilometrów na sekundę, nie tylko nie osłabiają tych wniosków, ale przeciwnie skłaniają ku mniemaniu, że raczej nazbyt nisko aniżeli nazbyt wysoko szacujemy wartości współczynników sprężystości głębokich warstw.

Ileokroć obliczano głębokość ogniska trzęsienia ziemi, tyleokroć otrzymywano liczby bardzo nieznaczne w porównaniu z ogromnymi rozmiarami ziemi. Otrzymywano w rezultacie po kilka, kilkanaście, najwyżej kilkadziesiąt kilometrów. Dla przykładu przytoczymy tu tablicę zamieszczoną w znanej książce prof. Muszkietowa ¹⁾ pod tyt. „Fizyczna Geologia“.

Trzęsienie ziemi	najmniejsza		
	możliwa głębokość ogniska	średnia głębokość	największa możliwa głębokość
W nadreńskich prowincjach 1846 r.	—	38806 m.	—
Neapolitańskie 1857 r.	5102 m.	9275 „	15037 m.
W środkowych Niemczech 1872 r.	14394 „	17556 „	21642 „
W Herzogenrath 1873 r.	5045 „	11130 „	17214 „
„ „ 1877 r.	—	27113 „	—

¹⁾ Przytoczona tu tablica została właściwie ułożona przez Seebacha. Obliczenia były dokonane przez Seebacha wedle jego własnej metody.

Późniejszy przypisek autora.

Dutton i Hayden znaleźli, że głębokość ogniska trzęsienia ziemi w Charlestonie (w 1886 roku) wynosiła około 19½ kilometra, dla obliczenia posługiwali się metodą Malleta.

Omorì (swoją własną metodą) znajduje, że ognisko trzęsienia ziemi w Mino i Owari w 1893 roku znajdowało się na głębokości 7 — 15,6 kilometrów w Kumamoto w 1889 roku „ „ „ „ 5,8—15,6 „ w Ischii w 1881 roku „ „ „ „ 500 metrów „ „ w 1885 roku „ „ „ „ 800 „

Podane przed chwilą daty zaczerpnąłem z dziełka J. Milne'a pod tyt. „Seismology“. Londyn 1898 r. str. 197. Miejscowości: Mino i Owari oraz Kumamoto znajdują się w Japonii.

Trzęsienie ziemi	najmniejsza możliwa głębokość ogniska	średnia głębokość	największa możliwa głębokość
W środkowych Niemczech 1878 r.		8888 m.	
W Japonii (Tokio) 1880 r.	4500 m.	6650 „	8800 m.
Na Isehii 1883 r.		1000 „	
We Wiernem 1887 r.	6000 „	10000 „	15000 „

W powyższej tablicy podaną jest nie tylko średnia ale także największa możliwa i najmniejsza możliwa głębokość ogniska. Nie w tem dziwnego, bo obliczamy położenie ogniska ze spostrzeżeń nad kierunkiem szczelin w budowlach, nad momentami czasu, w których nastąpiło główne wstrząśnienie w różnych punktach w okolicy epicentrum, jednym słowem z różnych danych zawierających liczne źródła błędów a zatem niezupełnie ze sobą zgodnych.

Zresztą obliczenia te były dokonane na podstawie hipotezy, że drgania rozchodzą się prostoliniowo. Wiemy, że prawdopodobnie ta hipoteza najczęściej rozmija się z prawdą, a więc z teoretycznego punktu widzenia liczby zawarte w powyższej tabliczce są niepewne, mimo to wystarczają one najzupełniej do udowodnienia wniosku, który mamy tu na oku. Rzeczywiście, gdybyśmy zamiast hipotezy, że drgania rozchodzą się prostoliniowo za punkt wyjścia wzięli jaką inną hipotezę t. j. gdybyśmy założyli, że drgania rozchodzą się wzdłuż pewnych krzywych, to zawsze otrzymalibyśmy liczby tego samego rzędu, co liczby przytoczone w powyższej tabliczce t. j. znów otrzymalibyśmy po kilka, kilkanaście lub kilkadziesiąt kilometrów.

Gdyby rzeczywiście ogniska trzęsień ziemi nie znajdowały się nigdy i nigdzie na większej jak jakie kilkadziesiąt kilometrów głębokości, to znaczyłoby, że nagle odkształcenia t. j. pęknięcia, nagle obsunięcia się i t. d. przytrafiają się tylko w powierzchniowych warstwach zaś głębsze warstwy albo są niezdolne do nagłych deformacji t. j. są plastyczne, albo też jeśli nie są plastyczne, to nigdy albo prawie nigdy nie podlegają deformacyom, przy których granice sprężystości mogłyby być przekroczone. Mielibyśmy więc w ten sposób pewną ważną wskazówkę co do natury wnętrza ziemi.

Ale nowsze delikatne seismometry osobliwie zaś horyzontalne wahadła notują mnóstwo trzęsień ziemi, których ogniska i epicentra wcale nie dają się oznaczyć. Nie dają się zaś oznaczyć dla tego, że wprawdzie wahadła notują trzęsienie ziemi ale znikąd nie dochodzi nas wiadomość o trzęsieniu ziemi dostrzegalnem bez pomocy przyrządów. Można to sobie wytłumaczyć na różne sposoby n. p. można po-

wiedzieć, że trzęsienie ziemi było wogóle tak słabe, iż nawet w epicentrum nie mogło być spostrzeżone bez pomocy czułych seismometrów, można też powiedzieć, że epicentrum znajduje się gdzieś w krajach dzikich, albo niezamieszkałych, albo gdzieś na dnie morza (wszak prawie $\frac{2}{3}$ powierzchni ziemi są pokryte przez ocean), ale prócz tego pozostaje jeszcze jedno tłumaczenie. Mianowicie można powiedzieć, że niektóre z tych trzęsień ziemi, których epicentrum nie daje się oznaczyć, zdarzyły się pod krajami zamieszkałymi i cywilizowanymi, ale że ogniska ich znajdowały się gdzieś tak głęboko, że nawet w epicentrum drgania były nazbyt słabe, aby mogły być spostrzeżone bez pomocy narzędzi pomimo tego, że w ognisku i najbliższej jego okolicy wstrząśnienia mogły być bardzo silne.

Mamy atoli pewne kryterium, za pomocą którego można tę kwestyę dość łatwo rozstrzygnąć. Mianowicie pozorną prędkość, z którą trzęsienie ziemi rozchodzi się z epicentrum jest zależna od głębokości ogniska trzęsienia ziemi. Jeżeli oznaczymy jako epicentrum pewien punkt, w którym wstrząśnienie dało się najpierw uczuć, to zawsze naokoło epicentrum mamy pewną mniejszą lub większą przestrzeń, w której pozorną prędkość rozchodzenia się drgań jest bardzo wielką, w której wszędzie prawie jednocześnie odczuto trzęsienie ziemi. (Stąd w praktyce trudność w oznaczeniu prawdziwego epicentrum t. j. punktu, który najpierw został wstrząśniony). Przyczyna tego zjawiska jest bardzo prosta: naokoło epicentrum mamy zawsze pewną mniejszą lub większą okolicę, w której odległości wszystkich punktów od ogniska trzęsienia ziemi bardzo mało się różnią od odległości epicentrum od ogniska¹⁾. Do takich miejsc drgania przychodzą prawie jednocześnie jak do epicentrum, a zatem takie miejsca bywają wstrząśnione w chwili czasu mało różnej od tej, w której drgania dosięgły epicentrum. Oczywiście jest rzeczą, że przestrzeń wstrząśniona prawie jednocześnie z epicentrum jest tem większą, im ognisko trzęsienia ziemi jest głębiej położone, gdyby zaś ognisko znajdowało się w samym środku ziemi, to wtedy wstrząśnienia dałyby się uczuć zupełnie jednocześnie na całej powierzchni ziemi i pozorną prędkość rozchodzenia się drgań wzdłuż powierzchni byłaby nieskończenie wielką.

Ponieważ trzęsienie ziemi, którego ognisko znajduje się gdzieś bardzo głęboko n. p. dajmy na to koło środka ziemi byłoby na po-

¹⁾ Obszerniej pisałem o tym przedmiocie w rozprawie „O rozchodzeniu się drgań i t. d.“ Rozprawy Akad. Umiej. tom XXXIII. Ta sama rozprawa wyszła też po niemiecku w „Beiträge zur Geophysik tom III pod tyt. Ueber die scheinbare Geschwindigkeit etc. ... Porówn, także Milne. Seismology Londyn 1898 r. str. 119—120.

wierzchni bardzo słabe, więc nie mogłoby być odezute bez pomocy bardzo delikatnych narzędzi, przeto chcąc coś powiedzieć o takich trzęsieniach ziemi możemy powołać się li tylko na spostrzeżenia poczynione przy pomocy takich narzędzi jak horyzontalne wahadła. Lecz spostrzeżeń, poczynionych przy pomocy horyzontalnych wahadeł mamy mało, stacye z takimi wahadłami są nieliczne i skoncentrowane w Europie, a w danym razie właśnie najważniejszych wskazówek można oczekiwać od porównania spostrzeżeń na dość odległych stacyach. Z tego powodu należy zachować pewną ostrożność i nie należy nadto stanowczo wypowiadać zdania. Jednakże nie możemy powstrzymać się od uwagi, że, o ile wiadomo, dotąd jeszcze nie zdarzyło się obserwować ani jednego trzęsienia ziemi, przy którym owa otaczająca epicentrum prawie jednocześnie z epicentrum wstrząsana okolica byłaby bardzo rozległą. Zwykle takie okolice pokrywają niewięcej jak kilkanaście, kilkadziesiąt, co najwyżej kilkaset kilometrów kwadratowych. Stąd wnosimy, że co najmniej w ogromnej większości przypadków ogniska trzęsień ziemi znajdują się w powierzchniowych warstwach, głębsze zaś warstwy jeżeli nie są plastyczne, to muszą się znajdować w stanie blizkim równowagi, czy raczej takim, w którym nagłe odkształcenia są zupełnie lub prawie zupełnie niemożliwe.

I tak możemy powiedzieć, że spostrzeżenia nad trzęsieniami nie sprzeciwiają się hipotezie sztywnego wnętrza, co więcej widzieliśmy nawet, że spostrzeżenia nad prędkością rozchodzenia się drgań mogą być zupełnie naturalnie interpretowane w taki sposób, że potwierdzają wnioski o wielkiej sztywności wnętrza, wyprowadzone w poprzednich rozdziałach na podstawie badań nad Eulerowską perturbacją i t. p. zjawiskami. Nie należy atoli sądzić, aby zjawiska obserwowane przy rozchodzeniu się trzęsień ziemi nie mogły być interpretowane w inny sposób, aby n. p. nie mogły się pogodzić z hipotezą ciekłego wnętrza. Wprawdzie podobieństwo między sposobami rozchodzenia się drgań w powierzchniowych skałach i we wnętrzu ziemi świadczy na korzyść mniemania, że ośrodek znajdujący się we wnętrzu ziemi posiada podobne fizyczne własności jak powierzchniowe skały, krótko mówiąc, że jest to ośrodek sztywny, jednakże nie mamy absolutnej pewności czy coś w rodzaju rozszczepienia fali nie może mieć miejsca w cieczy. Naturalnie w cieczy rozchodziłyby się tylko fale dilatacyjne, ale przy przejściu z wewnętrznej cieczy do sztywnej skorupy przetwarzałyby się na fale dilatacyjne i torsyjne albo na fale o charakterze mieszanym dilatacyjno-torsyjnym i na stacyach znajdujących się na powierzchni skorupy zjawisko mogłoby wyglądać prawie tak samo jak przy sztywnym wnętrzu. W cieczy takiej jaką mogłaby być ciecz

wypełniająca jądro ziemi, prędkości rozchodzenia się drgań (naturalnie dilatacyjnych) mogłyby być bardzo znaczne n. p. większe niż prędkość dźwięku w wodzie; albowiem wprawdzie prędkość rozchodzenia się drgań w cieczy jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratowego pierwiastka z gęstości a więc w cieczy kilkakroć razy gęstszej od wody musiałaby być *ceteris paribus* dwa do trzech razy mniejszą niż w wodzie, ale jednocześnie jest wprost proporcjonalna do kwadratowego pierwiastka z elastycznego współczynnika ścisłości (t. j. raczej nie-ściśliwości), ten zaś w cieczy znajdującej się pod olbrzymim ciśnieniem powinienby być znacznie większy niż w wodzie znajdującej się pod normalnem ciśnieniem, bo taka ciecz powinna być nadzwyczaj mało ściśliwą. Stąd widzimy, że pewna wątpliwość pozostaje i że prędkości rozchodzenia się trzęsień ziemi mogą być interpretowane w zadawalający sposób nawet z punktu widzenia hipotezy ciekłego wnętrza. Ale wobec innych argumentów przemawiających na korzyść hipotezy sztywnego wnętrza analogia między rozchodzeniem się drgań w powierzchniowych skałach i w głębokiem wnętrzu staje się także argumentem na korzyść hipotezy sztywności.

