ZARYS
STATYKI WYKREŚLNEJ.

(Część pierwsza).

Przedruk z wydania „Przeg. Techn.“ w Warszawie.
Lwów, 1876 r.

PRZEDMOWA.

Statyka wykreślna znaną jest jako nauka od lat jedenastu, t. j. od czasu ukazania się dzieła Culmanna p. t. „Die graphische Statik". Dzięki tej wiekopomnej pracy i dopełnieniom współczesnych, młoda ta nauka ma już dziś szerokie koło zwolenników, zwłaszcza w nowszej generacyi techników i matematyków; szkoły techniczne, jedna po drugiej, wprowadzają ją do swych programów, i nie ulega wątpliwości, że w bardzo krótkim czasie praktyczna jej doniosłość powszechnie oceniona zostanie. W naszym języku nie mieliśmy ani jednej większej pracy o tym przedmiocie. W obec takiego stanu rzeczy uważałem za pożyteczne ogłosić drukiem dziełko treściwe, ale zarazem dające dokładny obraz obecnego stanu nauki. Za wzór służyły mi głównie: klasyczne dzieło Culmanna i wyborne wykłady prof. Rittera—niemniej jednak uwzględniałem prace Cremony, Mohra, Winklera, Levy, Bauschingera i innych, a czytelnik, znający odnośną literaturę, będzie mógł ocenić, o ile niektóre kwestye w „Zarysie" moim zostały samodzielnie opracowane. Do części matematycznej służyło mi głównie znakomite dzieło prof. Żmurki „Wykład matematyki na podstawie ilości o dowolnych kierunkach" i rada osobista Autora, za którą czuję się w obowiązku wyrazić tutaj moją wdzięczność.

Nie wprowadziłem do wywodów Geometryi położenia ze względu, iż utrudniłoby to znacznie zrozumienie przedmiotu, ponieważ gałąż ta Matematyki nie jest u nas dość znana.

W końcu pozwolę sobie wyrazić nadzieję, że technicy nasi przyjmą to dziełko z pobłażaniem, jakiego pierwsza próba opracowania w polskim języku nowej nauki ma prawo wymagać.

Lwów, 14 Czerwca 1876 r.

B. A.

ROZDZIAŁ I.

Rachunek wykreślny.

§ 1. **Znaki geometryczne**. W rachunku wykreślnym przyjmujemy, że każda linia prosta, czy krzywa, jest śladem punktu, poruszającego się na płaszczyźnie lub w przestrzeni, więc że każda linia jest przez punkt poruszający się wykreślona. Ponieważ zaś punkt poruszać się może po jednej i tejże samej linii w dwojakim kierunku, raz od *A* do *B* [Tab. I_1] drugi raz od *B* do *A*, więc, aby odróżnić te dwa rodzaje powstawania jednej i tejże samej linii, przyjmujemy dowolnie jeden z tych kierunków, np. kierunek od *A* do *B* za dodatni, i powiadamy, że tok linii *AB* jest dodatni, a tok linii *BA* jest ujemny.

Nazywamy więc t o k i e m kierunek wzrostu pewnej linii, kierunek, w którym linia powstaje, i oznaczamy go za pomocą strzałki, jak na Tab. I_1.

P ł a s z c z y z n ę uważać będziemy za ślad prostej, obracającej się około jednego ze swych punktów i opierającej się jednocześnie na innej stałej prostej. Prosta *a* [Tab. I_2] obracać się może około punktu *O* dwojako: raz w kierunku strzałki, jak na figurze, drugi raz w odwrotnym. Z powodu tych dwóch różnych sposobów powstawania płaszczyzny uważać ją będziemy raz za dodatnią, drugi raz za ujemną, i powiadamy wtedy, że płaszczyzna ma tok dodatni lub tok ujemny.

Przyjmiemy raz na zawsze, że jeżeli prosta obraca się w kierunku tym, co i wskazówki zegara, to jest tak, jak na figurze oznaczono, to płaszczyzna przez ten obrót powstająca ma tok dodatni.

Każdy punkt prostej opisuje koło. Łuk tego koła, a więc i kąt odnośny będzie dodatni lub ujemny, odpowiednio do tego, czy linia obracała się w toku dodatnim lub ujemnym. Kąt *AOB* [Tab. I_3] jest dodatni, $\angle$ *BOA* ujemny;

$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COA = 0,$$

ponieważ $\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC$, a $\angle COA$ jest ujemny.

Możemy przedstawić sobie powierzchnię figury *mno* [Tab. I_4], jako opisaną przez promień zmiennej długości, którego jeden koniec stały jest w punkcie *O*, a drugi obiega obwód figury. Jeżeli promień zmienny, opisując powierzchnię, obraca się w toku dodatnim, to ją nazywać będziemy dodatnią, i odwrotnie. Odpowiednio do tego, koniec zmiennego promienia posuwa się na obwodzie figury w jednym z dwóch kierunków. Łatwo zauważyć, że, jeżeli postępując po obwodzie razem z tym końcem, będziemy mieli daną powierzchnię zawsze po prawej stronie, to będzie ona dodatnią, jeżeli po lewej ujemną.

Koła *m* i *n* [Tab. I_5], chociaż jednakowej są wielkości, różnią się atoli znakami. Powierzchnia koła *m* jest dodatnia, a koła *n*—ujemna. Suma więc powierzchni tych dwóch kół jest $= 0$.

Suma powierzchni kół spółśrodkowych *m* i *n* [Tab. I_6], mających różne toki, równa się powierzchni pierścionka kropkowanego, a suma powierzchni kół, mających toki jednakowe, równałaby się powierzchni pierścionka, więcej podwójna powierzchnia koła wewnętrznego.

Powierzchnię [Tab. I_7], ograniczoną krzyżującą się dwukrotnie linią krzywą, możemy, rozcinając w punktach *A* i *B*, rozłożyć na dwie dodatnie i jednę ujemną.

§ 2. **Dodawanie i odejmowanie odcinków.** Chcąc dodać kilka linij (*1*, *2*, *3*, *4*, *5*) [Tab. I_8], postępujemy w sposób następujący: Obieramy w płaszczyznie, w której się dane linie znajdują, punkt dowolny *O* [Tab. I_9]. Przez ten punkt przeprowadzamy linię *1'* równolegle od linii 1 i odcinamy na niej od punktu *O* jej wielkość. Przez koniec tego odcinka prowadzimy równoległą *2'* do linii *2*, przez koniec tej linii *3'* // do *3* i. t. d., odcinając zawsze wielkości linij i zestawiając je tak, żeby tok całego wieloboku w ten sposób wykreślonego był jednakowy, to jest żebyśmy, idąc po wieloboku od początku *O* do końca *S*, szli zawsze w kierunku strzałki. Linia, łącząca początek *O* wieloboku z jego końcem, wierzchołkiem *S* (summum), nazywa się s u m ą wszystkich danych linij.

Mówiąc innemi słowy, ponieważ przyjęliśmy, że każda prosta wykreśla się przez punkt, poruszający się w pewnym kierunku, a wszystkie boki wieloboku są zestawione w jednym toku, więc punkt ruchomy przebiegł po wieloboku od *O* do *S*. Do tegoż samego punktu doszedłby, idąc po drodze *OS*; *OS* więc zastępuje w zupełności wszystkie inne linie.

Oczywiście, tok sumy jest odwrotny tokowi całego wieloboku. Jeżeli po wykreśleniu wieloboku punkt *S* upadnie na punkt *O*, czyli jeżeli wielobok będzie zamknięty, to suma wszystkich linij równać się będzie zeru.

Wielobok linij, oprócz sumy wszystkich danych linij, daje nam także i sumy częściowe ilukolwiek z nich: tak np. linia *m* daje nam sumę linij *1* i *2*; linia *n* sumę *2*, *3* i *4* itd.

Porządek, w jakim linie składamy w wieloboku, jest zupełnie dowolny. Jeżeli bowiem na końcu linii *1'*, zamiast dodać linię *2'*, dodamy wprzód linię *3'* (na figurze linia perłowana *3''*), a następnie linię *2'* (na figurze *2''*), to rezultat ostateczny będzie jeden i ten sam, t. j. i jedną i drugą drogą dojdziemy oczywiście od punktu *R* do punktu *Q*, czy będziemy szli po *2'* i *3'* lub też po *3''* i *2''*. Linię *2*, tak przestawioną, możemy znowuż dalej zamienić z linią *4'* itd. Ponieważ zaś to samo uczynić możemy z każdą linią wieloboku, więc ostatecznie przychodzimy do wniosku, że porządek dodawania jest dowolny i zupełnie bez wpływu na sumę.

Jeżeli linie, które dodać mamy, mają jednakowy kierunek, czyli są równoległe [Tab. I_{10}], to wielobok linij zamienia się na prostą. W tym wypadku bierzemy dowolną prostą *m* // do danych linij i na niej [Tab. I_{11}] punkt dowolny *O*; od *O* poczynając, dodajemy nasze odcinki, zwracając zawsze na tok uwagę. Od punktu *O* do *1* odcinamy na prawo linię *1*. Od końca tej linii odcinamy na lewo linię *2*, do punktu *2*; od tego punktu dodajemy na prawo linię *3* itd. Linia *W*, łącząca *O* z końcem ostatniej linii *5*, jest sumą wszystkich linij.

To, cośmy poprzednio mówili o toku sumy, o sumach częściowych i o porządku dodawania, zastosowuje się tutaj bez zmiany.

Od linii a odjąć linię b znaczy dodać ją ze znakiem odwrotnym czyli z odwrotnym tokiem. Na Tab. I_{12} linia n daje nam sumę linij a i b, a linia m daje nam ich różnicę.

§ 3. **Mnożenie i dzielenie.** Odróżniać musimy dwa rodzaje mnożenia geometrycznego:

a) Mnożenie odcinków przez odcinki np. a przez b. W iloczynie otrzymujemy, jak wiadomo, powierzchnię prostokąta o podstawie a, a wysokości b. O tym rodzaju mnożenia mówić będziemy przy przekształcaniu powierzchni.

b) Mnożenie odcinków przez stosunek innych odcinków np. a przez $\frac{b}{m}$ gdzie a, b i m są wielkościami odcinków.

Ponieważ stosunek $\frac{b}{m}$ jest liczbą, więc mamy przed sobą mnożenie odcinka przez liczbę. Iloczyn szukany x jest oczywiście także odcinkiem:

$$x = a\left(\frac{b}{m}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1.$$

Jeżeli m przyjmiemy = jedności, to zdawałoby się, że otrzymamy zwykłe mnożenie a przez b; lecz pamiętać zawsze należy, że jedność ta jest zmienna: raz jest odcinkiem krótszym, drugi raz dłuższym np. calem albo centymetrem, stosownie do tego, jaką jedność wzięliśmy za podstawę mierzenia, i że od jej wielkości zależy także i wielkość iloczynu. Dla tego więc zachowamy w naszem mnożeniu m, i będziemy przypuszczali, że m jest dowolną długością. Ze zrównania 1. otrzymujemy:

$$x : a = b : m.$$

Iloczyn x jest więc czwartą proporcyonalną do trzech danych a, b i m.

Planimetrya podaje nam sposoby wykreślenia tej czwartej proporcyonalnej za pomocą podobnych trójkątów. Najwygodniej daje się to uskutecznić w sposób następujący:

Wykreślamy kąt dowolnej wielkości O [Tab. I_{13}] o nieograniczonych ramionach OR i OQ. Na jednem z ramion, OQ, odcinamy m i a od O do M i do A, a na drugiem b od O do B, łączymy B z M i prowadzimy przez A równoległą do tej linii, aż do przecięcia z OR w punkcie X; OX jest odcinkiem szukanym x, co jest widoczne, ponieważ $\triangle OMB \backsim \triangle OAX$, więc:

$$x : a = b : m.$$

Jeżeli, zamiast na różnych ramionach kąta, odetniemy b i m na jednem ramieniu, to w zasadzie wykreślenie zostanie toż samo, zmieni się tylko układ odcinków, jak na Tab. I_{14}.

Rozpatrując uważnie Tab. I_{13} i Tab. I_{14}, przychodzimy do wniosku że: aby pomnożyć odcinek a przez stosunek dwóch innych odcinków $\frac{b}{m}$, wykreślić należy dwa trójkąty podobne, których dane odcinki są bokami, zwracając uwagę na to, żeby a i b nie były ani bokami odpowiedniemi w obu trójkątach, ani też należały do jednego trójkąta.

Jeżeli kilka odcinków (a_1, a_2, a_3,....) [Tab. I_{15}] mamy pomnożyć przez jeden i tenże sam stosunek $\frac{b}{m}$, to na dowolnej prostej OR odcinamy od O do B, b, — i od O do M, m.— Przez M prowadzimy w dowolnym kierunku prostą MN z danemi odcinkami $MA'=a_1$, $A'A''=a_2$, $A'A''=a_3$, ... , ; przez B prowadzimy BQ // do MN. Linie, łączące O z A', A'', A''',..., przecinają się z linią BQ w punktach B', B'', B''',...., a BB'' $B'B''$, $B''B'''$,...... są szukanemi odcinkami $a_1\left(\frac{b}{m}\right)$, $a_2\left(\frac{b}{m}\right)$, $a_3\left(\frac{b}{m}\right)$,...... To samo możemy uskutecznić i w inny sposób, odcinając b i m na różnych ramionach, jak to Tab. I_{16} pokazuje.

Daną linię a podzielić przez stosunek $\frac{b}{m}$ jest to samo, co ją pomnożyć przez $\frac{m}{b}$, mamy więc bardzo łatwy sposób zamiany dzielenia na mnożenie.

Zadanie. — Wykreślić $x = 2a\left(\frac{b}{m}\right)^2 : n$, jeżeli są dane a, b, m i n. Mnożymy [Tab. I_{17}] $2a$ raz przez $\frac{b}{m}$; otrzymany odcinek $2a\left(\frac{b}{m}\right)$, jeszcze raz przez $\left(\frac{b}{m}\right)$., będzie $2a\left(\frac{b}{m}\right)^2$; iloczyn z tego mnożenia, pomnożony przez $\frac{1}{n}$, daje $OX = x$. Pierwsze działanie oznaczone jest na figurze linią kreskowaną, drugie kropkowaną, trzecie perłowaną.

§ 4. **Potęgowanie i wyciąganie pierwiastków**. Jeżeli a wyobraża nam prostą jakąkolwiek, $\frac{b}{m}$ stosunek dwóch innych prostych to:

$a,\ a\left(\frac{b}{m}\right),\ a\left(\frac{b}{m}\right)^2,\ a\left(\frac{b}{m}\right)^3,\ a\left(\frac{b}{m}\right)^4,\ \ldots\ldots$ (1.), to jest powtarzane mnożenie danego odcinka a przez jeden i tenże sam stosunek $\frac{b}{m}$, nazywa się potęgowaniem. Zadaniem więc potęgowania jest: mając a i $\left(\frac{b}{m}\right)$ znaleść $a\left(\frac{b}{m}\right)^n$.

Zadaniem zaś wyciągania pierwiastków jest odwrotnie znaleść stosunek $\frac{b}{m}$, mając dane a i $a\left(\frac{b}{m}\right)^n$.

Chcąc otrzymać $a\left(\frac{b}{m}\right)$, musimy, według zasad mnożenia, odciąć b i m na ramionach dowolnego kąta OP i OQ, [Tab. I_{18}], połączyć koniec odcinka b z końcem m prostą k, — dalej na ramieniu, na którem jest m, odciąć $OA=a$ i przez punkt A przeprowadzić do k równoległą. Równoległa ta odetnie na ramieniu OP prostą $OF=a\left(\frac{b}{m}\right)$. Jeżeli dalej linię b odetniemy na OQ (OB'), a linię m na OP (OM'), połączymy B' z M' za pomocą linii l i przez punkt F przeprowadzimy równoległą do l, to odetnie nam ona na OQ odcinek $OG=a\left(\frac{b}{m}\right)^2$. Dalej przez punkt H prowadzimy równoległą do k : otrzymamy $OH=a\left(\frac{b}{m}\right)^3$ i t. d.

W ten sposób otrzymujemy szereg (1.), stojący na czele paragrafu.

Linie AF, FG, GH, . . , . . tworzą takiż sam szereg, w którym tylko zamiast a mamy $a_1=AF$.

Jeżelibyśmy w szeregu (1.) przypuścili że $b=a$, $m=1$, tobyśmy otrzymali szereg potęg linii a zwyczajnych, lecz pamiętać należy, że pozostaje zawsze w mianowniku jedność, podniesiona do potęgi $n-1$, i że, ponieważ ta jedność jest zmienna, więc i wielkość potęg jest także zmienna i od niej zależna.

Potęgowanie uskutecznić możemy jeszcze w inny sposób. Jeżeli nakreślimy dwie linie OX i OY, przecinające się w punkcie O pod kątem prostym [Tab. I_{19}] i w kącie YOX wykonamy mnożenie $a = OA$ przez $\frac{b}{m}$, to otrzymamy OB jako iloczyn $a\left(\frac{b}{m}\right)$. Jeżeli w punkcie B wystawimy prostopadłą do AB i przedłużymy ją do przecięcia z OX w punkcie C, to $OC =$ będzie $a\left(\frac{b}{m}\right)^2$, ponieważ w podobnych trójkątach BOC i BOA jest: $OC : OB = OB : OA$, czyli $OC : a\left(\frac{b}{m}\right) = a\left(\frac{b}{m}\right) : a$, a więc $OC = a^2\left(\frac{b}{m}\right)^2 : a = a\left(\frac{b}{m}\right)^2$. W ten sposób możemy dowieść, że $OD = a\left(\frac{b}{m}\right)^3$, $OE = a\left(\frac{b}{m}\right)^4$ itd.

Jeżeli linię a mamy podnieść do potęgi jakiejkolwiek czyli wykreślić a, a^2, a^3, a^4. . . . ., albo raczej

a, $a\left(\frac{a}{1}\right)$, $a\left(\frac{a}{1}\right)^2$, $a\left(\frac{a}{1}\right)^3$. . . . , to na jednem z ramion osi prostokątnych [Tab. I_{20}] odcinamy $OA = 1$, a na drugiem $OB = a$, łączymy A z B, w punkcie B wystawiamy prostopadłą do AB i przedłużamy ją do punktu C; $OC = a^2$. Postępując w ten sposób, otrzymamy: $OD = a^3$, $OE = a^4$ i t. d. Na figurze przyjęliśmy $a = \frac{1''}{2}$, więc otrzymaliśmy $OC = \frac{1''}{4}$, $OD = \frac{1'''}{8}$, $OE = \frac{1''}{16}$ i t. d.

W y c i ą g a n i a p i e r w i a s t k ó w nie możemy uskutecznić za pomocą wykreślenia prostolinijnego, któregośmy używali przy potęgowaniu, za pomocą linii i cyrkla, musimy więc udać się do krzywych pomocniczych. Doskonale daje się tu zastosować linia logarytmiczna, którą wykreśliliśmy na Tab. II_1. Wszystkie zadania, które rozwiązać możemy za pomocą tablic logarytmicznych, rozwiązują się także i za pomocą tej krzywej, która jest niczem innem jak tylko wykreśloną tablicą logarytmów. Rzędne tej krzywej wyobrażają nam liczby, a odpowiednie odcięte ich logarytmy; AB jest logarytmem odcinka OA; OM przyjąć musimy jako jednostkę mierzenia danych liczb i logarytmów, bo w punkcie M krzywa przecina oś rzędnych, więc odcięta tego punktu $= 0$, a 0 jest logarytmem jedności. Widzimy stąd, że dla każdej jedności musielibyśmy mieć inną krzywą, lecz to się da usunąć, sprowadzając dane odcinki, na których mamy wykonywać działania logarytmiczne, do jedności, wziętej za podstawę wykreślenia linii logarytmicznej. Sprowadzanie do jedności $1''$ odcinka mierzonego jednością $1'$, łatwo się uskutecznić, mnożąc go przez stosunek $1' : 1''$. Za jednostkę miary w naszej logarytmice przyjęliśmy 1^{cm}. Linię taką najwygodniej jest wykreślić na papierze milimetrowym lub innym kratkowanym, bo możemy wtedy bardzo łatwo odczytywać wielkości danych linij i ich logarytmy. Zobaczymy później, że papier milimetrowy ułatwia także bardzo jej wykreślenie.

Jeżeli za pomocą tej linii pomnożyć chcemy kilka odcinków $l.l_1.l_2.l_3.....$ $\left(\text{a rzeczywiście l. } \frac{l_1}{1} \cdot \frac{l_2}{1} \cdot \frac{l_3}{1}......\right)$, to odcinamy wszystkie od punktu O jako rzędne, znajdujemy odpowiedne odcięte, dodajemy je i znajdujemy rzędną, odpowiadającą sumie odciętych. Rzędna ta jest szukanym iloczynem, gdyż, jak wiadomo, $\log (l_1.l_2.l_3.l_4......) = \log l_1 + \log l_2 + \log l_3 + ...$

D z i e l e n i e jest działaniem odwrotnem i odjąć musimy odcięte. Rzędna, odpowiadająca różnicy=ilorazowi szukanemu, gdyż $\log \frac{l_1}{l_2} = \log l_1 - \log l_2$.

Aby l podnieść do potęgi r, mnożymy odciętą, odpowiadającą l, przez r i znajdujemy y, odpowiadające temu iloczynowi.

Pierwiastek $\sqrt[n]{\frac{l_1}{l_2}}$ znajdujemy, opierając na tem, że $\log \sqrt[n]{\frac{l_1}{l_2}} = \frac{1}{n}(\log l_1 - \log l_2)$, a więc dla $y_1 = l_1$ i $y_2 = l_2$ szukamy odciętych x_1 i x_2, od x_1 odejmujemy x_2, dzielimy różnicę na n części i wynajdujemy odpowiednią temu ilorazowi rzędną.

$\sqrt[n]{l_1.l_2.l_3...}$ znajdziemy, dodając logarytmy odcinków l_1, l_2, l_3..., dzieląc sumę przez n i wynajdując odpowiednią rzędną.

Najogólniejszem zadaniem, jak to już wyżej wspomnieliśmy, z wyciągania pierwiastków jest następujące: Jeżeli dane są a, i $a\left(\frac{b}{m}\right)^n$, znaleść $\frac{b}{m}$. Wiemy, że: $\log a\left(\frac{b}{m}\right)^n = \log\ a$ $+ n \log\left(\frac{b}{m}\right)$, więc $\log\left(\frac{b}{m}\right) = \frac{\log a\left(\frac{b}{m}\right)^n - \log a}{n}$.

Druga część ostatniego zrównania podaje nam wyraźnie sposób wynalezienia odciętej $= \log\left(\frac{b}{m}\right)$, a tem samem i odpowiedniej rzędnej, która jest stosunkiem szukanym.

Przypatrzmy się bliżej własnościom krzywej logarytmicznej; $x = \log y$ lub też $y = e^x$ jest jej równaniem.

Dla $x = o$, $y = 1$, więc krzywa przecina oś rzędnych w oddaleniu $= 1$ od 0. Jeżeli ψ oznacza kąt nachylenia stycznej w jakimkolwiek punkcie, to:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{dy}{dx} = e^x = y,$$

więc wielkość stycznej trygonometrycznej w każdym punkcie równa się rzędnej tego punktu. Mamy więc bardzo łatwy sposób wykreślenia stycznej do krzywej w danym punkcie Q. Od podstawy P rzędnej tego punku odcinamy na osi X, $PK = 1 = MO$ i łączymy K z Q; KQ jest żądaną styczną, ponieważ

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{QP}{PK} = \frac{y}{1} = y;$$

PK zwie się p o d s t y c z n ą krzywej w punkcie Q. Dowiedliśmy, że ta podstyczna jest stała i równa jedności. Wychodząc z tej danej, możemy łatwo wykreślić przybliżenie linię logarytmiczną.

Bierzemy system spółrzędnych OX i OY. [Tabl. II_2]. Jedność naszą odcinamy na osi Y od O do M, a na osi X od O kilkakrotnie na obie strony. Dzielimy potem jeszcze każdą jedność na osi X na kilka części [na Tab. II_2 na dwie] i przez punkty podziału prowadzimy równoległe do osi Y. Otrzymujemy w ten sposób szereg pasków pionowych równej szerokości. W środku każdego paska przeprowadzamy jeszcze linie na figurze kreskowane. Mając tak przygotowany papier, możemy przystąpić do wykreślenia krzywej. Najprzód wykreślamy styczną w punkcie *M*, łącząc *M* z punktem *A*, leżącym w odległości$=1$ od *O*, i rysujemy ją na obie strony punktu *M*, do środków pasków przyległych, do linij kreskowanych od *1'* do *2'*. Potem łączymy punkt *2'* z punktem *2* i rysujemy część stycznej *2' 3'*. Połączywszy *3'* z *3*, otrzymujemy część następnej stycznej *3'4'* itd.

