

INTEGRATOR.

KRZYWA CAŁKOWA

i jej zastosowania w Mechanice budowniczej.

(„Inżynieria i Budownictwo“, Warszawa, r. 1882
i w oddzielnej odbitce).

Przyrząd mojego pomysłu, który w niniejszej pracy opisuję, przeznaczonym jest do mechanicznego rozwiązywania pewnych zagadnień, wchodzących w zakres Rachunku nieskończonościowego.

Podobnie jak niektóre istniejące już przyrządy rachunkowe wykonywają mechanicznie działania arytmetyczne, rozwiązują równania i t. p., mając do czynienia z wielkościami skończonymi, tak mój Integrator operuje wielkościami niknącymi, nieskończenie małymi.

I tak np. znajduje on sumę nieskończonej ilości nieskończenie małych a różnych pomiędzy sobą elementów powierzchni. Znajduje powierzchnie figur, ograniczonych dowolnymi krzywymi, co czynią także planimetry. Całkuje takie równania różniczkowe, które można przedstawić w postaci krzywych linii. Wynajduje środki ciężkości dowolnie ograniczonych powierzchni, oraz daje ich momenty statyczne, bezwładności i wyższych rzędów względem dowolnych osi. Wyszukuje z danego obciążenia wszystkie statyczne dane, potrzebne do obliczania prostych belek. Kreśli linie sprężyste tych belek, oraz linię ciśnienia w sklepieniach i profil wyrównania mas (Massennivellement) dla profilu podłużnego projektowanej drogi etc. etc.

Ponieważ zaś w Fizyce, Mechanice stosowanej i t. p., spotykamy się nader często z podobnego rodzaju zagadnieniami, przeto sędzę, że Integrator mój doczeka się licznych zastosowań.

Ażeby o tej praktycznej doniosłości dać wyobrażenie, dołączyłem opis pewnych zastosowań krzywej, którą kreśli Integrator, do Mechaniki budowniczej.

Pierwszą wzmiankę o wykreśleniu przybliżonem krzywej całkowej i o jej zastosowaniu do zagadnień matematycznych znalazłem w dziele prof. Żmurki „Wykład Matematyki“. 1864 r. Po nim krzywą tą zajmował się Szolin w Pradze (Über graph. Integration. Ein Beitrag zur Arithmographie 1872), a niektóre zastosowania do Mechaniki podał Nehls w dziele „Die graphische Integration“, wydanem w Hanowerze w 1877 r.

Czytelnik, oznajomiony z odnośną literaturą, odszuka niemal w każdym rozdziale niniejszej pracy nowe przyczynki, lub przynajmniej nowe drogi, doprowadzające do znanych rezultatów. Na szczególniejszą uwagę zasługują oznaczenia ujemnych momentów u belek wmurowanych i teorya sklepień.

O niektórych zastosowaniach bardziej specjalnej natury, jak obliczania belek wieloprzęsłowych i łuków, zdam niedługo sprawę na innem miejscu.

B. A.

Warszawa. Październik, 1880.

A. KRZYWA CAŁKOWA.

1. Przypuśćmy, że mamy daną krzywą $O'MN$ (fig. 1). Jeśli danem jest równanie tej krzywej, to za pomocą całkowania znaleźć możemy powierzchnię, zawartą między tą krzywą a osią odciętych OX .

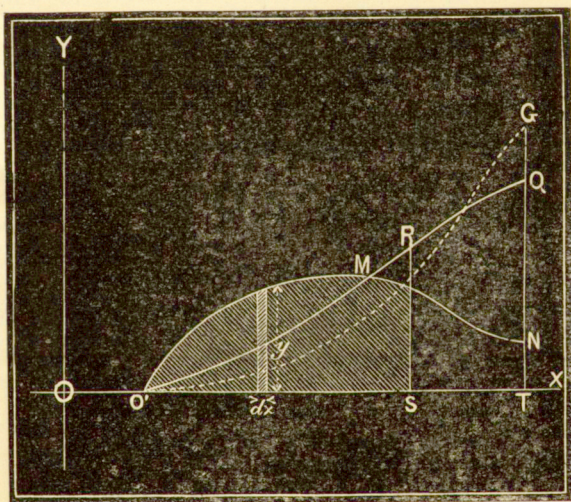


Fig. 1.

Dajmy na to, że równanie krzywej $O'MN$ jest:

$$y = f(x).$$

Wykreślmy teraz inną krzywą: $O'MQ$ takiego kształtu, że każda jej rzędna, np. RS , przedstawiać nam będzie po-

wierzchnię na figurze kreskowaną, zamkniętą między krzywą $O'MN$, osią odciętych a daną rzędną RS . Ma to oznaczać, że jeśli rzędną RS zmierzmy podziałką, użytą do wykreślenia krzywej ORQ i utrzymamy n jednostek długości, to powierzchnia kreskowana mieć będzie n jednostek kwadratów. W ten sam sposób ostatnia rzędna QT przedstawiać nam będzie powierzchnię $O'MNTO'$.

Krzywa $O'MQ$ w stosunku do krzywej $O'MN$ nazywa się **krzywą całkową**.

Krzywą $O'MN$ zwać będziemy odwrotnie **krzywą różniczkową**.

Możemy dalej uważać krzywą całkową $O'MQ$ jako krzywą różniczkową, i narysować dla niej nową całkową OG (na figurze kreskowaną). Krzywą tę nazywać będziemy drugą całkową danej krzywej $O'MN$. Operację tę możemy powtarzać, ile razy się podoba.

Jeśli się bliżej zastanowimy nad znaczeniem krzywej całkowej, to przyjdziemy do przekonania, iż wskazuje ona nam, w jaki sposób wzrasta powierzchnia, zamknięta między krzywą różniczkową a osią odciętych OX . Jeśli tę powierzchnię kreskowaną na fig. 1-ej przedstawimy sobie jako złożoną z nieskończonej ilości tych elementów prostokątnych o podstawie dx a wysokości y (patrz fig. 1), to krzywa całkową wskazuje przebieg sumowania elementów, i im one są większe w danym miejscu, tem rzędne krzywej całkowej szybciej wzrastają. Tam, gdzie idąc od O w kierunku X przyrost powierzchni kreskowanej jest większy, tam krzywa całkową bardziej stromo wznosi się w górę, i odwrotnie.

Wogóle krzywa całkową sumuje wszystkie elementy ydx , i nie tylko daje nam ogólny rezultat sumowania (co czynią mechanicznie planimetry), ale wykazuje nam cały przebieg sumowania od początku do końca (co uskutecznią mechanicznie integrator).

2. Niech krzywa STW (fig. 2) przedstawia nam krzywą całkową dla krzywej OMN , której równaniem:

$$y = f(x). \quad (a)$$

Jeśli rzędne krzywej całkowej STW oznaczać będziemy przez Y , to jej równaniem będzie:

$$Y = \int f(x) dx + C. \quad (b)$$

Oczywiście, ilością stałą na fig. 2 jest rzędna OS . Na fig. 1 stała odpada, bo tam zaczęliśmy kreślić krzywą całkową w punkcie początkowym O' , leżącym na osi odciętych.

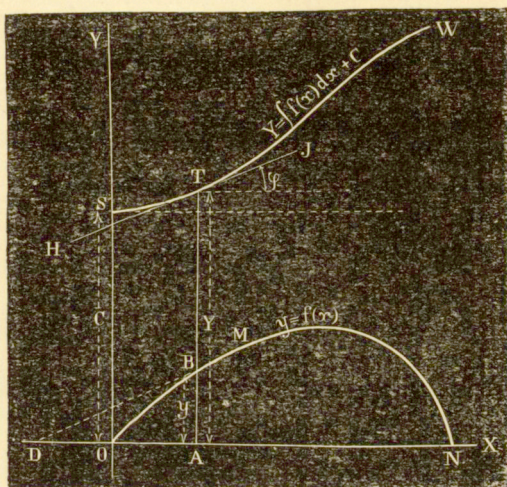


Fig. 2.

Żeby bliżej poznać stosunek obu krzywych, zróżniczkujemy równanie (b), reprezentujące krzywą całkową. Otrzymamy:

$$\frac{dY}{dx} = f(x),$$

a ponieważ z równania (a):

$$f(x) = y,$$

więc :

$$\frac{dY}{dx} = y. \quad (c)$$

Oprócz tego wiemy, że pochodna $\frac{dY}{dx}$ równą jest w każdym miejscu stycznej trygonometrycznej kąta nachylenia (φ) stycznej geometrycznej do danej krzywej w odpowiednim miejscu, czyli, że:

$$\frac{dY}{dx} = \operatorname{tg} \varphi, \quad (d)$$

a więc, zestawivszy (c) z (d) otrzymamy:

$$y = \operatorname{tg} \varphi \quad (\text{f})$$

Rzućmy teraz okiem na figurę (2), a przekonamy się, że równanie (f) powiada nam, iż rzędna y krzywej różniczkowej przedstawia wielkość stycznej trygonometrycznej kąta φ , pod którym styczna geometryczna HI do krzywej całkowej nachylona jest względem osi X .

Jeżeli więc chcemy znać nachylenie stycznej do całkowej w danym miejscu, to należy tylko zmierzyć rzędna y pewną jednostką użytą do wykreślenia, a otrzymana długość da nam wielkość stycznej trygonometrycznej kąta φ .

Z tego również wypada, że chcąc w jakimkolwiek punkcie krzywej całkowej, np. w punkcie T , wykreślić styczną, należy tylko od podstawy A rzędnej y odciąć na lewo jedność użytą do wykreślenia równą AD , a styczna HI musi być równoległa do linii BD , ponieważ z równania (f):

$$y = AB = \operatorname{tg} \varphi,$$

a ponieważ:

$$\operatorname{tg} BDA = \frac{BA}{DA} = \frac{y}{1} = y,$$

więc:

$$BDA = \varphi.$$

3. Wychodząc z tego, możemy dla każdej krzywej wykreślić przybliżenie jej całkową¹⁾. Dajmy na to, że daną nam jest krzywa ll' (fig. 3). Na płaszczyźnie rysunku prowadzimy szereg linii równoległych do osi Y , w odstępach równych jedności. Niech AB wyobraża nam naszą jedność. Następnie dzielimy jeszcze każdą z odciętych jedności na kilka równych części i przez punkty podziału wykreślamy dalszy szereg równoległych do osi Y . Oznaczmy cyframi 1, 2, 3, 4 oraz 1', 2', 3', 4' potrzebne dla dalszej konstrukcji punkty osi odciętych i krzywej różniczkowej. Następnie łączymy punkt 1 z punktem 1' i przez dowolny punkt P pio-

¹⁾ Patrz Żmurk o: „Wykład Matematyki“, 1864.—W ogóle pierwszą wzmiankę o wykreśleniu krzywej całkowej i o jej zastosowaniach znalazłem u tegoż autora. Później dopiero Szolin w Gradze i Nehls w Hamburgu obszerniej zajmowali się tym przedmiotem.

nowej, przechodzącej przez $1'$, prowadzimy równoległą do $1'1''$, aż do linii kreskowanej, przeprowadzonej w środku pierwszego pionowego paska, do punktu $1''$. Dalej łączymy punkt 2 z $2'$ i od końca poprzedniej linii $1''$ prowadzimy $1''2''$ równoległe do $2'2''$, przedłużając ją do punktu $2''$ środkowego punktu

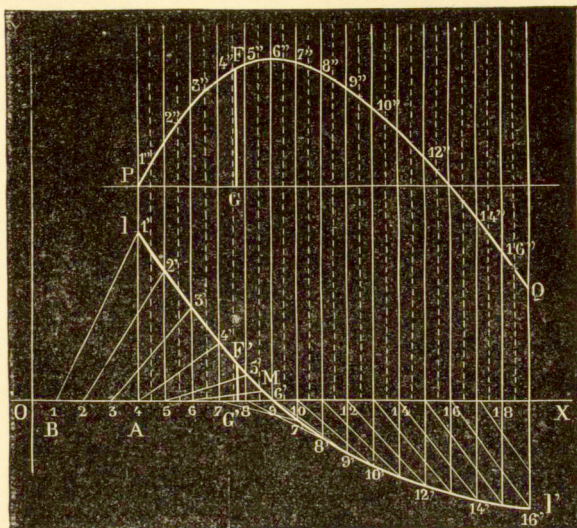


Fig. 3.

drugiego paska. Postępując w ten sposób dalej, jak na fig. 3 otrzymujemy szereg stycznych, otaczających przybliżoną krzywą całkową¹⁾.

Rzędne tej krzywej, mierzone jednością BA , dają nam powierzchnię krzywej, więcej ilość stała C , którą łatwo usunąć, przeprowadzając przez punkt P poziomą i mierząc rzędne tylko od tej poziomej. I tak, rzędna FG , mierzona jednością AB , daje nam powierzchnię, ograniczoną rzędnymi Al i $F'G'$. Gdy przejdziemy poza punkt M , powierzchnia między krzywą różniczkową a osią odciętych staje się ujemną,

¹⁾ Błędy, jak łatwo poznać, przypatrzawszy się bliżej wykreśleniu, pochodzą z tego, że krzywą ll' uważamy jako złożoną z szeregu odcinków prostych, a wtedy krzywa całkową złożoną jest z łuków parabolicznych, jak to niżej wykażemy. Linja łamana $1''2''3''\dots$ jest wielobokiem stycznym do takiej przybliżonej krzywej całkowej

więc rzędne krzywej całkowej, dające sumę algebraiczną powierzchni, poczynają się zmniejszać. W punkcie L suma powierzchni ujemnej i dodatniej równa jest 0, co wyraźnie widzimy na figurze. Idąc dalej na prawo, rzędne stają się ujemnemi.

Dokładność wykreślenia będzie oczywiście tem większa, im na większą ilość części podzielimy naszą jedność, aby powierzchnię rysunku podzielić na pionowe paski.

4. Dotychczas krzywa całkową mało miała zastosowań, z powodu, że wykreślenie jej przedstawiało znaczne trudności. Sposoby, podawane przez Żmurkę (1864), Szolina (1872) i Nehlsa (1877), jakkolwiek proste, jednak pozwalały wykreślać krzywą tylko w przybliżeniu i wymagały dość znacznego czasu. O nich pomówimy w swoim czasie. Ażeby te braki usunąć, pracowałem nad zbudowaniem przyrządu, któryby wykreślał mechanicznie krzywą całkową z możliwie największą dokładnością. Zadanie to udało mi się rozwiązać w sposób zadawalający i jakkolwiek przyrząd przezemnie zrobiony, który nazwałem *integratorem*, jest tylko pierwszą próbą, to jednak przy niezbyt dokładnej konstrukcyi otrzymałem zadawalające rezultaty.

W zastosowaniach Matematyki, w Mechanice, w Fizyce, tak często mamy do czynienia z sumowaniem ydx , że niemal wszędzie z takim zadaniem spotkać się musimy. To też, kto się tylko w ostatnich czasach zaczął nieco więcej zajmować krzywą całkową, temu otwierało się całkiem nowe pole do badań i zupełnie nowe drogi do rozwiązywania zagadnień. Przykładem tego Żmurko, który w teorii równań niejednokrotnie używał do nowych rozwiązań krzywej całkowej, i Nehls, który ją zastosowywał do licznych zagadnień mechanicznych. Na tem polu tak mało jeszcze zrobiono, że pozwalamy sobie zwrócić na to szczególniejszą uwagę naszych inżynierów i mechaników, poświęcających się obok praktyki studjom teoretycznym.

5. Żeby dać wyobrażenie o wielostronności zastosowań krzywej całkowej i integratora, przytoczę kilka ważniejszych przykładów, w ogólnym zarysie, a następnie bliżej nieco przedstawię zastosowania do Mechaniki budowniczej.

a) Krzywa całkowa daje nam sposób całkowania równań różniczkowych, danych w formie rozwiklanej. Przypuśćmy, że mamy przed sobą równanie:

$$\frac{d^n y}{d x^n} = f^n(x).$$

Równanie to możemy wykreślnie przedstawić w kształcie krzywej, której rzędnymi będą $\frac{d^n y}{d x^n}$. Jeśli narysujemy dla tej krzywej całkową, to jej rzędne będą równe $\frac{d^{n-1} y}{d x^{n-2}}$. Następnie dla tej pierwszej całkowej rysujemy drugą, której rzędne równe będą $\frac{d^{n-1} y}{d x^{n-2}}$.