ROZDZIAŁ VII.

O zjawiskach wulkanicznych, o rozkładzie temperatury we wnętrzu ziemi, o związku między teorią tworzenia się gór i teorią sztywnego wnętrza, o fizycznych własnościach materji we wnętrzu ziemi.

Wszystkie zjawiska, o których dotąd mówiliśmy, świadczą mniej lub więcej stanowczo na korzyść hipotezy sztywnego wnętrza. Jakże więc sobie wytłumaczyć istnienie wulkanów, przez które z wnętrza ziemi wydobywa się lava a więc ciecz.

Wiadomo, że temperatura pokładów dostępnych ludzkiemu badaniu wszędzie wzrasta z głębokością średnio o $1^{\circ}C$ co 35 metrów. Wobec tego, że ziemia jest z pewnością stygnącym ciałem, zupełnie naturalnie przychodzimy do wniosku, że wzrastanie temperatury z głębokością nieogranicza się do powierzchniowych warstw, ale jest ogólnem prawem, dotyczącem się całego wnętrza, nie więc dziwnego, że na głębokości jakich kilkudziesięciu kilometrów temperatury pokładów dochodzą do temperatur topnienia law wynoszących około tysiąca lub tysiąca kilkuset stopni. Ponieważ temperatury topnienia law wzrastają z ciśnieniem zaś ciśnienie we wnętrzu ziemi wzrasta z głębokością, więc oczywiście wszystko zależy od stosunku między rzeczywistą temperaturą danego pokładu i jego temperaturą topnienia, odpowiadającą

panującemu w danej głębokości ciśnieniu. Jeżeli rzeczywista temperatura jest niższa od temperatury topnienia, to skały pozostają w stanie stałym, jeżeli jest wyższa, to skały muszą być roztopione na lawę. Że ciśnienie wzrasta od powierzchni w głąb ziemi, to nie ulega wątpliwości, ale ciśnienia te zależą od rozkładu mas i od stanu, w którym znajduje się materya we wnętrzu ziemi. Rozkładem ciśnienia we wnętrzu sztywnej kuli zajmowali się Bauschinger¹⁾ i Hergesell²⁾, przy czem ten ostatni uwzględnił także ciśnienia pochodzące z kurczenia się ziemi podczas stygnięcia. Będziemy się tu trzymać Hergesella, z tą tylko różnicą, że od razu pisac będziemy wzory nie dla ciągnięć (Zugkräfte) lecz dla ciśnień (Druckkräfte). Założymy, że kula składa się ze współśrodkowych kulistych warstw, których materyał jest izotropowy.

Oznaczmy gęstość przez ρ

- „ przesunięcie w kierunku promienia przez h
- „ tak zwany moduł elastyczności przez E
- „ współczynnik poprzecznego skrócenia przez μ
- „ ciśnienie normalne przez N
- „ „ styczne przez T
- „ potencyał przyciągania przez V ;

kładąc jeszcze dla krótkości

$$\frac{E}{1 + \mu} \cdot \frac{1}{1 - 2\mu} = E'$$

mamy znane związki:

$$\left. \begin{aligned} N &= - E' \left[(1 - \mu) \frac{dh}{dr} + 2\mu \frac{h}{r} \right] \\ T &= - E' \left[\frac{h}{r} + \mu \frac{dh}{dr} \right] \end{aligned} \right\} \text{ I}$$

i jednocześnie

$$\frac{dN}{dr} + \frac{2}{r} (N - T) - \rho \frac{dV}{dr} = 0. \quad \text{II}$$

Podstawiając wartości na N i T w równanie II, otrzymamy po łatwych rachunkach:

$$E' \left[(1 - \mu) \frac{d^2h}{dr^2} + 2(1 - \mu) \frac{d}{dr} \left(\frac{h}{r} \right) \right] - \rho \frac{dV}{dr} = 0$$

¹⁾ Zeitschr. für Bauwesen 1879 r. Patrz. Günther. Geophysik, tom II (Stuttgart 1885 r.) str. 624—627.

²⁾ Beitr. zur Geophysik, tom II. Stuttgart 1894 r. str. 153—184.

skąd:

$$E' (1 - \mu) \left(\frac{dh}{dr} + \frac{2h}{r} \right) = 3c_1 - \int_0^r \rho \frac{dV}{dr} dr$$

t. j.

$$\frac{E' (1 - \mu)}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 h) = 3c_1 - \int_0^r \rho \frac{dV}{dr} dr.$$

Skąd znowu po łatwych rachunkach:

$$\text{III} \quad E' (1 - \mu) h = \frac{c_2}{r^2} + c_1 r - \frac{1}{r^2} \int_0^r r^2 dr \int_0^r \rho \frac{dV}{dr} dr.$$

Ze względu na to, że przesunięcie w środku kuli nie może być nieskończenie wielkiem, musi być:

$$c_2 = 0.$$

Podstawiając h we wzory I na N i T , przyczem dla krótkości położymy:

$$\frac{1}{r^2} \int_0^r r^2 dr \int_0^r \rho \frac{dV}{dr} dr = F,$$

otrzymamy:

$$N = \frac{1}{1 - \mu} \left[- (1 + \mu) c_1 + (1 - \mu) \frac{dF}{dr} + 2\mu \frac{F}{r} \right]$$

$$T = \frac{1}{1 - \mu} \left[- (1 + \mu) c_1 + \mu \frac{dF}{dr} + \frac{F}{r} \right].$$

Stałą c_1 łatwo można określić z warunku, że dla $r = R$, t. j. w powierzchni kuli, $N =$ jednej atmosferze, albo co prawie wszystko jedno, że

$$N = 0.$$

Ponieważ

$$F = \frac{1}{r^2} \int_0^r r^2 dr \int_0^r \rho \frac{\partial V}{\partial r} dr$$

a zatem

$$\frac{dF}{dr} = \int_0^r \rho \frac{\partial V}{\partial r} dr - \frac{2}{r^3} \int_0^r r^2 dr \int_0^r \rho \frac{\partial V}{\partial r} dr$$

$$= \int_0^r \rho \frac{\partial V}{\partial r} dr - \frac{2}{r} F,$$

skąd znowu wypada, że można napisać

$$N = \frac{1}{1 - \mu} \left[- (1 + \mu) c_1 + (1 - \mu) \int_0^r \rho \frac{\partial V}{\partial r} dr - 2(1 - 2\mu) \frac{F}{r} \right]$$

$$T = \frac{1}{1 - \mu} \left[- (1 + \mu) c_1 + \mu \int_0^r \rho \frac{\partial V}{\partial r} dr + (1 - 2\mu) \frac{F}{r} \right].$$

IV

Wzory tego rodzaju prawdopodobnie nie mogłyby być zastosowane do wnętrza ziemi, prawdopodobnie warstwy we wnętrzu ziemi spoczywają jedne na drugich i ciśnienie tam panujące musi być prawie równe hydrostatycznemu. Hypotezie, że ciśnienie we wnętrzu ziemi jest równe hydrostatycznemu, odpowiada założenie, że $\mu = \frac{1}{2}$, które oznacza, że ciało zachowuje się jak ciecz nieściśliwa.

Wtedy, oznaczając hydrostatyczne ciśnienie przez p , otrzymamy:

$$p = N = T = - C + \int_0^r \rho \frac{\partial V}{\partial r} dr.$$

V

Nie znając prawa gęstości ρ musimy uciec się do hipotez aby obliczyć całkę stojącą po prawej stronie. Gdybyśmy n. p. założyli, że ρ jest stałe, to otrzymalibyśmy wzór:

$$p = \rho (V - V_0) - C = \text{stałej} + \rho V.$$

Ale wiadomo, że potencjał V we wnętrzu kuli ma kształt:

$$A - Br^2,$$

gdzie A i B są to stałe, a zatem wzór dla ciśnienia można napisać tak:

$$p = C - \rho Br^2.$$

Wedle zwyczaju wyrazimy ciśnienie w atmosferach, przyczem założymy, że w samej powierzchni t. j. dla $r = R$ ciśnienie równa się jednej atmosferze. W tym celu należy napisać:

$$p = 1 + \rho B (R^2 - r^2).$$

VI

Aby określić stałą B postąpimy w następujący sposób: ponieważ

$$V = A - Br^2,$$

więc dla $r = R$, mamy, oznaczając przyspieszenie siły ciężenia na powierzchni ziemi przez g ,

$$g = \frac{\partial V}{\partial r} = - 2BR,$$

VII

ale jednocześnie, jeśli oznaczymy stałą przyciągania przez k , to możemy napisać

$$\text{VIII} \quad g = -k \frac{4\pi}{3} \rho \cdot \frac{R^3}{R^2} = -k \frac{4\pi}{3} \rho R,$$

a zatem ze wzorów VII i VIII

$$\text{IX} \quad B = \frac{k \cdot 2\pi}{3} \rho,$$

aby zaś stałą k wyrazić w taki sposób, żeby ciśnienie od razu wypadło w atmosferach, zauważmy, że 1 atmosfera równa się ciśnieniu słupa rtęci o wysokości 0,76 metrów, a zatem, biorąc na uwagę wzór VIII, otrzymamy:

$$\text{X} \quad 1 = -g \cdot 0,76 \times 13,6 = k \cdot \frac{4\pi}{3} \rho R \cdot 0,76 \times 13,6,$$

bo gęstość rtęci jest 13,6. Stąd zaś otrzymujemy:

$$\text{XI} \quad k = \frac{1}{\frac{4\pi}{3} R \cdot 0,76 \times 13,6 \cdot \rho}$$

a następnie z IX i X

$$B = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{0,76 \times 13,6}$$

a wreszcie podstawiając B we wzór VI

$$\text{XII} \quad p = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{\rho}{0,76 \times 13,6} [R^2 - r^2],$$

przyczem naturalnie r i R muszą być wyrażone w metrach. Z tego wzoru ¹⁾, kładąc

$$r = 0, \quad R = 6370000, \quad \rho = 5,56,$$

otrzymamy dla środka ziemi:

$$p = 1713500 \text{ atmosferom.}$$

Podane tu prawo ciśnienia we wnętrzu ciekłej jednorodnej kuli tych rozmiarów co ziemia daje nam pojęcie o tych ogromnych ciśnieniach.

¹⁾ Ten sam wzór znajduje się u Tisseranda w *Traité de Mécan. céleste*, tom II. str. 92. Rozdziały XIV i XV tego tomu zawierają streszczenie prac Stieltjesa, Roche'a, Lipschitza, Lévy'ego, Callandreaux i wielu innych nad prawem gęstości we wnętrzu ziemi. Prace te jako nienależące bezpośrednio do tematu niniejszej rozprawy pomijamy. Zaznaczamy tu także nowsze prace Stapffa, *Beitr. zur. Geophysik* tom II. str. 1—24 i Wiecherta, *Nachr. Gött. Gesellsch. Wiss.* 1897. W pracach tych są rozpatrywane pewne możliwe i prawdopodobne prawa gęstości.

niach, które powinny panować w głębi ziemi. Innych wzorów dla prawa ciśnienia nie będziemy wyprowadzać, albowiem w dalszych rozumowaniach nie będziemy potrzebować wzorów ściśle wyrażających zależność ciśnienia od odległości od środka. Wzór V wystarczy nam w zupełności. Gdybyśmy zaś potrzebowali wzorów dokładnie wyrażających zależność p od r , to dość byłoby we wzorze V podstawić zamiast ρ jakieś prawdopodobne prawo gęstości.