Im na większą ilość części podzielimy naszą jedność, tem dokładniejszą otrzymamy krzywą; podział dwumilimetrowy jest zupełnie wystarczający. Dla kontroli dobrze jest znaleść naprzód kilka punktów za pomocą tablic logarytmicznych i dopiero potem wykreślać krzywą sposobem wskazanym, uważając, aby przez obliczone punkty przechodziła. Możemy przedłużyć krzywą na drugą stronę osi *Y*, gdzie zbliża się ona asymptotycznie do osi *X*.

§ 5. **Przekształcanie powierzchni.** Powierzchnię α przekształcić na podstawę *p* znaczy znaleść prostokąt równowarty, którego jeden bok$=p$, lub też, co na jedno wychodzi, znaleść odcinek *f*, który, pomnożony przez *p*, da nam powierzchnię α. Jeżeli mamy np. powierzchnię 8 centr. kwadr. i przekształcimy ją na podstawę $p = 2$ cent., to otrzymujemy $f = 4$ cent. Jeżeli mamy kilka powierzchni i każdą z nich przekształcimy na podstawę *p*, to otrzymane stąd odcinki f_1, f_2, f_3. . . . będą proporcyonalne do danych powierzchni. Odcinkami temi możemy rachować, jak w pierwszym rozdziale.

§ 6. **Przekształcanie trójkątów.** Na podstawie *AB* trójkąta *ABC* [Tab. II_3] odcinamy od *A* do *B* podwójną podstawę przekształceń *2p*. Łączymy *P* z *C* i przez *B* prowadzimy *BD*// do *PC*. Prostopadła *DF* jest linią szukaną *f*, bo połączywszy *D* z *P* otrzymamy $\triangle\ ADP = \triangle\ ABC$, którego powierzchnia$=2p.{}^1/_2 f = pf$; więc rozwiązaliśmy nasze zadanie, ponieważ znaleźliśmy taką linię *f*, która, pomnożona przez podstawę przekształceń *p*, daje nam powierzchnię trójkąta *ABC*.

§ 7. **Czworokąty.** Możemy łatwo zamienić czworokąt *ABCD* [Tab. II_4] na trójkąt równowarty *ECB*, prowadząc przekątną *AC* i przez wierzchołek *D* do niej równoległą, przecinającą *AB* w punkcie *E*. Trójkąt *CBE* równowarty jest czworokątowi *ABCD*, ponieważ do $\triangle$ *ABC* możemy zamiast $\triangle$ *ACD* dodać $\triangle$ *ACE* równowarty $\triangle$ *ACD*. Trójkąt, w ten sposob otrzymany, przekształcamy na podstawę *p* sposobem wyżej wskazanym.

Można także dane czworokąty odrazu przekształcać na podstawę *p*, nie zmieniając ich wprzód na trójkąty. W danym czworokącie *ABCD* [Tab. II_5] (to co mówimy stosuje się dosłownie do Tab. II_6, II_7, II_8) prowadzimy dowolną przekątną *BD* i przez wierzchołki *A* i *C*, równoległe *m* i *n* do tej przekątnej. Budujemy potem na *BD*, jako przeciwprostokątnej, trójkąt prostokątny *BMD*, którego jeden bok $BM=2p$ (zakreślamy promieniem *2p* ze środka *B* koło i z punktu *D* prowadzimy styczną do tego koła). Część (*FF'*) drugiego boku, zawarta między liniami *m* i *n*, jest szukaną linią *f*. Gdyż, połączywszy *B* z *F* i *F'*, otrzymujemy trójkąt *BFF'*, równowarty czworokątowi *ABCD*, którego podstawą jest *FF'* a wysokością *2p*, więc powierzchnia jego $= FF'\,{}^1\!/_2\,2p = FF'p$.; $\triangle BFF'$ kreskowany jest równowarty czworokątowi *ABCD*, ponieważ przekątna *BD* dzieli trójkąt i czworokąt każdy na dwa trójkąty (w wypadkach II_7 i II_8 jeden ujemny, drugi dodatni), odpowiednio sobie równowarte, t. j. że $\triangle$ *ABD* jest równowarty trójkątowi *FBD*, a trójkąt *BCD* trójkątowi *BFD*, możemy więc zamiast $\triangle$ *BDA* wziąć $\triangle$ *ADF* i zamiast $\triangle$ *BDC* wziąć $\triangle$ *BDF'*.

Jeżeli podwójna podstawa przekształceń, *2p*, jest większa niż przekątna *BD*, to w zadaniu naszem musimy zamienić *2p* z *f*. Postępujemy wtedy w sposób następujący. Przeprowadzamy przez *C* równoległą *n* do *BD*, z punktu *A* odcinamy *2p* do punktu *P* na linii *n*; prostopadła z punktu *B* na linię, przeprowadzoną przez punkt *D* równolegle do *AP*; jest linią szukaną *f*, ponieważ, po przeprowadzeniu przez *A* linii *m* // do *n*, $RR' = 2p$, pomnożone przez ${}^1\!/_2 BF$, daje nam powierzchnię trójkąta *RR'B*, równowartego czworokątowi *ABCD*.

§ 8. **Wielokąty**. Chcąc wielokąt *012345* [Tab. II_{10}] przekształcić na podstawę *p*, zamieniamy go wprzód na czworokąt, który potem sposobem wskazanym przekształcamy na daną podstawę. Zamianę na czworokąt uskuteczniamy dwojako:

a) Z jednego wierzchołka *0* prowadzimy przekątną *02*; przez wierzchołek *1* równoległą *12'* do tej przekątnej. Punkt przecięcia *2'* tej równoległej z bokiem *23* łączymy z *0*. Otrzymany w ten sposób trójkąt *02'2* jest równowarty trójkątowi *012*, więc możemy zastąpić jeden przez drugi. Dany 6-kąt zamienia się w ten sposób na 5-kąt *02'345*. Łączymy dalej *0* z *3*, przez *2'* prowadzimy *2' 3'* // do

03, łączymy *0* z *3'* i zamieniamy w ten sposób 5-kąt na czworokąt *03'45*.

b) Łączymy *0* z *2* [Tab. II_{11}], i przez punkt *1* prowadzimy *11'* // do *02*. Zamiast trójkąta *012* możemy wziąć trójkąt *012'* (bok *1'2* niewykreślony). Pozbywamy się w ten sposób jednego wierzchołka i wielokąt *0123456* zamienia się na *1'23456*. Łączymy następnie *1'* z *3*, przez *2* prowadzimy *22'*// do *13'* i zamieniamy trójkąt *1'23* na *1'2'3*; pozbywamy się jeszcze jednego wierzchołka i otrzymujemy 5-kąt *2'3456*, równowarty danemu wielokątowi. Pozbywszy się jeszcze jednego wierzchołka; otrzymujemy nareszcie czworokąt *3'456*, który odrazu zamieniamy na podstawę *2p* jak na figurze. Jestto sposób, najczęściej używany przy przekształcaniu profilów poprzecznych i [Tab. II_{11}] przedstawia nam taki profil wykopu. Zastępujemy naprzód linię górną łamaną *01234* prostą *3'4*, odcinającą po obu stronach równe powierzchnie, i otrzymujemy w ten sposób czworokąt, który przekształcamy na podstawę *p*. Po nabyciu pewnej wprawy można przekształcać powierzchnie zupełnie mechanicznie, nie zastanawiając się i nie wyciągając linii, przykładając tylko trójkąty i oznaczając punkty. Rysuje się odrazu linię ostateczną, zamieniającą wielokąt na czworokąt.

Jeżeli wielokąt jest skrzyżowany [Tab. II_{12}] (nasyp i wykop w jednym profilu), to zamieniając sposobem wskazanym, otrzymamy czworokąt, równowarty różnicy obu powierzchni *012M7* i *M3456*, ponieważ te dwie powierzchnie różnią się znakami, jak to łatwo zauważymy, nadawszy tok obwodowi figury.

Zostawiamy czytelnikowi zastosowanie obu wskazanych metod do przekształcania tego rodzaju wielokątów.

§ 9. Wycinek koła *OAB* [Tab. II_{13}] równowarty jest trójkątowi *OAB'*, którego wierzchołek leży w *O*, a podstawa *AB'*, jest częścią stycznej do koła, równą wyprostowanemu łukowi *AB*. To wyprostowanie uskutecznia się przybliżenie, dzieląc łuk *AB* na tyle części, że każda z nich uważana być może za równą cięciwie i odcinając te części na stycznej od *A* do *B'*.

Odcinek koła *AB* równowarty jest trójkątowi *AOB'* mniej △ *AOB* czyli równowarty jest czworokątowi skrzyżowanemu *ABOB'*.

§ 10. **Powierzchnie, ograniczone dowolnemi krzywemi.** Odcinek paraboliczny *AB* [Tab. II_{14}] równowarty jest trójkątowi *ACB*, którego podstawą jest cięciwa *AB*, a wysokością $^4/_3$ strzałki tego odcinka. Jest to znana własność paraboli, na której opierając się, możemy, przyjąwszy małe części krzywolinijnego obwodu za łuki paraboliczne, zamieniać figury krzywolinijne na wielokąty równowarte. W tym celu obwód danej figury [Tab. II_{15}] dzielimy na części, które uważać możemy jako łuki paraboliczne, zamieniamy odcinki na trójkąty równowarte, uważając, żeby zawsze nowy wierzchołek trójkąta leżał na przedłużonym boku trójkąta poprzedniego. Powierzchnia *OAB* zamieni się w ten sposób na 6-kąt *AOB123*, który, następnie zamieniwszy na czworokąt, możemy przekształcić na podstawę *p*.

Inny sposób obliczania powierzchni, znany powszechnie pod nazwą kwadratury Ponceleta, polega na tem, że w danej powierzchni mierzą się rzędne, przeprowadzone w równej odległości, dodają się, i suma mnoży się przez ich stałą odległość *d*. Jest to sposób, najczęściej używany przy obliczaniu profilów poprzecznych rzek.

Możemy także zastosować do obliczania powierzchni tak zwane krzywe całkowe. Równaniem dowolnej krzywej *l* [Tab. II_{16}] w ogólnej formie jest:

$$y = f(x).$$

Jeżeli wykreślimy drugą krzywą *m*, której ogólnem równaniem będzie:

$$Y = \int f(x)\, dx + C,$$

to jest taką krzywą, że każda jej rzędna, np. $AB = Y$, wyobrażać nam będzie powierzchnię kreskowaną więcej pewna ilość stała *C*, to tę krzywą, zwaną krzywą całkową, możemy bezpośrednio zastosować do obliczania powierzchni, gdyż po odjęciu od którejkolwiek rzędnej np. od *AB* rzędnej *PQ*, odpowiadającej pierwszemu punktowi krzywej, to jest po odjęciu części stałej *C*, *AB'* mierzone jednością, przyjętą do wykreślenia linii całkowej, da nam powierzchnię kreskowaną. Różniczkując drugie równanie, otrzymamy $\frac{dY}{dx} = f(x) = y = \operatorname{tg}\psi$, jeżeli ψ oznacza nachylenie stycznej w danym punkcie krzywej całkowej. Więc rzędne *y* danej krzywej $y = f(x)$ są wielkościami stycznej trygonometrycznej kąta nachylenia stycznej przeprowadzonej do krzywej całkowej w odpowiedniem punkcie. Jeżeli więc od B odetniemy do D jedność, to styczna do całkowej będzie // do $A'D$, ponieważ $\mathrm{tg} A'DB = \frac{A'B}{DB} = \frac{y}{1} = y$. Opierając się na tem, łatwo możemy dla każdej krzywej wykreślić przybliżenie całkową. Mając daną krzywą l [Tab. II_{17}], prowadzimy równolegle do osi Y linie w odległości 1 od siebie. Niech BA wyobraża naszą jedność; każdą taką jedność dzielimy na kilka części (na trzy na fig.) i prowadzimy przez punkty podziału równolegle do osi Y. Ponumerowawszy punkty na osi X, poczynając od punktu, leżącego w odległości 1 od podstawy pierwszej rzędnej, cyframi *1*, *2*, *3*, *4*, ..., a punkty przecięcia krzywej z pionowemi, począwszy od jej początku cyframi $1'$, $2'$, $3'$,...., łączymy *1* z $1'$ i przez dowolny punkt pierwszej pionowej $1''$ prowadzimy do $11'$ równoległą do środka paska następującego, do linii kreskowanej. Następnie łączymy punkt *2* z $2'$ i od końca poprzedniej linii $1''$ prowadzimy $2''$ równoległą do $22'$ i przedłużamy ją do środka następnego paska; postępując w ten sposób dalej, otrzymamy przybliżoną całkową linię PQ. Rzędne tej krzywej, mierzone jednością BA, dają nam powierzchnię krzywej więcej ilość stała C, której się łatwo pozbywa, przeprowadzając przez P poziomą i mierząc rzędne tylko od tej poziomej. I tak rzędna FG, mierzona jednością BA, daje nam powierzchnię, ograniczoną rzędnemi $1'4$ i $F'G'$; po przejściu przez punkt M', powierzchnia staje się ujemną, więc rzędne całkowej, dające sumę algebraiczną powierzchni do danego miejsca, zaczynają się zmniejszać; nareszcie w punkcie L suma powierzchni ujemnej i dodatniej równa jest *0* i rzędne całkowej bez stałej C stają się ujemne, jak to widzimy na tablicy. Dokładność naturalnie będzie tem większa, im na większą ilość części podzielimy naszę jedność. Jeżeli OP [Tab. II_{18}] jest całkową powierzchni, leżącej po nad osią X, a OQ całkową powierzchni pod tą osią, to ostatnia rzędna PQ, mierzona jednością, przyjętą za podstawę wykreślenia, daje powierzchnię zamkniętą $OmAl$. Jeżeli tę daną powierzchnię podzielić chcemy w pewnym stosunku (np. $m:n$), to dzielimy naprzód PQ w tym stosunku ($PB:BQ = m:n$), a potem szukamy rzędnych między krzywemi całkowemi, równych odpowiednim częściom prostej PQ ($P'B'$).

Powierzchnia *OmAl* jest równowarta prostokątowi, którego wysokością jest jedność, a podstawą *PQ*. Jeżeli do wykreślenia linii całkowej zamiast jedności weźmiemy podstawę przekształceń, to rzędne całkowej przedstawiać będą przekształcone powierzchnie.

Najwygodniej jest narysować raz na zawsze na twardym papierze linie równoległe w małej odległości (1^{mm}) od siebie. Chcąc znaleść potem całkową dla danej krzywej, przerysowuje się ją na papierze przezroczystym, kładzie się na papierze liniowanym i odrazu wykreśla się linię całkową.

§ 11. **Wykreślne wyrównanie mas.** W robotach ziemnych, przy budowie dróg, następują jak wiadomo, po sobie wykopy i nasypy. Ziemię do nasypów można dostawać dwoma sposobami: a) biorąc ją skądkolwiek obok drogi, wykopując ją z tak zwanych r e z e r w i przywożąc do nasypu lub też b) używając, do tego ziemi, otrzymanej z wykopów, zastosowując tak zwany system wyrównania mas. Sposób drugi jest wogóle najlepszy, bo najtańszy, ponieważ w sposobie a) ziemię z wykopu niezużytkowaną trzeba wywieść na bok i złożyć w o d k ł a d z i e, a dla nasypu trzeba zakupić ziemię, wykopać ją i zawieść na miejsce, gdy tymczasem w sposobie b) ziemię z wykopu od razu zużytkowujemy w nasypie Systemu wyrównania mas nie używa się tylko wtedy, kiedy wykop daje zły materyał do nasypu, albo kiedy odległości przewozu w bardzo długich po sobie następujących wykopach i nasypach są tak wielkie, że koszty wyrównania są większe od kosztów zakupywania rezerw i powtórnego kopania ziemi, albo też w razach wyjątkowego pośpiechu.

Zadaniem wykreślnego wyrównania mas jest znalezienie sposobem wykreślnym najwygodniejszego rozkładu i zużytkowania mas przy wyrównaniu. Tab. III przedstawia nam obliczenie tego rodzaju. U góry mamy profil podłużny drogi. Przez dowolny punkt *O*, leżący pod tym profilem, przeprowadzamy poziomą oś odciętych *OX*, obliczamy następnie masę ziemi między profilami poprzecznemi 0 i 1 i w dowolnej skali (na Fig. $1^{mm}=40$ m. kub.) odcinamy ją jako rzędną $A_1 1$. Dalej obliczamy masę między profilami poprzecznemi 1 i 2, dodajemy do rzędnej $A_1 1$ i odcinamy ją, jako rzędną $A_2 2$. W ten sam sposób otrzymujemy $A_3 3$. — W punkcie *P* jest przejście od nasypu do wykopu; rzędna tego punktu równa jest $A_3\ 3 +$ masa ziemi między profilem poprzecznym 3 a przejściem. Zaraz po *G* następuje wykop, którego masę uważamy za ujemną; więc rzędna $4_4 4 =$ jest rzędnej $A_g\ G$ mniej masa ziemi między *G* a profilem 4. W ten sposób postępując dalej, wynajdując rzędne dla każdego profilu, otrzymamy, połączywszy wierzchołki rzędnych po sobie następujące prostemi, tak zwany profil mas, który widocznie jest linią łamaną, podnoszącą się w górę w nasypach, a spadającą na dół w wykopach. Punkty szczytowe *G* i najniższe punkty *D* wgięcia oznaczają przejścia od nasypu do wykopu lub też od wykopu do nasypu. W ogóle rzędna profilu mas w dowolnym punkcie daje nam sumę algebraiczną wszystkich mas od początku *O* aż do tego miejsca. Masy nasypu w tem dodawaniu uważają się za dodatnie, masy wykopu za ujemne. Gdyby rzędne profilu podłużnego były proporcyonalne do profilów poprzecznych w danem miejscu (łatwo wykreślić taki profil), to profil mas, jak z poprzedniego widzimy, był by linią całkową takiego profilu. Linia profilu mas jest tem bardziej stroma, im większa jest masa między dwoma odpowiedniemi profilami i w ogóle styczna trygonometryczna nachylenia profilu mas jest proporcyonalna do profilu poprzecznego w danem miejscu. Jest to własność linii całkowej, o której mówiliśmy poprzednio. Jeżeli od masy $A_3 3$ odejmiemy masę $A_2 2$, to otrzymamy w różnicy masę, zawartą między profilami poprzecznemi 2 i 3.

Przeprowadźmy przez profil mas dowolną poziomą QQ. Między dwoma punktami, np. M i N profilu mas, leżącemi na tej poziomej, następuje zupełne wyrównanie mas, gdyż między M a N było tyleż wykopu, co i nasypu. Rzędna CM jest $= DN$, to znaczy, że odjęliśmy i dodaliśmy do CM na przestrzeni od M do N równą masę ziemi, więc między M i N masa ziemi wykopanej wystarcza do usypania nasypu. To samo powiedzieć możemy o każdych dwóch punktach, leżących na poziomej np. J i H. Na całej więc przestrzeni między J i H następuje wyrównanie: na lewo od J nasyp jest za długi i za wielki i nie opłaciłoby się do niego sprowadzać ziemi z dalekiego wykopu, więc się ją kopie z rezerwy, leżącej obok drogi, po prawej zaś stronie wykop jest bardzo długi, trzebaby było daleko zeń ziemię wozić, aby ją zużytkować, co za drogo by kosztowało, więc się ją składa obok drogi w odkładzie.

Profil mas i linia pozioma QQ, którą nazwijmy linią wyrównania, pokazują nam widocznie, jak zużytkować i dokąd przewieźć mamy masy z wykopów. Nazwijmy powierzchnie JGK, LGM, NGH, leżące po nad linią wyrównania, g ó r a m i, a powierzchnie KDL, MDN, leżące pod poziomą, d o l i n a m i. Góry i doliny wyznaczają s e k c y e przewozu. W górach ziemię wykopaną, przewozi się w tył, w dolinach naprzód, co jest oczywistem, bo w górach zawsze po lewej stronie mamy nasyp (profil podnosi się), a po prawej wykop (profil opada). W dolinach odwrotnie. Otrzymujemy w ten sposób dwa rodzaje sekcyj: jedne, w których w t y ł, drugie, w których się n a p r z ó d przewozi. Oznaczono to strzałkami na tablicy III.

Linię wyrównania QQ przeprowadziliśmy dowolnie. Nasuwa się pytanie, jak ją najlepiej przeprowadzić, tak żeby koszty wyrównania były najmniejsze? Jak wiadomo, koszty k przewozu jednostki objętości na odległość x przedstawiają się równaniem $k = \alpha + \beta x$, w którem α i β są spółczynnikami, zależnemi od rodzaju środków przewozu (taczkami, wózkami, na kolejach roboczych i t. p.). Koszty K przewozu masy M przedstawią się równaniem $K = M(\alpha + \beta x) = M\alpha + M\beta x$. Otóż powierzchnie gór i dolin są proporcyonalne do kosztów, a raczej do zmiennej części kosztów, zależnej do długości przewozu x, do $M\beta x$ (część stała kosztów $M\alpha$ dodaje się od kosztów wzruszania ziemi), gdyż, jeżeli element objętości ΔM w sekcyi drugiej, chcemy przewieźć od miejsca, w którem się znajduje, do przejścia z wykopu w nasyp, od S do miejsca, leżącego na pionowej przez D, to koszty przewozu tego elementu będą proporcyonalne do powierzchni elementu kreskowanego powierzchni, t. j. do iloczynu elementu masy ΔM przez przebytą drogę do $\Delta M.o$, czyli, co na jedno wychodzi, do p r a c y p r z e w o z u tego elementu od S do D, a koszty przewozu całego wykopu w tej sekcyi do D będą proporcyonalne do sumy wszystkich elementów powierzchni czyli do całej powierzchni KDT. Tak samo rozumując, przyjdziemy do wniosku, że powierzchnia TDL jest proporcyonalna do kosztów przewozu masy ziemi, wykopanej od przejścia z wykopu do nasypu, aż do miejsc odpowiednich w nasypie. Cała więc powierzchnia doliny jest proporcyonalna do kosztów zmiennych przewozu w sekcyi, odpowiadającej tej dolinie. Zupełnie to samo stosuje się do powierzchni gór.

Powierzchnie gór lub dolin łatwo obliczyć, przekształcając je na jakąkolwiek podstawę lub oprowadzając je planimetrem. Jako jednostkę mierzenia kosztów, do których te powierzchnie są proporcyonalne, przyjąć musimy koszty przewozu pewnej danej masy ziemi na daną odległość, czyli koszty, odpowiadające pewnej jednostce pracy przewozu (np. koszty przewozu 100 metrów sześciennych ziemi na odległość 50 metrów). Lecz jednosć taka jest najczęściej niewygodna do mierzenia powierzchni gór i dolin, gdyż nie jest zwykle kwadratem lecz prostokątem (jednosć taka jest narysowana w sekcyi III-ej), dla tego też zamieniamy tu jednosć podłużną na równowarty kwadrat. Zmianę tę uskutecznia się zwykle w zwiększonej podziałce dla dokładności. Kwadrat otrzymany daje nam jednostkę pracy; jednostkę kosztów obliczać należy dla każdego specyalnego wypadku. Jeżeli powierzchnię góry albo doliny przekształcimy na podstawę równą bokowi kwadratu wspomnianego, to odcinek f, otrzymany z przekształcenia, mierzony bokiem kwadratu jako jednostką, daje nam ilość jedności pracy w przekształconej powierzchni. Zwykle za podstawę przekształceń bierze się odcinek, równy kilku bokom wymienionego kwadratu; wtedy każdej jednostce odcinka f przypisuje się wartość tych kilku jednostek podstawy przekształceń.