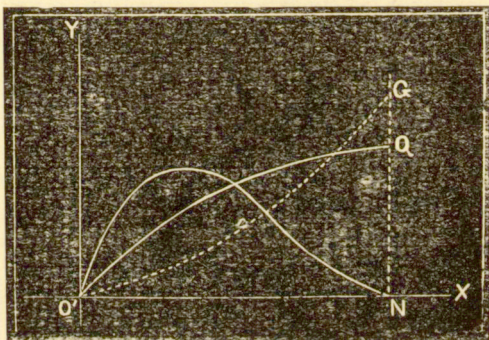


Fig. 4.

Powtarzając tę samą operacyę $n-1$ razy, otrzymamy wreszcie $n-1$ -szą całkową, której rzędnymi będą $\frac{dy}{dx}$.

Wreszcie, jeszcze raz wykreślając całkową, rozwiązujemy nasze zadanie, bo jej rzędnymi będą już y .

Fig. 4 przedstawia nam ten sposób wykreślny całkowania. Dajmy na to, że mamy całkować równanie:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = f''(x).$$

Niech krzywa $O'N$ reprezentuje nam to równanie. Każda więc jej rzędna jest równa $\frac{d^2 y}{d x^2}$.

Wykreślamy pierwszą całkową $O'Q$. Rzędne jej będą równe:

$$\int \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}.$$

Następnie wykreślamy drugą całkową $O'G$, uważając pierwszą całkową $O'Q$ za różniczkową. Rzędne krzywej $O'G$ będą równe $\int \frac{dy}{dx} = y$, a właśnie zadaniem naszym było znalezienie tego y .

Ponieważ krzywe zaczęliśmy wykreślać w początkowym punkcie O' , więc wszystkie stałe odpadają.

b) Krzywa całkowa daje nam sposób rozwiązywania równań numerycznych wyższego rzędu¹⁾. Dajmy na to, że mamy równanie:

$$Ax^m + Bx^{m-1} + \dots + Ix + K = y. \quad (a)$$

Żeby za pomocą krzywej całkowej rozwiązać to równanie, różniczkuję je $m - 1$ razy. Przy pierwszym różniczkowaniu otrzymuję:

$$mAx^{m-1} + (m-1)Bx^{m-2} + \dots + I = \frac{dy}{dx}.$$

Teraz równanie jest już tylko $m-1$ stopnia. Przytem znikła stała K , o której jednak pamiętać muszę do następnej operacyi.

Różniczkując dalej, zniżam ciągle stopień równania, znikają przytem stałe, które notuję, aż nareszcie otrzymuję równanie pierwszego stopnia:

$$m(m-1)(m-2) \dots Ax + \text{Const.} = \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}.$$

Oczywiście, jest to równanie linii prostej, którą mogę narysować. Uważam następnie tę prostą linię, jako różniczkową, i rysuję dla niej całkową, uwzględniając stałą, która znikła przy ostatniem różniczkowaniu równania. Następnie dla tej pierwszej całkowej rysuję drugą w tych samych wa-

¹⁾ Patrz: Pamiętnik Tow. N. Śc. w Paryżu, 1879. Żmurko; O równaniach.

runkach, i tak dalej, aż nareszcie po $m - 1$ całkowaniach otrzymujemy krzywą całkową, przedstawiającą równanie (a).

Skoro zaś równanie jest wykreślone, wtedy mamy już wszystko, co potrzebne jest do jego rozwiązania.

e) Integrator, kreślący krzywą całkową, możemy wychodząc z b), zastosować do wykreślania krzywych różnego rodzaju, których równanie dane jest w formie powyżej wyrażonej. Najprostszy przykład mamy na paraboli, która się otrzymuje, rysując krzywą całkową dla prostej linii.

d) Wykreślając krzywą całkową, znajdujemy powierzchnię krzywej różniczkowej. Integrator więc może zastąpić planimetr, a ma obok planimetrycznych własności, tę jeszcze

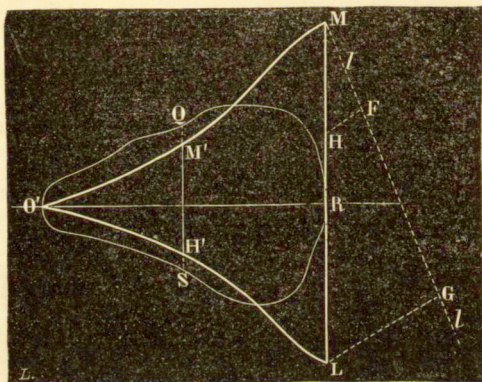


Fig. 5.

zaletę, że uwidocznią rysunkiem przyrost powierzchni, więc daje możliwość rozwiązywania wielu zagadnień trudnych do rozwiązania przy użyciu planimetru.

Dajmy na to, że mamy przed sobą powierzchnię, ograniczoną krzywą $O'QRS$ (fig. 5). Dzielimy ją prostą $O'R$ na dwie części i wykreślamy dla każdej z nich całkową. Dla $O'QR$ całkową jest $O'M$; dla $O'SR$ całkową jest $O'L$. Cała linja ML , mierzona jednostką użytą do wykreślenia, daje nam wielkość powierzchni $O'QRS$.

Przy pomocy krzywych $O'M$ i $O'L$ możemy rozwiązać następujące zagadnienie: Podzielić daną powierzchnię na dwie części, któreby się do siebie miały jak $m : n$. W tym celu przez punkt M prowadzimy dowolnie nachyloną prostą ll ,

odcinamy na niej, przy użyciu podziałki, dwie części MF i FG , mające się do siebie jak $m:n$, następnie punkt G łączymy z punktem L i przez punkt F prowadzimy FH równoległą do GL . Odcinek ML , reprezentujący nam powierzchnię $O'QRS$, jest wtedy podzielony na dwie części MH i HL , mające się do siebie, jak $m:n$. Następnie, znajdujemy między obu krzywymi całkowemi miejsce, gdzie MH może się zmieścić jako rzędna. Na figurze przenieśliśmy MH do $M'H'$ i ta ostatnia linia przedłużona dzieli powierzchnię w stosunku $m:n$,

$$O'QS : QSR = m : n,$$

co jest oczywistem.

Wychodząc z tej metody, można rozwiązywać wiele innych pokrewnych zagadnień.

e) Największe usługi integrator oddawać może, jako przyrząd do obliczania momentów pierwszego i wyższych rzędów. Szczególniej momenty bezwładności wszelkich powierzchni z wielką łatwością dają się wynajdywać. Znajdywanie środków ciężkości nieregularnych powierzchni, oraz podobnego rodzaju zadania rozwiązują się czysto mechaniczną drogą. O tych zastosowaniach mówić będziemy obszerniej, w dalszym ciągu niniejszej pracy.

f) Zasada cynematyczna, na której oparty jest integrator, może być z korzyścią zastosowana w różnych aparatach fizycznych i mechanicznych, jak meteorografach, mareografach, indykatorach, dynamografach i t. p. Wogóle, wszędzie tam, gdzie chodzi o sumowanie ydx i graficzne przedstawienie przebiegu tego sumowania. O tych zastosowaniach mówić będę w osobnej pracy. Zwracam uwagę interesujących się tą sprawą na to, że integrator mój jest właśnie owym przyrządem, o którym mówi Thomson na końcu ostatniego wydania jego Fizyki matematycznej (Thomson and Tait: Natural Philosophy), wyrażając potrzebę wynalezienia tego rodzaju aparatu.

B. INTEGRATOR.¹⁾

6. Przyrząd, obmyślany przezemnie do wykreślenia krzywej całkowej, nazwałem integratorem. Konstrukcyja jego opiera się na nowej cynematycznej zasadzie.

Trzeba było dwa ruchome punkty tak związać z sobą mechanicznie, że, gdy jeden z nich posuwać się będzie po danej krzywej różniczkowej, drugi opisywać ma odpowiednią krzywą całkową.

Przedstawmy sobie, że dwoma temi punktami są: B i T (fig. 2) pionowo nad sobą leżące. Gdy punkt B prowadzić będziemy po krzywej OMN , idąc w kierunku osi OX , to punkt T ma opisywać krzywą całkową STW , pozostając zawsze w jednym pionie z punktem B .

Przypuśćmy, że rzut punktu B : punkt A , posuwa się po osi $O\bar{X}$ z jednostajną szybkością. Zobaczymy z jaką szybkością punkt T odbywać będzie drogę w kierunku pionowym, z jaką szybkością będzie się wznosił lub spadał.

W każdej chwili, punkt T ma kierunek stycznej do krzywej całkowej, jeśli więc ta styczna nachylona jest do osi OX pod kątem φ , to szybkość poruszania się punktu T w kierunku pionowym mierzyć się będzie w każdej chwili styczną trygonometryczną kąta φ . A ponieważ równanie (f) ustępu 2-go opiewa :

$$y = \operatorname{tg} \varphi,$$

¹⁾ Patrz: Sprawozdania Krak. Akad. Um. 1880, B. Abakanowicza: Integrator. (Tom niniejszy str. 89—94).

więc szybkość punktu T w każdej chwili będzie proporcjonalna do rzędnej y w odpowiednim miejscu.

7. Przypuśćmy, że mamy kilka śrub o jednostajnej średnicy, lecz o różnym nachyleniu gwintów. Śruby te zaczynamy obracać z jednostajną szybkością, w stale umocowanych mutrach. Szybkość posuwania się każdej z tych śrub naprzód lub w tył będzie zależała od nachylenia gwintów. W której kącie nachylenia φ jest większym, tam posuwanie się to z większą szybkością odbywać się będzie i odwrotnie. Szybkość ta posuwania się śruby, mierzy się, jak wiadomo, styczną trygonometryczną kąta nachylenia gwintów.

Otóż, na tej zasadzie opiera się mój integrator, bo tam właśnie chodzi o znalezienie sposobu posuwania punktu T (fig. 2) w każdej chwili, z szybkością proporcjonalną do $\operatorname{tg} \varphi$. Gdybym mógł wynaleść śrubę o zmiennych gwintach, których nachylenie mógłbym dowolnie regulować, to zadanie zbudowania integratora byłoby rozwiązaniem.

Żeby to sobie uprzytomnić, wróćmy do fig. 2, i wyobraźmy sobie, że AT jest osią naszej śruby. Jeśli tę śrubę będę posuwał w kierunku od O do X , trzymając ją zawsze równoległe do OY , i jednocześnie obracał, to śruba posuwać się będzie w górę (albo na dół) w kierunku OY od B do T (lub odwrotnie). Jeśli w dodatku, w każdej chwili zmieniać będę mógł nachylenie jej gwintów, ustawiać je zawsze równoległe do zmiennego promienia BD , to każdy punkt osi śruby opisywać będzie całkową.

8. Zbudowanie śruby o gwintach, których nachylenie zmieniać można dowolnie, byłoby trudnem, chcąc zachować jej kształt zwykły. Trudność ta usunięta została w ten sposób, że zamiast śruby o zwykłych gwintach, używam śruby o gwintach nieskończenie niskich, czyli po prostu walca. Zamiast mutry używam dwóch krawędzi prostolinijnych, nachylonych do osi śruby pod kątem φ , który może być dowolnie zmieniany, i leżących w równoległych płaszczyznach.

Fig. 6 bliżej nam tę rzecz wyjaśni.

Walec CC , reprezentujący śrubę, umieszczony jest między dwiema linijkami o krawędziach prostolinijnych FF' i GG' . Boczna figura przedstawia rzut poziomy tego zesta-

wienia. Linijki ściskają między sobą walec z pewną siłą. Dają się jednak one z łatwością przesuwać w kierunku swej długości, i oprócz tego obracają się na osiach, leżących w jednej pionowej, przechodzącej przez punkty zetknięcia A i B walca z krawędziami. Obie linijki są z sobą tak połączone za pomocą równoległoboku (kreskowanego na figurze bocznej), że gdy jedną z nich obracam o kąt φ w kierunku dodatnim, to druga obraca się o tenże kąt φ w kierunku ujemnym. Obie krawędzie ustawiają się zawsze symetrycznie do osi walca CC .

Przypuśćmy, że zaczynamy obracać walec CC w kierunku strzałką wskazanym. Ponieważ, jak to już wyżej

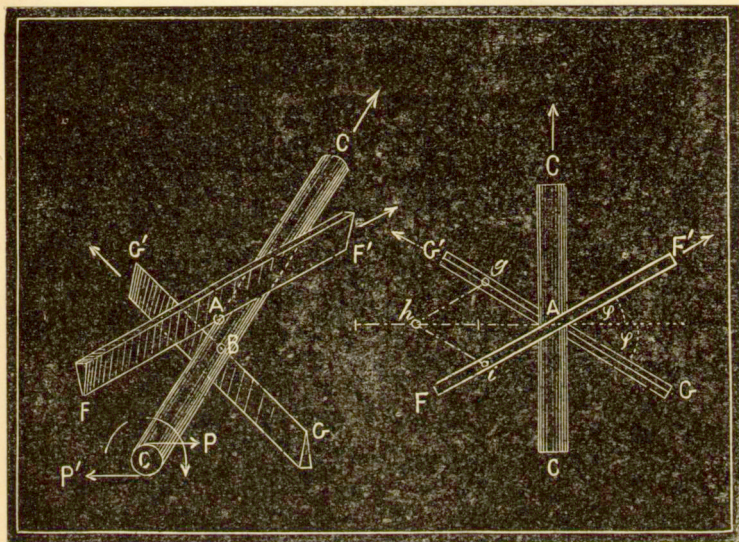


Fig. 6.

wspomnieliśmy, obie linijki mogą łatwo przesuwać się w kierunku swej długości, a ponieważ w punktach A i B tarcie między walcem a krawędziami jest dość znaczne, więc linijki posuną się w kierunkach strzałkami wskazanymi, a walec pójdzie naprzód w kierunku strzałką uwidocznioną. Obie krawędzie grać będą rolę mutry, a walec śruby. A ponieważ nachylenie linijek możemy zmieniać dowolnie, obracając je około osi AB , więc w takim zestawieniu mamy rozwiązanie zadania zbudowania śruby o zmiennych gwintach.

Szybkość posuwania się walca w kierunku osi będzie oczywiście proporcjonalna do $\operatorname{tg} \varphi$.

Parę sił $P P'$, użytą do obracania walca, przenieśmy do punktów A i B , do punktów zetknięcia walca z krawędziami, i zobaczymy, jaki tam nastąpi rozkład tych sił. Weźmy pod uwagę tylko jeden punkt A i jedną siłę P , bo to, co o nich się dowiemy, może być *mutatis mutandis* zastosowane do punktu B i do siły P' .

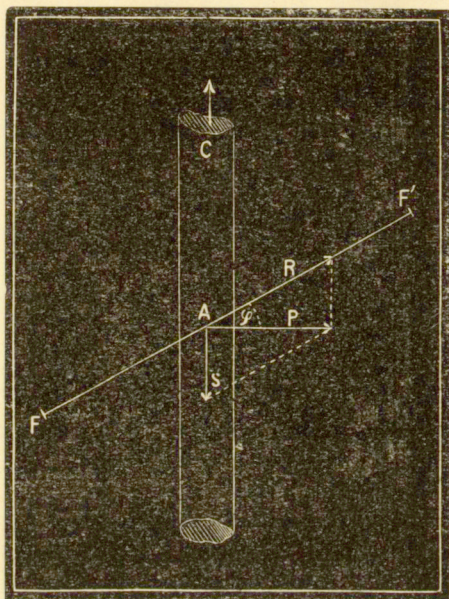


Fig. 7.