Ze wzoru V wypada:

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{dV}{dr}.$$

We wnętrzu kuli złożonej ze współśrodkowych kulistych warstw przyrost potencjału przyciągania wyraża się w następujący sposób:

$$dV = - \frac{4\pi k dr}{r^2} \int_0^r \rho r^2 dr$$

a zatem

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{dV}{dr} = - \frac{4\pi k \rho}{r^2} \int_0^r \rho r^2 dr, \quad \text{XII}$$

ponieważ będziemy nadal liczyć ciśnienie w atmosferach, przeto podstawimy wartość na k ze wzoru XI, tylko dla krótkości oznaczymy gęstość rtęci przez ρ_H t. j. położymy

$$\rho_H = 13,6,$$

zaś średnią gęstość ziemi oznaczymy teraz dla odróżnienia od zmiennej we funkcji promienia gęstości ρ , przez ρ_T a zatem napiszemy zamiast wzoru XI wzór:

$$k = \frac{1}{\frac{4\pi}{3} R \cdot 0,76 \cdot \rho_T \cdot \rho_H}.$$

Podstawiając tę wartość na k we wzór XII otrzymamy:

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{3\rho}{0,75 \cdot \rho_T \cdot \rho_H} \cdot \frac{1}{R} \int_0^r \rho r^2 dr.$$

Jeżeli oznaczymy temperaturę topnienia skał przez T , to ponieważ T jest funkcją ciśnienia, przeto:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{dT}{dp} \cdot \frac{dp}{dr}.$$

Zależność temperatury topnienia skał od ciśnienia nie jest dobrze znana, bo brak nam danych odnoszących się do zachowania się skał w bardzo wysokich ciśnieniach. W pericentrycznych okolicach ziemi ciśnienia są tak kolosalne, że niema najmniejszej możliwości odtworzyć je w laboratorium. Z tego powodu wnioski o zachowaniu się skał przy tak ogromnych ciśnieniach muszą z konieczności posiadać spekulacyjny charakter. Wedle Barusa ¹⁾ w diabazie pod ciśnieniem jednej atmosfery

¹⁾ C. Barus. High Temperature Work in igneous Fusion etc. Bull. of the U. S. Geol. Survey. N. 103 str. 54 i 55.

Cytowana tu praca Barusa jest bardzo interesująca. Wprawdzie Barus robił swoje doświadczenia tylko nad diabazem, ale rezultaty mutatis mutandis odnoszą się także do innych law, albowiem charakterystyczne współczynniki, temperatury, ciśnienia i t. d. mogą mieć różne liczebne wartości w różnych skałach, ale zachowanie się ich musi być podobne. Przytoczymy tu w krótkości najważniejsze rezultaty badań Barusa nad diabazem.

Średnia gęstość diabazu badanego przez Barusa wynosiła 3,0178, gdy zaś po stopieniu szybko ochłodzony znów stwardniał na bezpostaciowe szkło (obsydian), gęstość wynosiła 2,717. Podobna różnica między gęstością bezpostaciowej i skryzalizowanej skały nie jest bynajmniej wyjątkowem ale przeciwnie dość częstem zjawiskiem, prawdopodobnie jest to zjawisko powszechne, tylko w wielu przypadkach różnica między gęstością skryzalizowanej i bezpostaciowej skały nie jest tak znaczną jak w diabazie.

Objętość diabazu badanego przez Barusa zmniejszała się przy przejściu ze stanu ciekłego w stały (szkło) o 3,5 — 4% [a w stały krystaliczny o 14%]. Ten rezultat jest w zupełnej zgodzie z niektórymi doświadczeniami Lagoria i innych petrografów. Jednocześnie atoli Barus przekonał się, że małe kawałki twardego diabazu pływają po stopionym, pływają zaś dlatego, że w gęstej i lepkiej cieczy mały kawałek skały zanurza się bardzo powoli, przyczem z początku [zanim się całkiem zanurzy] wskutek lepkości i powierzchniowego napięcia naokoło tego kawałka tworzy się małe zagłębienie, ponieważ zaś jednocześnie ciecz obmarza naokoło tonącego kawałka skały, przeto ostatecznie tworzy się jakby mała łódeczka, która go podtrzymuje na powierzchni cieczy i nie pozwala zatonać. Te doświadczenia rzucają światło na sporną kwestyę, czy skały znajdujące się w stanie stałym toną w stopionych. Zdania petrografów były w tym względzie podzielone i przeciwnicy powoływali się na doświadczenia. Okazuje się, iż tak jedni jak drudzy mieli racyę, stronnicy mniemania, że stałe skały nie toną, mylili się tylko o tyle, że błędnie sądzili, iż nietonące kawałki skał posiadają mniejszą gęstość jak lawa, oraz że jeżeli nie tonie mały kawałek skały, to tak samo nie zatonie wielka bryła. Dalsze doświadczenia pokazały, że termiczny współczynnik rozszerzalności diabazu badanego przez Barusa wynosił w stanie stałym między 0° i 1000°, [wszystkie liczebne dane są podane w stopniach stustopniowego termometru i w metrycznych miarach], średnio około 0,000025, w stanie ciekłym (dla lawy) między 1100° — 1500°, średnio około 0,000047. Lawa twardestniała w temperaturze 1093—1095°, przyczem objętość zmniejszała się o 3,4—3,9%, natomiast skała topniała nie w temperaturze twardestnienia, ale w wyższej temperaturze mianowicie w 1170°. W ten sposób okazało się, że diabaz a prawdopodobnie inne

$$T = 1170^{\circ},$$

zaś w tych warunkach, które można wytworzyć w laboratorjach:

$$\frac{dT}{dp} = 0,025.$$

Choć $\frac{dT}{dp}$ jest wielkością zmieniającą się dość powolnie, jednakże wartość tej pochodnej z pewnością znacznie się zmieni, gdy od ciśnienia jednej atmosfery przejdziemy do ciśnień wynoszących setki tysięcy atmosfer. Wedle wszelkiego prawdopodobieństwa $\frac{dT}{dp}$ w diabazie i in-

skąły mają podobnie jak naftalina, tymol i niektóre inne organiczne połączenia, inną temperaturę topnienia a inną twardnienia. Zjawisko to można pojmować jako regularne powtarzanie się tego, co u innych ciał przytrafia się wyjątkowo, wiadomo n. p. że przy zachowaniu pewnych ostrożności, mianowicie przy zupełnym spokoju można oziębic wodę o kilka stopni niżej zera, lecz taka „przeziębiona“ woda znajduje się w stanie niestajęcej równowagi i najlżejsze wstrząśnienie sprawia natychmiastową przemianę całej masy wody w lód; podobno też wstrząśnienia wywołują stwardnienie przeziębionej lawy w skałę, ale z powodu wielkiej lepkości o wiele łatwiej przeziębic lawę niż wodę.

Wreszcie Barus dokonał całego szeregu ciekawych spostrzeżeń nad pojemnością ciepłą diabazu, okazało się, że między temperaturami 800° i 1100° ciepło właściwe skały wynosi około 0,297 grammokaloryi, zaś ciepło właściwe lawy między temperaturami 1200° i 1400° wynosi 0,35 grammokaloryi. Barus określa przybliżenie ciepło topnienia dla dwóch temperatur, między którymi rzeczywista temperatura topnienia jest zawarta i znajduje, że przy 1100° powinno wynosić 16 grammokaloryi, przy 1200° 24 grammokaloryi, następnie za pomocą wzoru:

$$\frac{dT}{dp} = \frac{T(\sigma - \tau)}{Er'}$$

[gdzie T oznacza temperaturę topnienia liczoną od absolutnego zera, $\sigma - \tau$ oznacza różnicę objętości gatunkowej ciała w stanie stałym i w stanie ciekłym w tejże temperaturze T , gdzie dalej r' oznacza ciepło topnienia także przy temperaturze T , a wreszcie E oznacza mechaniczny równoważnik ciepła].

Barus określa $\frac{dT}{dp}$, przyczem okazuje się, że liczebna wartość tej pochodnej musi wynosić około 0,025.

Omówiona tu praca Barusa posłużyła za podstawę do rozprawki Kinga „The Age of the Earth“ [Amer. Journ. of Science 1893 roku, zeszyt styczniowy]. I my tu w dalszym ciągu oprzemy na rozprawie Barusa pewne rozumowania, które częściowo pokrywają się z rozumowaniami zawartymi w rozprawce Kinga, ale King miał inny cel na oku niż my, chodziło mu o to, czy nie można wyzyskać hipotezę sztywnego wnętrza dla określenia wieku ziemi. Krytykę rozprawy Kinga znajdzie czytelnik w mojej rozprawie pod tytułem: Einige Betrachtungen über die Kontraktionstheorie der Gebirgsbildung und die Beschaffenheit des Erdinneren. Peterm. Geogr. Mittheilungen, 1893 r. str. 136—141.

nych skałach zmniejsza się¹⁾, gdy p wzrasta, a nawet nie jest wykluczoną możliwością, że dla pewnych wielkich wartości zmiennej p $\frac{dT}{dp}$ staje się zerem a potem ujemną wielkością t. j., że typ topnienia skał z typu normalnego staje się podobnym do typu topnienia lodu. Wszakże jest rzeczą zupełnie pewną, że w pobliżu powierzchni i do bardzo znacznych głębokości $\frac{dT}{dp}$ pozostaje dodatnie. Ponieważ zaś $\frac{dp}{dr}$ jest wciąż ujemne, a zatem w każdym razie od powierzchni do bardzo znacznych głębokości, a bardzo być może aż do samego środka, $\frac{dT}{dr}$ jest wciąż ujemne i temperatura topnienia skał, która na powierzchni wynosi około 1000 — 1200° (w diabazie 1170°) w coraz to większych głębokościach staje się coraz to wyższą. Gdyby zaś $\frac{dT}{dp}$ gdzieś na wielkich głębokościach zmieniło znak, to wtedy i $\frac{dT}{dr}$ też zmieniłoby znak i T zmniejszałoby się z wzrastaniem głębokości.

Ponieważ gęstość powierzchniowych warstw jest około sześciu razy mniejsza niż gęstość ręci, więc ciśnienie w powierzchniowych warstwach powinno średnio wzrastać o jedną atmosferę co 4,5 do 5 metrów, ponieważ zaś $\frac{dT}{dp}$ dla diabazu = 0,025 więc, przyjmując tę liczbę w braku innych danych dla samej ziemi znajdziemy, że T wzrasta o jeden stopień co jakie 200 metrów głębokości. Z drugiej strony rzeczywista temperatura powierzchniowych warstw wzrasta średnio o jeden stopień co jakie 35 metrów¹⁾. Oznaczając więc temperaturę topnienia, jak poprzednio, przez T , rzeczywistą temperaturę pokładów przez τ a głębokość przez x , znajdziemy przedewszystkiem ponieważ

$$x = R - r$$

a zatem

$$\frac{dT}{dx} = - \frac{dT}{dr},$$

¹⁾ Mack. C. R. tom CXXVII str. 361—364 znalazł, że temperatura topnienia naftaliny daje się przedstawić przez wzór:

$$T = 79,8 + 0,0373 p - 0,0000019 p^2 \text{ stopni } C$$

w granicach $p = 150$ do $p = 2140$ atmosferom.

²⁾ Wedle komitetu, wysadzonego przez Brit. Ass. (sprawozdanie w Rep. Br. Ass. za 1882 rok str. 88) gradient geotermiczny w powierzchniowych pokładach średnio równa się 35,09 metra na 1° C.

że w powierzchniowych pokładach i wogóle wszędzie gdzie $\frac{dT}{dr}$ jest odjemne $\frac{dT}{dx}$ jest wciąż dodatnie, następnie zaś, że $\frac{dT}{dx}$ w powierzchniowych pokładach jest około pięciu i pół razy większe niż $\frac{d\tau}{dx}$.

Ponieważ dalej T dla różnych law i skał wynosi na powierzchni ziemi 1100° -- 1200° , zaś τ równa się zaledwo kilkunastu stopniom, więc w pobliżu powierzchni mamy jednocześnie

$$\tau < T$$

i

$$\frac{dT}{dx} > \frac{d\tau}{dx}.$$

Gdybyśmy zaś przedstawili T i τ graficznie wedle jednej i tej samej skali, to okazałoby się, że w pobliżu powierzchni T przechodzi znacznie wyżej od τ , ale za to styczna do τ posiada znacznie większe nachylenie niż styczna do T .