Jak już o tem wspomnieliśmy, na lewo od punktu J bierzemy ziemię z rezerwy, a na prawo od H ziemię z wykopu wywozimy na bok i składamy w odkładzie. Praca przewozu ziemi z rezerwy do nasypu lub z wykopu do odkładu jest także proporcyonalna do drogi przewozu, jeżeli więc rezerwa i odkład są równoległe do drogi, to jako powierzchnie, przedstawiające pracę przewozu, otrzymamy powierzchnie, zawarte między profilem mas a liniami m i n, do niego równoległemi. Rezerwa leży na przestrzeni od punktu J do J_1, a odkład od H do H_1. Na lewo od J_1 i na prawo od H_1 następuje znowu wyrównanie mas. Powierzchnia JJ_1VU jest proporcyonalna do całej pracy przewozu z rezerwy, a pow. $HEFH_1$ do całej pracy wywozu ziemi do odkładu. Jeżeli rezerwa i odkład nie są równoległe do osi drogi, lecz ziemię dobywa się z jednego punktu, z jednej jamy, lub ziemię z wykopów wozi do jednego miejsca, to linie m i n nie są wtedy równoległemi do profilu mas, lecz są liniami, których punkty są rozmaicie oddalone od tego profilu, bo w tych wypadkach każdy punkt drogi ma inną odległość do rezerwy lub odkładu,

Zmieniając położenie linii QQ, zmieniamy także i wielkość powierzchni gór, dolin i powierzchni proporcyonalnych do przewozów bocznych. Posuwając QQ w górę, zmniejszamy powierzchnie wszystkich dolin i przewozów bocznych. Rzecz się ma odwrotnie, gdy QQ przesuwamy na dół. Przy tem przesuwaniu zmienia się długość każdej sekcyi i zmienia się suma wszystkich powierzchni gór, dolin i przewozów bocznych, a ponieważ te powierzchnie są proporcyonalne do kosztów, więc i koszty się zmieniają. Pomiędzy wszystkiemi położeniami linii QQ jest jedno, które odcina najmniejsze powierzchnie po obu swych stronach. Sekcye, odpowiadające takiej linii wyrównania, powinny być w praktyce zachowane, bo koszty przewozu są wtedy najmniejsze. Zadaniem naszem jest znaleść to najkorzystniejsze położenie linii QQ. Posuńmy ją w tym celu w górę o nieskończenie małą wysokość Δh. Oznaczmy szerokość podstaw gór ogólnym znakiem g, a szerokość dolin d. Praca przewozu każdej góry zmniejszy się wskutek przesunięcia o $g\Delta h$, a doliny zwiększy się o $d\Delta h$, w całym profilu mas o sumę: $\Sigma g\Delta h$ i $\Sigma d\Delta h$, lub, ponieważ Δh jest jednakowe we wszystkich górach i dolinach, o $\Delta h\Sigma g$ i o $\Delta h\Sigma d$. Jeżeli zmniejszenie pracy przewozu (wskutek zmniejszenia pow. gór,—pracę przewozów bocznych zostawimy przez chwilę na boku) jest znaczniejsze niż jej zwiększenie (wskutek zwiększenia pow. dolin), tośmy coś zaoszczędzili z pracy ogólnej przez przesunięcie linii wyrównania w górę. Oszczędność równa jest różnicy między ubytkiem powierzchni gór a przyrostkiem powierzchni dolin:

$$\text{Oszczędn.} = \Delta h\Sigma g - \Delta h\Sigma d = \Delta h\ (\Sigma g - \Sigma d).$$

Ażeby jeszcze coś zaoszczędzić, posuwać będziemy jeszcze wyżej linię wyrównania, aż póki cośkolwiek oszczędzić będzie można, t. j. aż do położenia, w którem po nieskończenie małem przesunięciu w górę powierzchnie dolin powiększają się o więcej niż się zmniejszają powierzchnie gór, czyli do chwili, w której oszczędność równać się będzie zeru, t. j. $\Delta h(\Sigma g - \Sigma d) = 0$, więc $\Sigma g = \Sigma d$ t. j. kiedy suma wszystkich szerokości gór = sumie szerokości dolin. Łatwo się przekonać o tej równości za pomocą cyrkla. W tym wypadku oszczędność jest doprowadzona do możliwych granic i sekcye, odpowiadające takiej linii wyrównania, są najkorzystniejsze. Pominęliśmy w poprzedniem powierzchnie, przedstawiające pracę przewozów bocznych, lecz ponieważ zwiększają się one przy posuwaniu linii QQ w górę, trzeba je do dolin doliczyć. Jeżeliby się zmniejszały jak np. dla linii wyrównania, przechodzącej przez J_1 lub H_1, tobyśmy je dołączyli do powierzchni gór i w szukaniu szerokości gór i dolin dodalibyśmy szerokość pow. przewozów bocznych do szerokości gór.

W ogóle więc położenie linii wyrównania jest najkorzystniejsze, kiedy suma długości sekcyj, które w skutek zmiany położenia linii wyrównania zwiększają się, jest równa sumie długości sekcyj, które się zmniejszają.

Jeżeli jednostka kosztów przewozu jest rozmaita w rozmaitych sekcyach (np. w jednej sekcyi przewóz na taczkach, w drugiej na wózkach itp.), to nie można bezpośrednio dodawać szerokości gór i dolin i szukać różnicy, lecz trzeba zmienić długość każdej takiej sekcyi z osobna w stosunku odpowiednich kosztów przewozu i dopiero wtedy próbować, czy óżnica jest równa zeru.

Zawieleby czasu zajęło szukanie najkorzystniejszego położenia linii wyrównania przez ciągłe próbowanie, dla tego też używa się tak zwanej krzywej błędów, prowadzącej daleko prędzej do celu. Przeprowadzamy najprzód najodpowiedniejszą na oko linię wyrównania QQ i znajdujemy różnicę pomiędzy szerokościami gór a szerokościami dolin i pow. przewozów bocznych. Różnicę, oznaczającą na Tab. III przewyżkę szerokości dolin nad szerokościami gór, odcinamy na linii wyrównania $Q\,Q'$ od 1 do 1'. Przesuwamy następnie naszą linię wyrównania trochę na dół do położenia $Q''Q''$, dla tej linii otrzymujemy odwrotnie, jak poprzednio przewyżkę gór nad dolinami, więc odcinamy ją na linii wyrównania $Q'Q$- od pionowej przez 1, jako mającą tok inny od punktu 2 na lewo do 2 Jeżeli jeszcze między obu liniami wyrównania QQ i $Q''Q''$ przeprowadzimy kilka innych, to połączywszy końce odciętych od pionowej na obie strony różnic, otrzymamy linię krzywą, idącą od 1' do 2, tak zwaną krzywą błędów. Na przecięciu tej krzywej błędów z pionową przez 1 leży jeden punkt szukanej linii wyrównania, co jest oczywiste, bo w tym punkcie różnica jest równa zeru. Ponieważ na naszej tablicy linia wyrównania nie przechodziła przez żadne załamanie profilu mas, otrzymaliśmy, zamiast krzywej, prostą błędów 1'2'.

Otrzymana w ten sposób linia wyrównania QQ wyznacza takie sekcye przewozu, które sprowadzają koszty do minimum.

§ 12. Na zakończenie rozdziału o rachunku wykreślnym wspomnimy jeszcze o dwóch przyrządach pomocniczych znajdujących się w blizkiem powinowactwie z tym rachunkiem: o zasuwce logarytmicznej i planimetrze. Zastosowanie ich ułatwia nieraz długie rachunki i chociaż wprawdzie oba przyrządy dają rezultaty przybliżone, lecz, przy należytej wprawie, omyłki popełniane są tak małe, że w zwykłych obliczeniach technicznych nie potrzebujemy zwracać na nie uwagi.

Zasuwka logarytmiczna (Rechenschieber, règle à calcul) polega w zasadzie na wykreślnem dodawaniu i odejmowaniu logarytmów. Są to dwie podziałki logarytmiczne, przesuwające się jedna pod drugą tak, że pewne części tej podziałki, przedstawiające logarytmy danych liczb, można zestawiać jednę przy drugiej i znajdować ich sumę lub różnicę. Jak wiadomo, do dodawania i odejmowania logarytmów sprowadzić można wszystkie działania arytmetyczne. Zasuwka logarytmiczna daje te same ułatwienia, co i zwykłe tablice logarytmów. Cały przyrząd jest nadzwyczaj tani (kilka franków) i powinien się znajdować w ręku każdego technika.

Chcącym się bliżej oznajomić z tym przedmiotem, polecamy odbitkę jednego rozdziału ze Statyki Culmanna z dopełnieniami L. Tetmayera pod tytułem:

Der Rechenschieber. Separatabdruck aus Culmann's Graphischer Statik mit Beispielen, erläutert von Ludwig Tetmayer, Privatdocent am Zür. eidg. Polytechnicum, 1875 (Meyer & Zeller, Zürich).

Planimetr, przyrząd służący do mierzenia powierzchni, znany jest powszechnie; w najrozmaitszych miejscach znaleść możemy jego opisanie. Najpraktyczniejsze, bo najmniej skomplikowane, są tak zwaneplanimetry biegunowe, np. planimetr Amslera, który jest najczęściej w praktyce używany.

ROZDZIAŁ II.

Siły i momenty w ogóle.

§ 13. W Statyce wykreślnej przedstawiamy kierunek i wielkość sił za pomocą kierunku i długości linij.

Powszechnie jest znanem prawo tak zwanego równoległoboku sił, według którego wypadkowa W dwóch sił P_1 i P_2 przechodzi zawsze przez ich przecięcie i jest przekątną OW [Tab. IV_1] równoległoboku, utworzonego z tych dwóch sił. Łatwo zauważyć, że wypadkowa jest w znaczeniu rozdziału I sumą dwóch danych linij, przedstawiających siły, i że do tej samej wypadkowej doszlibyśmy, dodając obie siły, co jest widoczne z figury; nie potrzebujemy więc dla otrzymania wypadkowej wykreślać całego równoległoboku, bo trójkąt OP_1W zupełnie do tego wystarcza.

§ 14. Jeżeli kilka sił działa na punkt jeden O [Tab. IV_2], to w celu znalezienia ogólnej wypadkowej składamy dwie którekolwiek siły, ich wypadkową składamy z siłą trzecią, tę wypadkową trzech sił z czwartą itd.; otrzymujemy nareszcie jednę siłę W, wypadkową, która zastępuje wszystkie inne. Na fig. 2 wykonaliśmy to składanie za pomocą równoległoboków. Wypadkowa $W=04$ jest, jak to widać z figury, sumą, w znaczeniu rozdziału I, wszystkich danych sił złożonych w wieloboku *01234*. Więc aby złożyć kilka sił, działających w różnych kierunkach na jeden punkt, zestawiamy je, zachowując kierunek i wielkość, jednę po drugiej tak, żeby tok całego otrzymanego w ten sposób wieloboku był jednakowy; linia, łącząca początek wieloboku, zwanego wielobokiem sił, z jego końcem, jest wypadkową wszystkich danych sił.

Składanie w wieloboku uskutecznia się zwykle na boku w osobnej figurze; odróżniamy wtedy: a) system linij o nieograniczonych długościach *m*, *n*, *o* [Tab. IV_3]. Są to tak zwane linie działania sił, w których się rzeczywiście w naturze odbywają składania, i b) system linij pomocniczych, w których wykonywamy działania nad siłami, tak zwany wielobok sił.

Jeżeli wielobok sił [Tab. I] (IV_3,b) rzucimy na dowolną linię *l*, to rzut wypadkowej równa się sumie rzutów składowych.

Sprowadziliśmy powyżej składanie sił do dodawania odcinków, przedstawiających te siły. Otóż wszystko, cośmy w rozdziale I nadmienili o dodawaniu, zastosowuje się tutaj ze zmianą tylko wyrazów „linia“ na „siła“, „suma“ na „wypadkowa“, „dodawanie“ na „składanie“, i tak:

Tok wypadkowej jest odwrotny tokowi wszystkich innych boków wieloboku sił.

Porządek, w jakim siły składamy, jest zupełnie dowolny.

Wielobok sił daje nam wypadkowe częściowe ilukolwiek sił danych.

Jeżeli koniec wieloboku sił upadnie na jego początek, to wypadkowa jest równa zeru i wielobok jest zamknięty. Powiadamy wtedy, że dane siły, których linie działania przechodzą przez jeden punkt, są w równowadze. Jeżeli zaś pewien system takich sił złożony w wieloboku daje wypadkową, to, aby przywrócić w nim równowagę, trzeba dodać do całego systemu siłę równą, co do wielkości kierunku i położenia, wypadkowej, lecz z odwrotnym tokiem.

§ 15. Chcąc złożyć kilka sił (*1, 2, 3, 4, 5*), rozrzuconych na płaszczyznie [Tab. IV_4], działamy w sposób następujący: Jednę z tych sił (*1*) rozkładamy za pomocą trójkąta sił *AOB* [Tab. IV_5], na dwie składowe *AO* i *OB*, których tok jest oznaczony strzałkami wewnątrz trójkąta. Te dwie składowe zastępują w zupełności siłę *1*. Możemy ten rozkład wykonać i na Tab. IV_4, biorąc na linii działania siły punkt *1* i prowadząc przez niego równoległe *P1* i *21* do *AO* i *OB*. Następnie rozkładamy siłę drugą, *2*, na dwie nowe, w drugim trójkącie sił *BCO,* z których jedna jest równa sile *OB* z poprzedniego rozkładu, lecz odwrotna. Pokazuje to strzałka wewnątrz nowego trójkąta sił. Ten rozkład uskuteczniamy i na Tab. IV_4, prowadząc z jednego punktu linii działania siły *2*, równoległe *12* i *32* do *BO* i *OC* tak, żeby jedna z tych równoległych *12* upadła na linię działania siły poprzedniej *21,* otrzymanej z rozkładu siły *1.* W ten sposób zastąpiliśmy dwie dane siły, *1* i *2*, czterema *AO, OB*, *BO* i *OC* na Tab. IV_5, a *P1*, *21*, *12* i *32* na Tab. IV_4, z których dwie *OB* i *BO* czyli *21* i *12,* jako równe, odwrotne i działające w jednej linii, niszczą się i pozostawiają nam tylko dwie siły *AO* i *OC* lub też *P1* i *32,* które zupełnie zastępują dwie dane siły *1* i *2.* Jest to oczywiste na Tab. IV_5, gdyż *AC* jest wypadkową sił *AB* i *BC,* również jak sił *AO* i *OC.* Na Tab. IV_4 *P1* i *32* zastępują dwie dane siły, więc ich wypadkowa jest wspólna i oczywiście wypadkowa sił *1* i *2* przechodzi przez przecięcie *P1* i *32*, przez punkt *M.* Kierunek, tok i wielkość tej wypadkowej otrzymujemy z Tab. IV_5, jako *AC.* Rozłóżmy dalej siłę *3* na dwie *CO* i *OD*, z których jedna jest równa sile, działającej w *32* lecz odwrotną, więc się z nią znosi, i zamiast trzech sił *AB*, *BC* i *CD* czyli *1*, *2* i *3* otrzymujemy dwie siły *AO* i *OD* lub też *P1* i *43*, które zastępują trzy dane, więc ich wypadkowa jest wypadkową danych sił i przechodzić musi przez przecięcie *P1* i *43,* przez punkt *N.* Kierunek, tok i wielkość tej wypadkowej daje nam *AD,* jako wypadkowa tylko dwóch sił *AO* i *OD.* Postępując w ten sposób dalej, otrzymamy nareszcie dwie siły *AO* i *OF* lub też *P1* i *Q5*, które zastępują wszystkie dane siły, więc ogólna wypadkowa przechodzić musi przez przecięcie *P1* i *5Q*, przez punkt *W*. a jej kierunek, tok i wielkość otrzymujemy z Tab. IV_5, jako *AF*. Boki: *P1*, leżący przed pierwszą z danych sił, i *Q5*, leżący po ostatniej, nazywają się skrajnemi bokami, więc w y p a d k o w a w s z y s t k i c h d a n y c h s i ł p r z e c h o d z i p r z e z p r z e c i ę c i e s k r a j n y c h b o k ó w.

Rozpatrując bliżej Tab. IV_4 i Tab. IV_5, zauważymy, że Tab. IV_5 jest wielobokiem danych sił, więc że te siły składamy tak, jakby wszystkie na jeden punkt działały, a wielobok z Tab. IV_4 możemy otrzymać, prowadząc od d o w o l n e g o punktu *P* równoległe do linij, łączących w wieloboku sił punkt *O*, zwany b i e g u n e m, z wierzchołkami tego wieloboku. Wielobok z fig. 4 nazywa się w i e l o b o k i e m s z n u r o w y m, gdyż do połączenia wszystkich sił w jeden stały system wystarczyłaby linia materyalna, giętka, zastępująca boki tego wieloboku, sznur, do któregobyśmy przyłożyli dane siły. W każdym kawałku takiego sznura, łączącym dwie dane siły, działają dwie siły równe lecz odwrotne, które, niszcząc się wzajemnie, rozciągają ten kawałek. Może się zdarzyć, jak na Tab. IV_8, że wszystkie boki są ściskane, a nie rozciągane; w takim wypadku nazwę wielobok sznurowy zamieniamy na linię ciśnienia. Aby odróżnić, czy bok wieloboku jest ściskany lub też rozciągany, rozkładamy każdą z dwóch sił, przyłożonych na końcach tego boku, na dwie składowe, mające kierunek danego boku i boku sąsiedniego. Jeżeli składowe, działające w kierunku boku danego, są skierowane ku sobie, [Tab. IV_6], to bok jest ściskany; jeżeli odwrotnie, [Tab. IV_7] strzałki, oznaczające tok składowych, są skierowane od siebie, to bok jest rozciągany. Jeżeli kilka boków w danym wieloboku jest ściskanych, a kilka rozciąganych, to nazywać będziemy ten wielobok linią ciśnienia, albo też wielobokiem sznurowym, stosownie do tego, czy większość boków jest ściskana lub też rozciagana.

Z poprzedniego wyprowadzamy następujące twierdzenie: Aby złożyć system sił, rozrzuconych na płaszczyźnie, wykreślamy wielobok sznurowy (lub linię ciśnienia) dla tych sił. Przecięcie boków skrajnych tego wieloboku daje nam jeden punkt linii działania wypadkowej, a jej wielkość, kierunek i tok otrzymujemy z wieloboku sił, jako sumę wszystkich sił. I tak linia działania wypadkowej wszystkich danych pięciu sił, przechodzi przez punkt *W*, [Tab. IV_4] przecięcia pierwszego boku *P1* i ostatniego *Q5*. Powyższe twierdzenie stosuje się i do pewnej części danego systemu sił, mianowicie: wypadkowa dwóch sił *1* i *2* przechodzi przez przecięcie skrajnych boków *P1* i *32* dla tych sił; wypadkowa sił *2*, *3* i *4* przechodzi przez przecięcie skrajnych boków *12* i *45*, przez punkt *R*, wielkość, kierunek i tok tej wypadkowej daje linia *BE*, łącząca końce wieloboku, utworzonego z tych trzech sił, itd.

Punkt *P*, od któregośmy wykreślać zaczęli wielobok sznurowy, jest dowolny. Ze zmianą tego punktu otrzymujemy inny wielobok sznurowy, do którego stosuje się bez zmiany poprzednie twierdzenie.

Punkt *O* [Tab. IV_5] nazywa się biegunem wieloboku sił. Punkt ten oznaczyliśmy, rozkładając pierwszą siłę *1* na składowe *AO* i *OB*. Siłę *1* jednak możemy rozłożyć na zupełnie inne dwie składowe; otrzymamy wtedy inny biegun *O* i inny naturalnie wielobok sznurowy, lecz ponieważ poprzednie wywody są niezależne od położenia bieguna, więc powyższe twierdzenie stosuje się do każdego wieloboku sznurowego, wykreślonego przy pomocy dowolnego bieguna. Przypatrzmy się bliżej, jakie zmiany zajdą w wieloboku sznurowym przy zmianie bieguna w wieloboku sił.

§ 16. Dajmy na to, że na Tab. IV_8 wielobok sznurowy $P1234Q$ jest wykreślony za pomocą bieguna O. Weźmy teraz w wieloboku sił inny biegun O' i wykreślmy odpowiedni wielobok sznurowy, poczynając od dowolnego punktu P', oznaczony linią perłowaną $P'1'2'3'4'Q'$. Otóż wszystkie boki odpowiednie obu wieloboków sznurowych, t. j. boki, łączące jedne i te same siły a wykreślone przy pomocy dwóch różnych biegunów O i O', przecinają się na jednej prostej m, równoległej do prostej, łączącej oba bieguny; więc gdy biegun posuwa się po prostej OO', boki odpowiedniego wieloboku sznurowego obracają się około punktów jednej prostej równoległej do OO'. Ażeby tego dowieść, przedłużymy boki odpowiednie 12 i $1'2'$ do przecięcia w punkcie N. Połączmy N z M, z punktem przecięcia dwóch pierwszych odpowiednich boków. Linia MN jest równoległa do OO', gdyż, porównywając dwie figury, z których każda utworzona jest przez 6 linij, przechodzących przez 4 punkty M, N, 1 i $1'$, i O, O', A i B, zauważymy, że pięć boków jednej figury są odpowiednio równoległe do pięciu boków drugiej, więc i pozostałe szóste boki MN i OO' muszą być także równoległe, to znaczy, że pierwsze dwa boki wieloboku sznurowego obróciły się przy zmianie bieguna O na O' około punktów M i N, leżących na prostej równoległej do OO', do drogi bieguna. Rozpatrzmy teraz nowe dwie figury, utworzone przez 6 prostych, przechodzących przez 4 punkty 2, $2'$ N i R (punkt R otrzymujemy, przedłużając odpowiednie boki) i 6 prostych, przechodzących przez O,O' B i C. Pięć par odpowiednich boków są równoległe, więc i proste 6-ej pary OO' i NR są też równoległe. W połączeniu z poprzedzającem doprowadza nas to do wniosku, że punkty M, N i R, około których obróciły się odpowiednie bok wieloboku sznurowego, leżą na jednej prostej równoległej do OO'. To samo możemy dowieść dla wszystkich boków wieloboku sznurowego.

Opierając się na tej własności, możemy wykreślić dla każdego bieguna (np. O') odpowiedni wielobok sznurowy, skoro mamy już wykreślony wielobok sznurowy dla jakiegokolwiek bieguna (O). Wykreślamy wtedy pierwszy bok ($P'1'$), odpowiadający nowemu biegunowi (O'), i przez jego przecięcie (M) z pierwszym bokiem danego wieloboku sznurowego przeprowadzamy prostą (m), równoległą do linii, łączącej oba bieguny. Przedłużamy potem boki danego wieloboku sznurowego ($P1234Q$) do przecięcia z tą równoległą (w punktach N, R itd.) i przez punkty przecięcia prowadzimy odpowiednie boki nowego wieloboku sznurowego.

Jeżeli biegun O', posuwając się po prostej OO', zbliża się do punktu O, a wierzchołki 1 i $1'$ wieloboku sznurowego pozostają na swych miejscach, to prosta m oddala się na płaszczyznie coraz bardziej, pozostając zawsze równoległą do OO', aż nareszcie, kiedy O' będzie nieskończenie blizko od punktu O, prosta m będzie nieskończenie daleko i wszystkie odpowiednie boki wieloboków sznurowych będą równoległe, tj. będą się przecinały na jednej prostej ∞ odległej. Otrzymamy w ten sposób dwa wieloboki sznurowe, wykreślone za pomocą jednego bieguna.

Przecięcie skrajnych boków wieloboków sznurowych, łączących jedne i te same siły, tj. wieloboków, otrzymanych z rozmaitych biegunów, opisuje linię prostą, gdyż to przecięcie daje nam zawsze jeden punkt wypadkowej; ponieważ zaś wypadkowa jest tylko jedna, a przecięcie skrajnych boków musi zawsze na niej leżeć, więc musi ono opisywać prostą, niezależnie zupełnie od zmiany bieguna, przyjętego do wykreślenia. Jeżeli weźmiemy pod uwagę nie wszystkie siły, lecz tylko kilka z nich, to boki wieloboku sznurowego, leżące przed pierwszą z tych sił i po ostatniej, tj. boki skrajne tych sił, przecinają się zawsze na ich wypadkowej, a więc to przecięcie opisuje przy zmianie biegunów linię prostą. Opierając się na poprzedzającem, przychodzimy do wniosku, że wogóle przecięcie dowolnych dwóch boków wieloboku sznurowego opisuje przy zmianie bieguna proste linie.