Fig. 7 przedstawia walec CC i górną krawędź FF' . W punkcie styczności A siła P rozkłada się według zasady równoległoboku sił na dwie składowe R i S , z których jedna R działa w kierunku krawędzi FF' , a druga S w kierunku osi walca. Ponieważ krawędź jest z pewną siłą przyciśniętą do walca i przytem łatwo ruchomą w kierunku swej długości, przeto, jeśli opór tarcia w punkcie A nie zostanie przewyższony, krawędź ta posunie się w kierunku strzałką wskazanym. Na to przesunięcie zużyta zostanie składowa R . Pozostała składowa S dąży do przesunięcia tejże krawędzi

w kierunku osi walca, lecz ponieważ jest to niemożliwym (gdyż krawędź ma stałą oś obrotu w punkcie A), więc przez oddziaływanie walec, mający ruch swobodny w kierunku długości, pójdzie w górę, w kierunku strzałką wskazanym.

W punkcie B rozkład sił następuje w taki sam sposób, i oba działania składowych S sumują się razem.

9. Fig. 8 daje nam szkicowy plan integratora. Rysunek ten robionym jest według przyrządu przezemnie skonstruowanego. Już po wykonaniu aparatu okazały się liczne niedogodności, które trzeba będzie usunąć, lecz mimo to zachowuję w rysunku formę pierwotną, nie chodzi mi bowiem o akcesoryjne części przyrządu, których odpowiedniejsze wykonanie innym pozostawiam, a tylko jedynie o części zasadnicze.

Cały przyrząd mieści się na tabliczce $\alpha\beta\gamma\delta\zeta$, posiadającej dwie prostolinijne i prostopadle krawędzie $\alpha\beta$ i $\alpha\zeta$. Tabliczkę ustawia się na płaszczyźnie rysunku, przystawiwszy ją do linealu HH' , który się nieruchomo na powierzchni rysunku przytwierdza; $\alpha\beta$ przedstawia kierunek rzędnych, HH' odciętych. Tabliczkę mogą z łatwością suwać wzdłuż linealu. Do tabliczki przymocowanem jest łożysko E , niosące na jednostronnej osi kółko rowkowane R' , którego wystające części wchodzi do odpowiednich rowków, wyżłobionych wzdłuż linealu HH' . Gdy tabliczkę posuwam od strony lewej ku prawej, to kółko R' , trąc się o lineal, obraca się od strony lewej do prawej, wprowadzając jednocześnie w obrót odwrotny kółko R , które jest z niem przez tarcie złączone. Oś tego ostatniego kółka DD umieszczoną jest w dwóch łożyskach N i N' . Oś tę otacza, jakby pochwa, rurka CC o dokładnie cylindrycznej powierzchni. (Ta rurka odpowiada walcowi z fig. 6). Aby rurka CC mogła z łatwością posuwać się wzdłuż osi DD , w różnych miejscach tej osi umieszczone są kółka frykcyjne pp (patrz powiększony przekrój a , b obok umieszczony). Oprócz tego, aby rurka obracała się jednocześnie z osią DD , kółka frykcyjne chodzą wzdłuż rowków prostolinijnych wewnątrz rurki, o które zaczepiają.

Takiem zestawieniem osiąga się to, że gdy sunę tabliczkę wzdłuż linealu, obraca się kółko R' , za niem kółko R , oś DD i rurka cylindryczna CC , która zachowuje jednocześnie

zupelną swobodę poruszania się w tył i naprzód, ślizgając się po kółkach frykcyjnych, na osi DD umieszczonych.

Rurka CC umieszczoną jest między dwiema prostoliniowymi krawędziami FF' i GG' (porównaj fig. 6), z których jedna FF' naciska na rurkę z góry, druga zaś GG' z dołu.

Linijki o krawędziach GG' i FF' umieszczone być mają tak, żeby: 1) mogły się łatwo przesuwać w kierunku swej długości; 2) żeby się obracać mogły około osi pionowej, przechodzącej przez punkt A . Aby te oba warunki były wypełnione, użyto dla każdej linijki pochewek MM , mających pionową oś obrotu, przechodzącą przez A . Obok na figurze, znajduje się przekrój takiej pochewki wzdłuż linii cd . Oś obrotu A górnej pochewki mieści się w łożysku T , dolnej zaś w tabliczce.

Linijki, przyciskające rurkę CC , umieszczone są wewnątrz pochewek na kółkach frykcyjnych, jak to widać z przekroju (c , d), i są znacznie dłuższe.

Takim zestawieniem osiąga się to, że każda z linijek FF' i GG' może przesuwać się z łatwością w kierunku swej długości, a obok tego obracać się około osi pionowej, przechodzącej przez A .

Opisane dotychczas części przyrządu stanowią zasadniczą część integratora. Zobaczmyż, co się dzieć będzie, gdy integrator, tak jak na figurze ustawiony, zaczniemy sunąć wzdłuż HH' . Rurka CC obracać się będzie, ściskana krawędziami FF' i GG' , które wysuwać się będą z pochewek MM w kierunkach od F do F' i od G do G' . Jednocześnie rurka CC pójdzie w górę, w kierunku osi DD , z szybkością $\text{tg } \varphi$, to jest stycznej kąta, pod którym krawędź GG' nachyloną jest względem osi X .

Żeby tak zestawiony przyrząd mógł kreślić krzywą całkową, potrzeba tylko od rurki CC przymocować przyrząd rysujący. W tym celu na obwodzie rurki znajduje się pierścień S , który zachwytuje saneczki P , jeżdżące po szynach rr i niosące na sobie rurkę szklaną O , zwężoną u dołu i kreślącą anilinową farbą krzywą podczas przsuwania integratora.

Dodać jeszcze należy, że obie pochewki MM połączone są z sobą równoległobokiem ll , który jest tylko kreskowanym na figurze, i że na dolnej pochewce MM umieszczonym

jest pierścień K , obejmujący ją i linijkę GG' , a posiadający u spodu ostrze Q .

Żeby dla danej krzywej różniczkowej ff narysować całkową, ustawiam HH' równoległe do osi X , a ostrze Q na początku krzywej różniczkowej. Następnie sunę tabliczkę lewą ręką wzdłuż HH' , a jednocześnie ostrze Q prowadzące po krzywej różniczkowej, bacząc żeby ono zawsze przylegało do zaostrożonej krawędzi $\alpha\beta$ tabliczki. Wtedy rysik O kreśli odpowiednią krzywą całkową. Uprzytomnimy to sobie najłatwiej, jeśli figurę 8 porównamy z fig. 2; AL w integratorze odpowiada jedności AD z fig. 2, LQ odpowiada rzędnej AB , rysik O punktowi T .

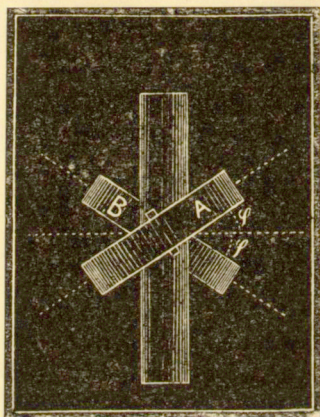


Fig. 9.

Przyrząd, naszkicowany na figurze, ma wiele braków, które w przyszłości usunąć będzie należało. I tak naprzykład sam przyrząd rysunkowy jest niedogodnym i skomplikowanym. Następnie przenoszenie ruchu obrotowego z kółka R' na kółko R jest zbyt powolne, więc wskutek tego krzywa całkowa wypada zbyt płaską. Ostrze Q , które się prowadzi po krzywej różniczkowej, niewygodnym jest do manipulowania. Wiele tego rodzaju braków integratorowi w takim stanie zarzucić można. To też nie uważam go wcale za aparat wykończony, a tylko jedynie jako jedną z prób pierwszych. Przy budowaniu chodziło mi nie o dokładność i zręczne formy, lecz jedynie o praktyczne wypróbowanie

możliwości, o przekonanie się, czy przyrząd chodzić będzie. Ten cel został całkowicie osiągnięty. Wykończenie odpowiedniejsze pozostawiam mechanikom z zawodu.

Muszę nadmienić, że pierwszy przyrząd przezemnie we Lwowie zbudowany, zamiast krawędzi prostolinijnych, miał dwa kółka A i B (fig. 9), połączone w ten sam sposób, jak krawędzie na fig. 8. Sądzę, że najodpowiedniejszym będzie użyć na dole linijek, a na górze kółek.

10. Warunki, którym integrator zadość uczynić musi, aby funkcyonował, są następujące:

- 1) Linijka FF' ma mieć tak swobodny ruch w kierunku swej długości, aby opór tarcia krawędzi o walce był w punkcie A większym, aniżeli opór stawiany przez linijkę swemu przesunięciu. Linijka jest umieszczoną w pochewce na kółkach frykcyjnych, chodzi więc z wielką łatwością. Wtedy składowa R z fig. 7 ma tylko tarcie potoczyste w tych kółkach do przewyciężenia, którego opór zawsze można zrobić mniejszym, niż opór tarcia posuwistego w punkcie A , gdzie krawędź jest przyciśnięta do walca. Zastosowawszy nacisk odpowiedni, można zawsze osiągnąć taką przewagę. Wtedy nie może nastąpić ześlizgnięcie w punkcie A . To samo się stosuje do krawędzi GG' .
- 2) Walec CC winien mieć ruch tak swobodny w kierunku swej osi, żeby opór tarcia w punkcie A był większym, niż opór, jaki walec przesunięciu swemu podłużnemu stawia. I w tym wypadku walec, umieszczony na frykcyjnych kółkach, snadniej się poruszy w kierunku swej osi, niż się ześliznie po krawędzi, przewyciężając tarcie posuwiste w punkcie A .

Ponieważ więc warunki, przytoczone pod 1) i 2), zawsze mogą być dotrzymane, więc tem samem mamy dowód możliwości zbudowania zasadniczych części przyrządu.

C. ZASTOSOWANIA.

I. MOMENTY.

11. Dajmy na to, że chodzi nam o oznaczenie momentów powierzchni kropkowanej $ABCM$ względem osi KK' (fig. 10). Wybierzmy sobie jeden dowolny element danej powierzchni, ydx (kreskowany na figurze), i nazwijmy x jego odległość od osi KK' . W takim razie moment statyczny, czyli pierwszego rzędu, tego elementu ydx względem osi KK' , równać się będzie:

$$ydx \cdot x.$$

Moment zaś całej kropkowanej powierzchni równać się będzie sumie wszystkich elementów ydx , pomnożonych przez odpowiednie x , czyli wyrażając to matematycznie:

$$M_{(1)} = \int_{x=AB}^{x=0} x \cdot ydx$$

Jeżeli więc danem jest równanie krzywej AmC w formie $y = f(x)$, to, wykonywając całkowanie, znajdujemy wielkość momentu statycznego. Jest to zwykle używana droga.

Chcąc to zadanie rozwiązać za pomocą krzywej całkowej, uważam krzywą AmC jako krzywą różniczkową, i rysuję dla niej pierwszą całkową, oznaczoną na figurze cyframi $I I'$. Oznaczmy przez y_1 rzędne tej krzywej. Z poprzedniego wiadomo, że rzędna $I' D$, mierzona jednostką, użytą do

wykreślenia krzywej całkowej na fig. 10-ej, daje nam powierzchnię kropkowaną. Każdy element tej rzędnej, np. dy_1 przedstawia odpowiedni element ydx danej powierzchni, której momentu szukamy:

$$dy_1 : 1 = ydx.$$

Żeby otrzymać element momentu stycznego, trzeba element powierzchni dy_1 pomnożyć przez jego odległość od osi KK' , przez x . Jeśli to mnożenie wykonamy, to otrzymamy

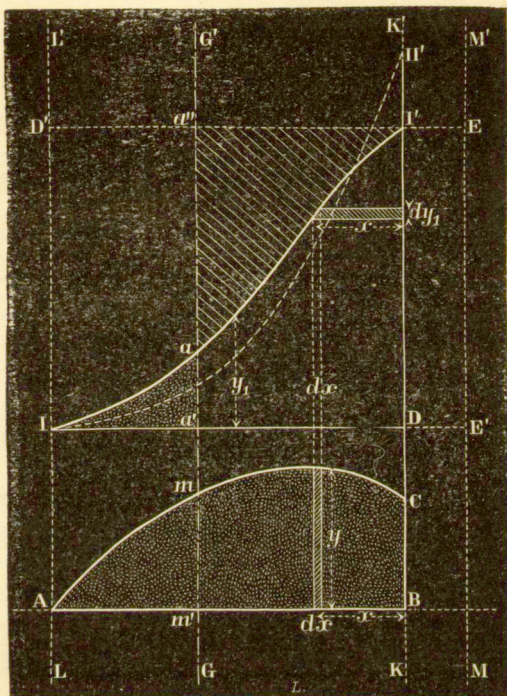


Fig. 10.

na figurze poziomy kreskowany pasek $dy_1 \cdot x$. Jeśli wszystkie takie elementy poziome momentu statycznego dodamy, to otrzymamy powierzchnię $I'I'D$, która nam daje cały moment statyczny kropkowanej powierzchni względem osi KK' .

Narysowaniem więc pierwszej całkowej otrzymujemy powierzchnię daną w postaci odcinka $I'I'D$, a jej moment pierwszego rzędu w postaci powierzchni $I'I'D$. Chcąc i moment statyczny mieć w postaci odcinka, trzeba narysować

drugą całkową $I II'$, a wtedy rzędna $D II'$ reprezentuje moment szukany.

Rozumując w ten sam sposób, przekonamy się, że powierzchnia $II' D'$ przedstawia nam moment statyczny danej powierzchni względem osi LL' .

Moment względem osi MM' równać się będzie powierzchni $II' EE' I$.

Jeśli oś momentów przechodzi przez daną powierzchnię, jak na przykład GG' , to wtedy moment statyczny równa się algebraicznej sumie dwóch powierzchni $I a a'$ i $I' a a''$, z których jedna uważana być musi jako dodatnia, druga zaś jako ujemna.

Rzędna $a' a'' = D I'$ przedstawia całą daną powierzchnię $AmCBA$. Rzędna $a a' = \text{pow. } Amm'$, a więc $aa'' = a'a'' - a'a = mm'BC$. Powiadamy „równa się“ w tem znaczeniu, że trzeba ją pomnożyć przez jedność, użytą do wykreślenia, aby otrzymać równy prostokąt co do powierzchni.

Jeżeli więc pionową GG' będziemy przesuwali do osi λ , to każda rzędna aa' będzie nam przedstawiała część danej powierzchni po lewej stronie GG' , a każda aa'' po prawej. W miejscu więc, gdzie $aa' = aa''$, powierzchnia $AmCB$ jest przepołowioną.

Ponieważ powierzchnia kropkowana $I a a'$ przedstawia moment statyczny pow. Amm' względem osi GG' , a powierzchnia kreskowana $I' a a''$ moment pow. $mm'BC$ względem tejże osi, i jedna z nich jest ujemną a druga dodatnią, więc, przesuwając pionową GG' , możemy znaleźć takie jej położenie, że $I a a''$ równą będzie $I a a'$. Suma obu powierzchni równą będzie zeru, a więc i moment statyczny danej powierzchni względem takiej osi GG' równym będzie zeru; wtedy GG' przechodzi oczywiście przez środek ciężkości powierzchni $ABCmA$.

W jaki sposób znajduje się takie położenie GG' , dowiemy się później.

12. Momenty bezwładności. Jeśli weźmiemy pod uwagę jeden element danej powierzchni $= ydx$, to jego moment statyczny względem osi KK' równym będzie:

$$ydx \cdot x.$$

Chcąc otrzymać z elementu momentu statycznego element momentu bezwładności, czyli momentu drugiego rzędu,

należy go pomnożyć jeszcze przez jedno x , a więc takim elementem momentu bezwładności będzie:

$$ydx \cdot x \cdot x = ydx \cdot x^2.$$

A moment bezwładności całej powierzchni względem osi KK' równać się będzie:

$$\int_{x=BA}^{x=0} ydx \cdot x^2$$

Jeśli jest danem równanie krzywej AmC w formie $y = f(x)$, to podstawiając je pod znak całkowania i całkując, rozwiązujemy zadanie znalezienia momentu bezwładności drogą analityczną.