Gdyby $\frac{d\tau}{dr}$ i $\frac{dT}{dr}$ były stałe przynajmniej do głębokości kilkudziesięciu kilometrów, to kładąc w powierzchni:

$$\begin{aligned} \tau &= 20^{\circ}, & T &= 1170^{\circ} \\ \frac{dT}{dx} &= \frac{1}{200}, & \frac{d\tau}{dx} &= \frac{1}{35}, \end{aligned}$$

mielibyśmy w powierzchniowych warstwach:

$$\begin{aligned} T &= 1170^{\circ} + \frac{x}{200} \\ \tau &= 20^{\circ} + \frac{x}{35}, \end{aligned}$$

przeto krzywa rzeczywistych temperatur i krzywa temperatury topnienia przecinałyby się wtedy, gdy:

$$1170^{\circ} + \frac{x}{200} = 20^{\circ} + \frac{x}{35}$$

t. j. gdy

$$x = \frac{1150 \times 70}{1,65} = 48787 \text{ metrom}$$

t. j. na głębokości 48,8 kilometrów. Jest to zresztą punkt przecięcia stycznych do krzywych T i τ w samej powierzchni. Gdyby rzeczywiście krzywe T i τ przecinały się dla $x = 48,8$ kilometrom, to po-

za głębokością 48,8 kilometrów rzeczywiste temperatury skał byłyby już wyższe od temperatury topnienia i naturalnie skały musiałyby się znajdować w stanie ciekłym. W okolicach wulkanicznych gradient geotermiczny bywa częstokroć znacznie mniejszy od średniego i często wynosi tylko połowę a nawet mniej niż połowę średniego gradientu. Wskutek tego w wulkanicznych okolicach krzywe T i τ mogłyby się przecinać na znacznie mniejszej głębokości wynoszącej tylko jakie trzydzieści a nawet dwadzieścia kilometrów.

Z teorią sztywnego wnętrza najlepiej daje się pogodzić hipoteza, wedle której zbiorniki ciekłych law znajdują się tylko w pewnych okolicach n. p. pod wulkanami i zajmują przestrzenie stosunkowo do rozmiarów ziemi bardzo małe. Tej hipotezie odpowiada założenie, że wogóle we wnętrzu ziemi

$$T > \tau,$$

przyczem tylko w pobliżu powierzchni na głębokości kilkunastu lub kilkudziesięciu kilometrów istnieje pewna warstwa, w której różnica $T - \tau$ jest wogóle dość mała, miejscami zaś staje się równa zeru a nawet przybiera odjemne wartości.

Powstaje pytanie czy krzywe T i τ mogą mieć taki przebieg, aby tylko co wyliczone warunki były spełnione. Styczna do krzywej T jest w pobliżu powierzchni mało nachylona, o wiele mniej niż styczna do krzywej τ , ale możliwą jest rzeczą, że na pewnej niebardzo znacznej głębokości $\frac{dT}{dx}$ jest znacznie większe niż w pobliżu powierzchni. Rzeczywiście jeżeli założymy, że $\frac{dT}{dp}$ jest w dość szerokich granicach prawie stałe a jednocześnie założymy, że już na nieznacznej odległości od powierzchni gęstość pokładów jest znacznie większą niż gęstość powierzchniowych warstw, to $\frac{dp}{dx}$ jest większe niż w samej powierzchni, a zatem $\frac{dT}{dx}$ na głębokościach wynoszących dziesiątki kilometrów może być większe niż w powierzchni i krzywa T może w pewnym odstępnie być krzywą zwróconą wypukłością w dół i nachylenie stycznej do T może się w pewnym odstępnie powiększać.

Z drugiej strony można założyć, że $\frac{d\tau}{dx}$ zmniejsza się w miarę tego jak zagłębiamy się pod powierzchnię, że zatem ta krzywa jest zwrócona wypukłością ku górze a styczna do niej posiada w miarę tego jak x (głębokość) wzrasta coraz to mniejsze nachylenie. W ten

sposób krzywe T i τ mogą zupełnie się rozminąć, choćby nawet $\frac{dT}{dx}$ w dalszym ciągu przestało wzrastać a nawet się zmniejszało. Zawsze jednak będzie pewna okolica, w której krzywe T i τ będą przechodzić blisko od siebie tak, że gdybyśmy nieco odmienili ich kształty, to mogłyby się przecinać, w razie atoli gdy krzywe T i τ przecinają się i w pewnym odstępnie T staje się mniejszem od τ , to zawsze należy założyć, że nieco dalej następuje drugie przecięcie się i T staje się znowu większem od τ i pozostaje takim aż do największych głębokości t. j. do samego środka. Aby to było możebnem także potrzeba tylko, aby $\frac{d\tau}{dx}$ zmniejszało się w miarę tego jak x wzrasta.

Przebieg krzywej τ , przy którym $\frac{d\tau}{dx}$ zmniejsza się w miarę tego jak x wzrasta, jest nietylko możebny ale nawet bardzo prawdopodobny. Rzeczywiście ziemia jest ciałem stygnącym, ale w każdym ciele, które pierwotnie posiadało wysokie temperatury i stygnie w zimnym ośrodku, w pierwszych stadyach stygnięcia, (które naturalnie mogą trwać setki milionów lat) utrata ciepła odbywa się głównie w zewnętrznych warstwach, wskutek czego w pewnej danej chwili rozkład temperatur powinien być takim, że przyrost temperatury z głębokością staje się coraz to mniejszym w miarę tego jak głębokość wzrasta, odwrotnie zaś gradient geotermiczny staje się coraz to większym.

Naturalnie przy takim rozkładzie temperatury ta ostatnia nawet w samym środku ziemi nie może być tak kolosalnie wielką jakto n. p. przypuszczali Cordier i inni uczeni pierwszej połowy bieżącego stulecia. Bardzo być może, że nawet w pericentrycznych okolicach temperatury nie przewyższają kilku albo kilkunastu tysięcy stopni C .

Dla przykładu weźmy pewien specjalny przypadek. W znanej rozprawie pod tytułem „Cooling of the Earth“¹⁾ lord Kelvin (wówczas jeszcze W. Thomson) zakłada, że w pewnej chwili w przeszłości ziemia posiadała wszędzie jednostajną temperaturę wynoszącą około 7000° Fahr. t. j. 3871 $\frac{1}{3}$ ° C. Wedle przypuszczenia Thomsona jest to średnia temperatura, przy której wnętrze ziemi stwardniało. Naturalnie założenie, że była taka chwila, w której ziemia posiadała wszędzie jednostajną temperaturę jest zgoła dowolne, ale dla celów, o które chodziło

¹⁾ Patrz. Treatise on Nat. Phil. Thomsona i Taita, część II. app. D.

Porównaj także:

John Perry. On the Age of the Earth. Nature Jan. 3. 1895 str. 224, a także Oliver Heaviside. Electromagnetic Theory, tom II [The Electrician Series] Londyn 1899, str. 12—25.

Thomsonowi trzeba było zrobić jakieś dowolne założenie, bo inaczej całe zadanie o stygnięciu ziemi pozostałoby nieokreślone. Zresztą, jak wiadomo, takich założeń nie można brać „au pied de la lettre“, chodzi bowiem tylko o to, aby przez rozpatrzenie pewnego specjalnego przypadku dojść do wniosków, które potem „mutatis mutandis“ mogą być zastosowane do ziemi.

Dalej Thomson zakłada, że współczynnik przewodnictwa (przy jednostkach czasu rok a długości stopa ang.) wynosi dla całej ziemi około 400 i że gradient geotermiczny w powierzchniowych warstwach wynosi 51 stóp na każdy stopień F t. j. 27,97 metrów na każdy stopień C. Z tych danych na zasadzie znanych wzorów teorii cieplnego przewodnictwa łatwo można obliczyć, że od owej chwili, gdy temperatura całej ziemi równała się około 7000° F, aż do obecnej chwili upłynęło mniej więcej około 100 milionów lat.

Ale nam o to nie chodzi, natomiast chodzi o coś innego, mianowicie o to, że z założeń Thomsona wynika, iż obecnie temperatura pericentrycznych okolic jest jeszcze prawie ściśle taką jak w owej chwili uważanej za pierwotną, gdy wszędzie panowała temperatura 7000° F. Nawet na głębokości 800000 stóp ang. t. j. nieco mniej jak 244 kilom. temperatura jest tylko o jakie paręset stopni F niższa od 7000° F. Jeżeli stosownie do poprzednich rozumowań przyjmiemy, że $\frac{dT}{dx}$ w pobliżu powierzchni jest 5 $\frac{1}{2}$ razy mniejsze od $\frac{d\tau}{dx}$, to pomimo tego, że temperatura topnienia w powierzchni wynosi 1170°C (t. j. 2138° F) jednakże styczna do krzywej T przetnie się z krzywą τ na głębokości mniej więcej jakich 160000 stóp, t. j. około 48,77 kilom. oraz na głębokości około 1100000 stóp t. j. 335,28 kilom.

Gdyby $\frac{d\tau}{dx}$ w pobliżu powierzchni było tylko cztery razy większe od $\frac{dT}{dx}$, to wtedy styczna do krzywej T przecięłaby krzywą τ pierwszy raz na głębokości większej niż 160000 stóp a drugi raz na głębokości mniejszej niż 1100000 stóp.

W obu przypadkach, jeżeli krzywa ma się rozminąć z krzywą τ , to trzeba aby $\frac{dT}{dx}$ w pobliżu powierzchni szybko wzrastało tak, żeby n. p. już na głębokości kilkunastu albo kilkadziesiątu kilometrów było ze dwa razy większe niż w pobliżu powierzchni, w dalszym ciągu w głębokości stu i więcej kilometrów $\frac{dT}{dx}$ może się już znowu zmniejszać, może nawet stać się prawie równem zeru temniemniej

krzywe już się nie przetną. Prędki wzrost pochodnej $\frac{dT}{dx}$ na małej odległości od powierzchni jest zupełnie możliwy, jeżeli założymy, że $\frac{dT}{dp}$ jest w dość znacznych granicach prawie stałe, zaś $\frac{dp}{dx}$ w pobliżu powierzchni szybko wzrasta. Na to zaś potrzeba tylko, aby gęstość pokładów w pobliżu powierzchni szybko wzrastała w miarę tego, jak zwiększa się głębokość. Na większych głębokościach wynoszących około stu kilometrów już $\frac{dp}{dx}$ może się zmniejszać t. j. przyrost ciśnienia i gęstości z głębokością może się zmniejszać.

Jak widzimy, wnioski dotyczące się tego specjalnego hypotetycznego przypadku w zupełności potwierdzają poprzednie ogólniejsze rozumowanie.

Hypoteza sztywnego wnętrza wymaga, aby rzeczywiste temperatury były wszędzie niższe od temperatur topnienia z wyjątkiem niektórych stosunkowo niewielkich przestrzeni, w których rzeczywiste temperatury są niższe od temperatur topnienia, gdzie zatem mamy zbiorniki lawy. Przyczyny istnienia takich zbiorników mogą być rozmaite:

1-mo. Lokalne podwyższenie rzeczywistej temperatury pokładów spowodowane czyto przez jakieś mechaniczne lub chemiczne procesy, przy których znaczne ilości mechanicznej lub chemicznej energii przetwarzają się w ciepło, czy też poprostu przez lokalne utrudnienie promieniowania w przestrzeń n. p. wskutek utworzenia się jakiegoś bardzo źle przewodzącego lub źle promieniującego ciepło pokładu.

2-do. Lokalne zniżenie temperatury topnienia bądź dlatego, że wskutek pewnych miejscowych przyczyn ciśnienie jest mniejsze niż średnie ciśnienie odpowiadające danej głębokości, bądź dlatego, że w danej okolicy zalega właśnie taki gatunek skał, który sam ze siebie posiada stosunkowo niskie temperatury topnienia.

3-io. Lokalne zniżenie temperatury topnienia spowodowane przez obecność wody. Wiadomo, że wiele ciał a między innymi i krzemiany łatwiej topnieją w wodzie niż bez wody, albowiem w obecności wody, zanim nastąpi właściwe termiczne topnienie, już mamy roztopianie się (rozpuszczanie się) ciała w gorącej wodzie.

W ten sposób potrąciliśmy o często dyskutowaną kwestyę udziału wody, osobliwie wody morskiej w wulkanicznych wybuchach. Oczywiście nie możemy na tem miejscu zajmować się tą kwestyą, jako niemającą bezpośredniej styczności z głównym tematem niniejszej roz-

prawy. Chcieliśmy tu tylko zaznaczyć, że można sobie wyobrazić taki przypadek, iż gorąca para wodna znajduje dostęp do jakichś gorących ale twardych pokładów spoczywających gdzieś na głębokości kilkunastu kilometrów i że te twarde pokłady rozpuszczają się w tej gorącej (a zgęszczonej) parze wodnej ¹⁾.