§ 17. Jeżeli dane siły (1, 2, 3) [Tab. IV_9] połączymy wielobokiem sznurowym, wykreślonym za pomocą bieguna O, i następnie ten biegun przeniesiemy do punktu O', do początkowego punktu wieloboku sił, to otrzymamy nowy wielobok sznurowy, mający szczególne i ważne własności. Pierwszy jego bok nie istnieje, gdyż niema linii łączącej O' z początkiem wieloboku sil,—te dwa punkty upadają jeden na drugi.

Drugim bokiem wieloboku szn. jest linia równoległa do linii łączącej *O'* z końcem siły pierwszej czyli w tym wypadku sama linia działania siły *1*. Przedłużamy ją więc do siły *2*; otrzymujemy w ten sposób nowy bok wieloboku sznurowego *12'*, odpowiadający drugiemu bokowi *12* pierwszego wieloboku, wykreślonego dla bieguna *O*. Bok, odpowiadający bokowi trzeciemu, otrzymamy, łącząc *O'* z końcem siły *2* (ta łącząca jest wypadkową sił *1* i *2*) i prowadząc od punktu *2'* równoległą *2'3'*, do przecięcia z siłą *3* w punkcie *3'*. Następny bok, odpowiadający skrajnemu bokowi pierwszego wieloboku, otrzymujemy, prowadząc przez *3'* równoległą do linii, łączącej *O'* z końcem siły *3*. Jest to wypadkowa wszystkich danych sił.

Boki otrzymanego w ten sposób wieloboku sznurowego są, jak widzimy, wypadkowemi sił następujących po sobie. Pierwszy bok *12'* jest siłą *1*, drugi *2'3'* jest wypadkową sił *1* i *2*, trzeci i ostatni *3'Q'* jest wypadkową wszystkich trzech danych sił. Całe nasze działanie w tym wypadku ogranicza się do tego, że przedłużamy pierwszą siłę do przecięcia z drugą, składamy je, wypadkową przedłużamy do siły *3* i składamy tę wypadkową z siłą *3*. Ta ostatnia wypadkowa jest ostatnim bokiem nowego wieloboku sznurowego, który nazywamy w i e l o b o k i e m w y p a d k o w y m, ponieważ w nim następujące po sobie boki przedstawiają wypadkowe sił po sobie następujących.

Ogólne prawo powiadające, że boki odpowiednie obu wieloboków przecinać się muszą na linii równoległej do *OO'*, jest naturalnie i tutaj ważne, a ponieważ pierwszy bok *P1* jest tą równoległą, więc się na nim przecinać muszą wszystkie inne boki, jak to na Fig. 9 widzimy. Ostatni bok nowego wieloboku, jako wypadkowa wszystkich sił, przechodzić musi przez przecięcie pierwszego i ostatniego boku pierwszego wieloboku sznurowego, przez punkt *W*.

§ 18. Jeżeli w wieloboku sznurowym podstawimy, zamiast kilku sił wyjętych z całego systemu, ich wypadkową, to ogólna wypadkowa wszystkich sił nie zmieni się przez to wcale, ponieważ, jak wiadomo z § 15, skrajne boki tych kilku sił muszą się przecinać na ich wypadkowej; i jeżeli zastąpimy je wypadkową, to te skrajne boki zostaną na swych miejscach, więc nie będą wcale wpływały na zmianę jakąkolwiek w całym pozostałym wieloboku sznurowym. Boki, leżące między wspomnianemi skrajnemi, znikną tylko zupełnie.

Porządek, w jakim łączymy linie działania sił za pomocą wieloboku sznurowego, jest zupełnie dowolny. Żeby tego dowieść, weźmy pod uwagę jakikolwiek wielobok sznurowy, łączący pewien system sił. Wykreślmy następnie drugi wielobok sznurowy dla tegoż samego systemu sił, zmieniwszy tylko porządek, w którym łączymy dwie dowolne siły. Jeżeli wykreślimy trzeci wielobok, w którym te dwie zmienione siły są zastąpione ich wypadkową (co bez żadnego wpływu na ogólny rezultat według początku tego § uczynić można), to zauważymy, że każdy z dwóch pierwszych wieloboków jest równoważny trzeciemu, więc są one i między sobą równoważne.

§ 19. Momentem siły jakiejkolwiek względem danego stałego punktu nazywamy iloczyn z tej siły przez jej odległość od danego punktu czyli przez prostopadłą, przeprowadzoną z tego punktu, zwanego biegunem momentów, do danej siły. Jeżeli m [Tab. IV_{10}] jest linią działania danej siły P, O jest biegunem momentów, to iloczyn z P przez prostopadłą OM czyli $P.OM$ jest momentem; OM nazywa się ramieniem momentu.

Jeżeli, zamiast siły P, weźmiemy na tej samej linii działania drugą siłę $-P$, równą sile danej, lecz odwrotną, to moment ma wtedy tok inny. Jeżeli dana siła stara się obrócić ramię momentów w toku dodatnim tak, jak na Fig. 10, w kierunku poruszania się wskazówek zegara, to moment nazywać będziemy dodatnim, i odwrotnie.

Siła QR, pomnożona przez ramię OM, daje powierzchnię prostokąta, którego połowę stanowi trójkąt OQR, który otrzymujemy, rzucając siłę P z bieguna O. Z rysunku widzimy, że zmiana położenia punktu przyłożenia siły P na jej linii działania nie zmienia wcale momentu, gdyż w każdym wypadku otrzymujemy trójkąty równowarte. Ponieważ moment jest iloczynem siły i długości, więc dla mierzenia go potrzebujemy mieć jedność, złożoną z jedności siły i jedności długości. Możemy np. przyjąć za jednostkę momentów, moment siły $= 1^{kg}$, działającej w odległości 1^m od bieguna. Jednostkę taką nazywamy kilogrammetrem i oznaczamy przez kgm. Jeżeli więc jakakolwiek powierzchnia, np. dwa razy wzięty trójkąt OQR, przedstawia nam wielkość momentów, to, aby znaleść wiele kilogrammetrów ma ten moment, mierzymy naprzód powierzchnię trójkąta jakąkolwiek jednością kwadratową (np. centymetrem kwadratowym). Przeprowadźmy rachunek dla Tab. IV_{10}. Przy wykreśleniu tej figury przyjęliśmy pewną zmniejszoną podziałkę dla długości i inną dla sił, mianowicie, że jeden centymetr na naszym rysunku, mierzony na podziałce długości, wyobraża 3^m w naturze, a mierzony na podziałce sił sił, 400^{kg}; każdy więc centymetr kwadratowy powierzchni trójkąta przedstawia $3^m \times 400^{kg}$ czyli 1200 kilogrammetrów, a ponieważ powierzchnia naszego trójkąta = jest *6* cent. □, więc moment, który ta powierzchnia przedstawia $= 6.1200^{kgm} = 7200^{kgm}$, a ponieważ powierzchnia trójkąta daje tylko połowę momentu siły *P*, więc cały moment $= 2.7200 = 14400$ kgm.

Ponieważ oznaczyliśmy momenty podwójną powierzchnią trójkątów, utworzonych przez bieguny i siły, a dla rachunku daleko wygodniej jest mieć do czynienia z odcinkami, niż z powierzchniami, więc te trójkąty przekształcamy na jakąkolwiek podstawę według Roz. I i otrzymujemy odcinki proporcyonalne do momentów. Pamiętać należy, że trójkąt daje tylko pół momentu, więc przekształcamy go nie na podwójną, lecz na pojedyńczą podstawę. Odcinki, przedstawiające przekształcone powierzchnie, mierzą się na odpowiedniej podziałce, zwanej podziałką momentów. Tę podziałkę łatwo obliczyć można. Dajmy na to, że podstawa przekształceń, mierzona na podziałce długości, zawiera *n* jedności długości. Niech odcinek, otrzymamy z przekształcenia i mierzony na podziałce sił, zawiera *m* jedności siły. Prostokąt, któryśmy przekształcając otrzymali, a którego powierzchnia przedstawia moment, ma za podstawę odcinek, mający *n* jedności długości, czyli podstawę przekształceń, a za wysokość odcinek, mający *m* jedności siły. Każda więc jedność siły, mierzona na wysokości prostokąta, odpowiada *n* jednościom momentów. Łatwo to zauważymy, wykreśliwszy taki prostokąt. Otrzymamy więc podziałkę momentów, przypisując każdej jedności siły wartość *n* jedności momentów.

Jeżeli, odwrotnie, podstawę przekształceń mierzyliśmy na podziałce sił, to odcinek, otrzymany z przekształcenia, mierzymy na podziałce długości i każdej jedności tej podziałki przypisujemy wartość tylu jedności momentów, ile jedności sił było w podstawie przekształceń.

§ 20. Suma momentów dowolnej ilości sił, działających w płaszczyźnie, względem jednego bieguna równa jest momentowi wypadkowej względem tego bieguna

a) Jeżeli wszystkie siły działają na punkt jeden np. R [Tab. IV_{11}] to, przeprowadziwszy linię m prostopadłą do OR, zauważymy, że moment każdej siły (np. QR) równa się OR pomnoż. przez rzut (OQ') odpowiedniej siły na prostą m (gdyż $\triangle ORQ = \triangle ORQ'$). Moment wypadkowej będzie także równy OR pomnoż. przez rzut wypadkowej, a ponieważ, jak wiadomo, rzut wypadkowej równa się sumie rzutów składowych, więc i moment wypadkowej, jako iloczyn z jej rzutu przez OR, równa się sumie momentów składowych.

b) Jeżeli linie działania sił nie przechodzą przez jeden punkt, lecz są rozrzucone na płaszczyźnie, to wykreślamy dla tych sił wielobok wypadkowych z § 17. Pierwszą siłę (*1*) przedłużamy do drugiej (*2*) i składamy w punkcie przecięcia. Wypadkowa daje drugi bok (*12*) wieloboku [Tab. IV_9]. Moment siły działającej w tym boku równa się według a) sumie momentów sił *1* i *2*. Przedłużając bok (*12*) do siły *3* i składając, otrzymujemy bok (*123*). Moment siły w tym boku działającej równa się sumie momentów sił (*12*) i *3*, czyli sumie momentów sił *1*, *2* i *3*. Postępując tak dalej, możemy dowieść, że moment wypadkowej ilukolwiek sił danych równa się sumie momentów sił pojedyńczych.

§ 21. Moment wypadkowej kilku sił [Tab. IV_{12}] (*1*, *2*, *3*) względem bieguna N znajdujemy wykreślnie sposobem następującym. Znajdujemy naprzód położenie wypadkowej, przedłużając skrajne boki linii ciśnienia, leżące przed pierwszą i po trzeciej sile. Na ich przecięciu w W leży wypadkowa. Jej wielkość, tok i kierunek otrzymujemy z wieloboku sił, jako AB. Moment wypadkowej W względem bieguna N równa się $W \times PN = W.\ r$. Przez punkt N przeprowadzamy YY', równolegle do wypadkowej. Trójkąty kropkowane w linii ciśnienia i w wieloboku sił są podobne, więc:

$$BA : OT = YY' : PN, \text{ czyli}$$
$$W : OT = YY' : r, \text{ więc:}$$
$$W.\ r. = OT.\ YY'.$$

Jeżeli moment oznaczymy przez M, to:

$$M = YY'. OT,$$

to znaczy, że moment kilku po sobie następujących sił względem dowolnego bieguna, leżącego w płaszczyźnie sił, równy jest iloczynowi z odległości (OT) bieguna od wypadkowej (AB) przez odcinek (YY') równoległej do wypadkowej, przechodzącej przez biegun (N), zawarty między skrajnemi bokami.

Jeżeli zmienimy położenie bieguna N, to ponieważ YY' jest propor. do momentów, więc zmiana tego odcinka pokazuje zmianę momentów. Dla punktu N' naprzykład otrzymujemy moment, mnożąc yy' przez OT. Moment ten jest ujemny, bo siła W obraca ramię momentu około bieguna w toku ujemnym. Moment dla punktu, leżącego na wypadkowej, równa się 0, bo yy' jest także = 0.

Iloczyn $YY'. OT$ jest oczywiście powierzchnią prostokąta, która, mierzona jednością momentów, daje nam wielkość momentu M. Ponieważ długość OT jest stała, więc możemy ją uważać za podstawę przekształceń dla powierzchni prostokątów, odcinki YY' będą wtedy przekształconemi powierzchniami. Te odcinki, mierzone jednością momentów, dadzą prawdziwą wielkość na M. Podziałkę momentów znajdujemy według § 19; jeżeli OT mierzymy na podziałce długości, to YY' należy mierzyć na podziałce sił i każdej jedności podziałki sił przypisać wartość tylu jedności momentów, ile jedności długości było w OT; odwrotnie: jeżeli OT mierzymy na podziałce sił, to YY' należy mierzyć na podziałce długości i każdej jedności podziałki długości przypisać wartość tylu jednostek momentów, ile było jedności sił w OT.

§ 21. **Nieskończenie małe i nieskończenie odległe siły.** Jeżeli dwie równe lecz odwrotne siły mają jednę linię działania, to się niszczą wzajemnie; lecz jeżeli te siły mają linie działania równoległe, to otrzymujemy tak zwaną p a r ę s i ł. Jeżeli dwie takie siły *1* i *2* [Tab. V_1] złożymy w wieloboku sił, to otrzymamy odcinek 01 = sile *1* i drugi odcinek 12 = sile *2*, ponieważ zaś te dwa odcinki są sobie równe, więc koniec drugiego odcinka upadnie na początek pierwszego i wielobok sił, składający się w tym wypadku tylko z dwóch sił, będzie zamknięty. Jeżeli przyjąwszy dowolny biegun O wykreślimy wielobok sznurowy $P12Q$, to zauważymy, że pierwszy bok $P1$

i ostatni są równoległe, ponieważ w wieloboku sił promienie $O0$ i $O2$ upadają jeden na drugi. Na przecięciu boków $P1$ i $Q2$ powinna leżeć wypadkowa, a ponieważ to przecięcie jest nieskończenie dalekie, więc wypadkowa (nieskończenie mała, bo wielobok sił jest zamknięty) leży nieskończenie daleko. Boki $P1$ i $Q2$ przedstawiają dwie siły równe lecz odwrotne, które zastępują w zupełności dwie dane siły. Mamy więc bardzo łatwy sposób zamiany jednej pary sił na drugą równoważną, a ponieważ możemy nieskończenie wiele wieloboków sznurowych wykreślić, zmieniając położenie bieguna, więc i w nieskończenie rozmaity sposób możemy zamienić jednę parę sił na drugą.

Ponieważ wypadkowa pary sił działa w nieskończenie odległej linii, działania więc jej moment dla każdego bieguna, leżącego w skończoności, jest stały, gdyż ramię będzie zawsze nieskończenie długie i małe zmiany w skończoności nie mogą wpłynąć na zmianę momentu. Możemy się o tem przekonać naocznie na Tab. V_2. Dla punktu O_1 moment wypadkowej pary sił równa się momentowi składowych, czyli dwa razy wziętym trójkątom O_1MN i $O_1M'N'$. Trójkąt O_1MN trzeba uważać za ujemny, ponieważ siła MN obraca ramię w toku ujemnym około bieguna O_1. Więc moment wypadkowej równa się dwa razy wziętej różnicy obu trójkątów, czyli dwa razy wziętej powierzchni kropkowanej, której jedna część jest dodatnia, druga ujemna. Odjąwszy od dodatniej część ujemną, otrzymamy trójkąt $M'N'N$. Jeżeli weźmiemy biegun w O_2, to oba momenty mieć będą tok jednakowy, a moment wypadkowej równać się będzie sumie trójkątów O_2MN i $O_2M'N'$, czyli równać się będzie także trójkątowi $M'N'N$. To samo stosuje się do każdego bieguna, możemy więc moment siły ∞ odległej i ∞ małej przyjąć jako miarę tej siły, ponieważ każda siła jest, jak wiadomo z poprzedzającego, proporcyonalna do swego momentu. Więc dwie pary sił są sobie równe, jeżeli mają równe momenty, czyli, co na jedno wychodzi, jeżeli w obu parach trójkąty, których podstawą jest jedna siła a wierzchołek leży w drugiej, są równowarte. Opierając się na tej własności, możemy obejść się bez wieloboku sznurowego dla zamiany jednej pary sił na drugą.

Jeżeli siłę nieskończenie małą i nieskończenie odległą, tj. parę sił, składamy z siłą skończoną, to nie może mieć ta para żadnego wpływu na wielkość i kierunek siły skończonej; zmienia tylko jej położenie tak, że moment siły zmienia się względem jakiegokolwiek bieguna o moment pary sił. Siła dana przesuwa się równolegle. Jeżeli *W* [Tab. V_3] jest linią działania danej siły, (*W* może być linią działania wypadkowej kilku sił poprzednich), *m* i *n* są liniami działania pary sił, to złożywszy te trzy siły w wieloboku, otrzymamy wielobok sił *PQRS*. Wielobok sznurowy, wykreślony za pomocą bieguna *O* i odpowiadający tym siłom, jest *TWmnV*. Wypadkowa *W'* wszystkich sił przechodzi przez przecięcie boków skrajnych, przez punkt *T*, jest równa sile *W*; jest tą samą siłą *W*, tylko przesuniętą i to o tyle, że moment jej dla jakiegokolwiek punktu (np. dla punktu, leżącego na sile *W*) zmienił się o moment pary sił (czyli, że trójkąt, utworzony przez siłę *W'* i punkt *W* równa się trójkątowi pary sił). Jeżeli bowiem daną parę sił zamienimy na inną (a to uczynić możemy w najrozmaitszy sposób, według początku tego §), w której każda siła$=W$, i przesuniemy tę parę sił tak, że jedna z jej sił *n'*, równa *W* lecz odwrotna, będzie miała tę samą linię działania co i *W*, to siły działające w *n'* i *W* niszczą się i pozostanie tylko siła *m'*=sile $W=W'$. Trójkąt kreskowany *WTT'* musi się równać trójkątowi pary sił.

§ 22. **Równowaga sił, działających w płaszczyźnie.** Złożywszy kilka sił w wieloboku sił, otrzymamy ich wypadkową, łącząc początek wieloboku z jego końcem prostą linią. Położenie tej wypadkowej daje wielobok sznurowy, ponieważ musi ona przechodzić przez przecięcie skrajnych boków. Otóż jeżeli do danych sił dodamy nową siłę, która ma tę samę linię działania, co i wypadkowa, tę samę wielkość, lecz tylko tok odwrotny, to oczywiście wszystkie siły będą w równowadze, ponieważ wypadkowa równać się będzie zeru. Wielobok sił będzie w tym wypadku zamknięty. Jest to pierwszy warunek równowagi. Oprócz tego wielobok sznurowy powinien być zamknięty, tj. pierwszy bok tego wieloboku przed pierwszą siłą i ostatni po ostatniej muszą upaść jeden na drugi. Ponieważ wielobok sił musi być dla równowagi zamknięty, więc promienie, łączące biegun z początkiem i końcem wieloboku, do których są równoległe pierwszy i ostatni bok wieloboku sznurowego, są identyczne, gdyż koniec wieloboku upada na jego początek. Więc skrajne boki wieloboku sznurowego są co najmniej równoległe. Oprócz tego te skrajne boki, które przedstawiają dwie siły (równe lecz odwrotne), zastępujące wszystkie inne razem, muszą działać w jednej linii działania, gdyż opuściwszy w zamkniętym wieloboku sił siłę ostatnią, musielibyśmy, dla przywrócenia równowagi, dodać do wypadkowej sił pozostałych, siłę równą lecz odwrotną, i działającą w linii działania wypadkowej. Ta siła odwrotna do siły wypadkowej pozostałych sił jest właśnie tą przez nas wypuszczoną siłą, a ponieważ wypadkowa wszystkich sił bez tej jednej musiałaby przechodzić przez przecięcie skrajnych boków, więc i wypuszczona przez nas siła, która musi mieć tę samą linię działania co i wypadkowa, musi przechodzić przez to przecięcie, czyli wielobok sznurowy musi być zamknięty.

Jeżeli, przy zamkniętym wieloboku sił, wielobok sznurowy nie zamyka się, to skrajne boki muszą być w każdym razie, jakeśmy tego dowiedli, przynajmniej równoległe. Te boki wyobrażają w tym wypadku dwie siły, zastępujące wszystkie inne, a ponieważ te dwie siły są równe i odwrotne, więc mamy przed sobą parę sił, i cały nasz system sił połączonych wielobokiem redukuje się do pary sił. Mamy wtedy siłę nieskończenie małą, działającą nieskończenie daleko, a ponieważ, aby jakąkolwiek siłę można było zniszczyć, trzeba przyłożyć do niej n a t e j s a m e j l i n i i d z i a ł a n i a siłę równą lecz odwrotną, a linia działania w tym wypadku jest nieskończenie odległa, więc dla sprowadzenia równowagi w naszym wieloboku musimy użyć drugiej pary sił równej (tj. mającej taki sam moment), lecz odwrotnej. Otrzymujemy wtedy na linii ∞ odległej siłę równą wypadkowej wszystkich sił, lecz odwrotną.

[Tab. V_4] przedstawia system sił w równowadze. Wieloboki, sznurowy i sił, są zamknięte. Jeżeli rozdzielimy cały system na dwie grupy, to jedna z nich utrzymuje zawsze drugą w równowadze. Jeżeli np. do jednej grupy należy siła *1* i *5*, to te dwie siły trzymają w równowadze pozostałe (*234*), (ten rozdział oznaczyliśmy linią *s*), gdyż wypadkowa tych dwóch sił *PQ* jest równa wypadkowej *QP* sił pozostałych *2*, *3*, *4*, lecz tylko odwrotną i obie wypadkowe działają w jednej linii równoległej do *PQ*, przechodzącej przez punkt przecięcia *N* boków *54* i *12*, łączących obie grupy. Wypadkowa sił *1* i *5* musi przechodzić przez przecięcie boków skrajnych tych sił, które są jednocześnie skrajnemi bokami trzech pozostałych sił. Więc wypadkowe jednej i drugiej grupy przechodzą przez przecięcie boków *12* i *54*, a ponieważ te wypadkowe są równe, mają ten sam kierunek lecz tok inny, więc się niszczą i jedna grupa trzyma drugą w równowadze. Specyalnym wypadkiem tego twierdzenia jest to, że każda pojedyńcza siła trzyma wszystkie inne w równowadze, jeżeli wielobok sznurowy i wielobok sił są zamknięte.

§ 23. **Rozkład sił w płaszczyźnie.** Jak wiadomo, możemy w nieskończenie rozmaity sposób rozłożyć siłę jakąkolwiek na dwie składowe, i zadanie to jest nieokreślone, aż póki nie są dane kierunki i położenia składowych. Tem bardziej musi być temu warunkowi uczynione zadość, jeżeli siłę daną mamy rozłożyć na kilka składowych. Dla tego też przyjmować będziemy w następującem, że są nam zawsze dane za pomocą linij, kierunki i położenia składowych, i że daną siłę mamy rozłożyć na inne, działające w tych liniach. Przypatrzmy się bliżej niektórym wypadkom rozkładu, najczęściej napotkanym w praktyce.

a) Siłę daną W tylko wtedy można rozłożyć na dwie składowe S_1 i S_2, kiedy te ostatnie przecinają się na sile W, (albo są do niej równoległe, co jest specyalnym wypadkiem przecinania się, kiedy punkt przecięcia leży ∞ daleko), gdyż, w wypadku przeciwnym, dwie składowe S_1 i S_2 miałyby wypadkową W, nie przechodzącą przez ich przecięcie, a to się sprzeciwia zasadzie równoległoboku sił. Rozkład więc na takie dwie siły jest niemożebny.

Jeżeli S_1 i S_2 przecinają się na W, to rozkład możemy uskutecznić obok za pomocą trójkąta sił [Tab. V_5], prowadząc przez końce siły W równoległe do linij m i n, wskazujących położenie składowych. Wielobok sznurowy dla tej jednej siły W składa się (przyjąwszy V za biegun) z dwóch linij m i n.

Jeżeli składowe mają być równoległe do wypadkowej, to musimy użyć do rozkładu wieloboku sznurowego. Wielobok sił nie wystarcza, gdyż dana siła i składowe zlewają się w nim w jednę linię.

Niech linie m i n [Tab. V_6] wyobrażają linie działania składowych, na które rozłożyć mamy siłę W.