Przy pomocy krzywej całkowej postępujemy analogicznie. Dla danej krzywej (fig. 11) rysujemy naprzód pierwszą całkową II' , której powierzchnia $II'B$ przedstawia moment statyczny względem osi KK' . Następnie uważamy krzywą II' jako różniczkową, i rysujemy drugą całkową II'' . Oznaczmy jej rzędne przez y_2 , podobnie jak rzędne pierwszej całkowej oznaczaliśmy przez y_1 . Rzędna $II'Q$ reprezentuje powierzchnię $II'B$ pierwszej całkowej, a każdy jej element dy_2 (patrz fig) jeden element tej powierzchni, czyli jeden element momentu statycznego. Żeby z $dy_2 = ydx \cdot x$ zrobić element momentu bezwładności, trzeba go pomnożyć jeszcze raz przez x . Chodzi więc o znalezienie x , odpowiadającego elementowi dy_2 . Żeby je znaleźć, z końców elementu dy_2 prowadzimy styczne do drugiej całkowej, mające punkta zetknięcia w t i t' . Odpowiedni element danej powierzchni ydx znajduje się, prowadząc pionowe. Element ten jest wzięty w większych rozmiarach w celu, aby rysunek był wyraźniejszym. Niech styczne w punktach t i t' , nieskończenie blisko od siebie leżących, przecinają się w punkcie r . Odległość punktu r od $KK' = x$. Powierzchnia trójkąta kreskowanego, mającego jako podstawę dy_2 , a którego wierzchołek leży w r , równa się $\frac{1}{2}dy_2 \cdot x$, a ponieważ element momentu bezwładności $= dy_2x$, więc powierzchnia kreskowanego trójkąta daje nam pół elementu momentu bezwładności.

Przechodząc od dy_2 do sumy wszystkich dy_2 , do $II'Q$, przekonywamy się, że cała powierzchnia drugiej całkowej

$\Pi \Pi' Q$ daje nam połowę momentu bezwładności danej powierzchni $ImCB$ względem osi KK' .

Rozumując w podobny sposób i biorąc pod uwagę, zamiast $I I' B$, powierzchnię $I I' D$, przyjdziemy do przekonania: 1) że $\Pi Q'$ przedstawia moment statyczny danej powierzchni względem osi LL' i 2) że powierzchnia $\Pi Q' \Pi'$ daje połowę momentu bezwładności tejże powierzchni względem osi LL' .

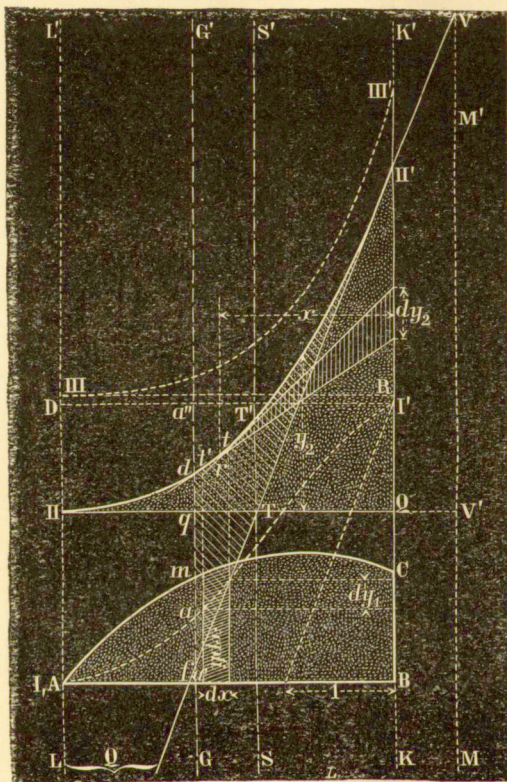


Fig. 11.

Jeśli weźmiemy pod uwagę dowolną oś GG' , przecinającą daną powierzchnię, to moment bezwładności względem GG' równać się będzie dwa razy wziętej powierzchni $\Pi d q$, więcj dwa razy wzięta pow. $d f \Pi'$.

Chcąc otrzymać moment bezwładności względem osi KK' , w kształcie odcinka prostej, należy wykreślić jeszcze

jedną całkową, trzecią z rzędu, $III III'$, a rzędna $III' R$ da nam moment szukany.

Moment bezwładności względem osi leżącej zewnątrz danej powierzchni, np. względem osi MM' , równać się będzie dwa razy wziętej powierzchni $II II' V V' II$.

Rzędna dq przedstawia wielkość powierzchni Aaa' , rzędna df wielkość powierzchni Iaa'' . Gdy te obie rzędne są sobie równe, jak to ma miejsce w położeniu TT' , wtedy TT' przechodzi przez środek ciężkości danej powierzchni (porównaj koniec ustępu 11-go).

13. Momenty dowolnie ograniczonych powierzchni. To, cośmy wyżej powiedzieli o momentach powierzchni, ograniczonych tylko z jednej strony krzywą $[y = f(x)]$, zastosowuje się w zupełności do powierzchni dowolnie ograniczonych. Dajmy na to, że mamy znaleźć momenty pierwszego i drugiego rzędu powierzchni $1 2 3 4$ (fig. 12).

Obierzmy dowolną oś poziomą OX . Daną powierzchnią $1 2 3 4$ możemy uważać jako złożoną z dwóch innych: dodatniej $O 3 4 1 B$ i ujemnej $1 2 3 0 B$.

Żeby znaleźć moment statyczny względem osi pionowej, przez B przechodzącej, wykreślamy całkową $3' 4' 5'$ dla powierzchni dodatniej i całkową $3' 2' 1'$ dla powierzchni ujemnej. Moment statyczny danej powierzchni równać się będzie momentowi statycznemu powierzchni $O 3 4 1 B$ mniej moment statyczny powierzchni $B 1 2 3 0$, czyli według poprzedzających paragrafów, powierzchni $3' 4' 5' B'$ mniej pow. $1' 2' 3' B'$. Jeśli przeprowadzimy to odejmowanie, to otrzymamy w rezultacie powierzchnię $1' 3' 3' 4' 5'$, która jest szukany momentem statycznym.

Jeśli chodzi o moment względem osi, przechodzącej przez O , to oczywiście moment ten danym będzie przez powierzchnię $3' 4' 5' 6' 7'$ równą pow. $C 3' 4' 5'$ mniej pow. $C 7' 6' 5'$.

Moment statyczny względem dowolnej osi pionowej GG' , przecinającej daną pow., równa się powierzchni $2' 3' 4' 5' 6' 4'$, złożonej z dwóch części, z których jedna jest ujemną, a druga dodatnią.

Moment względem osi MM' , zewnątrz danej figury leżącej, równa się powierzchni $1' 2' 3' 4' 5' (5') (1') 1'$.

Chcąc otrzymać moment statyczny względem osi BB' ,

Dla osi MM' moment równa się V ($5''$).

Moment bezwładności względem osi BB' równa się dwa razy wziętej różnicy między powierzchnią $3'' 5'' Q$ a $3'' 1'' Q$, czyli równa się pow. $1'' 2'' 3'' 4'' 5''$.

Moment bezwładności względem osi OO' równa się: 2 (pow. $Q 5'' 3''$ mniej $Q 5'' 7''$) tj. równa się 2 pow. $3'' 4'' 5'' 6'' 7''$.

Dla osi GG' mom. bezwł. równa się oczywiście dwa razy wziętym powierzchniom $2'' 3'' 4''$ i $4'' 5'' 6''$, czyli równa się 2 pow. $2'' 3'' 4'' 5'' 6'' 2''$.

Dla osi MM' mom. bezwł. równa się pow. $3'' 5'' (5'') V 3''$.

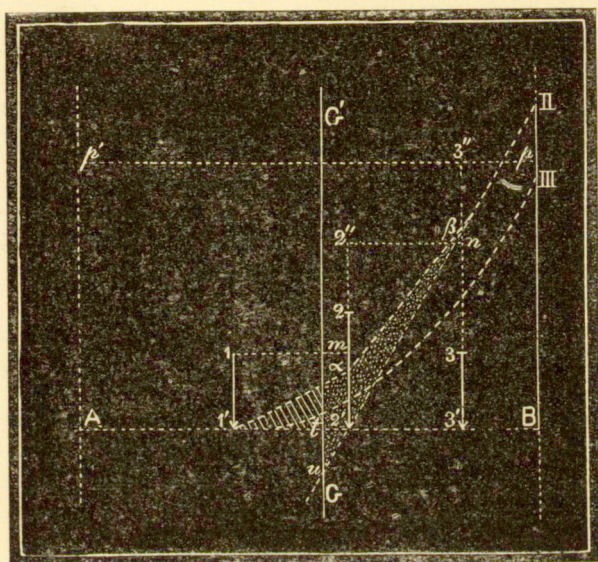


Fig. 13.

Chcąc otrzymać moment bezwładności w postaci odcinka prostej, należy wykresić jeszcze dalsze całkowe, w takim jak poprzednio porządku. Całkowymi temi będą w tym razie $1''' 2''' 3''' 4''' 5''' 6''' 7'''$.

Tutaj nadmienić musimy, że do tego ostatniego całkowania obraliśmy punkt $3''$, więc tak, że krzywa $5'' 6'' 7''$ przecina oś poziomą w punkcie u ; wynika stąd, że powierzchnia między tą krzywą a poziomą osią składa się z dwóch części: jednej ujemnej $V 3'' 7''$, a drugiej dodatniej $V 5'' Q$, i dla tego

też odpowiednia całkowa $5''' 6''' 7'''$ w punkcie u' , pionowo nad u leżącym, przechodzi swoje minimum.

Nie potrzebujemy dowodzić, że dwa razy wzięty odcinek $1''' 5'''$ daje nam mom. bezwł. względem osi BB' ; że tenże moment względem osi GG' równa się podwójnie wziętemu odcinkowi $2''' 6'''$ i t. p.

Gdy się ma praktyczne zadanie do przeprowadzenia, to nie koniecznym jest kreślenie wszystkich linii na fig. 12 znajdujących się. Dajmy na to, że chodzi nam o znalezienie momentów względem osi GG' . Wtedy potrzebne są tylko te części krzywych całkowych, które są wyciągnięte pełnymi liniami

Pierwszą całkową zaczynamy kreślić w punkcie $2'$, przechodzimy przez $3' 4' 5'$ i dochodzimy do punktu $6'$.

Drugą całkową zaczynamy kreślić w $2''$ i idąc przez $3', 4'' 5''$ dochodzimy do $6''$.

Z trzecią całkową rzecz się ma tak samo. Strzałki wskazują, w jakim kierunku odbywa się działanie.

Gdy te wszystkie krzywe już są narysowane, wtedy:

$2' 6'$ równa się powierzchni 1 2 3 4.

$2'' 6''$ równa się mom. stat. względem GG' .

2. $2''' 6'''$ równa się mom. bezwł. względem GG' .

Oczywiście jest tylko, że aby otrzymać powierzchnię, trzeba $2' 6'$ pomnożyć przez jednostkę długości; aby otrzymać moment statyczny, trzeba $2'' 6''$ pomnożyć przez jednostkę kwadratową; a żeby otrzymać moment bezwładności, trzeba $2''' 6'''$ pomnożyć przez jednostkę sześcienną. Odpowiada to najzupełniej stosunkom istniejącym, gdyż płaszczyzna jest dwuwymiarową, moment statyczny trzy-, a moment bezwładności czterowymiarowym.

14. Dotąd mieliśmy do czynienia z oznaczaniem momentów powierzchni, złożonej z elementów $yd x$. Jeśli funkcja x nie jest ciągłą, lecz zamiast powierzchni mamy pojedyncze odcinki 1 1', 2 2', 3 3' (fig. 13), to wtedy całość postępowania nie zmienia się wcale. Zamiast nieskończenie małych przyrostków dy , mamy teraz przyrosty skończone Δy . Pierwsza całkowa przedstawi się nam w postaci łamanej linii $A 1' 1 m 2'' n 3'' p$. Ostatnia rzędna Bp równać się będzie sumie wszystkich danych odcinków. $2 2''$ równać się będzie 1 1', 3 3''

$= 2' 2''$. Moment statyczny względem osi pionowej przez B , przechodzącej równa się powierzchni $1' 1 m 2'' n 3'' p B 1'$. Tenże moment względem osi, przez A przechodzącej, równa się pow. $A 1' 1 m 2'' n 3'' p' A$.

Chcąc otrzymać moment statyczny w postaci odcinka, należy wykreślić drugą całkową $A 1' \alpha \beta II$, która jest linią łamaną, złożoną z odcinków prostych; $II B$ reprezentuje wielkość momentu statycznego, a powierzchnia $A 1' \alpha \beta II B 1'$ pół momentu bezwładności.

Jeśli wykreślimy jeszcze jedną całkową $A 1' III$, to $B III$ da nam wielkość połowy momentu bezwładności w postaci odcinka. Ta trzecia całkową będzie złożoną z odcinków paraboli.

Jeśli weźmiemy pod uwagę dowolną pionową oś GG' , to moment bezwładności względem tej osi równa się 2 pow. $\beta u t 1' \alpha \beta$.

Wogóle, wszystko, cośmy wyprowadzili w poprzedzających ustępach, da się tu zastosować z pewnemi zmianami, wynikającemi stąd, że zamiast różniczek mamy do czynienia z różnicami.

II. B E L K A.

15. Jeśli mamy przed sobą belkę AB (fig. 14), opartą w dwóch punktach A i B , obciążoną ciężarem ciągłym, którego zmianę na przestrzeni od A do B przedstawia nam krzywa linia mm , to dla obliczenia przekrojów tej belki, potrzebną jest znajomość oddziaływań, sił poprzecznych, czyli sił, zewnątrz przekroju działających, i momentów statycznych tych sił.

Weźmy pod uwagę dowolny przekrój KK' .

Siłą poprzeczną tego przekroju nazywać będziemy wypadkową wszystkich sił, po jednej stronie tego przekroju leżących; a więc dla przekroju KK' tą siłą poprzeczną jest: oddziaływanie A mniej cały ciężar, leżący między A a danym przekrojem. Albo też (co na jedno wychodzi): oddziaływanie B mniej cały ciężar między B a przekrojem KK' . Różnica jest tylko w znakach.

Postępując według zwykłych reguł Statyki wykreślnej, znajdujemy te siły poprzeczne i ich momenty w sposób następujący:

Na dowolnej pionowej (np. AC) odcinamy od A do C cały ciężar leżący na belce, a przedstawiony powierzchnią obciążeń $Am m B A$. Potem obieramy dowolny biegun O , i przy jego pomocy kreślimy (w znany sposób, używając wieloboku stycznych) krzywą sznurową QRS . Następnie przez

przez punkt O prowadzimy promień OZ równoległy do tak zwanej zamykającej QS . Otóż, punkt Z dzieli obciążenie całe AC na dwie części, z których jedna AZ jest oddziaływaniem w punkcie oporu A , druga zaś ZC jest oddziaływaniem w punkcie B .

Powierzchnia $QRSQ$ nazywa się powierzchnią momentów, gdyż, jak wiadomo, każda jej rzędna (np. MM'), po-

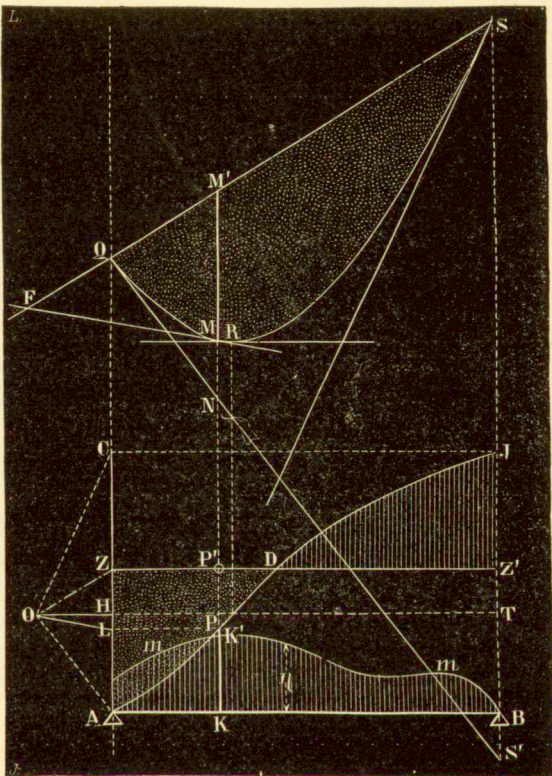


Fig. 14.

mnożona przez tak zwaną odległość biegunową OH , daje nam wielkość momentu siły zewnątrz przekroju działającej.