Przyczyny wymienione pod 1. działają prawdopodobnie o wiele rzadziej niż przyczyny wymienione pod 2. Pod 2. wymieniliśmy lokalne zmniejszenie ciśnienia. Takie zmniejszenie może być spowodowane albo przez rozmycie pokładów z wierzchu leżących przez wody, albo też przez to, że w pewnym miejscu wskutek bocznego ciśnienia pokłady są niejako podtrzymywane, unoszone, co osobliwie łatwo może się przytrafić pod antyklinalami w okolicach, gdzie pokłady są sfałdowane.

Z rozpatrywanego tu specjalnego przypadku i wogóle z całego toku rozumowań widzimy, że można pogodzić fakt istnienia wulkanów z hipotezą sztywnego wnętrza, byleby tylko założyć 1., że poczynając od głębokości kilku lub kilkunastu kilometrów gradient geotermiczny poczyną szybko wzrastać i 2. że jednocześnie temperatura topnienia pokładów też szybko wzrasta, choć w dalszym ciągu może wzrastać bardzo powoli. Jeżeli te warunki są spełnione, to, z wyjątkiem niewielkich okolic zajętych przez zbiorniki lawy, rzeczywiste temperatury będą niższe od temperatur topnienia i skały pozostaną w stanie stałym. Warto zaznaczyć, że oba te warunki mogą być bardzo łatwo spełnione, jeżeli założymy, że blisko pod powierzchnią t. j. na głębokości kilku lub kilkunastu kilometrów znajdują się pokłady zawierające dużo żelaza ²⁾. Takie pokłady łatwo przewodzą ciepło, co, jak wiadomo, sprawia zwiększenie geotermicznego gradientu, z drugiej zaś strony gęstość takich pokładów musiałaby być bardzo znaczna, wskutek czego ciśnienie musiałoby prędzej wzrastać z głębokością t. j. innymi słowy w takich pokładach $\frac{dp}{dx}$ miałoby większą wartość niż w pobliżu po-

¹⁾ C. Barus (On the Aqueous Fusion of Glass. Phil. Mag. 5 ser. 47 tom (1899 rok.) str. 104—109 i 461—479) z niektórych swych doświadczeń wnosi, że działanie gorącej wody na skały w głębi ziemi prawdopodobnie wzrasta z głębokością. (Późniejszy przypisek autora).

²⁾ Wiechert (Nachr. der Götting. Gesellsch. der Wiss. 1897 r.) mniema, że gęstość znacznie wzrasta dopiero na większych głębokościach, bo wyobraża sobie ziemię złożoną z żelaznego jądra o średnicy około 10 milionów metrów, pokrytego kamiennym płaszczem o grubości około 1,400000 — 1,500000 metrów i średniej gęstości 3. W ten sposób wedle Wiecherta w granicy między żelaznym jądrem i zewnętrznym płaszczem gęstość doznaje nagłej zmiany.

wierzchni, jeżeliby zatem $\frac{dT}{dp}$ w takich pokładach miało przybliżenie wartość 0,025, którą przyjęliśmy w powierzchniowych pokładach, to $\frac{dT}{dx}$ byłoby większe jak w pobliżu powierzchni.

Podkreślamy też jedną z konsekwencyi naszych rozumowań, mianowicie, że nawet w pericentrycznych okolicach rzeczywiste temperatury pokładów prawdopodobnie nie wynoszą więcej jak jakie kilka tysięcy stopni, tak n. p. gdyby $\frac{dT}{dp}$ było stale równe 0,025, to nawet w środku ziemi temperatura topnienia byłaby co najwyżej równa jakim 45000° C. Ponieważ zaś rzeczywista temperatura τ powinna być niższą od temperatury topnienia T , przeto τ nawet w samym środku powinno pozostać znacznie mniejsze niż 45000° C. Ale prawdopodobnie temperatura topnienia nawet w samym środku ziemi wynosi zaledwie kilka tysięcy stopni C, a zatem i τ dochodzi tylko do kilku tysięcy stopni.

O. Fisher ¹⁾ zarzuca teorii sztywnego wnętrza, że źle się godzi z tą teorią tworzenia się gór, która uważa fałdowanie się pokładów jako rezultat kurczenia się stygnącej ziemi. Większość gór składa się ze sfałdowanych pokładów, prócz tego w krajach obecnie bynajmniej nie górzystych częstokroć napotykamy potężnie sfałdowane pokłady. Są to ślady dawnych gór, zmytych z oblicza ziemi przez długoletnią erozyę wodną. Często pod horyzontalnie zalegającymi warstwami, należącymi do nowszych formacji, znajdują się ogromne kompleksy starszych sfałdowanych pokładów, często znajdujemy niewątpliwe ślady kilkakrotnego sfałdowania w różnych geologicznych epokach. Jeżeli nawet wyłączymy archaiczne formacje, to zawsze okaże się, że sfałdowane warstwy zajmują co najmniej jedną czwartą część lądów. Naturalnie sfałdowanie nie wszędzie jest jednakowo intensywne, ale w wielu miejscach natrafiamy na warstwy tak silnie sfałdowane, że gdyby je znowu rozscielić, to zajęłyby powierzchnię półtora, dwa i więcej razy większą aniżeli ta, którą obecnie pokrywają.

Ze względu na to, że ziemia jest ciałem stygnącym i że zapewne jak większość ciał kurczy się podczas stygnięcia, hipoteza, że fałdowanie się pokładów jest właśnie rezultatem kurczenia się stygnącej ziemi, wydaje się zupełnie naturalną. Powierzchnowe warstwy już dawno osiągnęły najniższe w danych zewnętrznych warunkach (insolacja, klimat i t. d.) możliwe temperatury a zatem już ani dalej stygnąć, ani dalej kurczyć się nie mogą, zniżanie się temperatury i zmniejsza-

¹⁾ Physics of the Earth's Crust. Londyn 1889 r. rozdziały VIII, IX i X.

nie się objętości zachodzą w głębszych warstwach, jądro kurczy się pod powierzchniami warstwami, a zatem te ostatnie muszą pomieścić się na mniejszej powierzchni i fałdują się.

O. Fisher przyjmuje tę teorię jako pewnik i czerpie z niej argument przeciw hipotezie sztywnego wnętrza. Argument Fishera polega na pewnym rozumowaniu, którego pierwszym autorem jest zresztą Davison¹⁾.

Uważajmy ciało stałe plastyczne, najlepiej kulę, i założmy, że ta kula stygnie w zimnym ośrodku. Wtedy stygnięcie musi postępować od powierzchni ku środkowi; najpierw kurczą się zewnętrzne warstwy, podczas gdy temperatura i objętość wewnętrznych warstw doznają bardzo nieznacznych zmian. Wskutek tego okazuje się, że zewnętrzne warstwy stają się jakby zaciasne, aby mogły objąć wewnętrzne warstwy, a więc muszą rozciągnąć się²⁾ (przyczem grubość ich staje się mniejsza). Im dalej postępuje proces stygnięcia, tem dalej w głąb postępuje to rozciąganie tak, że pierwotnie każda warstwa bywa rozciągana. Jednakże w miarę tego, jak dalej postępuje stygnięcie i objętość wewnętrznego jądra staje się coraz to mniejsza, następuje chwila, w której skrócenie w ciągu jednostki czasu promienia jądra objętego pewną daną warstwą staje się równe skróceniu promienia samej owej warstwy w ciągu jednostki czasu. Od tej chwili warstwa przestaje być rozciągana, natomiast ponieważ w dalszym ciągu stygnięcia wewnętrzne jądro już kurczy się prędzej niż owa wyżej wspomniana warstwa, więc ta ostatnia okazuje się nazbyt obszerną, podlega ścisnaniu i musi się fałdować. Chwila przejścia od stanu rozciągania do stanu ścisnienia naturalnie następuje najwcześniej w zewnętrznej warstwie, potem w następnej tuż pod nią leżącej i tak dalej. W ten sposób w stygnącej kuli powinna istnieć pewna z jej powierzchnią współśrodkowa kulista powierzchnia, w której w danej chwili materya nie doznaje ani ścisnienia, ani rozciągania, poniżej tej powierzchni materya jest rozciągana a powyżej ścisnana. Z czasem w miarę tego jak postępuje stygnięcie, powierzchnia ta (Level of no Strain) zstępuje coraz to głębiej. Są jednak

¹⁾ Phil. Trans. tom 178 (1887 r.) str. 231—249.

²⁾ Doświadczenie poucza, że kruche stygnące ciała pękają na powierzchni, co świadczy o rozciąganiu.

Niniejsze rozumowania mogą być zastosowane i do ciała nieplastycznego, kruchego, jeśli założymy, że szczeliny, tworzące się przez pęknięcie rozciąganych warstw, zapełniają się okruchami. Jeżeli te okruchy wskutek ciśnienia zostaną spojone z kawałkami warstw na jedną masę, to potem, skoro ustanie rozciąganie i przejdzie na ścisnienie, warstwy będą znów pękać i piętzyć się.

pewne przypadki¹⁾, w których ta powierzchnia redukuje się do jednego punktu, do środka kuli, a zatem praktycznie nie istnieje. W takich przypadkach wszystkie warstwy w ciągu całego procesu stygnięcia są wciąż ściskane, ale prawdopodobieństwo, aby podobny przypadek zachodził właśnie u ziemi jest bardzo małe. Chodzi więc o to, gdzie, to jest na jakiej głębokości, znajduje się obecnie owa powierzchnia bez deformacji (Level of no Strain), oczywiście jest bowiem rzeczą, że im głębiej jest położoną ta powierzchnia, tem sfaldowanie zewnętrznych pokładów musi być znaczniejsze.

Otóż Davison i Fisher sądzą, że ta powierzchnia powinna obecnie się znajdować na bardzo nieznacznej głębokości. Mniemanie to uzasadniają w ten sposób, że przyjmują wszystkie założenia Thomsona, o których mówiliśmy wyżej i obliczają położenie powierzchni bez deformacji po upływie stu milionów lat od chwili, gdy cała kula ziemiska posiadała jednostajną temperaturę 7000° F. Przyjmując jako średni liniowy termiczny współczynnik rozszerzalności ziemi 0,0000071 na 1° F. Fisher znajduje, że powierzchnia bez deformacji znajduje się obecnie na głębokości tylko dwóch mil ang. t. j. 3218,69 metrów. Stąd zaraz wynika, że odkształcenia sprawione przez ściskanie t. j. spiętrzenie się pokładów, fałdy i t. d. musiałyby być ograniczone do cienkiej kilkukilometrowej powierzchni skorupy i że wogóle byłyby bardzo nieznaczne, a zatem trudno zrozumieć, skąd się wzięły ogromne dziś istniejące systemy gór oraz rozliczne dziś już zredukowane do szczątków górskie systemy, które istniały w poprzednich geologicznych epokach. Stąd znowu Fisher wnosi, że hipoteza sztywnego wnętrza, jako prowadząca do tak dziwnego rezultatu musi być fałszywa. Jednakże, jak to zauważyłem w wyżej cytowanej rozprawie, Fisher mylił się sądząc, że istnieje kontrast między kontrakcyjną teorią tworzenia się gór i hipotezą sztywnego wnętrza. Kontrast taki istnieje tylko między kontrakcyjną teorią i założeniem Thomsona, że w pewnej chwili, mianowicie w chwili stwardnienia temperatura ziemi była wszędzie jednostajną.

W. Thomson zrobił zapewne to założenie głównie dla tego, że w jego zadaniu, w którym chodziło przedewszystkiem o ocenę wieku ziemi, nie mogło ono okazać się szkodliwe, natomiast dało możność otrzymać wzory najbardziej nadające się do liczbowych rachunków

¹⁾ Taki przypadek przytoczyłem w wyżej cytowanej rozprawie: „Einige Betrachtungen i t. d.“ Poglądy O. Fishera zbija też C. Davison (On the Straining of the Earth etc. . . . Phil. Mag. 5 ser. tom XLI (1896 r.) str. 133—138). Oprócz tego Davison rozważa konsekwencje hipotezy, że współczynnik rozszerzalności pokładów ziemskich wzrasta z temperaturą.

Dzięki niemu mógł W. Thomson zamiast wzorów odnoszących się do kuli użyć wzorów odnoszących się właściwie do nieskończonego ciała z jednej strony ograniczonego nieskończoną płaszczyzną, poza którą znajduje się zimny, posiadający stałą temperaturę, ośrodek. W tym ostatnim przypadku temperatura ciała wyraża się za pomocą jednej całki, dla której istnieją nawet tablice, tak że rachunki są bardzo łatwe.