W wieloboku sił [Tab. V_6] bierzemy biegun dowolny *O*, prowadzimy przezeń promienie *O0* i *O1* i przez dowolny punkt danej siły *W* prowadzimy równoległe do tych promieni. Punkty przecięcia *M* i *N* tych równoległych z liniami działania składowych łączymy prostą *MN* i przez *O* przeprowadzamy *OQ* // do *MN*; *OQ* i *Q1* dają nam szukane składowe. Przekonywamy się o tem, rozumując jak następuje: dwie składowe i dana siła *W*, wzięta odwrotnie, muszą być w równowadze, więc ich wielobok sił i ich wielobok sznurowy muszą być zamknięte; przeprowadziwszy *MN*, zamknęliśmy wielobok sznurowy tych trzech sił, wielobok sił musi być także zamknięty i trzeci promień jego równoległy do *MN*, a jego przecięcie *Q* oznacza przecięcie składowych, które na fig. 5 oznaczyliśmy przez *V*.—Tego rodzaju rozkładu sił używać później nadzwyczaj często będziemy dla wyznaczania ciśnień belki na punkty oporu. Oczywiście te ciśnienia są razem wzięte równe wypadkowej wszystkich obciążeń belki; więc aby znaleść te ciśnienia, trzeba wypadkową wszystkich obciążeń rozłożyć na dwie równoległe składowe, przechodzące przez punkty oporu belki.

Jeżeli linie działania składowych leżą po jednej stronie danej siły, to składowe muszą mieć tok rozmaity, jak to Tab. V_7 pokazuje. Promień *OQ* upada wtedy zewnątrz trójkąta *O01*. Linią, zamykającą wielobok sznurowy, jest S_2S_1.

b) Jeżeli daną siłę rozłożyć mamy na trzy składowe, to odróżniać musimy trzy następujące wypadki:

1) Wszystkie trzy linie, w których mają działać składowe danej siły *W*, przecinają się w jednym punkcie. Jeżeli ten punkt leży na sile *W*, to wprawdzie możemy ją rozłożyć w wieloboku sił na trzy składowe, mające kierunek danych, lecz w najrozmaitszy sposób, bo w odpowiednim czworoboku sił dokładnie znany jest tylko jeden bok *W*, a wszystkich innych znane są tylko kierunki; możemy więc wykreślić ∞ wiele czworoboków, odpowiadających zadaniu. Jednym z specyalnych wypadków tego rodzaju jest rozkład siły na trzy inne do niej równoległe. Jeżeli np. mamy obciążoną belkę, opartą na trzech punktach, to nie możemy wprost znaleść, jak jest rozłożony ciężar na te trzy punkty. Prawa równowagi sił nie wystarczają nam w tym wypadku, więc się

udać musimy do teoryi elastyczności. To zadanie jest naturalnie jeszcze bardziej nieoznaczone, jeśli belka jest oparta jeszcze na więcej punktach.

Jeżeli punkt przecięcia składowych nie leży na danej sile, to zadanie jest niemożliwe, gdyż jak wiadomo wypadkowa sił przecinających się w jednym punkcie przechodzić musi przez ich punkt przecięcia, a siła *W*, jako nie odpowiadająca temu warunkowi, nie może być wypadkową takich składowych.

2) Dwie z trzech linij, w których działać mają składowe, przecinają się na sile danej w punkcie *Q*, a trzecia ma jakiekolwiek położenie. Rozkład jest niemożliwy, gdyż przypuściwszy, że mamy szukane składowe, to dwie z nich, przecinające się na danej sile, dałyby nam, złożone z sobą, wypadkową, która musiałaby przechodzić przez punkt *Q*, lecz w każdym razie byłaby różna od *W*. Ta wypadkowa dwóch pierwszych sił, złożona z trzecią, musiałaby dać siłę *W*, co jest niemożebne, gdyż siła *W* nie może przechodzić przez punkt przecięcia wypadkowej pierwszych dwóch sił i siły trzeciej, nie leżący na kierunku siły danej *W*.

3) Trzy linie działania składowych przecinają się w trzech dowolnych punktach, z których żaden nie leży na danej sile. Rozkład jest w tym wypadku możliwy i zupełnie oznaczony, tj. rozwiązanie jest tylko jedno. Dajmy na to, że liniami działania składowych są *m*, *n* i *o* [Tab. V_8]. Siłę daną *W* przedłużamy do przecięcia z linią *m* w punkcie *M* i rozkładamy ją w tym punkcie na dwie siły: jednę działającą w linii *m*, a drugą działającą w linii *MN*, łączącej *M* z przecięciem *N* obu pozostałych linij działania. Rozkład ten uskuteczniamy obok w wieloboku sił. Następnie siłę *OR*, działającą w *MN*, rozkładamy w punkcie *N* na dwie składowe, działające w liniach *n* i *o*. Wielobok sił daje tok i wielkość tych dwóch sił. W ten sposób rozwiązaliśmy nasze zadanie. Wyprowadzamy stąd ogólne prawidło, że: aby rozłożyć daną siłę na trzy inne, przedłużamy ją do przecięcia z linią działania którejkolwiek ze składowych, rozkładamy ją tam na dwie siły, z których jedna działa w kierunku linii działania tej składo-

wej, a druga w kierunku linii, łączącej wspomniany punkt przecięcia z punktem przecięcia dwóch pozostałych linij działania i w tym ostatnim punkcie rozkładamy pozostałą siłę w kierunku dwóch ostatnich linij działania składowych. Porządek, w jakim ten rozkład uskuteczniamy, jest dowolny, jak się o tem łatwo przekonać można.

Jeżeli się bliżej przypatrzymy Tab. V_8, to zauważymy, że linia łamana *PNMQ* jest wielobokiem wypadkowych z § 17 wykreślonym przy pomocy bieguna *O* dla trzech danych składowych. Pierwszy bok tego wieloboku, *PN*, jest zarazem pierwszą składową, drugi bok *NM* jest wypadkową pierwszej i drugiej składowej, a trzeci bok *MQ* wypadkową wszystkich trzech danych składowych.

c) Rozkład danej siły na więcej niż trzy składowe, jeżeli jest możliwy, to zawsze jest nieoznaczony. Otrzymujemy zwykle nieskończoną ilość składowych, odpowiadających zadaniu.

ROZDZIAŁ III.

Siły równoległe.

§ 24. Jeżeli złożyć mamy klka sił równoległych *1,2,3,4,5* [Tab. V_9], to, nie odstępując od ogólnego prawidła, składamy te siły w wieloboku sił *012345* (który w tym wypadku jest linią prostą), przyjmujemy punkt dowolny *O* za biegun i przy jego pomocy wykreślamy wielobok sznurowy *P12345Q*, łączący dane siły. Wypadkowa wszystkich sił przechodzi przez przecięcie skrajnych boków *P1* i *Q5*, jako reprezentujących siły *10* i *Q5* w wieloboku sił, zastępujące wszystkie dane siły, tj. mające tę samę wypadkową. Wypadkowa pewnej części sił po sobie następujących przechodzi przez przecięcie boków skrajnych, więc W_{23} przechodzi przez przecięcie boków *12* i *34*, boków skrajnych dla dwóch sił *2* i *3*; W_{1234} przechodzi przez przecięcie *P1* i *45*, boków skrajnych dla sił *1, 2, 3* i *4*, itd.

Promienie *O0, O1, O2...., O5* w wieloboku sił przedstawiają nam natężenie w odpowiednich bokach wieloboku sznurowego. W każdym z boków pośrednich tego wieloboku *12, 23, 34, 45* działają dwie siły równe, lecz odwrotne, które się niszczą; a w bokach skrajnych działają dwie siły, których tok oznaczony jest strzałkami. Jeżelibyśmy zamiast boków wieloboku sznurowego przypuścili linię giętką *P12345Q*, przyczepioną do dwóch stałych punktów *P* i *Q*, to w tych stałych punktach powstałyby oddziaływania, równoważące siły w skrajnych bokach, równe tym siłom lecz odwrotne; cały wielobok sznurowy byłby w tym wypadku w równowadze. Łatwo zauważyć, że poziome składowe (przyjąwszy kierunek pionowy dla sił) wszystkich natężeń są sobie równe, gdyż w punktach *1, 2, 3, 4, 5* (wiel. szn.) każda siła (np. *1*) jest wypadkową sił, działających w dwóch na niej przecinających się bokach (*P1* i *21*) wieloboku sznurowego; natężenia tych dwóch boków dają promienie, przechodzące w wieloboku sił przez biegun (*00* i *01*). Jeżeli te promienie rozłożymy w wieloboku sił na poziome i pionowe składowe, to zauważymy, że poziome składowe są zawsze sobie równe i równe *OH*. Ta pozioma składowa nazywa się natężeniem poziomem lub odległością bieguna i oznacza się zwykle przez *H*.

Momenty wypadkowej względem dowolnego punktu znajdują się zupełnie tak samo, jak w § 20, mnożąc odcinek YY' równoległej do kierunku sił, zawarty między skrajnemi bokami, przez odległość bieguna, przez *H*. I tak moment wypadkowej dla punktu $N = 05.r = YY'.H$.

Wszystkie inne prawa, któreśmy wyprowadzili w ogólnym wypadku wieloboku sznurowego dla sił, rozrzuconych na płaszczyźnie, zastosowują się i w tym specyalnym wypadku bez zmiany.

§ 25. Siły równoległe tylko wtedy mogą być w równowadze, kiedy między niemi jest jedna lub kilka odwrotnych, a nie wszystkie mają tok jeden. Wielobok sił i wielobok sznurowy muszą, według § 22, być zamknięte. Najczęściej się spotykamy w praktyce z siłami równoległemi, jako obciążeniami belki, opartej na dwóch stałych punktach. Ciężar własny belki i jej obciążenie są siłami pionowemi, więc równoległemi. Wszystkie te siły są zrównoważone oddziaływaniem stałych punktów, na których belka jest oparta. W tych dwóch punktach powstają dwie siły, mające tok odwrotny wszystkim obciążeniom, tak zwane oddziaływania punktów oporu. Te dwa oddziaływania i obciążenia belki muszą się trzymać w równowadze, tj. oddziaływania muszą mieć zupełnie tę samą wypadkową, co do położenia, kierunku i wielkości co i wszystkie obciążenia, lecz tylko tok odwrotny. Suma obu ciśnień, jakie belka wywiera na punkty oporu, równa się oczywiście sumie własnego ciężaru belki i jej obciążenia. Żeby więc, mając dane obciążenia, znaleść oddziaływanie punktów oporu, trzeba wypadkową obciążeń rozłożyć na dwie składowe pionowe, przechodzące przez punkty oporu, i wziąć te składowe z odwrotnym tokiem.

a) **Obciążenia stałe.**

§ 26. Przypuśćmy, że mamy przed sobą nieważką i nieuginającą się belkę *AB* [Tab. V_{10}], opartą na punktach *A* i *B*. Na nią działają siły pionowe, pochodzące od ciężarów *1, 2, 3, 4*. Na dowolnej pionowej odcinamy te siły, jednę po drugiej, i otrzymujemy w ten sposób wielobok sił, składający się w tym wypadku z jednej prostej. Przyjąwszy biegun dowolny *O*, wykreślamy odpowiedni wielobok sznurowy *M1234N*. Wypadkowa wszystkich sił przechodzi, jak wiadomo, przez punkt *W*, przez przecięcie skrajnych boków *M1* i *N4* i ma tok taki, jak tok wszystkich sił, pochodzących od obciążeń. Jeżeliby nie było punktów oporu *A* i *B*, to belka posunęłaby się w kierunku wypadkowej, gdyż siły nie byłyby w równowadze. Lecz ponieważ punkty *A* i *B* są nieruchome, więc powstają w nich oddziaływania *A* i *B*, których wypadkowa równa się W_{1234}, lecz ma tok odwrotny, to jest powstają dwie siły, które przywracają równowagę. W takim stanie, po dodaniu tych sił do innych, według § 22, wielobok sił i wielobok sznurowy muszą być zamknięte. Łącząc punkty przecięcia *A'* i *B'* skrajnych boków z pionowemi przez *AB* prostą *A'B'*, zamykamy wielobok sznurowy. Linię *A'B'* nazywać będziemy, zamykającą. Jeżeli w wieloboku sił przeprowadzimy promień *OZ*, równoległy do zamykającej, to dwie części tego wieloboku *ZW* i *WZ* są równe oddziaływaniom *A* i *B*. W punkcie *Z*, rzec można, zamyka się wielobok sił, którego bokami są *ZW, 1, 2, 3, 4, W'Z*.

§ 27. Obliczanie rozmiarów belki polega, jak się o tem później szczegółowo dowiemy, na znajomości dwóch rzeczy: sił zewnątrz każdego przekroju działających, czyli tak zwanych sił poprzecznych, i momentów tych sił względem odpowiednich przekrojów.

Siłą zewnątrz przekroju działającą, lub też siłą poprzeczną nazywamy wypadkową wszystkich sił, leżących po jednej stronie przekroju. Np. siłą, zewnątrz przekroju *K* działającą [Tab. V_{10}], jest wypadkowa sił *1, 2* i oddziaływania *A*. Są to wszystkie siły, leżące po lewej stronie przekroju; innych sił po tej stronie nie ma. Jeżeli, zamiast uważać wypadkową wszystkich sił, po lewej stronie przekroju leżących, uważać będziemy siłę zewnątrz działającą po prawej stronie przekroju, to przekonamy się, że ta siła ma zupełnie tę samę wielkość, kierunek i położenie co i poprzednia, lecz tylko tok inny. Z wieloboku sił widać odrazu, że wypadkowa sił *A*, *1* i *2*, to jest siła poprzeczna z lewej strony jest równa wypadkowej sił *3*, *4* i *B*, tj. sile poprzecznej z prawej strony, lecz ma tok odwrotny. Jeden punkt linii działania wypadkowej sił *A*, *1* i 2 otrzymujemy, przedłużając boki *A'B'* i *23* do przecięcia w punkcie *P*. Przez ten punkt przechodzi linia działania wypadkowej; lecz łatwo zauważyć, że przez ten sam punkt przechodzi także i wypadkowa sił *3*, *4* i *B*, czyli siła poprzeczna z prawej strony, bo boki *A'B'* i *23* są także skrajnemi bokami i dla tych sił. Więc siły poprzeczne z prawej i lewej strony przekroju mają tę samą wielkość, ten sam kierunek i to samo położenie, tylko tok odwrotny.

Jeżeli tego w szczególnym wypadku nie wymienimy, będziemy zawsze, mówiąc o sile zewnątrz przekroju działającej, czyli o sile poprzecznej, mieć na względzie wypadkową sił, działających po lewej stronie przekroju, i oznaczać ją będziemy literą *P*.

Jeden punkt tej siły poprzecznej *P* dla przekroju *K* otrzymujemy, jako przecięcie boków wieloboku sznurowego, leżących pod danym przekrojem, a jej wielkość dostajemy, prowadząc w wieloboku sił przez biegun promienie równoległe do tych boków. Jeden z tych promieni, mianowicie *OZ*, jest zawsze ten sam, tj. zawsze równoległy do zamykającej, więc przeprowadziwszy go raz, otrzymujemy wielkość siły, prowadząc promień równoległy do odpowiedniego boku wieloboku sznurowego i mierząc odcinek wieloboku sił, zawarty między tym promieniem a promieniem równoległym do zamykającej. Jeżeli siła poprzeczna działa na dół, to nazywać ją będziemy dodatnią, i odwrotnie. Jeżeli promień w wieloboku sił, równoległy do boku wieloboku sznurowego, leżącego pod przekrojem, leży nad promieniem równoległym do zamykającej (jak w naszym wypadku), to siła *P* jest ujemną, bo działa w górę, i odwrotnie.

Jeżeli od poziomej *A''B''* odetniemy pod każdym przekrojem odpowiednią siłę poprzeczną (zwracając na znaki uwagę: ujemne siły w górę, dodatnie na dół), to otrzymamy powierzchnię kropkowaną, ograniczoną linią łamaną *A1234B*, której rzędne, mierzone na podziałce sił, dają poprzeczne w odpowiednich przekrojach. Związek tej powierzchni z wielobokiem sił jest widoczny z figury. Między punktem oporu A a siłą 1 siła poprzeczna nie zmienia się wcale i na całej tej przestrzeni jest równa oddziaływaniu A; więc też i część łamanej $A12....B$ między A i B jest równoległa do $A''B''$. W przekroju, leżącym bezpośrednio na prawo do siły 1, siła poprzeczna odrazu się zmniejsza o całą siłę 1 i aż do siły 2 mamy znowu równoległą do $B''B''$ itd.

M o m e n t siły zewnątrz przekroju działającej względem tego przekroju $= P \times r$ tj. sile tej, pomnożonej przez jej odległość do pionowej, przez przekrój przeprowadzonej. Jeżeli porównamy trójkąt Pyy' w wieloboku sznurowym i drugi trójkąt w wieloboku sił, który otrzymujemy, rzucając siłę P z bieguna O, to zważywszy, że dwa trójkąty (kropkowane) są podobne, więc:

$$r : yy' = H : P, \text{ czyli } P . r = yy' . H = M;$$

jeżeli M oznacza moment, yy' jest rzędną wieloboku zamkniętego sznurowego, H odległością bieguna. Ponieważ przekrój wzięty był przez nas w dowolnem miejscu, i to miejsce nie ma żadnego wpływu na poprzednie dowodzenie, więc możemy powiedzieć, że otrzymujemy dla każdego przekroju moment, mnożąc leżącą pod przekrojem rzędną powierzchni zamkniętego wieloboku sznurowego przez odległość bieguna. Wskutek tego, że każda rzędna powierzchni $A'B'4321$ jest proporcyonalna do momentu w odpowiednim przekroju, nazywamy ją p o w i e r z c h n i ą m o m e n t ó w. Mierzenie momentów uskutecznia się zupełnie tak samo, jak w § 19. Jeżeli mierzymy H na podziałce sił, to mierzyć należy yy' na podziałce długości, i odwrotnie. Dajmy na to, że, mierząc H na podziałce sił, otrzymaliśmy n jedności sił. Żeby znaleźć podziałkę momentów, tj. taką podziałkę, którą mierzona rzędna yy' odrazu daje moment, trzeba każdej jedności podziałki długości przypisać wartość n jedności momentów. Jeżeli np. H, mierzone na podziałce sił, przedstawia 25^{kg}, a jako podziałkę długości przyjęliśmy 1^{cm} równy 5^{m}, to jeden centymetr podziałki momentów równać się będzie $25^{kg} . 5^{m} = 125$ kilogrammetrom.

Rzecz się ma zupełnie odwrotnie, jeżeli mierzymy H na podziałce długości.

Jeżeli $H = 1$, to każda jedność podziałki, którą mierzymy rzędne powierzchni momentów, równa się jedności momentów.

§ 28. Jeżeli zamiast pojedyńczych ciężarów, wprowadzimy na belkę *AB* [Tab. VI_1], obciążenie ciągłe, to rzecz się nie zmienia, tylko, ponieważ mamy wtedy nieskończenie wiele ciężarów, następujących po sobie bezpośrednio, wielobok sznurowy ma nieskończenie wiele boków, czyli zamienia się na krzywą sznurową. Obciążenie belki oznaczyliśmy linią krzywą *m m m*, której rzędne (od *AB*), mierzone na podziałce sił, dają obciążenie na jedność długości w danem miejscu. Jeżeli obciążenie, oprócz tego, że jest ciągłe, jest jeszcze i jednostajne, tj. że na każdej jedności długości belki, leży ten sam ciężar, to krzywa *m m m*, zwana krzywą obciążeń, zamienia się na prostą równoległą do belki. Powierzchnia między krzywą obciążeń a belką nazywa się powierzchnią obciążeń. Żeby wykreślić linię sznurową, odpowiadającą ciągłemu obciążeniu, odcinamy na linii pionowej całe obciążenie, jako *JG*, następnie dzielimy obciążenie na kilka części i przypuszczamy, że ciężar każdej części jest skoncentrowany w środkach ciężkości (S_1, S_2, S_3, S_4) odpowiednich części powierzchni obciążeń. Wykreślamy następnie, podzieliwszy w ten sposób obciążenia, odpowiedni wielobok sznurowy *A'1234B'*. Boki tego wieloboku są styczne do krzywej sznurowej w punktach, leżących pod liniami podziału powierzchni obciążeń, i jeżeli podzielimy tę powierzchnię na dostateczną ilość części, możemy wykreślić z wielką dokładnością krzywą, którą wielobok sznurowy otacza. Że boki wieloboku są stycznemi i że wielobok *A'1234B'* jest równoważny krzywej sznurowej, można bardzo łatwo dowieść, opierając się na § 18. Każde dwa boki wieloboku obok siebie leżące, np. *12* i *32*, są skrajnemi bokami w małym wieloboku sił *ab* o nieskończonej ilości boków.

§ 29. Streszczając to, cośmy poprzednio powiedzieli, przychodzimy do następujących rezultatów:

Oddziaływania punktów oporu belki obciążonej znajdujemy, zamykając wielobok sznurowy lub krzywą sznurową i prowadząc przez biegun wieloboku sił równoległą do tej zamykającej. Ta równoległa dzieli wielobok sił na dwa odcinki, które, wzięte z tokiem odwrotnym tokowi obciążenia, dają oddziaływania.

Jeden punkt siły, zewnątrz jakiegokolwiek przekroju działającej, leży na przecięciu zamykającej i boku wieloboku sznurowego leżącego pod przekrojem, lub też stycznej do krzywej sznurowej w odpowiednim punkcie.

Wielkość siły zewn. prz. dz. otrzymujemy z wieloboku sił jako część jego, zawartą między dwoma promieniami, przeprowadzonemi z bieguna równolegle do zamykającej i do leżącego pod przekrojem boku wieloboku szn. lub stycznej do krzywej sznurowej.

Tok tej siły jest ujemny lub dodatni, stosownie do tego czy ta ostatnia równoległa leży nad równoległą do zamykającej lub też pod nią.

Moment siły zewn. przek. dz. względem tego przekroju jest proporcyonalny do rzędnej zamkniętego wieloboku sznurowego lub też krzywej sznurowej, do rzędnej powierzchni momentów. Pomnożywszy tę rzędną przez odległość bieguna, otrzymujemy prawdziwą wielkość momentu.

§ 30. Przez najniższy punkt O krzywej sznurowej $A'O'B'$ [Tab. VI_2] przeprowadzamy system prostokątnych spółrzędnych OX i OY, i w dowolnym punkcie M prowadzimy styczną do tej krzywej. Niech φ oznacza kąt nachylenia tej stycznej. Promienie w wieloboku sił równoległe do stycznej i do osi X wycinają część C równą ciężarowi części obciążenia mocniej kreskowanej, leżącej między osią Y a przekrojem belki nad M.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{C}{H} = \frac{dy}{dx}; \text{ różniczkując, otrzymujemy } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{H} \frac{dC}{dx}.$$

W tem ostatniem równaniu dC jest przyrostkiem obciążenia (część powierzchni obciążeń kropkowana), więc dC podzielone przez dx jest rzędną η powierzchni obciążeń. Wstawiamy to do ostatniego równania:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\eta}{H} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad a)$$

To równanie pokazuje zależność krzywej sznurowej od krzywej obciążeń i jeżeli mamy prawo, według którego zmienia się η, to możemy, całkując dwa razy to równanie. znaleść y tj. rzędne krzywej sznurowej.

Jeżeli przypuścimy, że obciążenie oprócz tego, że jest ciągłe, jest jeszcze i jednostajne, czyli że na każdą jedność długości belki przypada ten sam ciężar c. to krzywa obciążeń zamienia się na prostą równoległą do belki, a parabola jest wtedy krzywą sznurową. Możemy łatwo tego dowieść, przypuściwszy w równaniu $a.)$ $\eta = c$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{c}{H}; \text{ całkując, otrzymujemy } \frac{dy}{dx} = \frac{c}{H} x + C.$$

Ponieważ w najniższym punkcie $\frac{dy}{dx} = o$, więc stała $C = o$, czyli jeżeli $x = o$, to i $C = o$, więc $\frac{dy}{dx} = \frac{c}{H} x$.

Całkując raz jeszcze, otrzymujemy $y = \frac{1}{2} \frac{c}{H} x^2 + C.$

Dla $x = o$, $y = o$, więc $C = o$,

$$y = \frac{1}{2} \frac{c}{H} x^2$$

Jest to równanie krzywej sznurowej dla ciągłego jednostajnego obciążenia. Łatwo zauważyć, że jest to parabola o osiach pionowych. Oznaczywszy długość belki przez $2l$, otrzymujemy dla $x = 1$ największe $y_m = \frac{1}{2} \frac{cl^2}{H}$. Widocznem jest, że ta największa rzędna jest rzędną powierzchni momentów, leżącą pod środkiem belki.