Sily poprzeczne znajdują się, prowadząc z punktu O równoległe do zamykającej PS i do stycznej do krzywej sznurowej, przeprowadzonej w punkcie leżącym w jednej pionowej z danym przekrojem.

Dla przekroju KK' wielkość siły poprzecznej znajdujemy, prowadząc OZ równoległe do QS , i OL równoległe do MF ; LZ jest szukaną siłą. Jej położenie znajdujemy, przedłużając QS i MF do przecięcia w punkcie F . Przez ten punkt ostatni przechodzi siła zewnątrz przekroju KK' działająca.

Żeby otrzymać krzywą sił poprzecznych, prowadzimy poziomą ZZ' , i w różnych jej punktach wystawione rzędne równe siłom zewnątrz przekroju działającym. Połączywszy wierzchołki rzędnych, otrzymamy szukaną krzywą ADI . Dla przekroju KK' siłę poprzeczną reprezentuje $PP' = ZL$

Takim jest w ogólnym zarysie przebieg działań grafostatycznych.

Jeśli się przypatrzymy bliżej, ze stanowiska wykreślnego całkowania, krzywymi ADI oraz QRS , to przekonamy się, że nie są one niczem innym, jak tylko krzywymi całkowymi względem krzywej obciążeń $m m m$.

I tak: krzywa ADI jest pierwszą całkową, każda bowiem jej rzędna (np. $P'P$) daje wielkość powierzchni obciążeń $AmK'K$, po lewej stronie od pionowej KK' leżącej. Siła poprzeczna bowiem $PP' =$ oddziaływaniu $AZ = P'K$ mniej ciężar $AmK'K$, czyli mniej PK ; BI przedstawia całą powierzchnię $AmmB$.

Idąc dalej, przekonamy się, że krzywa sznurowa QRS jest drugą całkową. Przypatrzymy się bowiem jej powstawaniu. Każdy jej element (np. w M) jest równoległy do odpowiedniego promienia (OL) przez biegun O przechodzącego. Każdy punkt krańcowy (L) tego promienia odpowiada punktowi P na pierwszej całkowej. A więc, jeżeli odległość biegunową uważać będziemy za jedność, a poziomą OHT za oś odciętych, to otrzymamy stosunki jak na fig. 3-ej.

Część całkowej QR zniża się na dół, albowiem odpowiada ujemnej powierzchni AEH . W punkcie R krzywa QRS przechodzi przez minimum, bo pochodna w punkcie E równa się 0. Więc styczna w punkcie R jest poziomą. Od punktu R krzywa podnosi się w górę, albowiem odpowiada dodatniej powierzchni ETI .

Dowiedzmy teraz, że rzędna MM' daje nam wielkość momentu dla przekroju KK' . Według poprzedzających paragrafów, odcinek SS' daje nam wielkość powierzchni $AEIB$, czyli wielkość momentu statycznego całego obciążenia $AmmB$ względem osi $S'S$. Tej samej wielkości winien być, jak wiadomo, moment oddziaływania A względem osi, przez B przechodzącej. Proste więc QS i QS' ograniczają powierzchnię QSS' , która jest powierzchnią momentów dla oddziaływania A . Każda jej rzędna (np. $M'N$) daje nam wielkość momentu oddziaływania względem każdego punktu na rzędnej lub jej przedłużeniu leżącego.

Moment względem przekroju KK' równa się momentowi oddziaływania A , mniej moment obciążenia $AmK'K$, czyli równa się $M'N - MN$, a więc równa się MM' , czego nam dowieść należało.

W podobny sposób można przeprowadzić ścisłą analogię między wykreślnem całkowaniem a obliczeniem grafostatycznym.

Jeżeli mamy do czynienia z pojedynczemi ciężarami, to rzecz się nie zmienia w ogólnym zarysie, i bliższe przypatrzenie się figurze 13-ej daje nam bliższe wyjaśnienie. Trzeba tam tylko AB uważać jako belkę, obciążoną pojedynczemi ciężarami $1 1'$, $2 2'$ i $3 3'$. Wielobok $A 1' \alpha \beta II$ jest wielobokiem sznurowym.

16. Równanie krzywej sznurowej. Jeśli rzędne krzywej QRS (figura 14) oznaczmy przez y , to rzędne krzywej AEI są pierwszemi pochodnemi y , czyli $\frac{dy}{dx}$, a rzędne krzywej obciążeń są drugimi pochodnemi, czyli $\frac{d^2y}{dx^2}$. Jeśli przez η oznaczmy rzędne krzywej obciążeń, to:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \eta = \frac{\eta}{1} = \frac{\eta}{OH}.$$

Równanie to jest, jak wiadomo, równaniem różniczkowem krzywej sznurowej. Jednostka OH , użyta do wykreślenia całkowej, jest w znaczeniu grafostatycznym, tak zwa-

nem parciem poziomem, czyli stałą poziomą składową wszystkich sił, reprezentowanych przez promienie wieloboku sił: OC , OZ , OA i t. d. Jeśli to parcie poziome oznaczymy przez H , to równanie krzywej sznurowej przyjmie formę:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\eta}{H},$$

która jest zwykle używaną *).

*) Por. B. A b a k a n o w i c z: Zarys Statyki wykreślnej § 30.

III. LINIA SPRĘŻYSTA.

17. Ścisłym równaniem linii sprężystej jest następujące :

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{M_s}{EM_b}$$

W tem równaniu M_s oznacza moment statyczny, M_b moment bezwładności, a E współczynnik sprężystości.

W zwykłych wypadkach belka się mało wygina, oś jej niewiele się odchyła od prostej, więc stosunek $\frac{dy}{dx}$ jest bardzo mały, tak, że mianownik lewej strony równania możemy uważać, bez popelnienia znacznego błędu, jako równy 1. Wtedy równanie upraszcza się i otrzymujemy :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_s}{EM_b} \quad (\alpha)$$

Jeśli to różniczkowe równanie linii sprężystej zestawimy z równaniem krzywej sznurowej (patrz ustęp 16), które opiewa :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\eta}{H} \quad (\beta)$$

to zobaczymy znaczne między niemi podobieństwo co do formy. I tak, widzimy odrazu, że linią sprężystą możemy uważać za krzywą sznurową, jeśli tylko w równaniu (β), zamiast

rzędnej powierzchni obciążeń η , weźmiemy rzędną równą M_s , a zamiast jednostki użytej do wykreślenia H , iloczyn EM_b .

Ponieważ w każdym miejscu belki M_s jest proporcjonalny do rzędnej powierzchni momentów, więc otrzymamy wprost linię sprężystą, jeśli wykreślimy krzywą sznurową, przypuszczając, że powierzchnia momentów jest powierzchnią obciążeń, i, oprócz tego, używając jako jednostki do wykreślenia iloczynu EM_b . Jednak iloczyn ten ostatni jest zbyt dużym, żeby go można było praktycznie użyć, więc się używa mniejszej jednostki. Skutkiem tego wszystkie rzędne linie sprężystej są wydłużone w stosunku EM_b do nowoobranej jednostki H' .

Na tem nietylko, że nie nie tracimy, ale owszem, zyskujemy, bo w zwykłej postaci i w zwykłych wypadkach linia sprężysta na rysunku małoby się różniła od prostej.

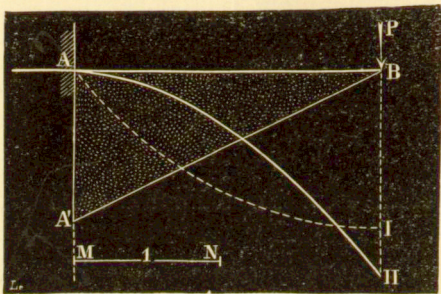


Fig. 15.

Prof. Mohr (1868) był pierwszym, który wykazał bliższy związek między równaniami (α) i (β). Takie uważanie powierzchni momentów, jako powierzchni obciążeń, a krzywej sprężystej, jako odpowiedniej krzywej sznurowej, wydało w zastosowaniach Statyki wykreślnej bardzo obfite rezultaty, szczególnie przy obliczaniu belki wieloprześłowej.

18. Linia sprężysta belki, wmurowanej u jednego końca, a drugim swobodnie się zwieszającej. — Niech AB (fig. 15) przedstawia nam taką belkę, obciążoną u swego swobodnego końca ciężarem pojedynczym P . Powierzchnia momentów przedstawi się nam w postaci trójkąta ABA' . Każda rzędna tej powierzchni, pomnożona przez jednostkę użytą do wy-

kreślenia, daje wielkość momentu w odpowiednim przekroju; AA' pomnożone przez jednostkę daje nam największy moment w miejscu wmurowania belki.

Według poprzedzającego ustępu, żeby otrzymać linię sprężystą belki AB , należy powierzchnię ABA' uważać jako powierzchnię obciążeń, i wykreślić następnie odpowiednią krzywą sznurową, używając iloczynu EM_b jako jednostki. Ponieważ jednak iloczyn ten jest zbyt wielkim, więc na rysunku obraliśmy, jako jedność odcinek MN , znacznie mniejszy. Następnie wykreśliliśmy pierwszą całkową AI i drugą $A II$. Ta ostatnia jest krzywą sznurową względnie do powierzchni obciążeń $AA'B$, czyli linią sprężystą względnie do powierzchni $AA'B$, jako pow. momentów. Tylko, że rzędne tej linii sprężystej są powiększone znacznie, w stosunku EM_b do jedności MN .

W tem zadaniu i we wszystkich następujących przyjmujemy, że M_b pozostaje stałym.

Oś odciętych prowadzimy przez punkt A , ponieważ samo zadanie już wskazuje, że pierwszy element linii sprężystej pozostanie poziomym wskutek wmurowania.

Ostatnia rzędna $B II$, jako rzędna linii sprężystej, daje wielkość zniżenia końca B belki, od poziomu. Lecz $B II$ jest powiększone, i trzeba ten odcinek pomnożyć przez $\frac{MN}{EM_b}$, żeby otrzymać prawdziwą wielkość zniżenia.

19. Belka oparta na dwóch punktach A i B (fig. 16). Dajmy na to, że belka obciążoną jest jedynie ciężarem P , i że odpowiednią powierzchnią momentów jest trójkąt ACB ,

Żeby znaleźć kształt linii sprężystej, uważamy powierzchnię momentów za powierzchnię obciążeń, i zaczynamy kreślić dla niej pierwszą całkową, poczynając ją w punkcie A . Tak otrzymana krzywa AI dotyka się w punkcie A poziomej AB , a jej ostatnia rzędna BI daje nam wielkość całej powierzchni ACB . Mając już pierwszą całkową, przystępujemy do kreślenia drugiej.

W tym celu, dla ponownego całkowania, obieramy dowolny punkt O , w odległości równej jednostce H od pionowej przez A , i przez ten punkt prowadzimy oś odciętych OHL ;

następnie kreślimy drugą całkową QRS , która ma nam dać szukaną linię sprężystą.

Otóż, przyjrząwszy się figurze, przychodzimy do przekonania, że krzywa QRS nie jest linią sprężystą, gdyż nie odpowiada warunkowi z natury rzeczy wypływającemu, który mianowicie wymaga, żeby punkty Q i S pozostały w jednym poziomie, belka bowiem opiera się w punktach A i B , i nie ma racji, żeby koniec S linii sprężystej podniósł się w górę.

Jednak leży to całkowiec w naszych rękach zmienić

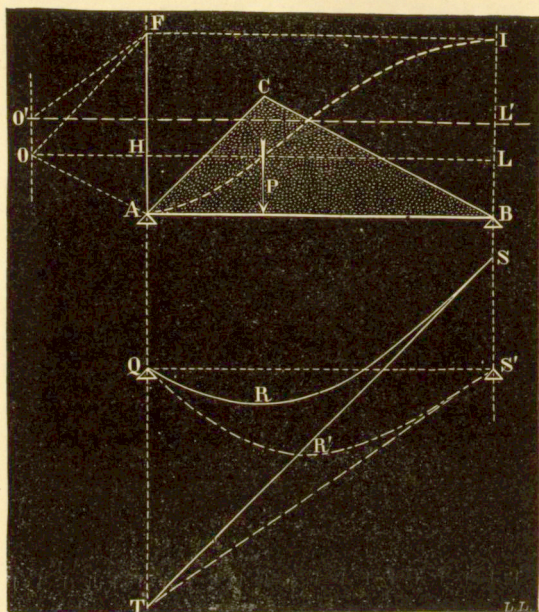


Fig. 16.

położenie punktu S , albowiem zupełnie dowolnie obraliśmy sobie oś odciętych, użytą do wykreślenia. Możemy znaleźć inne położenie początkowego punktu O , takie, jak np. w O' , że odpowiednia druga całkowa $QR'S$ odpowie wymaganemu warunkowi.

Żeby znaleźć położenie O' , postępujemy jak następuje. Przedłużamy styczną w punkcie S do krzywej QRS , aż do przecięcia z pionową przez Q w punkcie T . Twierdzimy potem, że styczna w punkcie S' do krzywej $QR'S'$ przechodzi

także przez punkt T . To znaczy, że QT jest odcinkiem o stałej długości, i że gdziekolwiek obierzemy punkt O na pionowej OO' , to zawsze ostatnia styczna przechodzić będzie przez punkt T . Pochodzi to stąd, że QT według ustępu 12-go przedstawia wielkość momentu statycznego powierzchni ABC względem osi AT , a wielkość ta jest stałą i niezależną od położenia punktu O .

Wykreśliwszy więc raz, przy dowolnie obranym biegunie O , linię sprężystą QRS , prowadzimy w punkcie S styczną, znajdujemy punkt T , następnie łączymy T z S' i przez punkt F prowadzimy FO' równoległe do TS' . Przecięcie tej równoległej z pionową przez O , daje nam szukany punkt O' .

Druga całkowa, którą wykreślimy, uważając $O'L'$ jako oś odciętych, przechodzić będzie przez punkty Q i S' , a więc będzie nam przedstawiała linię sprężystą, o rzędnych wydłużonych w stosunku EM_b do OH .

20. Belka jednym końcem wmurowana, a drugim swobodnie oparta (fig. 17). Belka poddana jest działaniu ciężaru pojedynczego F .

Gdyby belka AB była swobodnie w obu końcach opartą, to powierzchnią momentów byłby trójkąt CDB . Lecz ponieważ koło A są wskutek wmurowania momenty ujemne, więc zamykająca CB przyjmuje inne położenie, którego z góry oznaczyć nie możemy. Dla rozwiązania jednak zadania przyjmijmy, że zamykająca z położenia BC przeszła w położenie BA . Wtedy powierzchnia momentów składa się z dwóch części: ujemnej AFC i dodatniej DFB .

Taką powierzchnię momentów uważamy za powierzchnię obciążenia belki AB , i rysujemy dlań pierwszą całkową $I I'$ i drugą $II II'$. Dla wykreślenia tej drugiej, tak obraliśmy oś do całkowania, żeby pierwszy element w punkcie II pozostał poziomym; a więc oś ta przechodzi przez punkt I . Wmurowanie belki wymaga, żeby pierwszy element był poziomy.

Druga całkowa $II II'$ ma reprezentować linię sprężystą, o przesadnych rzędnych w kierunku pionowym. Jednak widzimy, że ta krzywa nie odpowiada warunkom z natury rzeczy wypływającym, koniec bowiem jej II' nie przechodzi przez punkt b , co jest koniecznym wymaganem, nie ma bowiem racji żeby belka w górę się podniosła. Znaczy to, żeśmy źle prze-

przez środek ciężkości trójkąta ABC , to moment statyczny kropkowanej powierzchni będzie wtedy równy zeru, jeśli powierzchnia CDB pomnożona przez GB (odległ. śr. c.) równą będzie powierzchni ABC pomnożonej przez FB :

$$CDB \cdot GB = ABC \cdot FB$$

Ponieważ zaś trójkąty CDB i ABC uważać możemy, jako mające jednakową wysokość AB , a tylko różne podstawy DH i AC , więc:

$$DH \cdot GB = AC \cdot FB,$$

stąd szukane

$$AC = \frac{DH \cdot GB}{FB}. \quad (a)$$

Stosunek ten łatwo wykreślić. Od B do T odcinamy $BT = DH$. Potem łączymy punkt T z F (punkt F leży w $\frac{1}{3}$ części otworu AB), i przez G prowadzimy równoległą do FT która nam odcina punkt C' .