O. Fisher mógłby traktować zadanie biorąc stygnącą kulę i zakładając, że w pewnej chwili *n. p.* chwili $t = 0$ we wnętrzu jej panowały temperatury twardnienia odpowiadające ciśnieniom panującym w danych głębokościach, a więc wzrastającym od powierzchni ku środkowi.

Funkcję wyrażającą hypotetyczne początkowe temperatury należało podstawić w znane wzory Fourriera (w jego *Traité analytique de la chaleur*) odnoszące się do stygnięcia kuli, co byłoby rzeczą bardzo łatwą, następnie zaś, porównując wyrażenie pochodnej temperatury względem promienia kuli dla $r = R$ ze współczesną wartością gradientu geotermicznego w powierzchniowych warstwach możnaby obliczyć czas, który upłynął od chwili $t = 0$ do obecnej, a wreszcie możnaby obliczyć współczesne położenie powierzchni bez deformacji, przyczem z pewnością okazałoby się, że ta powierzchnia znajduje się na o wiele większej głębokości niż 2 mile ang.

Jednakże ta druga część zadania (określenie czasu od chwili $t = 0$ do obecnej i obliczenie położenia powierzchni bez deformacji) byłaby bardzo trudną, bo trzeba by porać się z mało zbieżnymi szeregami, trzeba by rozwiązywać skomplikowane przestępne równania, jednym słowem trzeba by pokonać mnóstwo ogromnych i bardzo trudnych przybliżonych rachunków.

Dla tego nie dziwimy się, że O. Fisher nie poszedł tą drogą, natomiast dziwimy się, że nie spostrzegł tego, iż biorąc rozkład temperatury w obecnej chwili zupełnie możliwy ale trochę inny niż ten, który wynika ze wzorów Thomsona, bardzo łatwo można zepchnąć powierzchnię bez deformacji do dowolnej głębokości.

Zaraz pokażemy, że bardzo łatwo jest znaleźć taki możliwy rozkład i „eo ipso“ dowiedziemy, że powierzchnia bez deformacji może obecnie znajdować się równie dobrze na głębokości 2 jak 200 lub 2000 mil angielskich.

Najpierw weźmiemy równanie Fishera określające¹⁾ położenie powierzchni bez deformacji *t j.* równanie:

¹⁾ To równanie u O. Fishera (*Phys. of the Earth's Crust* str. 95) wygląda trochę inaczej, bo zamiast *r* Fisher pisze $R - x$, gdzie *x* oznacza głębokość pokładu.

$$3 \int_0^r r^2 \frac{\partial v}{\partial t} dr = r^3 \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \text{I}$$

w którym v oznacza temperaturę warstwy o promieniu r w chwili czasu t , następnie przekształcimy je za pomocą zasadniczego równania teorii przewodnictwa, które w danym przypadku wygląda tak:

Wyprowadza się zaś w następujący sposób. Oznaczmy przez e liniowy współczynnik termicznej rozszerzalności. W ciągu czasu dt nieskończenie cienka kulista warstwa o promieniu r zmienia swą objętość o

$$3e \cdot 4\pi r^2 dr \frac{\partial v}{\partial t} \cdot dt,$$

zaś objętość kuli objętej tą kulistą warstwą zmienia się w ciągu czasu dt o:

$$3e \cdot 4\pi \int_0^r r^2 \frac{\partial v}{\partial t} \cdot dr \cdot dt,$$

a zatem objętość tej kuli, która była wprzód $\frac{4}{3} \pi r^3$, staje się teraz:

$$\frac{4}{3} \pi r^3 + 3e \cdot 4\pi \int_0^r r^2 \frac{\partial v}{\partial t} dr \cdot dt,$$

przeto zaniedbując e^2 i wyższe potęgi, znajdziemy, że promień kuli, który wprzód był r , teraz jest:

$$r + \frac{3e}{r^2} \int_0^r r^2 \frac{\partial v}{\partial t} dr \cdot dt,$$

a zatem zmienił się o:

$$\frac{3e}{r^2} \int_0^r r^2 \frac{\partial v}{\partial t} dr dt.$$

Ale promień warstwy obejmującej kulę o promieniu r skraca się w ciągu czasu dt o

$$er \frac{\partial v}{\partial t} \cdot dt.$$

Oczywiście powierzchnią bez detormacyi jest ta powierzchnia, w której skrócenie promienia wewnętrznej kuli i promienia obejmującej warstwy są sobie równe, a zatem jako równanie określające położenie tej powierzchni otrzymujemy równanie:

$$3 \int_0^r r^2 \frac{\partial v}{\partial t} \cdot dr = r^3 \frac{\partial v}{\partial t}$$

jak w tekście. Gdy

$$3 \int_0^r r^2 \frac{\partial v}{\partial t} dr < r^3 \frac{\partial v}{\partial t},$$

$$\text{II} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = K \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right).$$

W równaniu tem K oznacza termometryczny współczynnik przewodnictwa. Równanie II można napisać w kształcie:

$$\text{II a} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = K \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right).$$

Podstawiając wartość na $\frac{\partial v}{\partial t}$ z równania II a w równanie I, skracając na K i wykonując po lewej stronie całkowanie, otrzymamy:

$$3r^2 \frac{\partial v}{\partial r} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

albowiem dla $r = 0$

$$\text{III} \quad r^2 \frac{\partial v}{\partial r} = 0,$$

wykonując jeszcze różniczkowanie, skracając na r i t. d., otrzymamy wreszcie

$$\frac{\partial v}{\partial r} = r \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$$

jako równanie określające położenie powierzchni bez deformacyi.

Równanie III jest o wiele dogodniejsze od równania I, bo nie zawiera całek, z drugiej strony, ponieważ zawiera tylko pochodne względem r , więc pozwala określić położenie powierzchni bez deformacyi ze samego chwilowego kształtu krzywej temperatur niezależnie od początkowego rozkładu temperatury. Gdy równanie III nie jest spełnione, ale jest

$$\frac{\partial v}{\partial r} < r \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$$

to dana warstwa jest ściskana, gdy zaś odwrotnie:

to wtedy dana warstwa jest ściskana, gdy zaś

$$3 \int_0^r r^2 \frac{\partial v}{\partial t} dr > r^3 \frac{\partial v}{\partial t},$$

to dana warstwa jest rozciągana. Robimy tu uwagę, że $\frac{\partial v}{\partial t} < 0$ oraz, że u Fishera znaki są inne, bo rozumuje tak, jak gdyby skrócenie promienia było wielkością dodatnią.

$$\frac{\partial v}{\partial r} > r \frac{\partial^2 v}{\partial r^2},$$

to dana warstwa jest rozciągana.

Naturalnie istnieje nieskończona ilość możebnych przypadków, w których pierwszy warunek jest nieustannie i we wszystkich warstwach spełniony tak, że wszystkie warstwy w ciągu całego procesu stygnięcia są sciskane.

Ale wracając do równania III skorzystamy zeń w ten sposób, że pokażemy, iż można wyobrazić sobie nieskończoną ilość rozkładów obecnej temperatury, przy których powierzchnia bez deformacji będzie się znajdować na dowolnej głębokości. Na przykład założymy, że ta powierzchnia bez deformacji znajduje się na odległości $0,9 \cdot R$ (gdzie R oznacza średni promień ziemi) od środka t. j. na głębokości $0,1 R = 637$ kilometrów. Hypotetyczne prawo rozkładu temperatury musi czynić zadość warunkowi, aby w powierzchniowych warstwach gradient geotermiczny był równy współczesnemu gradientowi. Przyjmujemy, że ten ostatni wynosi 30 metrów na $1^{\circ} C$ t. j. założymy, że:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = - \frac{1}{30}^{\circ} C \text{ dla } r = R.$$

Jako jednostkę długości dogodniej będzie wziąć promień ziemski t. j. $6370\ 000$ metrów, wskutek czego otrzymamy:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = - \frac{6370\ 000}{30}^{\circ} C \text{ dla } r = 1. \quad \text{IV}$$

Założmy, że można współczesną temperaturę przedstawić za pomocą krzywej:

$$v = A - Br - Dr^n, \quad \text{V}$$

gdzie A , B i D są to pewne dodatnie stałe, zaś n pewna dodatnia i dość wysoka potęga. Rozkłady temperatury wyrażone przez krzywe tego rodzaju są bardzo podobne do hypotetycznego współczesnego rozkładu temperatury w zadaniu W. Thomsona. Mógłby kto zarzucić nam, że funkcyja $v = A - Br - Dr^n$ nie czyni zadość równaniu II ani wtedy, gdy A , B i D są stałe, ani wtedy gdy A , B i D są funkcjami czasu, ale na to odpowiemy, że przecie w chwili obecnej możemy założyć jakikolwiek rozkład temperatury byleby tylko był prawdopodobny i czynił zadość warunkowi IV, albowiem każdą chwilę możemy uważać za początkową t. j. za chwilę $t = 0$.

¹⁾ Umyślnie bierzemy mały gradient geotermiczny, aby ustrzedz się od zarzutu, że naciągamy dane na naszą korzyść.

Dobierając odpowiednio stałe A , B i D oraz wykładnik n łatwo otrzymamy dowolnie powolny spadek temperatury w pobliżu środka kuli oraz dowolnie szybki w pobliżu powierzchni. Skoro ze wzoru V podstawimy v w równanie warunkowe III, to kładąc $r = 0,9$ ¹⁾ otrzymamy:

$$\text{VI} \quad B = n(n-2) D (0,9)^{n-1}.$$

Ale z warunku IV wynika:

$$B + nD = \frac{637\,000}{3},$$

a zatem z VI i VII wynika:

$$B = \frac{n(n-2) 637\,000 (0,9)^{n-1}}{3n[1 + (n-2)(0,9)^{n-1}]}$$

$$D = \frac{637\,000}{3n[1 + n(n-2)(0,9)^{n-1}]}.$$

Położmy n. p.

$$n = 101$$

i zauważmy, że A jest to nic innego jak obecna temperatura środka ziemi. Temperaturę A możemy określić przyjmując n. p., że średnia temperatura w powierzchni t. j. wartość v dla $r = 1$ wynosi $10^{\circ} C$, wtedy bowiem mamy

$$A - (B + D) = 10^{\circ}$$

t. j.

$$A = 10 + \frac{637\,000}{3 \times 101} \cdot \frac{1 + 101 \times 99 \cdot (0,9)^{100}}{1 + 99 \cdot (0,9)^{100}} \text{ stopni } C,$$

lecz

$$(0,9)^{100} = \frac{2,63 \dots}{10^5},$$

dalej

$$101 \times 99 = 9999 \text{ t. j. prawie ściśle } 10^4,$$

wreszcie

$$\frac{637\,000}{3} = 212\,333,3 \dots$$

Stąd

$$A = 10 + 212,33 \dots \times \frac{1,263 \dots}{1,01263 \dots} \text{ (przybliżenie)}$$

t. j.

$$A = 2658^{\circ} C \text{ (przybliżenie).}$$

¹⁾ Bo wedle umowy powierzchnia bez deformacji powinna być na głębokości 0,1.

A więc przy tak skromnej temperaturze środka kuli powierzchnia bez deformacji znajduje się w głębokości 637 kilometrów, gdybyśmy zaś tak jak Fisher trzymali się założeń Thomsona, to znaleźlibyśmy, że gdy powierzchnia bez deformacji znajduje się na tej głębokości, to temperatura środka musi wynosić jakie kilkanaście lub kilkadziesiąt tysięcy stopni C .

Obliczmy jeszcze temperaturę w głębokości $\frac{1}{100}$ promienia t. j. w głębokości 63,7 kilometrów. Kładziemy we wzorze V $r = 0,99$ i otrzymujemy:

$$v = 2658 - \frac{2123,3}{1,01263} [0,263 \times (0,99) + (0,99)^{101}]$$

lecz

$$\begin{aligned} (0,99)^{101} &= 0,3594, \\ 0,263 \times (0,99) &= 0,26037, \end{aligned}$$

skąd po wykonaniu rachunków znajdziemy:

$$v = 1359^{\circ} C.$$

Jest to temperatura niższa niż temperatury topnienia i twardnienia law w głębokości 63,7 kilom. Rzeczywiście ciśnienie w tej głębokości wynosi około 13 do 14 tysięcy atmosfer, a zatem przyjmując znaną przez Barusa dla mniejszych ciśnień wartości

$$\frac{dT}{dp} = 0,025$$

znajdziemy, że temperatury topnienia i twardnienia powinny na głębokości 63,7 kilom. być o jakie 325 do 350 stopni C wyższe niż na powierzchni. W ten sposób temperatura topnienia diabazu powinna na tej głębokości wynosić $1495^{\circ} C$ t. j. o 136 stopni więcej niż v . Wogóle na wszystkich głębokościach temperatury otrzymane z naszego wzoru są mniejsze niż temperatury topnienia i twardnienia skał, a zatem doskonale odpowiadają hipotezie sztywności.