§ 31. Przedstawmy sobie [Tab. VI_3] obciążoną belkę AB. Przypatrzmy się bliżej siłom i momentom w każdym przekroju tej belki. Zmieniając ciągle położenie przekroju K, będziemy otrzymywali dla każdego nowego położenia coraz inną siłę poprzeczną. Jeżeli na prostopadłych do LN odetniemy w każdym punkcie siły poprzeczne (z uwzględnieniem toków), odpowiadające przekrojom belki, leżącym nad temi punktami, i połączymy następnie końce prostopadłych, to otrzymamy tak zw. krzywą sił poprzecznych $L'N'$. Rzędne tej krzywej, mierzone od LN, dają siły, zewnątrz odpowiedniego przekroju leżące. Odcinek P_1 jest siłą poprzeczną dla przekroju K_1; NN' jest siłą poprzeczną w ostatnim przekroju B itd.

Przypatrzmy się zmianom siły poprzecznej przy zmianie przekroju. W pierwszym przekroju A siłą poprzeczną jest oczywiście oddziaływanie A. Punkt A jest jednym punktem linii działania tej siły. Siła P_1, zewnątrz przekroju K_1 działająca, przechodzi przez punkt P_1, leżący na przecięciu zamykającej i stycznej do krzywej sznurowej w punkcie K_1'. Wielkość tej siły (część wieloboku sił, zawarta między równoległemi do zamykającej i do stycznej promieniami OZ i OR) jest mniejsza niż w poprzednich przekrojach. Gdy przesuwamy przekrój co raz dalej na prawo, punkt P_1 posuwa się coraz dalej na lewo na zamykającej; jednocześnie wielkość siły P coraz się zmniejsza, ponieważ w wieloboku sił promień OR coraz się bardziej nachyla do OZ. Nareszcie w przekroju M, w którym styczna jest równoległa do zamykającej, punkt P_1 leży nieskończenie daleko po lewej stronie, a siła P_1 jest nieskończenie mała, bo OR upada na OZ. Mamy w tym wypadku ∞—odległą i ∞—małą siłę. Krzywa sił poprzecznych przecina w tym punkcie poziomą LN. Do tego punktu wszystkie siły były ujemne, bo oddziaływania były większe niż obciążenia po tej stronie. W punkcie M oddziaływanie równa się obciążeniu. Nieskończenie małe przesunięcie przekroju po za punkt M powoduje przeskoczenie punktu P_1, leżącego ∞—daleko na lewo do nieskończoności na prawo. Siła poprz. staje się dodatnią. Przy dalszem poruszaniu się przekroju do B punkt P_1 zbliża się coraz bardziej; w przekroju K_2 leży w P_1'; siła poprzeczna, przechodząca przez ten punkt, jest dodatnia, a nareszcie kiedy przekrój leży w B, siła poprzeczna jest równa oddziaływaniu B, ma tylko tok odwrotny.

W całym przebiegu przekroju punkt przyłożenia siły, zewnątrz przekroju działającej, jest zawsze zewnątrz belki.

Zmianę momentów widzimy z powierzchni momentów, której rzędne są proporcyonalne do momentów w odpowiednich punktach. Rzędna M_1 jest proporcyonalna do momentu w przekroju K_1, rzędna M_2 do mom. w przekroju K_2. Na punktach oporu moment $= 0$, ponieważ rzędne są $= 0$. Największy moment otrzymujemy w punkcie M, w którym styczna do krzywej sznurowej jest równoległa do zamykającej. W tym punkcie siła, zewnątrz przekroju działająca, jest ∞ - mała i ∞ - odległa: jest parą sił. Jedną siłą tej pary jest oddziaływanie A, a drugą ciężar obciążenia belki między A i M, który możemy uważać za skoncentrowany w środku ciężkości tej części powierzchni obciążeń.

§ 32. Jeżeli obciążenie jest ciągłe i jednostajne ($=c$ na każdą jedność długości belki), to oba oddziaływania są sobie równe i każde z nich równe jest połowie obciąż. belki, (np. oddz. $A=cl$, jeżeli długość belki oznaczymy przez $2l$). W punkcie największego momentu obciążenie do tego punktu równać się powinno oddziaływaniu, to jest oddziaływanie i wypadkowa obciążeń od punktu oporu do punktu najw. momentu tworzą parę sił. Oczywiście ten punkt leży po środku. Jedna z sił tworzących parę działa w punkcie A w górę, a druga w środku ciężkości obciążenia połowy belki—na dół. Odległość jednej od drugiej $= \frac{1}{2} l$, więc moment pary sił $= cl \times \frac{1}{2} l = \frac{1}{2} cl^2$. Rzędna powierzchni momentów, odpowiadająca temu momentowi, równa się $\frac{1}{2} \frac{cl^2}{H}$ i leży po środku, a cała powierzchnia momentów jest odcinkiem paraboli (§ 30). Najkrótszą drogą do wykreślenia tej powierzchni jest obliczyć największą rzędną $= \frac{1}{2} cl^2 : H$, odciąć ją pod środkiem belki od poziomej $A'B'$ [Tab. VI_3] jako MO i następnie wykreślić przez trzy punkty A', O' i B' parabolę, która jest oznaczona zupełnie, ponieważ oprócz trzech punktów znamy jeszcze styczną w punkcie O, która powinna być równoległa do $A'B'$, i wiemy, że osi paraboli są pionowe. Przoprowadzamy dwie skrajne styczne do paraboli $A'T$ i $B'T$; OT według własności paraboli $= OM$. Następnie prowadzimy przez punkt O styczną // do $A'B'$. Styczna do paraboli w punkcie, odpowiadającym przekrojowi K, znajduje się w sposób następujący. Ze środków S_1 i S_2 odcinków AK i KB spuszczamy prostopadłe na skrajne styczne do punktów T_1 i T_2; T_1T_2 jest styczną do paraboli w punkcie K'. Z tej własności stycznej do paraboli wypada bardzo łatwy sposób wykreślenia dowolnej ilości stycznych, które tworzą wielobok otaczający parabolę. Dzielimy skrajne styczne $A''T'$ i $B''T'$ na równą ilość równych części i łączymy punkty podziału w sposób oznaczony na figurze. Punkty styczności są oznaczone kreskami. Po wykreśleniu tych stycznych wkreślamy od ręki parabolę.

Przypatrzmy się teraz krzywej sił poprzecznych dla ciągłego i jednostajnego obciążenia. Siła poprzeczna P w każdym przekroju równa jest wypadkowej oddziaływania i całego obciążenia po lewej stronie przekroju. Jeżeli odległość jakiegokolwiek przekroju od A oznaczymy przez x, to $P = cx - A$. Przypuściwszy, że x jest zmienną, zauważymy, że jest to równanie prostej. Dla $x = o$, $P = -A = -pl$. Odcinając tę wartość od A''' do N, otrzymamy jeden punkt szukanej prostej sił poprzecznych. Dla $x = 2l$, $P = 2pl - A = 2pl - pl = pl$, więc $B'''L = A'''N$. Połączywszy N z L, otrzymamy powierzchnię sił poprzecznych $NA'''B'''L$, której każda rzędna = sile poprzecznej w przekroju nad nią leżącym. Punkt M, odpowiadający punktowi największego momentu, leży po środku tam, gdzie siła poprzeczna = 0.

§ 33. Jeżeli belka jest obciążona jednocześnie obciążeniem ciągłem (np. własnym ciężarem) i pojedyńczemi ciężarami (np. kołami pociągu), to łatwo znajdujemy dla każdego przekroju moment i siłę poprzeczną, opierając się na twierdzeniu z Mechaniki elementarnej, powiadającem, że siły równoległe i ich momenty dodają się algebraicznie. Jeżeli więc mamy belkę *AB* [Tab. VI_4], obciążoną ciągłem jednostajnem obciążeniem i pojedyńczemi ciężarami, to wykreślamy przedewszystkiem powierzchnię momentów dla ciągłego jednostajnego obciążenia. Jest to, jak wiadomo, odcinek poraboliczny *A'mB*. Następnie wykreślamy przy pomocy jakiegokolwiek bieguna *O* wielobok sznurowy dla ciężarów pojedyńczych *A'1'2'3'4'F*. Dalej posuwamy pionowo w górę biegun o tyle, żeby punkt *F* upadł na punkt *B'*. Wiadomo, że, przy zmianie bieguna, odpowiednie boki wieloboków sznurowych obracają się około punktów jednej prostej równoległej do linii, łączącej oba bieguny. Tą równoległą jest w tym wypadku pionowa przez *A'*. Jeżeli więc ostatni bok *4'F* pierwszego wieloboku przedłużymy do tej pionowej, do punktu *T*, to ostatni bok nowego wieloboku powinien przechodzić przez *T*; *B'T* jest więc ostatnim bokiem szukanego wieloboku. Opierając się na tem, możemy wykreślić cały nowy wielobok przy pomocy dawnego, przedłużając boki tego ostatniego do przecięcia z pionową przez *A* i przeprowadzając przez te punkty odpowiednie boki nowego wieloboku sznurowego. Całe wykreślenie jest oznaczone na figurze. Nowy biegun *O'* otrzymujemy, prowadząc od dołu wieloboku sił równoległą od przecięcia z pionową przez dawny biegun. Ponieważ, jak to już wspomnieliśmy, momenty dodają się algebraicznie, więc i rzędne proporcyonalne do momentów dodają się algebraicznie, czyli rzędne powierzchni *A'mB'4321A'h* są proporcyonalne do całkowityeh momentów. Rzędna *MM* np., pomnożona przez *H*, daje moment w przekroju *K*.

Z krzywą sił poprzecznych postępujemy w sposób zupełnie podobny. Wykreślamy naprzód linię łamaną *L1234M*, której rzędne przedstawiają siły poprzeczne od cięż. poj., a następnie do tych rzędnych dodajemy rzędne, pochodzące od obciążenia ciągłego i jednostajnego, dla którego krzywą sił pop. jest prosta *KN*. Jako rezultat otrzymujemy linię łamaną, oznaczoną linią perłowaną na figurze.

b) **Obciążenia ruchome.**

§ 34. W praktyce spotykamy zwykle dwa rodzaje ob ciążeń belek. Jedno, pochodzące od ciężaru własnego i od ciężarów, które się zawsze znajdują w pewnem oznaczonem miejscu; drugie od ciężarów zmiennych, które zajmują rozmaite miejsca na belce, np. od pociągów kolei żelaznych, od wozów, ludzi itp. Ten drugi rodzaj obciążenia wywołuje rozmaite zmiany w siłach poprzecznych i momentach każdego przekroju. Jeżeli, jak się to zwykle zdarza, ciężary z jednej strony wchodzą na belkę, a z drugiej wychodzą (jeżeli np. na belkę mostu wjeżdza pociąg) to—wziąwszy pod uwagę jakikolwiek przekrój—pomiędzy wszystkiemi położeniami ciężarów jest jedno, które wywołuje w tym przekroju największą siłę poprzeczną dodatnią, drugie największą siłę poprz. ujemną, a trzecie największy moment. Rozmiar przekroju belki powinien być naturalnie obliczony według takich obciążeń, nazywających się niekorzystnemi.—Ponieważ wiemy, że siły równoległe i ich momenty dodają się algebraicznie, więc możemy oddzielnie znajdować te siły i momenty dla obciążenia stałego (np. własnego ciężaru), a oddzielnie dla zmiennego (np. pociągu kolei) i następnie dodawać je algebraicznie. Sumy dadzą nam siły i momenty dla belki, jednocześnie obciążonej zmiennem i stałem obciążeniem. Tą swobodą rozdziału posługiwać się będziemy przy znajdowaniu niekorzystnych obciążeń i przypuścimy najprzód, że belka przez nas badana jest nieważka. Niech AB [Tab. VI_5] przedstawia nam taką belkę. Przypuśćmy, że mamy do rozporządzenia jeden ruchomy ciężar Q, który w dowolnem miejscu ustawić możemy. Stawiamy sobie dwa pytania: W którem miejscu ten ciężar leżeć powinien I°, żeby siła zewnątrz przekroju K działająca była największa i II°, żeby moment tej siły względem przekroju był największy?

I°. Dajmy na to, że ciężar Q leży między A i K. Trójkąt $A'B'L$ jest dla tej jednej siły wielobokiem sznurowym. Q wywołuje dwa oddziaływania A i B, których wypadkowa wzięta z tokiem odwrotnym równa się Q. Siłą zewnątrz przekroju K działającą jest (§ 27) wypadkowa sił A i Q czyli $Q-A$, przechodząca przez punkt oporu B (przez przecięcie boków leżących pod przekrojem). Siła ta jest $= B$, ma tylko tok odwrotny (strzałka kreskowana na figurze) tj. działa na dół w kierunku dodatnim. Każde położenie ciężaru Q między A i K daje siłę poprzeczną działającą w B na dół, bo Q jest zawsze większe jak A. Jeżeli Q posuwa się od A do K, to im dalej jest od A, tem siła poprzeczna jest większa, bo tem mniejsze jest oddziaływanie *A*; największą jest, kiedy *Q* leży bezpośrednio przed przekrojem *K*. Jeżeli *Q* jest po drugiej stronie przekroju [Tab VI_6], to siłą zewnątrz przekroju działającą (zawsze bierzemy pod uwagę lewą stronę belki (§ 27)) jest oddziaływanie *A*, przechodzące przez punkt *A* i działające w górę, tj. w innym toku, niż kiedy ciężar *Q* leżał po lewej stronie przekroju. Ta siła poprzeczna (*A*) jest największa, kiedy *Q* jest najbliżej przekroju *K*. Jeżeli zamiast jednego ciężaru wprowadzimy kilka na jedną stronę belki np. na *AK*, to każdy z tych ciężarów wywołuje siły dodatnie (na dół skierowane), a każda siła, przyłożona z drugiej strony przekroju, między *K* i *B*, wywołuje siły ujemne (działające w górę). Chcąc więc otrzymać największą dodatnią siłę poprzeczną w przekroju *K*, trzeba wprowadzić jak najwięcej ciężarów na lewą stronę belki, a prawą zostawić nieobciążoną (bo każdy ciężar z prawej strony wywołuje siłę pop. ujemną, która zmniejsza siłę dodatnią, wywołaną ciężarami leżącemi po lewej stronie) i uważać, żeby największe ciężary leżały jak najbliżej przekroju. Jeżeli pociąg kolei żelaznej jest naszem obciążeniem ruchomem, to trzeba, żeby wjechał z lewej strony belki przez *A* i dojechał do przekroju *K*. Pierwsze koła lokomotywy stać powinny na tym przekroju. Żeby wywołać największą ujemną siłę, obciążamy odwrotnie prawą część belki od *B* do *K*. Pod każdą z figur 5 i 6 oznaczone jest grubą linią niekorzystne obciążenie. Ogólne prawidło brzmi jak następuje:

Aby wywołać największą siłę poprzeczną w jakimkolwiek przekroju, obciążamy lewą lub prawą część belki od przekroju do punktu oporu, stosownie do tego, czy chcemy wywołać maximum dodatnie lub też ujemne. Największe ciężary powinny leżeć najbliżej przekroju.

II⁰. Jeżeli siła *Q* leży po lewej stronie przekroju [Tab. VI_5] to siłą zewnątrz przekroju działającą jest siła $Q—A$ działająca w *B* na dół. Moment tej siły względem przekroju *K* otrzymujemy, mnożąc ją przez ramię *BK*, a ponieważ siła stara się obrócić ramię w toku dodatnim, więc moment jest dodatni. Moment siły zewnątrz przekr. dz. jest zawsze dodatni, jeżeli ciężar leży między *A* i *K*, i to tem większy im większa jest siła poprzeczna w *B* działająca, to jest im bliżej przekroju *K* jest ciężar *Q*. Jeżeli *Q* leży po prawej stronie belki między *K* i *B*, to siłą zewnątrz przekr. dział. jest oddziaływanie A, które działa w górę, więc także obraca swe ramię w toku dodatnim, i moment jest dodatni i to tem większy, im ciężar Q jest bliżej przekroju. Jeżeli więc każdy ciężar, leżący po jednej lub po drugiej stronie przekroju K, wywołuje moment dodatni, to chcąc w przekroju K wywołać największy moment, należy obciążyć całą belkę i uważać przytem, żeby ciężary największe były najbliżej przekroju. W zwykłej belce mamy więc tylko momenty dodatnie. Jeżeli obciążenie składa się z pojedyńczych ciężarów (np. ciśnienia kół lokomotyw), to największy moment leży zawsze pod ciężarem, bo w wieloboku sznurowym pod ciężarem leży największa rzędna. Należy więc dla niekorzystnego obciążenia względem przekroju K postawić jeden z ciężarów (np. jedno z kół najcięższych) na przekroju.

§ 35. **Krzywa największych sił poprzecznych**. Żeby wywołać największą siłę poprzeczną w dowolnym przekroju K, obciążamy tę belkę niekorzystnie, tj. raz od A do K, drugi raz od B do K. Otrzymujemy raz największą dodatnią, drugi raz największą ujemną siłę poprzeczną, która w tym przekroju działać może przy pewnem obciążeniu. Jeżeli to samo uczynimy dla każdego przekroju i wielkości tych największych sił odetniemy od poziomej pod przekrojami odpowiedniemi (dodatnie na dół, ujemne w górę), to otrzymamy tak zwane krzywe największych sił poprzecznych. [Tab VII$_1$]: $A'B$ jest taką krzywą sił ujemnych, $B'A$ sił dodatnich. Szukanie siły największej dla każdego przekroju za pomocą wykreślania odpowiedniego dla niekorzystnego obciążenia wieloboku sznurowego zajęłoby bardzo wiele czasu. Winkler podał sposób znalezienia tych sił za pomocą jednego tylko wieloboku sznurowego. Przypuśćmy, że obciążeniem naszej belki jest pociąg, złożony z lokomotyw. Wprowadzamy ten pociąg na daną belkę AB [Tab. VII$_2$] przez punkt A i doprowadzamy do B tak, żeby pierwsze koło pierwszej lokomotywy stało na B i cała belka była pokryta lokomotywami. Kółka większe na figurze oznaczają koła lokomotyw, a kółka mniejsze koła tendrów. Wykreślamy dla tego obciążenia wielobok sznurowy i przedłużamy ostatni bok $B'Q$. Rzędne między tym przedłużonym bokiem a wielobokiem sznurowym (np. R_iR'), rzędne powierzchni kropkowanej, są proporcyonalne do sił poprzecznych największych w przekrojach (K,K'), leżących nad temi rzędnemi i potrzeba je tylko pomnożyć przez $\frac{H}{2l}$, żeby otrzymać odcinek który, mierzony na podziałce sił, daje największą poprzeczną siłę. Rzędna R, pomnożona przez $\frac{H}{2l}$, jest największą siłą poprzeczną w przekroju K. Żeby tego dowieść, trzeba znaleść wielobok sznurowy, odpowiadający niekorzystnemu obciążeniu względem przekroju K i następnie zobaczyć, czy rzędna R, otrzymana w sposób wskazany wyżej, pomnożona przez $\frac{H}{2l}$, równa jest sile największej poprzecznej, otrzymanej przy niekorzystnem obciążeniu. Łatwo zauważyć, że jeżeli przewrócimy naszą belkę i postawimy ją w położenie $B'K'A'$, tak, że K leżeć będzie pod punktem oporu B, następnie rzucimy pionowo przewróconą belkę na wielobok sznurowy, to część $B''B''A''$ głównego wieloboku będzie wielobokiem sznurowym dla niekorzystnego obciążenia belki względem przekroju K. Mamy bowiem, zwracając uwagę na przewróconą belkę BA', obciążenie od B do K, czyli mamy niekorzystne obciążenie, wywołując największą siłę poprz. ujemną w przekroju K. Wielobok sznurowy jest od B'' do B' linią łamaną, a od B' do A'' prostą, bo między K i A nie ma żadnego obciążenia. Jak wiadomo, otrzymujemy siłę poprzeczną dla jakiegokolwiek przekroju, prowadząc w wieloboku sił równoległe do zamykającej i do boku, leżącego pod przekrojem. Przeprowadzamy te równoległe OO i OZ. Odcinek P wieloboku sił, zawarty między niemi, jest największą siłą poprzeczną w przekroju K. Jeżeli porównamy trójkaty kreskowane w obu wielobokach, to zauważymy, że są one podobne:

$$P : R = H : 2l, \text{ więc } P = R\,\frac{H}{2l},$$

czyli, że rzędna powierzchni kropkowanej, pomnożona przez stosunek H do $2l$, jest odcinkiem, który, mierzony na podziałce sił, daje największą poprzeczną siłę w odpowiednim przekroju. Jeżeli do wykreślenia wieloboku użyjemy jako odległości bieguna $H=2l$, to rzędne mierzą się odrazu na podziałce sił, bo $H : 2l = 1$.

Powierzchnia kropkowana jest krzywą największych sił ujemnych. Łatwo zauważyć, że krzywa najw. sił dodatnich jest symetryczna.

Jeżeli przypuścimy, że niekorzystne obciążenie jest ciągłe i jednostajne, to otrzymamy zamiast wieloboku sznurowego z Fig. 2 parabolę [Tab. VII_3]. Powierzchnia kropkowana jest powierzchnią największych sił poprzecznych. Największa z rzędnych tej powierzchni, $A'A''$, pomnożona przez stosunek H do $2l$, równa jest oddziaływaniu A, czyli, ponieważ obciążenie jest jednostajne,=połowie całego obciążenia$=\frac{c.2l}{2}=cl$, jeżeli c oznacza ciężar na jedność długości belki. Możemy więc, na wypadek ciągłego jednostajnego obciążenia, wykreślić odrazu krzywą największych ujemnych sił poprzecznych, opierając się na tem, że jest ona parabolą (u dołu figury), styczną do poziomej KL, której największa rzędna równa jest cl i leży w punkcie A. Krzywa sił dodatnich jest zupełnie symetryczna i jej największa rzędna LL'=także cl. Żeby wykreślić parabolę, łączymy K' z L' ($K'L'$ jest styczną), następnie w każdym z kątów $K'SL$ i $L'SK$ wykreślamy według § 32 parabolę. Sposób wykreślenia jest oznaczony na figurze.