BC' jest szukanym odcinkiem AC , gdyż z podobieństwa trójkątów FBT i GBC' wypada, że:

$$BC' : BG = BT : FB,$$

a więc:

$$BC' = \frac{BT \cdot BG}{FB} = \frac{DH \cdot GB}{FB}$$

co odpowiada równaniu (a).

Znalazłszy wielkość tego odcinka, który jest niezem innym, jak tylko momentem ujemnym belki przy wmurowaniu, odcinamy go od C do A' i prowadzimy zamykającą $A'B$. Jeśli teraz przy jej użyciu wykreślimy odpowiednią linię sprężystą, to odpowie ona wszelkim warunkom.

21. Belka u obu końców wmurowana (fig. 18). Gdyby belka była swobodnie oparta w punktach A i B , to powierzchnia momentów, dla pojedynczego ciężaru P , miałyby kształt trójkąta $A'B'C'$. Ponieważ jednak w miejscach wmurowania A i B powstają momenty ujemne, więc zamykająca AB zmieni swoje położenie i przyjmie pozycję $A'B'$. Powierzchnia momentów składać się będzie z trzech trójkątów: dwóch ujemnych $AA'Q$ i $BB'T$, oraz jednego dodatniego $QC'T$.

Chodzi nam o oznaczenie odcinków AA' oraz BB' , bo skoro je posiadamy, wtedy mamy wszystko, co do obliczenia belki jest potrzebnem.

Przypuśćmy, że zadanie jest rozwiązane, i że obrane przez nas na figurze AA' i BB' dają nam rzeczywistą wielkość momentów ujemnych w punktach wmurowania. Pierwszą całkową niech będzie krzywa $I m I'$, drugą $II n II'$. Ta druga ma nam dawać linię sprężystą, która oczywiście musi

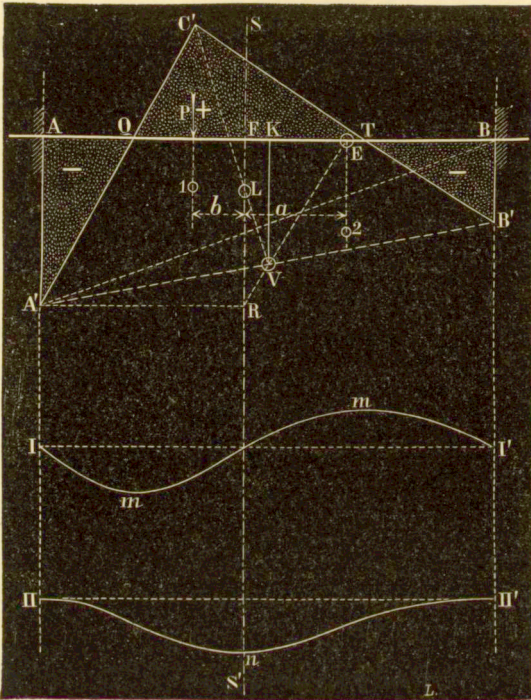


Fig. 18.

mieć pierwszy element przechodzący przez II , i ostatni przez II' poziome, leżące w jednej poziomej. Warunkowi temu tylko w tym wypadku zadość się uczyni, jeśli końcowy punkt I' pierwszej całkowej będzie leżał w jednej poziomej z początkowym I . Więc prosta II' ma być poziomą, a ponieważ ostatnia rzędna pierwszej całkowej daje nam powierzchnię kropkowaną, i ta ostatnia rzędna jest równa zero, więc suma trzech trójkątów $-AA'Q$, $+QC'T$ i $-BB'T$ winna być równa zero.

Oprócz tego, ponieważ rzędne drugiej całkowej $II n II'$ dają nam wielkości momentów statycznych kropkowanej powierzchni, a ostatnia rzędna równą jest zeru, więc i moment statyczny tej powierzchni względem osi pionowej, przez B przechodzącej, winien być równy 0.

Znajdujemy w ten sposób z dyskusji obu krzywych całkowych dwa warunki, oznaczające rozkład i wielkość powierzchni $AQTBB'C'A'$:

a) powierzchnia ta ma być równa 0;

b) jej moment statyczny względem BB' ma być także równy 0.

To nam wystarczy do elementarnego wykreślenia odcinków AA' i BB' .

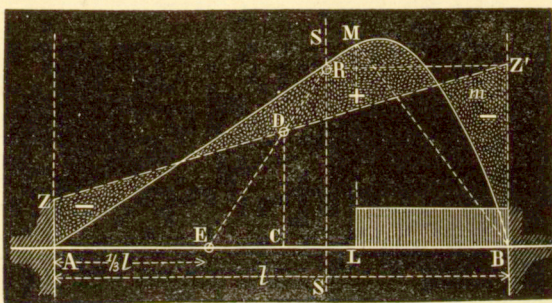


Fig. 19.

Ponieważ kropkowaną powierzchnię mogę uważać, jako sumę dodatniego trójkąta $A'C'B'$ i ujemnego trapezu $AA'B'B$ więc z warunku a) wypływa, iż:

pow. trójkąta $A'C'B$ równa się pow. trapezu $AA'B'B$.

Z warunku zaś b) wypada, że moment statyczny ujemnego trapezu + moment statyczny dodatniego trójkąta ma być = 0, a ponieważ obie powierzchnie są sobie równe, więc środek ciężkości trapezu winien leżeć w jednej pionowej ze środkiem ciężkości trójkąta, ażeby ramiona względem osi BH' były równe.

Stąd łatwo znaleźć możemy kształt trapezu $AA'SB$. Jego środek ciężkości ma leżeć w linii SS' , przechodzącej przez L , środek ciężkości trójkąta $A'B'C'$. Jeden punkt prostej $A'B'$ znajdziemy, jeśli w środkowym punkcie belki K

wystawimy prostopadłą KV , takiej długości, że KV pomnożone przez AB równa się powierzchni trójkąta $A'B'C'$. Wtedy V leży oczywiście na prostej $A'B'$. Jej nachylenie znajdziemy z warunku, że środek ciężkości trapezu ma leżeć w pionowej SS' . Od B do E odcinamy $\frac{1}{3}$ część AB , punkt T łączymy z punktem V , i przedłużamy prostą TV do przecięcia z pionową SS' w punkcie R . Wtedy FR równe jest AA' . Następnie łączymy A' z V , i przedłużając, znajdujemy punkt B' .

Dowód słuszności tego wykreślenia jest bardzo prosty, i zostawiamy go czytelnikom; nadmieniamy tylko, że AA' tak się ma do BB' , jak a do b , jeśli przez a oznaczymy odległość środka ciężkości 2-go trójkąta $A'B'B$, a przez b odległość środka ciężkości 1-go trójkąta $AA'B$, od osi SS' .

Wykreślenie to jest ogólne, i da się zastosować do wszelkiego rodzaju obciążenia. Jeśli mamy np. AB (fig. 19), wmurowaną w obu końcach, i obciążoną częściowo od B do L ciężarem ciągłym i jednostajnym, to wtedy powierzchnia momentów ograniczona jest prostą AM i łukiem parabolicznym MmB . Żeby znaleźć położenie zamykającej ZZ' , znajdujemy przedewszystkiem oś SS , przechodzącą przez środek ciężkości powierzchni $AMmBA$, i wielkość tej powierzchni. Wielkość tę dzielimy przez AB , i znajdujemy odcinek CD , który wystawiamy pionowo w środkowym punkcie belki C . Następnie łączymy punkt E , leżący w odległości $\frac{1}{3} l$ od A , z D , i przedłużamy ED do R . Pozioma, przeprowadzona przez R , odcina na pionowej przez B punkt Z' . Połączywszy Z' z D , znajdujemy szukaną prostą ZZ' .

22. Wszystkie podane wyżej sposoby wykreślenia linii sprężystej i ujemnych momentów w punktach wmurowania, wtedy tylko są słuszne, jeśli moment bezwładności we wszystkich przekrojach belki pozostaje niezmiennym. W przeciwnym razie konstrukcyja się zmienia i komplikuje. W szczególności obliczania tego rodzaju wypadków wchodzić tutaj nie będą, jak również i w zastosowania krzywych całkowych do belek, opartych na kilku punktach, zostawiając to do późniejszej pracy.

IV. TEORIA SKLEPIEŃ.

21. Teoria graficzna sklepień opiera się na wykreśleniu tak zwanej linii ciśnienia. Teoria ta nie jest wcale ścisłą, i nie daje sposobu obliczania sklepień, lecz tylko daje nam możliwość wypróbowania zaprojektowanego już sklepienia, czy jest istotnie w równowadze. Zwykły sposób postępowania jest taki, że się naprzód na podstawie danych z praktyki wziętych projektuje sklepienie, a potem próbuje się przy pomocy linii ciśnienia, czy rzeczywiście projektowane sklepienie, odpowiada warunkom równowagi.

Dajmy na to, że mamy przed sobą połówkę sklepienia, oznaczoną literami $TQPNM$ (fig. 20), i przypuśćmy, dla uproszczenia, że sklepienie, również jak i nadmurowanie sięgające do NM , są zaprojektowane z materiału o jednakowym ciężarze gatunkowym.

Gdybyśmy w rzeczywistości odjęli jedną połowę sklepienia (po prawej stronie od linii NP leżącą), to, aby równowaga nie była naruszona, musielibyśmy, na miejsce owej odjętej połowy, przyczepić siłę R , któraby powstrzymywała sklepienie od upadku.

Sila R , którą zwiemy parciem poziomem, łączy się z elementem sklepienia w tak zwaną linię ciśnienia HgC , o której znaczeniu tutaj bliżej mówić nie będziemy, jako rzeczy powszechnie znanej. Linią tę otrzymuje się, jak wiadomo, w ten sposób, że odcina się na pionowej od H do I' cały ciężar

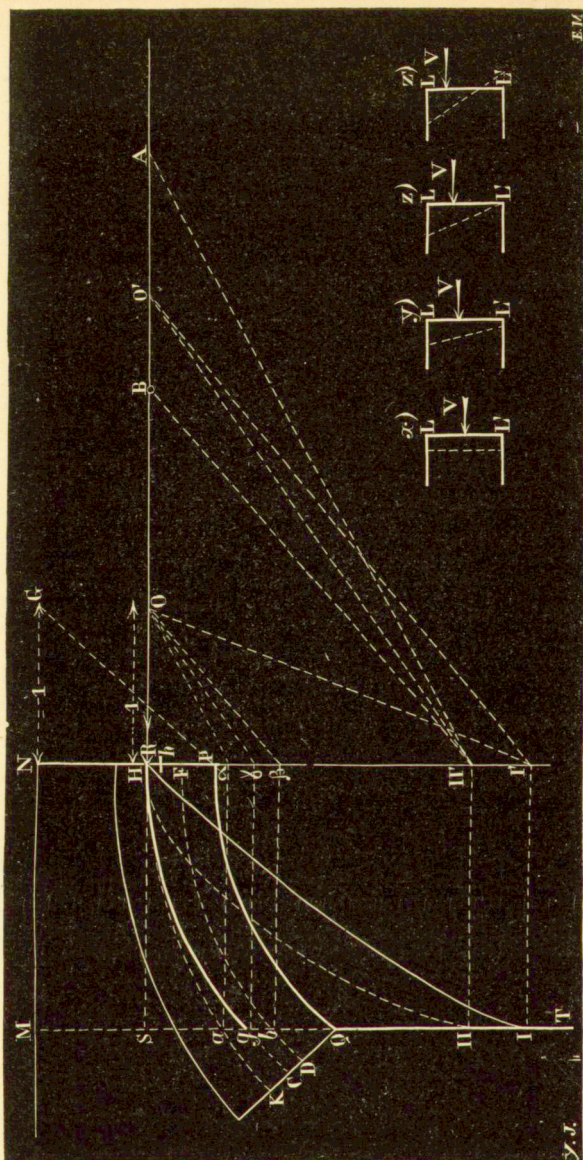


Fig. 20.

sklepienia, potem na poziomej przez H przechodzącej, od H do O , wielkość parcia poziomego, uważa się punkt O' za biegun, i kresli się wielobok sznurowy, otaczający krzywą HgC .

Każdy bok tego wielokoku daje nam położenie wypadkowej z parcia poziomego, i części sklepienia po prawej stronie leżącej (np. bok przechodzący przez g daje nam położenie wypadkowej z siły R i ciężaru części sklepienia $PNMQ$, jej wielkość znajduje się jako promień $O'I'$).

Sklepienie będzie w równowadze, jeśli:

- 1) można będzie wykreślić linię ciśnienia, nie wychodzącą w całym swym przebiegu z jednej trzeciej części środkowej sklepienia;
- 2) jeśli linia ciśnienia nie trafi na szwy pod takim kątem, że opór tarcia może być przewyższonym;
- 3) jeśli siły, na każdy szew działające, nie są zbyt wielkie ze względu na wytrzymałość materiału, z którego sklepienie jest projektowanym.

Warunek, pod 1) sformułowany, powiada, że linia ciśnienia musi się zmieścić między liniami HK i FD , dzielącymi wysokość sklepienia w kierunku szwów na trzy równe części. Pochodzi to stąd, że nie można dopuścić, aby którekolwiek miejsce na szwie sklepienia było wystawione na rozciąganie. Figury x , y , z , z' , u spodu fig. 20-ej umieszczone, bliżej nam to wyjaśnią.

Niech LL' przedstawia nam szew sklepienia. Jeśli siła V działa w środku ciężkości (przypadek x), to przekrój pod działaniem tej siły przesunie się równolegle, i przyjmie położenie kreskowane. Jeśli punkt przyłożenia siły posuniemy nieco wyżej (przypadek y), wtedy oś obojętna, która poprzednio leżała w nieskończoności, zbliży się, i przekrój, obróciwszy się około tej osi, przyjmie oznaczoną linią kreskowaną położenie. Oczywiście, ciśnienie specyficzne na jednostkę przekroju LL' będzie większem w pobliżu L , aniżeli w pobliżu L' . Jeśli punkt przyłożenia siły V będziemy posuwać jeszcze dalej w górę, to nareszcie przyjdzie takie położenie (przyp. z), że oś obojętna dotknie się do przekroju, i wtedy specyficzna siła ściskająca równą będzie w miejscu L' zeru, i gdybyśmy dalej jeszcze w górę przesunęli punkt przyłożenia siły V (przyp. z'), to około L' powstałyby siły rozciągające, i sklepienie otworzyłoby się w tem miejscu. A więc fig. z daje nam takie położenie punktu przyłożenia

siły V , którego przekroczyć nie można, a właśnie i ta granica leży w $\frac{1}{3}$ wysokości szwu.

Zniżając siłę V na dół, dojdziemy do drugiej granicy tego rodzaju.

Warunek, sformułowany pod 2), żąda, aby siła na szew działająca nie odchyliła się nigdzie od pionowej do tego szwu, niż o kąt tarcia, dopuszczalny dla użytego materiału.

Warunek, pod 3) określony, wymaga, aby specyficzna siła na jednostkę w żadnym miejscu przekroju nie przeszła granicy, dozwolonej dla danego materiału. Jeśli tę specyficzną siłę oznaczymy przez ρ , to oczywiście, w granicach oznaczonych warunkiem 1), ρ będzie największe, gdyż punkt przyłożenia siły będzie leżał w jednej trzeciej części wysokości szwu od góry, albo od dołu. Wiadomo, że w tym granicznym wypadku ρ jest dwa razy większe, niż gdy się działa w środku ciężkości przekroju.