Przytoczony przez nas przykład jasno okazuje całą nicosć argumentu O. Fishera. Naturalnie można utworzyć nieskończoną ilość możliwych rozkładów temperatury odpowiadających dowolnej głębokości powierzchni bez deformacji.

Zresztą sposób, w jaki Davison i O. Fisher traktowali zadanie o deformacjach stygnącej kuli jest niezadawalniący dla wielu innych powodów. Tak n. p. przyjmując nawet ich punkt widzenia t. j. wychodząc ze założeń W. Thomsona na wstępie natrafiamy na pytanie, gdzie powinna się znajdować powierzchnia bez deformacji w chwili

$t = 0$, t. j. zaraz po stwardnieniu, gdy temperatura kuli była wszędzie jednostajną. Davison i Fisher zakładają, że jej wtedy wcale nie było, że we wnętrzu kuli nie było ani deformacji ani ciśnień mogących sprawić deformacje. Oczywiście jest to założenie nie tylko dowolne ale nawet mało prawdopodobne. Podczas przejścia ze stanu ciekłego w stały niekryształiczny objętość diabazu zmienia się o 3% t. j. tyle co podczas oziębienia o całe 1500° C a przy przejściu w stały kryształiczny o 14%, a więc samemu twardnieniu mogły i powinny towarzyszyć znaczne deformacje. Już wskutek samego procesu twardnienia powierzchnia bez deformacji mogłaby się znaleźć w bardzo znacznej głębokości. Naturalnie nie mamy żadnych a żadnych danych, za pomocą których możnaby określić położenie powierzchni bez deformacji przy końcu procesu twardnienia tak samo, jak nie mamy żadnych danych pozwalających określić jej obecne położenie, ale właśnie ta niepewność jest nowym dowodem, że rozumowania O. Fishera opierają się na bardzo kruchej podstawie.

Nareszcie można zrobić jeszcze jeden zarzut. O. Fisher zupełnie nie uwzględnia elastycznych własności pokładów i rozumuje tak, jakby z jednej strony pokłady były absolutnie rozciągliwe, a z drugiej strony jakby zmiany ich objętości zależały li tylko od zmian temperatury t. j. jak gdyby posiadały tylko termiczną rozszerzalność ale zupełnie nie posiadały elastycznej ściśliwości¹⁾. Takie traktowanie zadania jest naturalnie nazbyt jednostronne, ale trzeba przyznać, że chcąc wziąć na uwagę elastyczne własności materii natrafilibyśmy na pytanie, czy nie należy uwzględnić takich okoliczności, jak możliwość przekroczenia granic sprężystości, jak trwałe deformacje i t. p. rzeczy, z którymi nie wiadomo co począć i które uczyniłyby zadanie zupełnie niedostępnem.

W porównaniu z pracami Davisona i O. Fishera praca Hergesella²⁾ stanowi pewien i znaczny postęp. Pozostając w ramach klasycznej teorii sprężystości t. j. nie wdając się w kwestyę trwałych deformacji i t. p. rzeczy, Hergesell rozpatruje rozkład ciśnień i zmiany gęstości w stygnącej sprężystej kuli. Położeniem powierzchni bez deformacji Hergesell się nie zajmuje słusznie uważając to zadanie jako nieokreślone. Zauważymy mimochodem, że zapatrywanie się Hergesella

¹⁾ To znaczy, że jeżeli przy stałej temperaturze rozciągamy takie ciało w pewnym kierunku, to w kierunkach do kierunku wyciągania prostopadłych następuje skurczenie w taki sposób, aby objętość ciała pozostała niezmienną. Oporu przeciw wyciąganiu ciało nie stawia żadnego.

²⁾ Die Abkühlung der Erde etc. . . . Beitr. zur Geophysik, tom II. Stuttgart 1894 r. str. 153—184.

na przyczynę tworzenia się gór¹⁾ nie wydaje się nam słusznem, bo przyczyna ta polega nie na różnicy między rzeczywistą zmianą objętości danego elementu ciała i tą zmianą tego samego elementu, która zachodziłaby, gdyby materya była tylko termicznie rozszerzalną ale elastycznie nieściśliwą, ale na różnicy między rzeczywistymi zmianami objętości różnych elementów względnie różnych warstw. Z zapatrywań Hergesella wynikałoby n. p., że góry wcale nie mogłyby się tworzyć na kuli złożonej z materyi posiadającej takie fizyczne własności jak materya O. Fishera, tymczasem tak bynajmniej nie jest, jak to widać stąd, że u Fishera góry tworzą się, tylko dzięki nazbyt płytkiemu położeniu powierzchni deformacyi są za małe.

Jest tu jeszcze pewna okoliczność, na którą należy zwrócić uwagę. Wiele zależy od tego do jakiej epoki odnosimy ów moment, w którym nastąpiło stwardnienie ziemi²⁾. Gdybyśmy n. p. powiedzieli, że wszystkie góry, wszystkie deformacye ziemi ze wszystkich geologicznych epok poczynając od azoicznej są późniejsze od owego momentu; to mogłoby się okazać, że trzeba pewnego naciągania, aby w zadawalniający sposób wytłumaczyć wszystkie te deformacye przez kurczenie się już stwardniałej ziemi. Ale nie nas nie zmusza do takiego odsuwania momentu stwardnienia ziemi do tak odległej przeszłości, przeciwnie fakt istnienia wulkanów, fakt istnienia podziemnych zbiorników lawy i inne fakty świadczą, że ten proces stwardnienia jeszcze nie jest całkowicie skończony. Lecz proces twar-dnienia jest połączony ze znacznem zmniejszeniem objętości. Wyżej przytaczaliśmy doświadczenia Barusa, z których wynika, że przy przejściu ze stanu ciekłego w stan krystaliczny objętość lawy zmniejsza się o 14%. Następnie wiemy, iż roztopione metale i lawy niesłychanie chciwie pochłaniają mnóstwo gazów i pary, które następnie podczas stygnięcia i twar-dnienia napowrót bywają wydzielone. Roztopiona stal zawiera niekiedy tyle pary i gazów, że wskutek ich wydzielenia się objętość jej zmniejsza się podczas twar-dnienia o jakie 80% — 90%³⁾. Należy więc sobie wyobrazić, że i wewnątrz ziemi zawierało przed stwardnieniem ogromne masy pary i gazów, które następnie podczas stygnięcia i twar-dnienia zostały wydzielone. Zmniejszenie objętości podczas wydzielenia pary i gazów, oraz zmniejszenie objętości wskutek przej-

¹⁾ Loc. cit. str. 177.

²⁾ O stwardnieniu ziemi pisał w ostatnich czasach lord Kelvin. Patrz rozprawę: *The Age of the Earth as an Abode fitted for Life*. Phil. Magaz. 5 ser. 47 tom (Styczeń zeszły 1899 r.), *Późniejszy przypisek autora*.

³⁾ Patrz E. Suess. *Einige Bemerkungen über den Mond*. Sitzb. Wiener Akad. der Wiss. 1895 r. (tom 104 oddział I.) str. 33 i nast.

ścia ze stanu ciekłego w stały są tak potężnymi źródłami deformacji, że „wystarczyłyby do wyłomaczenia jeszcze większych gór jak te, które kiedykolwiek tworzyły się i tworzą na powierzchni ziemi.

Widzimy więc, że niema powodu odrzucać teorię sztywnego wnętrza, aby mózdz pozostać przy kontrakcyjnej teorii tworzenia się gór jak to czyni O. Fisher, ani też odwrotnie odrzucać kontrakcyjną teorię tworzenia się gór, aby mózdz pozostać przy teorii sztywnego wnętrza, jak to n. p. czyni Reyer¹⁾.

Poświęciliśmy kilka stronnic na dowiedzenie, że mniemany konflikt między kontrakcyjną teorią tworzenia się gór a teorią sztywnego wnętrza w rzeczywistości wcale nie istnieje. Uczyniliśmy to dlatego, że choć nie uważamy kontrakcyjnej teorii tworzenia się gór za jakiś niezbity pewnik, jednak sądzimy, że należy się z nią liczyć. Teoria ta posiada wielkie zalety, które najlepiej widać, gdy się ją porówna z innymi teoryami tworzenia się gór. Jest prostą i jasną, przyczynę deformacji zewnętrznej skorupy poszukuje we wielkich termodynamicznych procesach, którym podlega nasza ziemia. Tymczasem inne teorie tej zalety nie posiadają. Tak n. p. Mallard Reade²⁾ upatruje przyczynę górotwórczych procesów w lokalnych, cząstkowych i czasowych podwyższeniach temperatury, dzięki którym pewne partie pokładów rozszerzają się a będąc wcisnięte pomiędzy inne pokłady muszą się pofałdować. Reyer³⁾ upatruje przyczynę tworzenia się gór w drugorzędnych zjawiskach mogących towarzyszyć [ale mogących też nie towarzyszyć] deformacyom ziemi, mianowicie wydaje mu się, że fałdy mogą tworzyć się w zesuujących się z podnoszącego się dna morskiego nowoosadzonych pokładach.

Przyczyny tego rodzaju wydają się prawie błahemi wobec deformacji, które mogą towarzyszyć twarżnieniu i stygnieniu tak ogromnego ciała jak nasza ziemia. Jednakże kontrakcyjna teoria ma też swoje wady, przedewszystkiem zaś źle się godzi z niesymetrycznością, z nieregularnością rozkładu łądów i gór na powierzchni ziemi. Współcześnie istniejące góry są skupione w pewnych okolicach podczas gdy w innych widzimy obszerne równiny, geologiczne zaś badania niezbitcie dowodzą, że tak było nietylko w obecnej geologicznej epoce ale i w dawniejszych. Zdaje się, że od bardzo dawna górotwórcze procesy

¹⁾ Theoretische Geologie. Stuttgart 1888 r.

²⁾ Origin of Mountain Ranges. Londyn 1886 r.

³⁾ Cond. of Appalachian Faulting. Amer. Journ. of Science 1893 r. (46 tom) str. 257—269.

koncentrowały się w pewnych okolicach. Wprawdzie w różnych geologicznych epokach teatr działalności górotwórczych sił przenosił się nieraz na inne miejsca, ale bodaj nigdy w historii ziemi nie było takiej epoki, w ciągu której deformacye odbywałyby się mniej więcej równomiernie na całej powierzchni ziemi. Tymczasem w myśl kontrakcyjnej teorii deformacye powinnyby właśnie rozdzielać się mniej więcej równomiernie po całej powierzchni ziemi.

Prawdopodobnie więc kontrakcyjna teoria tworzenia się gór jest nazbyt jednostronna, prawdopodobnie prócz kurczenia się ziemi wskutek stygnięcia w górotwórczych procesach biorą udział jeszcze inne przyczyny n. p. przystosowywanie się ziemi do nowej figury równowagi około nowej osi obrotu albo inne jakies nieznanne nam przyczyny. Ale to do nas nie należy, bo nie myślimy wdawać się w uzasadnienie kontrakcyjnej teorii gór. Do naszych celów potrzeba było tylko dowieść, że jeżeli kontrakcyjna teoria tworzenia się gór jest słuszną, to przyjmując ją nie osłabiamy w niczem dowodów przemawiających na korzyść teorii sztywnego wnętrza.

Zastanawiając się nad tem, w jakim stanie znajduje się wnętrze ziemi, przyszlśmy do przekonania, że prawdopodobnie znajduje się w stanie stałym, przeto na zakończenie zastanowimy się jeszcze przez chwilę nad tem, jakie fizyczne własności powinny posiadać ciała stałe jednocześnie poddane ogromnym ciśnieniom i wysokim temperaturom. Ponieważ w żadnem fizykiem laboratorium nie można odtworzyć ani takich ciśnień ani takich temperatur jak te, które prawdopodobnie panują w głębokiem wnętrzu, przeto doświadczenie nie może nam być w tym razie pomocne i musimy sobie te własności wyrozumować.