§ 36. **Krzywa największych momentów.** W § 34 dowiedliśmy, że, aby w dowolnym przekroju moment był największy, belka powinna być całkowicie obciążona, największe ciężary powinny leżeć w blizkości, a jeden z nich na samym przekroju. Jeżeli dla wielu przekrojów belki znajdziemy momenty największe i odetniemy je od poziomej w odpowiednich punktach, to otrzymamy krzywą największych momentów. Jeżeli obciążenie jest c i ą g ł e i j e d n o s t a j n e (c na jedność długości), to oczywiście krzywą tą będzie parabola. Najwygodniej jest obliczyć strzałkę tej paraboli ($=\frac{1}{2}cl^2$) i wykreślić ją sposobem, wskazanym w § 32. Jeżeli obciążenie pochodzi od p o j e d y ń c z y c h c i ę ż a r ó w, to nie można znaleść krzywej najw. mom. w tak łatwy sposób, jak krzywą najw. sił poprzecznych i należy dla każdego przekroju znaleść moment osobno. Największem możliwem obciążeniem mostów jest najczęściej pociąg, złożony z samych lokomotyw. Przypatrzmy się bliżej, w jaki sposób znajduje się dla takiego obciążenia krzywa największych momentów. Dzielimy poziomą, której długość równa się długości belki, na kilka części, znajdujemy w każdej części najw. moment i odcinamy go na pionowej, w odpowiednim punkcie przeprowadzonej. Żeby w dowolnym przekroju *K* moment był największy, muszą około niego i na nim leżeć największe ciężary. W tym celu, żeby mieć jak najwięcej zbliżonych do siebie największych ciężarów, zestawiamy pociąg tak, że jędna jego część stoi tyłem i dwie lokomotywy stykają się kominami, jak na Tab. VII_4. Jeżeli taki pociąg wprowadzimy na belkę, to 6 kół środkowych należy ustawić około przekroju *K*. Jedno z nich powinno leżeć na tym przekroju, lecz które mianowicie, nie możemy z góry powiedzieć. Idąc zwykłą drogą, trzeba byłoby każde z tych 6-ciu kół wprowadzić na przekrój, wykreślić odpowiedni wielobok sznurowy i zamknąć go. Rzędne, leżące pod przekrojem, byłyby proporcyonalne do największych momentów i największa z nich wskazywałaby, które koło musi leżeć na przekroju. W ten sposób trzeba byłoby dla każdego przekroju wykreślać 6 wieloboków. Jest sposób, który zupełnie prawie usuwa tę mozolną pracę. Wykreślamy mianowicie wielobok sznurowy dla całego pociągu lokomotyw, przynajmniej półtora razy tak długiego, jak belka. Dajmy na to, że *MNO* przedstawia taki wielobok. Jeżeli w przekroju *K* danej belki chcemy znaleść największy moment, to przenosimy na rysunku tę belkę do położenia *AB* tak, żeby przekrój *K* leżał pod jednem z 6-ciu głównych kół (na fig. pod kołem *3*). Jeżeli poziomą *AB* rzucimy pionowo na wielobok sznurowy *MNO*, to *FNG* będzie wielobokiem sznurowym dla obciążenia, leżącego na belce *AB*. Moment w przekroju *K* jest proporcyonalny do rzędnej, oznaczonej grubszą linią. Ta rzędna, pomnożona przez *H*, daje największy moment, który pod kołem *3* w przekroju *K* być może. Następnie ustawiamy belkę w położeniu kreskowanem, tak żeby przekrój *K* leżał pod kołem *4*, rzucamy końce belki na główny wielobok szn. *MNO* i otrzymujemy wielobok sznurowy *HNJ*, odpowiadający temu położeniu. Rzędna tego wieloboku, leżąca pod przekrojem, jest proporcyonalna do największego momentu, jaki pod kołem *4* w przekroju *K* być może. To samo wykreślenie uskuteczniamy dla wszystkich 6-ciu kół, tj. przesuwamy *AB* 6 razy tak, że *K* staje pod wszystkiemi 6-ciu kołami i znajdujemy 6 rzędnych proporcyonalnych do największych momentów, które w przekroju *K* pod temi 6 kołami być mogą. Koło, pod którem jest największa rzędna, tj. to koło, które wywołuje największy moment, powinno stać na przekroju *K*, jeżeli chcemy, żeby belka była względem momentu w tym przekroju niekorzystnie obciążona. Moment, odpowiadający największej rzędnej, odcinamy obok, od poziomej $A'B'$ w punkcie K', odpowiadającym przekrojowi K. Jeżeli to samo uczynimy dla kilku przekrojów i następnie połączymy końce rzędnych przedstawiających momenty, to otrzymamy krzywą największych momentów $A'MB'$. Jeżeli tę krzywą porównamy po wykreśleniu z parabolą, to zauważymy, że różnica jest bardzo mała, więc też bardzo często w praktyce wykreśla się, jako krzywą największych momentów, parabolę, której strzałka równa jest strzałce prawdziwej krzywej najw. mom. Wtedy tę jednę tylko rzędną znać potrzeba, odciąć ją na pionowej od środka belki i przez trzy punkty A', B' i koniec pionowej przeprowadzić parabolę sposobem wskazanym w § 32.

Wieloboku sznurowego MNO dla całego pociągu możemy użyć odrazu do wykreślenia krzywej największych sił poprzecznych, gdyż, jeżeli przedłużymy na lewo bok wieloboku sznurowego, leżący pod kołem *3*, to rzędne powierzchni kropkowanej między tym bokiem a wielobokiem sznurowym są, według § 35, proporcyonalne do największych sił poprzecznych ujemnych w przekrojach belki, leżących pod temi rzędnemi, jeżeli belka ma położenie $A''B''$. Rzędna P np. jest proporcyonalna do najw. siły poprz. w przekroju K itp. Potrzeba tylko te rzędne przez $\frac{H}{2l}$ pomnożyć, żeby otrzymać odcinki, które, mierzone na podziałce sił, dadzą prawdziwą wielkość odpowiednich sił poprzecznych. Jeżeli te odcinki odetniemy od $A'B'$ w odpowiednich punktach na dół, to otrzymamy powierzchnię największych sił ujemnych poprzecznych, której ograniczenie $B'L$ jest łamaną linią, i łatwo zauważyć, że gdybyśmy przypuścili, że to ograniczenie jest parabolą, to byłoby to niedokładnem przybliżeniem.

§ 37. **Bezwzględne maximum momentów.** W § 36 pokazaliśmy sposób, za pomocą którego przez próbowanie znajduje się w każdym przekroju największy moment. Otóż od tych momentów zależy głównie rozmiar przekrojów belki, więc też przy punktach oporu przekrój jest mały, a w środku największy. Ta zmiana momentów, a więc i zależna od nich zmiana przekrojów uwzględnia się w praktyce przy większych belkach, jak np. głównych belkach mostów itp. Lecz gdybyśmy w bardzo krótkich belkach zmieniali przekroje odpowiednio do momentów, to wprawdzie zaoszczędzilibyśmy coś z materyału, lecz większa robota, która wskutek zmian okazuje się potrzebną, czyni tę oszczędność tylko pozorną i w takich razach, do pewnych granic, daje się całej belce jednakowy przekrój, który się oblicza według największego możliwego momentu. Zajmiemy się przez chwilę znalezieniem tego momentu, bez względu na przekrój, w którym się znajduje; znajdziemy bezwzględne maximum momentów. Możemy tak, jak w § 36, posuwać naszą belkę pod ciężarami, rzucać ją na wielobok sznurowy, wykreślony dla całego pociągu, i z pomiędzy rzędnych, otrzymanych w ten sposób wieloboków częściowych, wybrać największą. Lecz oprócz tego sposobu przez próbowanie jest jeszcze inny, podany przez prof. W i n k l e r a, za pomocą którego daleko prędzej możemy wykreślić bezwzględne maximum. Jak wiadomo, moment w jakimkolwiek przekroju jest największy, kiedy na nim leży ciężar (np. koło lokomotywy), więc też i na przekroju, w którym jest bezwzględne maximum, stać musi koło. Jeżeli daną belkę przesuwamy pod ciężarami (z położenia A_0B_0 do $A'B'$ itd.) i dla każdego jej położenia znajdujemy odpowiedni wielobok [Tab. VII$_5$], rzucając jej końce na główny wielobok, to zamykające (MN, PQ itd.) otaczają parabolę *mm*, dopóki się ich końce posuwają po dwóch prostych (*12* i *56*). Jeżeli przesuwają się na rozmaitych bokach, to otaczają krzywą, złożoną z kawałków parabol. Odcinki pionowych między parabolą a wielobokiem sznurowym (np. *3T*, *5R*) są proporcyonalne do największych możliwych momentów w odpowiednich punktach. Jak wiadomo, największe momenty są pod ciężarami, więc też i największe rzędne są w punktach *2*, *3*, *4* itd. Jeżeli więc wykreślimy parabolę, to największy z odcinków między parabolą a wielobokiem sznurowym jest proporcyonalny do bezwzględnego maximum momentów i potrzebujemy go tylko przez H pomnożyć, żeby otrzymać prawdziwą wielkość tego momentu. Lecz nie potrzebujemy wykreślać całej paraboli, bo wiemy, że największe odcinki muszą przechodzić przez punkty *2*, *3*, *4*, *5* . . . . ; wystarczy więc nam znajomość stycznych do paraboli w tych punktach, leżących pod ciężarami. Odcinki pionowe między temi stycznemi a wielobokiem sznurowym, przechodzące przez punkt styczności, (np. *3T*), są oczywiście proporcyonalne do największego momentu, jaki pod odpowiednim ciężarem być może. Jeżeli wykreślimy te styczne dla wszystkich ciężarów, to możemy łatwo znaleść, pod którą jest największy odcinek, i ten ostatni, pomnożony przez *H*, jest bezwzględnem maximum momentów. Styczne wspomniane łatwo dają się wykreślić, opierając się na własności paraboli, że środki wszystkich stycznych, dopóki ich końce posuwają się po tych samych prostych, leżą w jednej stycznej *PQ* do punktu *G*, leżącego pionowo nad przecięciem boków, na których się ślizgają końce stycznych. Więc $MF = FN$. Oprócz tego wiadomo, że jeżeli w dwóch punktach paraboli przeprowadzimy styczne, to osi paraboli, przechodzące przez punkty styczności, są równooddalone od punktu przecięcia stycznych. Pionowa przez *F* jest równooddalona od pionowej przez *T* i pionowej przez *G*. Jeżeli więc chcemy wykreślić styczną od paraboli w punkcie, leżącym nad *3*, to przedłużamy boki wieloboku sznurowego, po których się ślizgają zamykające. Przez ich punkt przecięcia *L*, prowadzimy pionową *GL*. Następnie toż samo przez punkt *3* (*T3*). Między temi dwoma pośrodku prowadzimy pionową *p* i od niej, od punktu *S*, odcinamy na obie strony na poziomej po pół długości belki (SA_0 i SB_0). Rzuciwszy końce tej belki na wielobok sznurowy, otrzymujemy szukaną styczną *MN*. Odcinek *3T* jest proporcyonalny do największego możliwego momentu pod ciężarem *3*.

Wyrażona językiem mechanicznym, tak brzmi własność opisana paraboli: Pod jakimkolwiek ciężarem jest wtedy największy moment, kiedy ten ciężar i wypadkowa wszystkich na belce leżących ciężarów są równo oddalone od środka belki.

§ 38. Jak wiadomo, każdy większy żelazny lub drewniany most kolejowy składa się z dwóch belek głównych *A* [Tab. VII_6], idących od jednego filara do drugiego. Na tych opierają się w niewielkiej od siebie odległości belki poprzeczne *B*, a na tych znowu belki podłużne *C*, które podtrzymują podkładki pod szyny *D*. Jeżeli most jest żelazny, to belki podłużne *C* są zwykle przyczepione do belek poprzecznych nitami, których ilość i przekrój oblicza się na podstawie największego oddziaływania, jakie od belki podłużnej pochodzić może. Jeżeli *AB* [Tab. VII_7] przedstawia nam taką belkę podłużną, przyczepioną w punktach *A* i *B* do belek poprzecznych, to oczywiście znajdziemy największe oddziaływanie w *A*, ustawiając lokomotywę tak, że pierwsze jej koło (*1*) stać będzie najbliżej punktu *A*. Wykreślając odpowiedni wielobok sznurowy, znajdziemy to oddziaływanie według § 26.

Belki poprzeczne obliczają się na podstawie największych ciśnień, jakie od belek podłużnych pochodzić mogą. Jeżeli B [Tab. VII_8] jest belką poprzeczną, to na nią cisną ciężary pochodzące od belek podłużnych *AB* i *BC*. Żeby znaleść, jakie powinno być położenie kół pociągu, by suma działających w *B* oddziaływań belek *AB* i *CB* była największa, wykreślamy wielobok sznurowy *MNO* dla pewnej części pociągu dłuższej, jak *AC*; *ST* jest odpowiednim wielobokiem sił. Następnie stawiamy *B* pod rozmaite koła pociągu i w każdem położeniu rzucamy *ABC* na główny wielobok *MNO*. Otrzymujemy w każdym wypadku dwa wiel. sznurowe *A'B'* i *B'C*. Sumę oddziaływań w *B* otrzymujemy, prowadząc w wieloboku sił przez *O* równoległe do *A'B'* i *B'C*, jako *PQ*. Uskuteczniając to samo dla każdego położenia *ABC*, znajdziemy największe *PQ*, odpowiadające największej możliwej sumie oddziaływań w *B*.

c) **Obciążenia jednocześnie stałe i ruchome.**

§ 39. Każda belka ma swój własny ciężar, który jest jej stałem obciążeniem. W najczęściej spotykanych wypadkach jest ono jednostajne. Jako krzywą sił poprzecznych dla takiego obciążenia otrzymujemy prostą *LN* [Tab. $VIII_1$], przecinającą poziomą *AB* po środku; punkt największego momentu *M* leży w tem przecięciu, bo siła poprzeczna jest tam = *0*. Jeżeli wprowadzimy na belkę dowolny ciężar, to punkt *M* zmieni swe położenie, bo, jak wiadomo z § 31, obciążenie belki od punktu oporu *A* do tego punktu równać się powinno oddziaływaniu *A*, a wskutek wprowadzenia ciężaru *Q*, wielkość tego oddziaływania się zmieniła. Podczas gdy belka była obciążona tylko własnym ciężarem, każde oddziaływanie równe było połowie ciężaru belki (punkt *M* leżał po środku) jeżeli zaś ciężar *Q* był wprowadzony na belkę, przypuśćmy przez punkt oporu *B*, i postawiony po prawej stronie przekroju, to oddziaływanie A się zwiększyło i pomiędzy A a punktem M musi być dłuższy kawał belki, żeby jego ciężar równał się A. Więc punkt M zbliżył się do ciężaru Q. Skoro dalej posuwamy nasz ciężar od B do A, to punkt M zbliża się do niego coraz bardziej, aż nareszcie ciężar i M upadają jeden na drugi. Od tej chwili M zmienia kierunek swego biegu, zawraca, i Q i M poruszają się w jednym kierunku i zbliżają się ku A, aż wreszcie w pewnym punkcie rozchodzą się w przeciwne strony i kiedy Q wychodzi z belki przez A, M wraca do swego pierwotnego położenia, do środka belki. Łatwo zauważyć, że największe zbliżenie punktu M do punktu oporu będzie wtedy, kiedy między nim a punktem oporu będzie leżało jak najwięcej ciężarów i najcięższe z nich będą leżały od strony M. Jeżeli weźmiemy pod uwagę pociąg kolei żelaznej, to gdy wjeżdża na belkę mostu, M przybliża się ciągle, aż do chwili, w której pierwsze koło lokomotywy z nim się spotka. Od tej chwili M i pociąg idą w jednym kierunku tak długo, aż póki ostatnie koło pociągu nań nie upadnie. Wtedy M zaczyna cofać się w tył i wraca do środka belki. Otrzymujemy dwie granice zboczenia tego punktu. Skoro pociąg wjeżdża z drugiej strony, otrzymujemy drugie dwie. Z tych czterech granic są dwie najbardziej od środka oddalone i niemi się bliżej zajmiemy. Jak wiadomo, M leży tam, gdzie siła poprzeczna $= 0$, a ponieważ nie leży nigdy zewnątrz dwóch granic, które nazwijmy M_1 i M_2, więc zewnątrz tych granic siła poprzeczna nie może być nigdy $= 0$. Na Tab. VIII_1a) $ALNB$ jest powierzchnią sił poprzecznych dla własnego stałego obciążenia belki; $AL = BN = c_w l$, jeżeli c_w oznacza ciężar własny belki na jedność długości Rzędne powierzchni ALM są ujemne, a powierzchni BNM dodatnie. Rzędna P_w jest siłą poprzeczną w przekroju K. Przypuśćmy, że obciążenie ruchome jest także ciągłe i jednostajne $= c_r$ na jedność długości. Jeżeli to obciążenie wchodzi na belkę przez punkt oporu B, to wywołuje ono największe siły poprzeczne ujemne, dla których krzywą jest według § 35 parabola $B_1 L_1$ [Tab. VIII_1b]. Rzędna P_r jest największą możliwą ujemną poprzeczną siłą w przekroju K. Jeżeli połączymy stałe i ruchome obciążenie (to jest dodamy algebraicznie powierzchnie z Fig. a) i b)), to otrzymamy, jako powierzchnię sił największych poprzecznych ujemnych, powierzchnię kropkowaną $A_2B_2N_2L_2A_2$ Fig. c) Rzędna KK_1 tej powierzchni równa się $P_r + P_w$. Rzędna $RR_1 = P'_w - P'_r$. Pomiędzy punktem M_1, w którym krzywa L_1N_2 przecina poziomą A_2B_2, a punktem oporu B nie może nigdy leżeć punkt największego momentu, bo siła poprzeczna, powstająca z połączenia a) i b), nie może być nigdy równa zeru.

Jako krzywą największych dodatnich sił poprzecznych otrzymujemy symetryczną krzywą L_3N_3 (Fig. d). Pomiędzy punktem A a M_2 nie może także nigdy leżeć punkt największego momentu; więc się porusza on między granicami M_1, M_2. Najwyraźniej to widać, połączywszy obie figury c i d) w jednę e). Na lewo od M_2 mogą być tylko siły ujemne, na prawo od M_1 tylko siły dodatnie. Między M_1 i M_2 siły mogą mieć tok rozmaity. Największą możliwą siłą poprzeczną ujemną w przekroju F, jest FF' (kiedy belka, oprócz własnego ciężaru jest obciążona od B do F), a najmniejszą FF_2 (kiedy belka jest obciążona od A do F).

Momenty w belce, obciążonej jednocześnie stałem i ruchomem obciążeniem, mierzą się rzędnemi złączonych powierzchni największych momentów obu rodzajów obciążeń Rzędna yy' (Fig. f), pomnożona przez H, jest w przekroju K największym możliwym momentem.

d) **Środek sił równoległych. Środek ciężkości.**

§ 40. Jeżeli obracamy siły równoległe o jeden kąt około punktów przyłożenia, to ich wypadkowa obraca się także około jednego punktu, zwanego **środkiem sił równoległych**. Przypuśćmy, że mamy naprzód tylko dwie równoległe siły P i Q [Tab. VIII$_2$]. Wypadkowa tych sił przecina prostą RR', łączącą punkty przyłożenia danych sił, w punkcie R''. Jak wiadomo, RR'' tak się ma do $R''R'$, jak Q do P. Jeżeli następnie obrócimy dane siły, nie zmieniając ich wielkości, o kąt φ i postawimy w położeniu P' i Q', to nowa wypadkowa W' musi także przechodzić przez R''; gdyż RR' musi być także podzielona przez W' w odwrotnym stosunku sił P' i Q', których wielkości nie zmieniliśmy przy obrocie. Tego samego możemy dowieść dla każdego nachylenia sił, więc punkt R'' jest punktem, około którego obracają się wypadkowe dwóch sił, kiedy zmieniamy ich kierunek, nie zmieniając ani wielkości (przynajmniej ich stosunku), ani punktów przyłożenia; punkt R'' jest więc **środkiem** dwóch danych sił. Jeżeli do dwóch sił dodamy trzecią równoległą, to oczywiście środkiem wszystkich trzech sił jest środek wypadkowej pierwszych dwóch i siły trzeciej. Jeżeli dodamy jeszcze czwartą siłę, to środek wszystkich czterech jest środkiem wypadkowej pierwszych trzech i ostatniej i t. d. W ten sposób możemy dowieść twierdzenia, stojącego na czele §, dla dowolnej ilości sił równoległych.

Jeżeli weźmiemy pod uwagę ciało jakiekolwiek, to na każdą jego najdrobniejszą cząstkę działają siły przyciągania ziemi, których wypadkową jest to, co nazywamy **ciężarem** ciała. Każda z tych sił jest przyłożona do punktów materyalnych, składających ciało, i każda z nich jest pionowa, więc je uważamy za równoległe; jako takie, wszystkie te siły mają jeden środek, który nazywamy **środkiem ciężkości**. Jeżelibyśmy więc mogli zmienić kierunek sił, obracając je o kąt jeden około punktów przyłożenia, to wypadkowa obracałaby się około tego środka ciężkości. Nie w naszej jest mocy zmienić kierunek sił przyciągających ziemi, lecz możemy uczynić coś zupełnie temu odpowiadającego, obracając ciało w przestrzeni. Jest więc w każdem ciele, w każdej powierzchni lub linii materyalnej, punkt, zwany środkiem ciężkości, przez który przechodzi zawsze wypadkowa wszystkich sił przyciągania. Od tej chwili będziemy mieli na uwadze środki ciężkości figur, leżących w płaszczyźnie.

§ 41. Ogólne prawidło, według którego się znajduje środek ciężkości dowolnie ograniczonych powierzchni płaskich, lub też linij, leżących w płaszczyźnie, jest następujące: znajdujemy wypadkową wszystkich sił ciążenia, następnie obracamy te siły około ich punktów przyłożenia o kąt jeden i znajdujemy znowu wypadkową; na przecięciu pierwszej i drugiej wypadkowej leży środek ciężkości. Lecz ponieważ mamy przed sobą nieskończoną ilość nieskończenie małych sił, któremi wykreślnie operować nie możemy, więc podstawiamy, zamiast tej nieskończonej ilości, skończoną ilość sił skończonych. Możemy daną powierzchnię podzielić na kilka najprostszych figur (których środek ciężkości łatwo znaleść możemy) i następnie przypuścić, że w środkach ciężkości tych figur działają siły, proporcyonalne do odpowiednich części powierzchni. Środek tych sił jest oczywiście środkiem ciężkości powierzchni całej, o czem się łatwo przekonać, rozumując, jak na początku tego paragrafu. Jeżeli więc mamy znaleść środek ciężkości jakiejkolwiek powierzchni *ABC* [Tab. $VIII_3$], to ją dzielimy na kilka części, których środek ciężkości z łatwością znaleść możemy. Dzielimy ją np. równoległemi liniami na paski, których środek znajduje się przybliżenie, przypuszczając, że są trapezami. Przykładamy w środkach ciężkości tych pasków siły proporcyonalne do ich powierzchni, (linie, przedstawiające takie siły, łatwo otrzymać, przekształcając paski na jakąkolwiek podstawę według § 5 i nast.), składamy je w wieloboku sił i wykreślamy odpowiedni wielobok sznurowy *MNO*. Przez przecięcie *R* skrajnych boków przechodzi wypadkowa *W*, na której leżeć musi środek ciężkości powierzchni *ABC*. Następnie obracamy wszystkie siły około punktów przyłożenia, około środków ciężkości pasków, o kąt dowolny φ i wykreślamy drugi wielobok sznurowy *M'N'O'*. Przez przecięcie jego skrajnych boków przechodzi nowa wypadkowa *W'*, na której musi także leżeć środek ciężkości całej powierzchni. Więc punkt przecięcia *S* wypadkowych *W* i *W'* jest szukanym środkiem ciężkości.

Łatwo zauważyć, że jeżeli powierzchnia jakakolwiek ma jednę oś symetryi, jak np. przekrój szyny kolejowej [Tab. $VIII_4$] to w tej osi *AB* musi leżeć środek ciężkości i jeden wielobok *MNO* wystarcza do jego znalezienia. Jeżeli powierzchnia ma dwie osi symetryi, to *S* leży na ich przecięciu.

Środek ciężkości linii prostej materyalnej leży oczywiście w jej środku. Jeżeli chcemy znaleść *S* linii łamanej *ABCD* [Tab. $VIII_5$], to w środkach ciężkości S_1, S_2, S_3 odcinków, składających tę linię, przykładamy siły równoległe, mające dowolny kierunek, proporcyonalne do długości odcinków, (możemy te same odcinki uważać za siły), wykreślamy odpowiedni wielobok sznurowy i znajdujemy wypadkową *W*. Następnie obracamy wszystkie siły o kąt jeden około punktów S_1, S_2, S_3, wykreślamy nowy wielobok i nową wypadkową W'. Na przecięciu wypadkowych W i W' leży szukany środek ciężkości.

Żeby znaleść środek ciężkości dowolnej krzywej, wpisujemy w nią wielobok o wielkiej ilości boków; środek ciężkości tego wieloboku jest przybliżenie środkiem ciężkości danej krzywej.

Ponieważ dla znalezienia środków ciężkości powierzchni lub linij rozkładamy je na kilka najprostszych części, i następnie przypuszczamy, że w środkach ciężkości każdej działają siły do nich proporcyonalne, więc powinniśmy mieć łatwe sposoby znajdowania środków ciężkości dla najprostszych figur. W tym celu podajemy niżej bez dowodów znane powszechnie ze zwykłej Statyki sposoby dla najczęściej napotykanych linij i powierzchni

Część wieloboku foremnego $ABCDEF$ [Tab. $VIII_6$] Przez środek wieloboku O przeprowadzamy prostą OX prostopadłą do osi symetryi OY i wykreślamy trójkąt prostokątny $F'NN'$, którego przeciwprostokątna $F'N'$ równa się obwodowi $ABCDEF$, a NN' równa się promieniowi koła opisanego. Od F' odcinamy na przeciwprostokątnej $F'G'=AF=$ cięciwie danej części wieloboku i prowadzimy poziomą $G'S$. S jest środkiem szukanym ciężkości.