22. Przystąpić teraz możemy do oznaczenia linii ciśnienia w sklepieniu za pomocą wykreślnego całkowania. Nie potrzebujemy dowodzić, że ta linia jest drugą całkową dla powierzchni $MNPQ$, jeśli tylko parcia poziomego użyjemy jako jednostki do wykreślenia. Porównanie fig. 20-tej z poprzedzającymi przekona nas o tem.

Aby więc narysować linię ciśnienia, trzeba przedewszystkiem wykreślić pierwszą całkową dla powierzchni $MNFQ$. Ponieważ nie wiemy, w którym miejscu na dowolnej przestrzeni od H do F przyczepionem jest parcie poziome R , więc obierzmy sobie naprzód dowolne jego położenie, np. w punkcie granicznym H , w $\frac{1}{3}$ wysokości klucza od wierzchołka sklepienia. Ponieważ nie znamy wielkości parcia poziomego, więc obierzmy dowolną jednostkę OH do wykreślenia. Całkową zaczynamy kreślić w punkcie H . Pierwszy jej element, przez ten punkt przechodzący, będzie równoległy do linii GP . Krzywa HI przedstawia nam pierwszą całkową. Ostatnia jej rzędna IS , pomnożona przez OH , daje nam całą powierzchnię $MNPQ$.

Powierzchnia $HISH$ przedstawia moment pierwszego rzędu powierzchni $MNPQ$ względem pionowej TM .

Jeśli wykreślimy drugą całkową HII , rozpoczynając ją od osi SH , to daje nam ona linię ciśnienia, jeśli parcie pozio-

me OH , obrane przez nas dowolnie, równem jest istotnej jego wielkości. Oczywiście, ta linia ciśnienia w naszym wypadku nie odpowiada wymaganym warunkom, gdyż nie mieści się przedewszystkiem między FD i HK . Więc parcie poziome nie może być równe OH .

Jeśli zwiększymy odpowiednio jednostkę OH , użytą do wykreślenia, jeżeli ją np. zrobimy równą $O'H$, to wtedy druga całkowita odpowie wymaganym warunkom i przyjmie kształt HgC . Wtedy gS pomnożone przez $O'H$ równa się momentowi, statycznemu powierzchni $MNPQ$ względem osi MT . Tenże sam moment równał się pierwej SII pomnożonemu przez HO , a więc:

$$gS \cdot O'H = II S \cdot OH,$$

skąd:

$$O'H = \frac{II S \cdot OH}{gS}$$

Na podstawie tego równania możemy obecnie rozwiązać następujące zadanie: Dla sklepienia $MNPQ$ daną jest linia ciśnienia HII (druga całkowita), wykreślona przy pomocy dowolnego parcia poziomego OH ; znaleźć takie parcie poziome $O'H$, żeby odpowiednia linia ciśnienia przechodziła przez dany punkt g . W tym celu, na pionowej, przez H przeprowadzonej, od H do γ odcinam $H\gamma = Sg$, i $HII' = SII$. Prosta, przeprowadzona przez II' równolegle do γO , odcina na poziomej przez H punkt O , bo wtedy:

$$II' H : \gamma H = O'H : OH,$$

czyli:

$$II S : gS = O'H : OH,$$

więc:

$$O'H = \frac{II S \cdot OH}{gS}$$

co było do okazania.

Z warunku, oznaczonego pod 1), wypływa, że punkt g może zmieniać swe położenie tylko w granicach od a do b ; a więc, jeżeli dla punktu a i b przeprowadzimy to samo wykreślenie, co i dla punktu g , to znajdziemy dwie wielkości parcia poziomego AH i BH . Jeśli do wykreślenia linii ciśnienia użyjemy parcia AH , to odpowiednia linia ciśnienia

przejdzie przez punkt a ; jeśli zaś parcia BH , to linia ta przejdzie przez punkt b .

Parcie poziome nie może być mniejsze od BH , bo inaczej linia ciśnienia przejdzie niżej b .

Nie może ono być również większem od AH , bo inaczej linia ciśnienia przejdzie wyżej a .

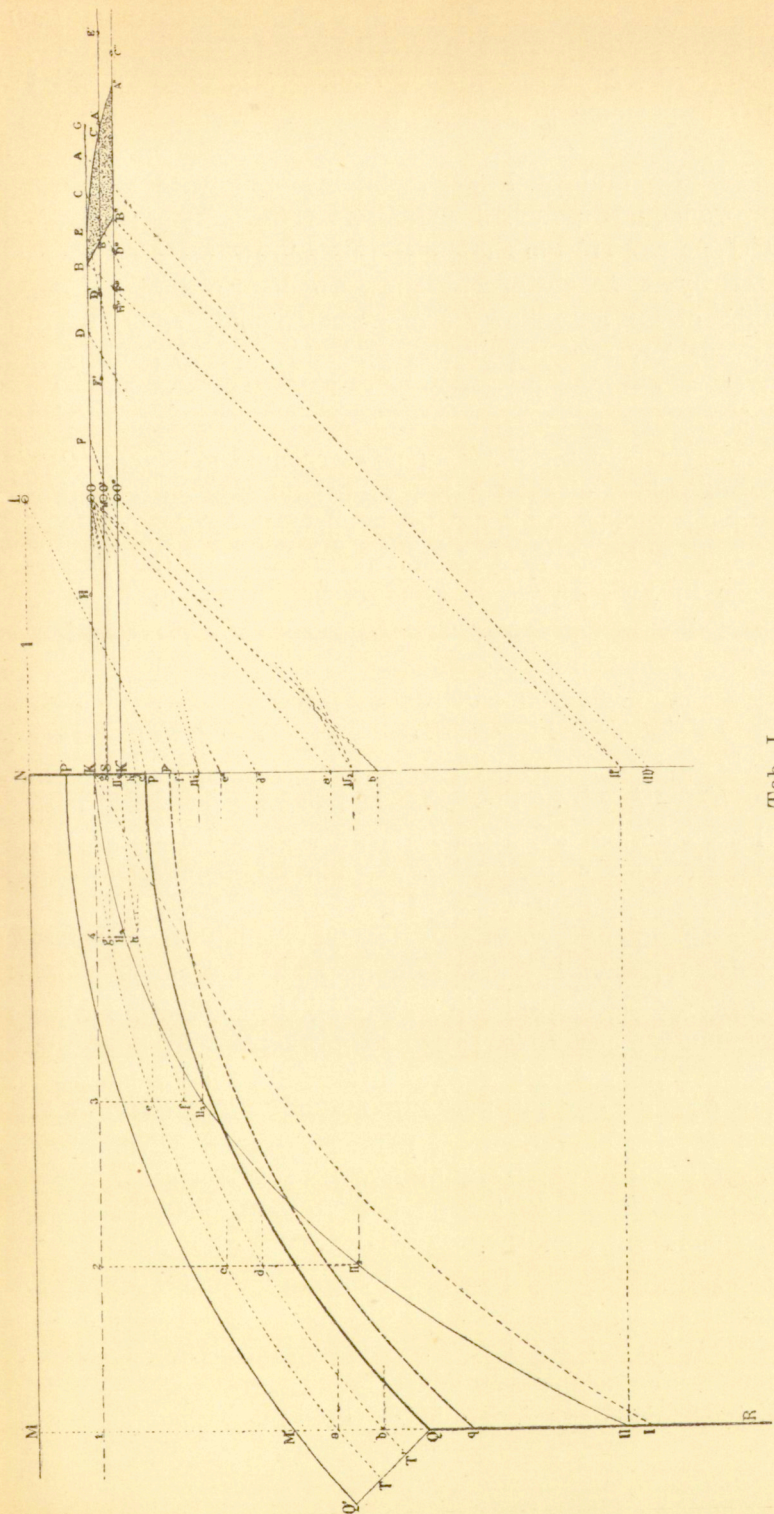
Więc koniec odcinka, przedstawiającego parcie poziome, a mającego początek w H , winien się znajdować na przeszczeni między B i A . Jeśli temu warunkowi uczynimy zadość, to możemy być pewni, że element linii ciśnienia, znajdujący się w pionie MT , nie wyjdzie nigdy z granic $a b$.

Lecz to nie przeszkadza wcale, aby linia ciśnienia w całym swym przebiegu od H do któregośkolwiek z punktów g nie wyszła gdziekolwiek poza dozwolone granice, ponad HK lub FD . Aby się od tego zabezpieczyć, pomiędzy pionowemi MT a NP prowadzimy w różnych miejscach jeszcze kilka pionowych, i dla nich przeprowadzamy te same wykreślenia. Znajdujemy wtedy takie granice A i B , że jeśli punkt O' będzie między nimi zawartym, to w całym swym przebiegu linia ciśnienia pozostanie w dozwolonych granicach, oznaczonych krzywemi HK i FD .

Wykreślenie to przeprowadzono na tablicy I-ej.

Dotąd linię ciśnienia zaczynaliśmy kreślić w punkcie H . Również dobrze może być ona rozpoczętą w punkcie h , jak i w punkcie F . Dla każdego z tych położeń możemy znaleźć odpowiednie granice A i B . Lecz gdzie w samej rzeczy przechodzi prawdziwa linia ciśnienia, tego nie wiemy, i Statyka nie daje nam sposobu oznaczenia tego punktu. Zwykle, przy wykreśleniu używaną jest taka linia ciśnienia, która zaczyna się w $\frac{1}{3}$ części od góry w punkcie H , i potem w tak zwanym szwie niebezpiecznym zbliża się o $\frac{1}{3}$ do podniebienia. Linia ta nie jest zawsze prawdziwą, istotnie się składającą, lecz jest ze wszystkich możliwych najniekorzystniejszą.

Sklepienie będzie w równowadze, skoro tylko znaleźć możemy granice A i B . Niezawsze jest to możliwem; w niektórych razach A dotyka się do B , lub nawet przechodzi na drugą stronę, i wtedy wykreślenie linii ciśnienia, czyniącej zadość pierwszemu warunkowi, jest niemożliwem. Wypróbowanie warunków, podanych sub 2) i 3), jest powszechnie



Tab. I.

znanem. Dla 3) można z góry oznaczyć granicę, po za którą parcie poziome przejść nie powinno.

23. Na tablicy I-ej znajdujemy całkowite zestawienie wyprowadzonej powyżej metody. Danem jest sklepienie $QPP'Q'$, po nad którym znajduje się nadmurowanie $MNP'Q'$. Zwykle tak bywa, że ciężar gatunkowy nadmurowania jest mniejszy niż ciężar gatunkowy samego sklepienia, żeby więc to wprowadzić w rachubę, należy zmienić naprzód powierzchnię $MNPQ$, zanim się przystąpi do wykreślenia pierwszej całkowej.

W tym celu zwiększamy powierzchnię sklepienia $QPP'M$ w stosunku jego ciężaru gatunkowego do ciężaru gatunkowego nadmurowania. Czynimy to, wydłużając każdą rzędną powierzchni $M'PP'Q$ w wymaganym stosunku. Otrzymujemy tą drogą krzywą pq ; wtedy powierzchnię $MNpq$ możemy uważać za jednolitą i przystąpić do wykreślenia pierwszej całkowej.

Za oś odciętych obieramy poziomą MN . Jednością niech będzie NL . Pierwszą całkową dla krzywej pq zaczynamy kreślić w punkcie K , leżącym na szwie kluczowym, tak że $KP' = \frac{1}{3} P'P$. Pierwszy element tej pierwszej całkowej, przechodzący przez K , jest równoległy do Lp , a jej koniec znajduje się w punkcie I . Rzędna $I1$, pomnożona przez jedność NL , daje nam wielkość powierzchni $MNpq$.

Następnie przystępujemy do wykreślenia drugiej całkowej, zaczynając ją w tymże samym punkcie K . Lecz poprzednio przenosimy równoległe oś odciętych z położenia NL do KO . Jednością jest KO . Druga całkowca ma wtedy pierwszy element poziomy, a jej koniec przechodzi przez punkt II . Rzędna II , pomnożona przez KO , daje nam wielkość powierzchni IKI , czyli, według poprzedzającego, wielkość momentu statycznego powierzchni $MNpq$ względem osi MR .

Druga całkowca KII jest także linią ciśnienia przy parciu poziomem równem OK .

Oczywiście parcie poziome było źle obrane, i wykreślona linia ciśnienia nie jest tą, której szukamy, bo się nie mieści między łukami KT i $K'T'$, przeprowadzonymi w trzech częściach grubości sklepienia.

Żeby znaleźć granice, między którymi wahać się może

wielkość parcia poziomego, postępujemy według wskazówek, udzielonych w ustępie 22-gim. Parcie poziome OK powiększamy naprzód w stosunku $1 II$ do $1 a$ i w stosunku $1 III'$ do $1 b$. W tym celu punkty a i b przenosimy poziomo do a' i b' , łączymy a' z O , i przez II' prowadzimy $II'A$ równoległe do $a'O$. Otrzymujemy punkt graniczny A . Parcie poziome nie może być większe niż KA , bo inaczej linia ciśnienia przejdzie wyżej od punktu a . To samo wykreślenie przeprowadzamy dla punktu b i znajdujemy punkt B . Parcie poziome nie może być mniejsze od KB , bo inaczej linia ciśnienia przejdzie niżej b .

Następnie, podzieliwszy sklepienie pionowemi $2 II_2$, $3 II_3$, $4 II_3$ na kilka części, dla każdej z nich przeprowadzamy wykreślenie granic parcia poziomego.

I tak, jeśli weźmiemy pod uwagę pionową $2 II_2$, to linia ciśnienia nie powinna wyjść po nad punkt c , ani też zniżyć się po pod punkt b . Żeby otrzymać odpowiednie granice parcia poziomego, przenosimy punkty c i d poziomo do c' i d . To samo czynimy z punktem II_2 , który się przenosi do II'_2 . Następnie łączymy punkt c' z O i przez II'_2 prowadzimy równoległą do $c'O$, która nam daje punkt C . Parcie poziome nie może być większe niż KC , bo inaczej linia ciśnienia przejdzie wyżej niż c . Jeśli to samo wykreślenie przeprowadzimy dla punktu d , to otrzymamy graniczną wielkość KD , od której parcie poziome nie może być mniejsze.

Jeśli w taki sposób postąpimy z punktami e , f , oraz g , h , to nareszcie znajdziemy sześć granicznych wielkości parcia poziomego, które nie może być większe, niż:

KA , KC , KE i KG . . . parcie maximalne,

oraz nie może być mniejsze, niż:

KB , KD , KF i KH . . . parcie minimalne.

Z tych ośmiu granic wybieramy dwie najbliższej siebie leżące, jedną maximalną, a drugą minimalną. Jedna z nich maximalna KE wskazuje nam, że parcie nigdy większem niż KE być nie powinno; druga minimalna KB , że nigdy nie powinno być mniejsze od KB .

A więc, jeśli linię ciśnienia zaczynamy kreślić w pun-

kie K , i tam przyczepiamy jeden koniec odcinka przedstawiającego parcie poziome, to drugi koniec winien się mieścić na przestrzeni od B do E .

Parcie poziome przyczepiliśmy w punkcie K , lecz uczyniliśmy to dowolnie, bo może ono być przyczepione w każdym innym punkcie między K a K' , punktami leżącymi w jednych trzecich PP' . Przy każdej zmianie położenia otrzymamy inną linię ciśnienia i inne granice dla parcia poziomego.

Na tablicy I-iej zrobiliśmy granice dla punktu K' i dla punktu S , dzielącego PP' na dwie równe części ¹⁾.

Jeśli parcie przyczepione w środku S , to z wykreślenia wypada, iż nie może ono być mniejsze od SB' , a większem od SC' .

Jeśli zaś przyczepionem jest w punkcie K' , to nie może być ono mniejszem od $K'B''$, a większem od $K'A''$.

Połączywszy punkty skrajne B, B', B'' oraz E, C', A'' krzywymi liniami, otrzymujemy powierzchnię kropkowaną $BEA''B''$, mającą takie znaczenie, że koniec odcinka reprezentującego parcie poziome, przyczepionego jednym końcem w kluczu, winien się zmieścić koniecznie wewnątrz tej powierzchni. Jeśliby było inaczej, to linia ciśnienia nie zmieściłaby się między TK i $T'K'$ ²⁾.