Przedewszystkiem zastanówmy się raz jeszcze nad temperaturami pericentrycznych okolic. Gdyby te temperatury wynosiły jakie kilkanaście lub kilkadziesiąt tysięcy stopni C , to byłyby prawdopodobnie wyższe od krytycznych temperatur wszystkich ciał i żaden pierwiastek nie mógłby tam istnieć w stanie stałym lub ciekłym, ale tylko w postaci nadzwyczaj zgęszczonego gazu. Jakie fizyczne własności powinienby posiadać gaz mający n. p. gęstość rtęci, o tem absolutnie nie możemy powiedzieć nic pewnego. Być może, że taki gaz mógłby w niektórych przypadkach zachowywać się tak jak ciało stałe, jednak bardziej naturalnem wydaje się przypuszczenie, że jeżeli wnętrze ziemi okazuje własności ciała sztywnego, to rzeczywiście we wnętrzu jej ciała znajdują się w stanie stałym, zaś temperatury nie przekraczają temperatur topnienia a zatem nawet w samym środku nie przewyższają kilku tysięcy stopni C .

Pod stałym ciśnieniem przyrost objętości ogrzewanych ciał zwy-

kle wzrasta szybciej niż przyrost temperatury t. j. $\frac{dv}{d\theta}$, gdzie v oznacza objętość a θ temperaturę, jest zwykle rosnącą funkcją temperatury θ , jeśli położymy $p = \text{stałej}$ (przez p oznaczamy ciśnienie). Gdybyśmy więc nie zważali na wpływ ciśnienia, to znaleźlibyśmy, że współczynniki termicznej rozszerzalności materiałów znajdujących się w głębi ziemi powinny być większe niż współczynniki rozszerzalności tych samych materiałów na powierzchni ziemi, ale ogromne ciśnienie zapewne neutralizuje wpływ wyższej temperatury i w głębokiem wnętrzu współczynniki termicznej rozszerzalności powinnyby być raczej mniejsze niż większe od takichże współczynników na powierzchni ziemi. Możemy poprzeć to mniemanie wnioskami opartymi na niektórych doświadczeniach. Tak n. p. Dahlander¹⁾ znalazł, że współczynniki termicznej rozszerzalności metalicznych drutów zwiększają się, skoro drut jest poddany ciągnieniu, powinny tedy zmniejszać się pod wpływem ciśnienia. Doświadczenia Barusa²⁾ wprawdzie odnoszą się do cieczy, ale w braku doświadczeń odnoszących się do ciał stałych mogą także posłużyć za wskazówkę. Otóż wzmiankowane doświadczenia Barusa wskazują, że pod większem ciśnieniem te same przyrosty temperatury sprawiają mniejsze przyrosty objętości.

Średnie współczynniki rozszerzalności parafiny odpowiadające jednemu i temu samemu przyrostowi temperatury o 500 stopni (ale nie skali C tylko pewnej dowolnej skali, bo pomiary temperatury odbywały się za pomocą termoelektrycznego elementu) pod ciśnieniami 20, 400, 500 i 600 atmosfer miały się do siebie jak:

$$511 : 411 : 387 : 377,$$

dalej średnie współczynniki rozszerzalności innej próbki parafiny też odpowiadające temu samemu przyrostowi temperatury o 500 stopni (tej samej skali) pod ciśnieniami 20 i 400 atmosfer miały się do siebie jak:

$$410 : 366,$$

zaś średnie współcz. rozszerzalności monochlorooctowego kwasu też odpowiadające temu samemu przyrostowi temperatury o 500 stopni (tej samej skali) pod ciśnieniami 20, 400, 500 i 600 atmosfer miały się do siebie jak:

$$648 : 598 : 585 : 545.$$

¹⁾ Winkelmann. Handbuch der Physik tom II. Wrocław 1896 r. str. 60—62.

²⁾ Compressibility of Liquids. Bull. U. S. Geol. Survey Nr. 92. Washington 1892 r. str. 55—67.

Pod wielkimi ciśnieniami, wynoszącymi po kilkaset tysięcy atmosfer i więcej elastyczne współczynniki ściśliwości albo raczej nieściśliwości muszą być bardzo wielkie, bo materya musi być już tak ściśniona i zagęszczona, że aby sprawić jeszcze dalsze zmniejszenie objętości, trzeba coraz to większych sił. Można też przypuszczać, że owe ogromne zagęszczenie nie pozostaje bez wpływu na współczynniki sztywności. Gdyby n. p. za punkt wyjścia wziąć hipotezę, że współczynniki sztywności zależą od sił molekularnych, to, ponieważ zazwyczaj wyobrażamy sobie, że te siły są tem większe im odległości między środkami działania sił są mniejsze; przeto w zupełnie naturalny sposób przyszlibyśmy do wniosku, że wskutek zagęszczenia te molekularne siły muszą być znacznie zwiększone, następnie zaś, że współczynniki sztywności, jako wielkości wzrastające razem z siłami molekularnymi, muszą być także znacznie powiększone.

Zresztą wiemy z doświadczenia, że n. p. prozki poddane wysokiemu ciśnieniu zbijają się na twarde i sztywne masy, z badań geologicznych wiemy, że nawet na głębokościach nie przenoszących kilku lub kilkunastu kilometrów z miękkich glin wytwarzają się twarde łupki a z piaszczystych pokładów jeszcze twardsze piaskowce; można więc powiedzieć, że wysokie ciśnienie sprzyja zwiększeniu sztywności i że prawdopodobnie wielka sztywność ziemi objaśnia się wpływem ogromnych ciśnień panujących w głębi jej wnętrza.

Twardniejące lawy przybierają strukturę krystaliczną. Kryształy są zazwyczaj tem większe im proces twardnienia był powolniejszy. Kryształy są zawsze większe w batolitach t. j. w skałach, które twardniały w głębi ziemi, prawdopodobnie więc większe ciśnienie nie przeszkadza krystalizacji a może nawet jej sprzyja. Na myśl, że zwiększone ciśnienie może sprzyjać krystalizacji naprowadza i ta okoliczność, że gatunkowa objętość bezpostaciowego szkła (obsydianu) jest zwykle mniejsza niż gatunkowa objętość tej samej ale skryształizowanej skały. Trudno naturalnie przesądzać, jak się rzeczy mają pod ciśnieniami wynoszącymi po parękroć sto tysięcy atmosfer, jednak wydaje się, że w bardzo głębokiem wnętrzu skały powinnyby raczej być skryształizowane niż bezpostaciowe.

Jeżeli pod działaniem jakichś bardzo wielkich sił granice wytrzymałości skał t. j. wogóle sztywnych ciał poddanych tak ogromnym ciśnieniom zostaną przekroczone, wtedy naturalnie skały zostaną skruszone, ale deformacje takich ciał, gdybyśmy je mogli obserwować, przedstawiałyby się nam nie jako nieciągłe, ale jako ciągłe t. j. wydawałoby się nam, że nasze ciało odkształca się tak jak ciało plastyczne. Rzeczywiście pod tak olbrzymimi ciśnieniami otwarte szczeliny nie

mogą się tworzyć, skruszone materiały nie mogą się rozpadać, pomimo skurczenia skała musi wciąż pozostać zbita, a ponieważ pod wielkim ciśnieniem proszki i okruchy znów zbijają się w sztywną masę, więc deformacja sztywnego ciała, znajdującego się w takich wyjątkowych warunkach jest szeregiem nieustannych skruszeń i zbijań w jedną sztywną masę, a więc pozornie musi wyglądać tak jak plastyczna deformacja i powinna dać te same rezultaty co plastyczna deformacja.

Geologiczne badania pokazują nam przykłady takich pozornie plastycznych odkształceń. W silnie sfałdowanych pokładach przytrafiają się często warstwy, które widocznie kiedyś doznały pozornie plastycznego odkształcenia. Najlepiej to widać na skamieniałościach, zawartych w takich warstwach. Te skamieniałości zachowały się, co świadczy o tem, że skały nie zostały stopione¹⁾, więc nie można przypuszczać, że skały podlegały prawdziwej plastycznej deformacji; jednak te skamieniałości są zdeformowane, ponieważ zaś nie widać na nich ani pęknięć ani złamań, więc wyglądają tak, jak gdyby to nie były kamienie ale jakieś miękkie i plastyczne przedmioty, które stwardniały dopiero po deformacji. Pod mikroskopem okazuje się jednak, że te skamieniałości są pocięte siatką mikroskopijnych rysów i szczelinek, co dowodzi, że w czasie deformacji zostały skruszone.

Naturalnie deformacje skał posiadających temperaturę bliską temperatury topnienia muszą posiadać charakter prawdziwych plastycznych deformacji, a więc w niektórych przypadkach przytrafiają się prawdziwie plastyczne a w innych pozornie plastyczne deformacje stosownie do tego, jaka skała i w jakiej temperaturze jest poddana odkształceniu.

Zresztą doświadczenia Tresca²⁾ dowiodły, że już pod takimi ciśnieniami jakie można wytworzyć w laboratoryach, niektóre miększe metale w zwykłej pokojowej temperaturze zachowują się tak jak ciała plastyczne.

¹⁾ Porównaj wizerunek skamieliny głowonoga „Orthoceras“ w Mechanismus der Gebirgsbildung Heima.

²⁾ Mém. Sav. Etr. tom 18 (1868 r.).

Dopisek do rozdziału III.

W rozdziale III, omawiając badania Vita Volterry nad wpływem ruchów hydrosfery i atmosfery na obrót ziemi, nie wspomniałem o pewnym ważnym wyniku tych badań. W rozprawie pod tytułem „Sulle rotazioni permanenti stabili di un sistema“ i t. d. (Annali di matematica pura ed applicata tom 23) V. Volterra rozpatruje warunki trwałego obrotu w razie, gdy kształt ciała i rozkład mas nie ulegają żadnym zmianom ale wewnątrz ciała odbywają się pewne stacjonarne cykliczne ruchy, i okazuje, że osie trwałego i stałego obrotu nie są bynajmniej identyczne z głównymi osiami bezwładności ciała, dalej okazuje, że Eulerowska perturbacja w ruchu obrotowym takiego ciała odbywa się nie naokoło osi głównej ale naokoło osi trwałego obrotu, zaś peryod jej zależy także od momentów m_x , m_y i m_z . Uwagi te mogą być zastosowane do ziemi, bo, jak to wyjaśniliśmy w rozdziale III, prądy oceaniczne i atmosferyczne są właśnie takimi ruchami wewnętrznymi, o jakich mówi Volterra. Być więc może, że trwała oś obrotu ziemi różni się od głównej polarnej osi bezwładności, ale z powodu, że momenty m_x , m_y i m_z w przypadku ziemi są wobec momentu $C\omega$ bardzo małe, kąt między obu osiami może co najwyżej wynosić jaką sekundę w mierze kątowej. Tak samo bardzo być może, że okres Eulerowskiej perturbacji różni się od

$$\frac{A}{C - A} \text{ dni,}$$

ale również z powodu, że m_x i t. d. są bardzo małe w porównaniu z $C\omega$, różnica może wynosić co najwyżej kilka sekund (czasu). Dzięki temu wszystkie nasze rozumowania zawarte w III rozdziale pozostają w swej sile.

Przypominamy też raz jeszcze, że podane w III rozdziale wartości względnych momentów m_x i t. d. a raczej ich stosunki do $C\omega$ są prawdopodobnie znacznie przecenione.



Spis rzeczy.

	Strona
Rozdział I. Związek między stanem wnętrza ziemi a jej figurą. Rozkład siły ciężkości w powierzchni geoidy. Kompensacya i Izostazyą.	226
Rozdział II. Związek między stanem fizycznym ziemi a niektórymi zjawiskami jak n. p. przypływy i odpływy morza, precessya oraz peryodyczne zmiany geograficznych szerokości.	245
Rozdział III. Eulerowska perturbacya u ciał nieodkształcających się, w których zachodzą ruchy wewnętrzne.	259
Rozdział IV. Eulerowska perturbacya u ciała sprężystego i wpływ odkształceń na tę perturbacyę.	297
Rozdział V. Eulerowska perturbacya u ciała sprężystego pokrytego oceanem. .	335
Rozdział VI. Prędkość rozchodzenia się drgań we wnętrzu ziemi. Wnioski stąd co do stanu wnętrza ziemi.	368
Rozdział VII. O zjawiskach wulkanicznych, o rozkładzie temperatury we wnętrzu ziemi, o związku między teorią tworzenia się gór i teorią sztywnego wnętrza. O fizycznych własnościach materji we wnętrzu ziemi.	388
Dopisek do rozdziału III.	419