Jeśli nie można wykreślić powierzchni $BEA''B''$, to wtedy mamy dowód, że wykreślenie linii ciśnienia, odpowiadającej warunkowi 1), jest niemożliwem.

Może to nastąpić wtedy, gdy granice minimalne parcia poziomego są większe, aniżeli maximalne. Gdyby, przypuśćmy, KB , od którego parcie poziome nie może być mniejszem, wypadło nam dłuższem niż KE , od którego parcie poziome nie może być większem, to wtedy w punkcie K nie mogli-

¹⁾ Do wykreślenia nie trzeba wtedy zmieniać położenia punktów $a', b', c', d' \dots$, tylko trzeba punkty $II', II'_2, II'_3 \dots$ przesunąć o tyle na dół, o ile nowo obrane parcie zostało przesunięte. I tak, dla punktu K' punkt II' został posunięty na dół do (II) , tak, że $II' (II) = KK'$. Chcąc więc znaleźć w tym ostatnim wypadku punkt graniczny dla b , łączymy b' z O'' i przez (II) prowadzimy równoległą do $b'O''$, która odcina na poziomej $K'O''$ punkt szukany B'' .

²⁾ Do powierzchni $BEA''B''$ doszedł na innej drodze p. A. Durand-Claye. Patrz: „Annales des ponts et chaussées“ 1867.

byśmy zaczynać żadnej linii ciśnienia, gdyż każda z nich musiałaby wyjść z granic dozwolonych.

A więc, wypróbowanie równowagi sklepienia, według metody podanej polega na znalezieniu powierzchni $BEA''B''$. Jeśli wykreślenie jest możliwem, to sklepienie czyni zadość pierwszemu warunkowi równowagi.

Warunki sub 2) i 3) badają się zwykłą drogą.

V. WYRÓWNANIE MAS.

24. Przy budowie dróg następują, jak wiadomo, po sobie wykopy i nasypy. Jeśli materiał dobytý z wykopu jest dobrym, to w takim razie używa się do wzniesienia nasypów. Oszczędza się w ten sposób znaczna ilość pracy, w porównaniu z innym sposobem, gdy ziemię trzeba przywozić z miejsc obok drogi leżących, wykopawszy ją poprzednio.

Ten sposób szczególnie tam może być użyty z korzyścią, gdzie w stosunkowo małych odstępach następują po sobie wykopy i nasypy.

Żeby znaleźć jak najkorzystniejszy sposób zużytkowania mas ziemi wydobytych z wykopów, używa się często tak zwanego wykreślnego wyrównania mas (*Massen-nivellement*), wynalezione go przez bawarskiego inżyniera *Eickemeyera*.

Integrator i krzywa całkowita, przy tej żmudnej pracy, przyczyniają się do znacznego uproszczenia.

Przypuśćmy, że prosta OX (tabl. II) przedstawia nam oś drogi. Profilem jej podłużnym niech będzie linia łamana $O123\dots$. Lecz profil ten podłużny różni się od zwykle używanego tem, że każda jego rzędna, np. $L2$, (mierzona odpowiednią podziałką) nie daje rzeczywistego wzniesienia punktu 2 po nad oś drogi, lecz jest proporcjonalną do wielkości profilu poprzecznego, przechodzącego przez $2L$. Więc np. rzędna $L4$, mierzona odpowiednią podziałką, da nam ilość jednostek kwadratowych profilu poprzecznego nasypu, przechodzącego przez punkt 4.

Stąd wyprowadzamy wniosek, że jeżeli zmierzmy powierzchnie kreskowane i kropkowane profilu podłużnego, w ten sposób przekształconego, to otrzymamy wielkość mas ziemi, którą z wykopów dobyć należy (pow. kropkowane), i wielkość mas, które do nasypów przywieźć należy (pow. kreskowane).

Żeby znaleźć np., jak wielką jest masa ziemi, którą się dobędzie z wykopu $O\ 1\ 2\ 3$, to trzeba, albo zmierzyć tę powierzchnię w zwykły geometryczny sposób, albo oprowadzić ją planimetrem, albo też wykreslić dla niej krzywą całkową.

Zastosowanie tej ostatniej daje nam, obok pomiaru powierzchni, jeszcze i inne korzyści, o których niżej mowa.

Dla wykopu $O\ 1\ 2\ 3$ zaczynamy kreślić całkową w punkcie O , uważając OX za oś odciętych. Niech naszą całkową będzie $O\ 1'\ 2'\ 3'$. Rzędna $3\ 3'$, pomnożona przez jednostkę całkowania, daje nam całą masę ziemi, która ma być dobytą z wykopu.

W punkcie 3 jest przejście od wykopu do nasypu. Dalej na prawo mamy nasyp $3\ 4\ 5\ 6$, którego powierzchnię, leżącą pod osią odciętych, uważamy za ujemną; krzywa całkową więc zniża się od punktu $3'$ do punktu $6'$. Rzędna $6\ 6'$ daje nam sumę algebraiczną mas wykopu i nasypu. Masę nasypu otrzymamy, jeśli od $3\ 3'$ odejmiemy $6\ 6'$. Widzimy, że masa ziemi, wydobyta z wykop, nie tylko starczy do usypania nasypu $3\ 4\ 5\ 6$, lecz jeszcze pozostanie reszta wielkości $6\ 6'$, które można użyć do usypania części nasypu, leżącego na lewo od punktu O .

Kreśląc dalej krzywą całkową dla następujących po sobie wykopów i nasypów, otrzymujemy nareszcie tak zwany profil mas $O\ 1'\ 2'\ 3'\ \dots\ 10'\ 11'\ \dots\ 20'\ 21'$.

Profil ten przedstawia linię krzywą, wznoszącą się w wykopach, spadającą na dół w nasypach.

W miejscach, gdzie są przejścia od wykopu do nasypu ($3'$, $10'$, $18'$), mamy punkty maximum, i tam styczne do profilu mas są poziome; w miejscach zaś, gdzie są przejścia od nasypu do wykopu (0 , $6'$, $14'$, $21'$), mamy punkty minimum, w których styczne są także poziome.

Styczną do profilu mas w jakimkolwiek punkcie (np. 4) łatwo znaleźć możemy, jeśli przez punkt 4 profilu podłużnego

przeprowadzimy pionową $4L'$, od L' odetniemy na lewo jednostkę $L'H$, i połączymy punkty H i 4 . Styczna w punkcie $4'$ będzie równoległą do $H4$.

W taki sam sposób znajdujemy styczną w punkcie $2'$ i w innych.

Ponieważ profil podłużny $O 1 2 3 \dots$ jest linią łamaną, złożoną z odcinków prostej (co jest tylko przybliżeniem do rzeczywistości), więc profil mas składa się z łuków parabolicznych. I tak, od O do $1'$ mamy jeden łuk paraboli, od $1'$ do $2'$ drugi, który z łukiem $O 1'$ ma wspólną styczną w punkcie $1'$. Łuk $2 3'$ i $1' 2'$ mają wspólną styczną w punkcie $2'$. Ponieważ styczne, jak widzieliśmy wyżej łatwo wykreślać, więc, nie używając nawet integratora, łatwo można przyjść do narysowania profilu mas, mając tylko obliczone punkty $1' 2' 3' \dots$. Prowadzimy bowiem tylko w tych punktach styczne i wrysowujemy łuki paraboliczne, używając sposobów powszechnie używanych (wykreślenie to jest zaznaczone około punktów $2' 3' 4'$).

Przeprowadźmy dowolną poziomą QQ , przecinającą profil mas w punktach F, G, K, M, N, I^1 , i przyjrzyjmy się temu profilowi na przestrzeni od M do N . Rzędna MC równą jest ND , a więc suma algebraiczna masy ziemi od początku O do punktu C jest taką, jak od tegoż początku do punktu D . To znaczy, że na przestrzeni od C do D tyle było ujemnej masy nasypu, ile dodatniej wykopu. A więc, jeśli byśmy bryłę ziemi, którą trzeba wydobyć z wykopu, reprezentowaną przez $14 15 16 D' D$, przenieśli do nasypu leżącego na lewo, tobyśmy usypali część $C 14 13 12 C'$. Pozostała część nasypu $C C' 11 10$ musiałaby być zrobioną z ziemi, wydobytej w wykopie $6 7 8 9 10$. Oczywiście, na tę resztę wyszłaby część wykopu $B B' 9 10$, która się znajduje tą samą drogą, przy użyciu poziomej QQ . Na przestrzeni od K do M może tak samo nastąpić wyrównanie, jak na przestrzeni od M do N .

W ogóle pozioma QQ daje nam obraz całego rozkładu ziemi, i pokazuje nam, jak trzeba tę ziemię transportować, żeby na całej przestrzeni wziętej pod uwagę masy się wyrównały. Ta pozioma wyznacza nam tak zwane sekcye przewozu, które są oznaczone u spodu tablicy.

1) B. Abakanowicza, Zarys Statyki wykreslonej § 11.

Nazwijmy powierzchnie $F 3' G$, $K 10' M$, $N 18' J$, leżące po nad prostą QQ , górami, a powierzchnie $G 6' K$, $M 14' N$, leżące pod tą poziomą, dolinami. Góry i doliny wyznaczają więc sekcye przewozu. W górach ziemię wykopaną przewozi się na prawo, w dolinach na lewo, co jest oczywiście, bo w górach zawsze po lewej stronie mamy wykop (profil mas podnosi się), a po prawej nasyp (profil opada). W dolinach odwrotnie. W ten sposób otrzymujemy dwa rodzaje sekcji: jedne, w których na prawo, a drugie, w których na lewo się przewozi; oznaczono to strzałkami u spodu tablicy.

Jeśli weźmiemy pod uwagę koszta przewozu i wyrównania mas, to przekonamy się, że profil mas daje nam w tej mierze pewne wskazówki. Jeżeli bowiem wyłączymy koszta wzniesienia ziemi i t. p., które nie mają związku z przestrzenią, na której ziemię przewozić należy, a weźmiemy pod uwagę tylko koszta samego przewozu, to wtedy powierzchnie gór i dolin są proporcjonalne do kosztów przewozu.

Jeżeli mamy jakikolwiek element masy ΔM (w sekcji III przewieźć na odległość x , to $\Delta M \cdot x$ daje nam wielkość pracy mechanicznej tego przewozu. ΔM pomnożone przez x jest elementem momentu statycznego powierzchni $B B' 9 10$, względem osi pionowej, przechodzącej przez 10 , a jak wiadomo z rozdziału o momentach, powierzchnia pierwszej całkowitej złożoną jest z elementów momentu statycznego. Taki element momentu statycznego narysowanym jest między $9'$ a $10'$.

Jeśli te wszystkie elementy zsumujemy, to otrzymamy część powierzchni góry $K 9' 10' T$, która jest proporcjonalną do pracy mechanicznej, a więc i do kosztów przewozu ziemi z wykopu, aż do punktu 10 (przejściowego do nasypu).

Dalsza praca rozmieszczenia ziemi w nasypie będzie oczywiście proporcjonalną do powierzchni $T 10' 11' M$.

Cała więc powierzchnia $K 9' 10' 11' M$ jest proporcjonalną do kosztów całkowitych wyrównania mas w sekcji III-ej.

To samo się stosuje do wszystkich innych sekcji.

Żeby więc obliczyć koszta, należy zmierzyć powierzchnie gór i dolin, co się skutecznia wykreśleniem drugiej całkowitej.

Zmieniając położenie linii QQ , zmieniamy także i wielkość powierzchni gór i dolin. Posuwając QQ w górę, zwiększamy powierzchnie wszystkich dolin. Rzecz ma się odwrotnie,

gdy QQ przesuwamy na dół. Przy tem przesuwaniu zmienia się długość każdej sekcji, i zmienia się suma wszystkich powierzchni gór i dolin, a ponieważ te powierzchnie są proporcjonalne do kosztów, więc i koszty się zmieniają. Pomiędzy wszystkimi położeniami linii QQ jest jedno, które odcina najmniejsze powierzchnie po obu swych stronach. Sekcje, odpowiadające takiej linii wyrównania, powinny być w praktyce zachowane, bo koszty przewozu są wtedy najmniejsze. Zadaniem naszym jest znaleźć to najkorzystniejsze położenie linii QQ . Posuńmy ją w tym celu w górę, o nieskończenie małą wysokość Δh . Oznaczmy szerokość podstaw gór ogólnym znakiem g , a szerokość dolin d . Praca przewozu każdej góry zmniejszy się wskutek przesunięcia o $g\Delta h$, a doliny zwiększy się o $d\Delta h$; w całym profilu mas o sumę: $\Sigma g\Delta h$ i $\Sigma d\Delta h$, lub (ponieważ Δh jest jednakowe we wszystkich górach i dolinach) o $\Delta h\Sigma g$ i $\Delta h\Sigma d$. Jeżeli zmniejszenie pracy przewozu (wskutek zmniejszenia powierzchni gór) jest znaczniejsze, niż jej zwiększenie (wskutek zwiększenia powierzchni dolin), tośmy coś zaoszczędzili z pracy ogólnej przez przesunięcie linii wyrównania w górę. Oszczędność równa jest różnicy między ubytkiem powierzchni gór a przyrostkiem powierzchni dolin:

$$\text{Oszczędność} = \Delta h\Sigma g - \Delta h\Sigma d = \Delta h (\Sigma g - \Sigma d).$$

Ażeby jeszcze coś zaoszczędzić, posuwać będziemy jeszcze wyżej linię wyrównania, póki cośkolwiek oszczędzić będzie można, t. j. aż do położenia, w którym, po nieskończenie małym przesunięciu w górę, powierzchnie dolin powiększają się o więcej, niż się zmniejszają powierzchnie gór, czyli do chwili, w której oszczędność równać się będzie zeru; więc:

$$\Delta h (\Sigma g - \Sigma d) = 0, \text{ więc: } \Sigma g = \Sigma d,$$

t. j. kiedy suma wszystkich szerokości gór równa się sumie szerokości dolin. Łatwo się przekonać o tej równości za pomocą cyrkla. W tym wypadku oszczędność jest doprowadzona do możliwych granic, i sekcje, odpowiadające takiej linii wyrównania, są najkorzystniejsze.

Wogóle więc położenie linii wyrównania jest najkorzystniejsze, kiedy suma długości sekcji, które w skutek zmiany położenia linii wyrównania zwiększają się, jest równa sumie długości sekcji, które się zmniejszają.

Jeżeli jednostka kosztów przewozu jest rozmaita w rozmaitych sekcjach (np. w jednej sekcji przewóz na taczkach, w drugiej na wózkach, i t. p.), to nie można bezpośrednio dodawać szerokości gór i dolin, i szukać różnicy, lecz trzeba zmienić długość każdej takiej sekcji z osobna w stosunku odpowiednich kosztów przewozu, i dopiero wtedy próbować, czy różnica równa jest zeru.

Szukanie odpowiedniego położenia poziomej QQ omacniem, przez ciągle próbowanie, byłoby zbyt uciążliwem. Ażeby ułatwić sobie, używa się krzywych pomocniczych. Prowadzę dowolną poziomą przez Q' , na oko odpowiadającą przytoczonym wyżej warunkom, dodaję podstawy gór i sumę odcinam od pionowej SS do punktu g' . To samo czynię z dolinami i sumę ich podstaw odcinam od SS do d' . Widoczną jest różnica $d'g'$. Suma podstaw dolin jest większą, niżeli suma podstaw gór. Trzeba więc poziomą przez Q' posunąć na dół, dajmy na to, do położenia Q'' . Otrzymujemy tą drogą, jak wyżej, punkty g'' i d'' . Okazuje się, żeśmy za daleko na dół posunęli. Probujemy więc gdzieś po środku i znajdujemy nowe punkty g i d . Jeśli potem wszystkie g i d złączymy za pomocą krzywych, to przez ich przecięcie będzie oczywiście przechodziła szukana linia wyrównania QQ .

SPIS RZECZY.

A) Krzywa całkowita	[99]	1
B) Integrator	[109]	15
C) Zastosowania.		
1) Momenty	[118]	24
2) Belka	[128]	48
3) Linia sprężysta	[133]	39
4) Teorya sklepień	[143]	49
5) Wyrównanie mas	[154]	60