Łuk koła AB [Tab. $VIII_7$]. Przez środek łuku C prowadzimy promień CO i styczną TCT'. Suma $TC+CT'$ równać się winna wyprostowanemu łukowi AB. Łączymy środek koła O z T i z T', i przez A i B prowadzimy równoległe do OC do punktów A' i B'; $A'B'$ przecina promień OC w środku ciężkości S.

Powierzchnia trójkąta ABC [Tab. $VIII_8$]. Środek ciężkości leży na przecięciu linii AA_1, BB_1, CC_1, łączących wierzchołki z środkami przeciwległych boków.

Równoległobok. Środek ciężkości leży na przecięciu przekątnych.

Trapez $ABCD$ [Tab. $VIII_9$]. Przedłużamy równoległe boki AB i DC. Odcinamy $AE=DC$, $CF=AB$ i łączymy E z F. Następnie łączymy środki boków równoległych M_1 i M_2. Środek ciężkości leży na przecięciu linij EF i M_1M_2.

Czworokąt nieforemny $ABCD$ [Tab. $VIII_{10}$]. Prowadzimy przekątną AC i łączymy jej środek E z pozostałemi wierzchołkami D i B. Łączymy następnie punkty K i K_1, leżące w trzecich częściach odcinków DE i EB i na prostej KK_1 od punktu K_1 odcinamy $KS = K_1M$; S jest środkiem ciężkości czworoboku.

Wycinek koła OAB. [Tab. $VIII_{11}$]. Środek ciężkości łuku $A'B'$, którego promień$={}^2/_3$ promienia łuku AB, jest środkiem ciężkości całego wycinka.

Odcinek koła AMB [Tab. $VIII_{12}$]. Ze środka cięciwy D wystawiamy prostopadłą DF na promień OB; S_1 i S_2 są znanemi środkami ciężkości trójkąta AOB i wycinka $OAMB$. Przez punkt S_1 przeprowadzamy dowolną prostą i na niej odcinamy $S_1R=\mathrm{arc}MB$, następnie prowadzimy przez S_2 równoległą do S_1R i odcinamy na niej $S_2Q=DF$. Prosta RQ przecina OM w szukanym środku ciężkości.

Odcinek i trójkąty paraboliczne. Na Tab. VIII_{13} są oznaczone rzędne i odcięte względem sprzężonych osi AB i LM: S_1 jest środkiem ciężkości odcinka AOB, S_2 trójkąta parabolicznego AOK, S_3 środkiem ciężkości trójkąta parabolicznego ALB, a S_4 trójkąta parabolicznego ALO.

ROZDZIAŁ IV.

Moment bezwładności.

§ 42. **Moment siły względem prostej**. W § 19 nazwaliśmy momentem siły względem punktu, zwanego biegunem, iloczyn z tej siły przez odległość bieguna, t j. przez tak zwane ramię momentu. Dowiedliśmy, że wielkość momentu zależy jedynie od wzajemnego położenia linij działania siły i bieguna, że zmianą punktu przyłożenia siły nie wpływa na nią wcale. Otóż, w przeciwstawieniu temu rodzajowi momentu, nazywać będziemy momentem siły względem prostej iloczyn z tej siły przez odległość jej punktu przyłożenia od danej prostej. W tym wypadku zmiana kierunku linii działania siły nie wpływa wcale na wielkość momentu, która zależy jedynie od wzajemnego położenia punktu przyłożenia i danej prostej. Moment siły P [Tab. IX_1] względem prostej p jest iloczynem z siły P przez RQ, przez odległość punktu przyłożenia R od prostej p. Więc i moment siły P' prostopadłej do p równa się $P'.RQ$.

Moment wypadkowej całego systemu sił równoległych, działających w płaszczyźnie, względem prostej, leżącej w tej płaszczyźnie, równa się, jak wiadomo, sumie momentów wszystkich sił względem tej prostej.

§ 43. **Momenty wyższego rzędu**. Dajmy na to, że siły równoległe P_1, P_2, ..., P_6, [Tab. IX_2] są przyłożone w punktach *1*, *2*, .. *6*, których odległości od prostej p, względem której szukamy momentów, równe są odpowiednio: x_1, x_2, ..., x_6.; P_1x_1, P_2x_2,..., P_6x_6 są momentami sił $P_1.P_2$, ..., P_6 względdem prostej p. Jeżeli przez ΣPx oznaczymy sumę wszystkich momentów pojedyńczych sił, to:

$$\Sigma Px = P_1\ x_1 + P_2\ x_2 + P_3\ x_3 + \ldots . P_6\ x_6 \ldots\ldots \quad 1.)$$

Ponieważ według § 42 zmieniać możemy dowolnie kierunek linii działania sił równoległych, obracając je około punktów przyłożenia, więc obróćmy je tak, żeby wszystkie były równoległe do prostej p. Zamiast sił P otrzymamy siły, oznaczone kreskowanemi liniami. Suma *1.*) nie zmienia się wcale. Wykreślmy teraz dla obróconych w ten sposób sił wielobok sznurowy *M12..6N*. Odcinek *oVI* prostej p między skrajnemi bokami wieloboku jest proporcyonalny do momentu wypadkowej względem każdego punktu, leżącego na prostej p (§ 24), więc także względem prostej p, i potrzebujemy go tylko przez H pomnożyć, żeby otrzymać prawdziwą wielkość momentu. Jeżeli przyjmiemy $H=1$, to odcinek *0VI* daje prawdziwą wielkość momentu. Momenty każdej z sił osobno równają się odcinkom prostej p, zawartym między bokami wieloboku sznurowego, przecinającemi się na tych siłach; i tak *0I* jest momentem siły P_1 $(=P_1 x_1)$, *I II* momentem siły P_2 $(=P_2 x_2)$, *II III* siły P_3 $(=P_3 x_3)$, *III IV* siły P_4 $(=P_4 x_4)$, *IV V* siły P_5 $(= P_5 x_5)$, i nareszcie *V VI* siły P_6 $(=P_6 x_6)$. Twierdzenie na końcu § 42 sprawdza się tutaj zupełnie, gdyż moment wypadkowej *0VI* równa się algebraicznej sumie momentów składowych *0I*, *I II*, *II III*, *III IV*, *IV V* i *V VI*, zaopatrzonych różnemi znakami, co jest widoczne z figury.

Przypuśćmy następnie, że w punktach przyłożenia danych sił *1*, *2*, *3*, . . , *6* działają nowe siły, z których każda równa się odpowiednim odcinkom *0I*, *I II*, ... *V VI*, przedstawiającym momenty sił względem prostej p. Więc w punkcie *1* działa siła *0I* w górę, w punkcie *2* siła *I II* w górę, w punkcie *3* siła *II III* na dół, itd. Wykreślamy dla tych nowych sił wielobok sznurowy *M'12. . . .N'*. Nowego wieloboku sił nie potrzebujemy wykreślać, bo mamy go już na linii p (*0I II . . . VI*). Przypuśćmy, że odległość bieguna równa się *1*. Odcinki *0'I'*, *I'II'*, . . . , *V'VI'* są oczywiście momentami nowych sił względem prostej p, więc $0'I' = 0I \times x_1$,

$I'II' = I\ II \times x_2$ itd., a ponieważ wiemy, że $0I = P_1 x_1$, $I\ II = P_2 x_2$ itd., więc $0'I' = P_1 x_1{}^2$, $I'II' = P^2 x_2{}^2$ itd.,

$$\Sigma P x^2 = P_1\, x_1{}^2 + P_2\, x_2{}^2 + P_3\, x_3{}^2 + \ldots + P_6\, x_6{}^2 = 0'VI' \ldots 12.)$$

Przyjmując z kolei odcinki $0'I'$, $I'II'$, ... za siły, działające w odpowiednich punktach przyłożenia, otrzymamy nowy wielobok sznurowy; odcinki prostej p, zawarte między bokami tego wieloboku, równać się będą $P_1 x_1{}^3$, $P_2 x_2{}^3$, ... ;

$$\Sigma P x^3 = P_1\, x_1{}^3 + P_2\, x_2{}^3 + P_3\, x_3{}^3 \ldots + P_6\, x_6{}^3 \ldots\ldots 3.)$$

Postępując w ten sposób dalej i przyjmując dowolną ilość sił k, będziemy mieli wogóle:

$$\Sigma P x^n = P_1\, x_1{}^n + P_2\, x_2{}^n + P_3\, x_3{}^n + \ldots\ldots + P_k\, x_k^n \ldots 4.)$$

Suma 1.), przedstawiająca sumę momentów wszystkich sił względem prostej p, nazywa się m o m e n t e m s t a t y c z n y m tych sił względem p.

Suma 2.), przedstawiająca sumę iloczynów wszystkich sił przez kwadrat odległości ich punktów przyłożenia od prostej p, nazywa się m o m e n t e m b e z w ł a d n o ś c i tych sił względem p.

Wszystkie inne sumy tego rodzaju, jak 3.) i 4.), nazywają się m o m e n t a m i w y ż s z y c h r z ę d ó w.

Jeżeli, zamiast uważać odcinki $0I$, $I\ II$ ..., odpowiadające wyrazom pojedyńczym drugiej części równania 1.) za siły, działające w punktach przyłożenia *1*, *2*, *3*, ... równolegle do prostej p, będziemy uważali je za siły, działające w tych samych punktach przyłożenia równolegle do prostej q, to odcinki wieloboku sznurowego tych sił na prostej q będą przedstawiały wyrazy nowej sumy

$$\Sigma P x y = P_1\, x_1\, y_1 + P_2\, x_2\, y_2 + P_3\, x_3\, y_3 + \ldots + P_6\, x_6\, y_6 \ldots 5.),$$

jeżeli przez y_1, y_2, ... oznaczymy odległości punktów przyłożenia od nowej prostej q. Każdy wyraz drugiej strony równania 5.) przedstawia iloczyn z danej siły przez odległość jej punktu przyłożenia od dwóch danych prostych. Moment tego rodzaju nazywa się m o m e n t e m o d ś r o d k o w y m

Pamiętać należy, że do wykreślania wieloboków sznurowych przyjmowaliśmy odległość bieguna równą *1*. Jeżeli w tym celu używać będziemy innych długości, to dla znalezienia prawdziwej wielkości momentów trzeba te długości wprowadzić w rachunek.

Jeżeli siły dane są nieskończenie blizkie, to zamiast wieloboków sznurowych otrzymujemy krzywe sznurowe. Jeżeli np. mamy materyalną powierzchnię płaską α [Tab. IX_3], to na każdy jej element $\Delta\alpha$ działają siły przyciągania, które są proporcyonalne do tych elementów. Na całą powierzchnię działa siła do niej proporcyonalna, możemy więc powierzchnie materyalne przyjmować za miarę tych sił w nich działających. Moment statyczny danej powierzchni względem prostej x równa się $\Sigma\Delta\alpha y$, moment bezwładności równa się $\Sigma\Delta\alpha y^2$, moment odśrodkowy równa się $\Sigma\Delta\alpha xy$. Sprowadzamy w ten sposób wszystkie momenty do wyrazów matematycznych, złożonych z elementów powierzchni i ich odległości od danych prostych.

§ 44. Od tej chwili oznaczać będziemy moment statyczny $\Sigma\Delta\alpha y$ przez M_s, moment bezwładności $\Sigma\Delta\alpha y^2$ przez M_b, moment odśrodkowy $\Sigma\Delta\alpha xy$ przez M_0; $\Sigma\Delta\alpha$ równa się oczywiście powierzchni danej α.

Dajmy na to, że ${}^xM_b$ jest momentem bezwładności względem prostej x [Tab. IX_4]. Przeprowadźmy drugą prostą s przez środek ciężkości S powierzchni α, równoległą do x. Znajdźmy, jaki zachodzi związek między momentem bezwładności względem prostej x (${}^xM_b$) a momentem bezwładności względem prostej s (${}^sM_b$).

Jeżeli przez y oznaczymy odległości elementów od prostej x, przez y' odległości od prostej s, a przez i odległość s od x, to oczywiście:

$$y = i + y', \quad {}^xM_b = \Sigma\Delta\alpha y^2, \quad \text{więc:}$$

$${}^xM_b = \Sigma\Delta\alpha\ (i + y')^2 = \Sigma\Delta\alpha i^2 + \Sigma\Delta\alpha y'^2 + \Sigma\Delta\alpha . 2iy'$$

Wyprowadzamy stałe przed znak sumowania Σ:

$${}^xM_b = i^2\, \Sigma\Delta\alpha + 2\, i\, \Sigma\Delta\alpha y' + \Sigma\Delta\alpha y'^2;$$

$\Sigma\Delta\alpha = \alpha$; $\Sigma\Delta\alpha y'$ jest momentem statycznym powierzchni α względem prostej, przechodzącej przez środek ciężkości, więc się równa zeru i drugi wyraz równania znika. Ostatni wyraz $\Sigma\alpha y'^2$ jest momentem bezwładności względem prostej s, (${}^sM_b$).

Więc: $${}^xM_b = \alpha\, i^2 + {}^sM_b \quad \ldots\ldots\ldots \text{a)}$$

czyli, że moment bezwładności względem dowolnej prostej równa się momentowi bezwładności względem dowolnej prostej, przechodzącej równolegle przez środek ciężkości, więcej iloczyn z powierzchni danej przez kwadrat odległości obu prostych.

Widocznem jest, że moment M_b jest najmniejszy względem prostych, przechodzących przez środek ciężkości.

§ 45. **Elipsa bezwładności.** Jeżeli zmieniamy kierunek prostej, względem której mierzymy moment bezwładności, obracając ją około jednego punktu, to oczywiście zmienia się i ten moment. Zajmiemy się obecnie znalezieniem zależności od siebie tych rozmaitych momentów.

Przypuśćmy, że OX i OY [Tab. IX_5] są osiami spółrzędnych. Nazwijmy moment bezwładności względem OX, ${}^xM_b$; względem OY, ${}^yM_b$; a względem prostej OV, nachylonej do OX pod kątem α, ${}^vM_b$. Jeżeli przez u oznaczymy odległość elementów od OV, to:

$${}^vM_b = \Sigma\Delta\alpha u^2,\ {}^xM_b = \Sigma\Delta\alpha y^2,\ {}^yM_b = \Sigma\Delta\alpha x^2$$

$$u = y\cos\alpha - x\sin\alpha, \text{ więc } {}^vM_b = \Sigma\Delta\alpha\,(y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2,$$

$${}^vM_b = \cos^2\alpha\Sigma\Delta\alpha y^2 + \sin^2\alpha\Sigma\Delta\alpha x^2 - 2\cos\alpha\sin\alpha\Sigma\Delta\alpha xy,$$

$$\Sigma\Delta\alpha y^2 = {}^xM_b,\ \Sigma\Delta\alpha x^2 = {}^yM_b,\ \Sigma\Delta\alpha xy = M_0, \text{ więc:}$$

$${}^vM_b = \cos^2\alpha.\ {}^xM_b + \sin^2\alpha.\ {}^yM_b - 2\cos\alpha\sin\alpha.\ M_0 \ldots\ldots \text{a.)}$$

Ze zmianą kąta α zmienia się i ${}^vM_b$ i to ostatnie równanie pokazuje zależność momentu ${}^vM_b$ od stałych ${}^xM_b$, ${}^yM_b$, M_0 i od zmiennego kąta α.

Przypuśćmy, że $^{r}M_b = \dfrac{C}{r^2}$ . . . . 1.)

C jest dowolną stałą, a r jest zmienną. Jeżeli C jest dane, to oczywiście r jest oznaczone dla każdego nachylenia prostej OV. Odetnijmy długość r od O do R, na prostej OV; ξ i η są spółrzędnemi punktu R. Równanie a.) zamienia się na:

$$C = r^2\cos^2\alpha\, {}^{x}M_b + r^2\sin^2\alpha\, {}^{y}M_b - 2r\cos\alpha\, r\sin\alpha\, M_0,$$

$$r\cos\alpha = \xi,\ r\sin\alpha = \eta;\ \text{więc:}$$

$$C = \xi^2\, {}^{x}M_b + \eta^2\, {}^{y}M_b - 2\xi\eta M_0 \ .\ .\ .\ .\ .\ 2.)$$

Jest to równanie miejsca geometrycznego punktu R. Oczywiście jest to elipsa, której środek leży w O. Jeżeli osi spółrzędnych są sprzężonemi osiami elipsy, to M_0 równa się zeru.

Elipsę tę nazywamy e l i p s ą b e z w ł a d n o ś c i, i jeżeli ją mamy wykreśloną, to bardzo łatwo przy jej pomocy znaleść M_b powierzchni α względem dowolnej prostej, przechodzącej przez O. I tak np. M_b względem prostej OW równa się stałej C, podzielonej przez kwadrat promienia OR'.

§ 46. Pomiędzy elipsą a momentami bezwładności zachodzi jeszcze i inny stosunek. Jak wiadomo, powierzchnia równoległoboku, utworzonego przez cztery, równoległe do osi sprzężonych, styczne do elipsy jest stała dla wszystkich równoległoboków, utworzonych przez takie styczne. Powierzchnia $ABCD$ równa się $A'B'C'D'$ [Tab. IX_6]. Więc i prostokąt, utworzony ze stycznych równoległych do głównych osi elipsy, ma powierzchnię równowartą każdemu innemu równoległobokowi. Jeżeli r oznacza pół osi sprzężonej, k odległość równoległej stycznej (patrz fig.), a pół wielkiej osi, b pół małej, to oczywiście $ab = rk$, czyli

$$r = \frac{ab}{k}.$$

Przyjmijmy, że w równaniu 1.) § 45 stała C równa się $a^2b^2\alpha$. (Przyjąć to możemy, bo C jest dowolną ilością i dotąd nie mówiliśmy nic o jej wielkości, wymagając tylko jedynie, żeby była ilością stałą.) Więc:

$$^{v}M_b = \frac{C}{r^2} = \frac{a^2 b^2 \alpha}{r^2}, \text{ stąd:}$$

$$^{v}M_b = \alpha k^2.$$

To znaczy, że moment bezwładności powierzchni α względem dowolnej prostej równa się iloczynowi z powierzchni przez odległość danej prostej od stycznej do elipsy bezwładności do niej równoległej. Np. M_b względem prostej OW [Tab. IX_5] równa się $\alpha \times AB$.

§ 47. **Moment odśrodkowy** $\Sigma \Delta \alpha x y$. Przeprowadźmy poziomą m styczną do elipsy [Tab. IX_7]. Nazwijmy ξ_1 i η_1 spółrzędne punktu styczności. Spółrzędne każdego innego punktu elipsy, naprzykład A, są ξ i η. Zróżniczkujmy równanie 2.) § 45:

$$0 = 2\xi\, d\xi \,.\, {}_xM_b + 2\eta\, d\eta \,.\, {}^yM_b - 2\eta\, d\xi\, M_0 - 2\xi\, d\eta\, M_0, \text{ stąd:}$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\xi .\, {}^xM_b - \eta M_0}{\eta .\, {}^yM_b - \xi M_0} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ a)}$$

W punkcie styczności T poziomej stycznej jest $\frac{d\eta}{d\xi} = 0$; jeżeli więc w równaniu a.) zamiast ξ i η podstawimy ξ_1 i η_1 tj, rzędne punktu T, to obie strony równania równać się będą 0. a ponieważ w ułamku z prawej strony mianownik nie może być nigdy równy ∞, więc licznik $\xi_1\, {}^xM_b - \eta_1 M_0 = 0$, czyli $\eta_1 M_0 = \xi_1\, {}^xM_b$; będzie tedy:

$$M_0 = \frac{\xi_1\, {}^xM_b}{\eta_1}, \text{ a ponieważ } {}^xM_b = \alpha k^2 = \alpha \eta_1^2, \text{ więc:}$$

$$M_0 = \alpha \xi_1 \eta_1 .$$

To znaczy geometrycznie, że moment odśrodkowy równa się powierzchni prostokąta kropkowanego, pomnożonej przez α.

§ 48. Jeżeli punkt początkowy O osi spółrzędnych, względem których wykreśliliśmy elipsę bezwładności, przeniesiemy do środka ciężkości S danej powierzchni, to elipsa, przedstawiająca wtedy zmianę momentów bezwładności przy zmianie nachylenia osi, przechodzących przez środek ciężkości, nazywa się e l i p s ą ś r o d k o w ą. Oczywiście, ta elipsa jest najmniejsza ze wszystkich, bo, jak wiadomo z § 44, moment bezwładności względem osi, przechodzących przez środek ciężkości, jest najmniejszy. Przypatrzmy się stosunkom momentów względem osi, przechodzących przez środek ciężkości i względem innych równoległych. Jak już tego dowiedliśmy w § 44, moment bezwładności względem osi X [Tab. IX_8] czyli

${}^{x}M_b = {}^{s}M_b + \alpha i^2$; lecz wiadomo także, że ${}^{s}M_b = \alpha k^2$, więc:

$$ {}^{x}M_b = \alpha k^2 + \alpha i^2 = \alpha(k^2 + i^2) \ldots\ldots\ldots\ldots \alpha.) $$

Z momentem odśrodkowym zachodzi podobna zmiana. Jak wiadomo:

$$ {}^{xy}M_0 = \Sigma\Delta\alpha xy. $$

Otóż, jeżeli nazwiemy x' i y' spółrzędne elementów powierzchni względem osi równoległych X', Y', przechodzących przez środek, a m i n spółrzędne nowego początku S osi spółrzędnych, to oczywiście $x = m + x'$, $y = n + y'$ (patrz fig.), więc:

$$ {}^{xy}M_0 = \Sigma\Delta\alpha\ [(m + x')\ (n + y')] = \Sigma\Delta\alpha\ (mn + nx' + my' + x'y') $$

$$ = mn\,\Sigma\Delta\alpha + n\,\Sigma\Delta\alpha x' + m\,\Sigma\Delta\alpha y' + \Sigma\Delta\alpha x'y'. $$

Pierwszy wyraz tej ostatniej sumy równa się αmn; drugi jest przez n pomnożonym statycznym momentem względem osi Y', przechodzącej przez środek $c.$, więc równa się 0; trzeci jest takim samym momentem względem osi X', więc także równy 0, czwarty nareszcie jest momentem odśrodkowym ${}^{x'y'}M_0$ względem osi $X'Y'$, przechodzącej przez środek ciężkości, więc ${}^{xy}M_0 = \alpha mn + {}^{x'y'}M_b$, a ponieważ ${}^{x'y'}M_b = \alpha\xi_1\eta_1$, więc:

$$ {}^{xy}M_0 = \alpha mn + \alpha\xi_1\eta_1 = \alpha(\xi_1\eta_1 + mn) \ldots\ldots\ldots \beta.) $$

Łatwo zauważyć, że ta ostatnia suma znaczy geometrycznie, że moment odśrodkowy względem osi X, Y równa się powierzchni kreskowanej $(\xi'\eta')$ więcej powierzchnia kropkowana (mn), pomnożona przez α.

Jeżeli porównamy α) i β), to zauważymy, jak wielkie zachodzi podobieństwo między momentem bezwładności a momentem odśrodkowym. Wyrazowi k^2 w równaniu α) odpowiada iloczyn $\xi_1 \eta_1$ równania β), a wyrazowi i^2, wyraz mn. Jeżeli damy równaniom α) i β) znaczenie geometryczne, to zauważymy, że moment bezwładności jest specyalnym wypadkiem momentu odśrodkowego, kiedy kąt osi spółrzędnych równa się zeru.

Z całego bieżącego § widzimy, jak ważna jest znajomość środkowej elipsy bezwładności, gdyż, mając ją wykreśloną, możemy z wielką łatwością znaleść momenty bezwładności i odśrodkowy względem każdej prostej, leżącej w płaszczyźnie elipsy. Równania α) i β) podają nam do tego sposoby. Możemy więc wszystkie inne elipsy zastąpić jedną elipsą środkową i odtąd zajmować się będziemy jedynie jej wykreśleniem.

§ 49. Elipsa środkowa jest zupełnie oznaczona, jeżeli mamy wielkość i kierunek jej trzech dowolnych osi. A znajdziemy to, jeżeli odszukamy momenty bezwładności względem tych trzech osi, bo znamy wtedy promienie r elipsy (§ 45, 1.). Znajomość dwóch osi wystarcza zupełnie, jeżeli wiemy z góry, że te osi są sprzężone, gdyż jak wiadomo, znajomość systemu osi sprzężonych wystarcza do wykreślenia elipsy.

W bardzo często w praktyce spotykanych wypadkach znaleść możemy odrazu kierunek tych osi sprzężonych, opierając się na § 45, powiadającym, że moment odśrodkowy względem takich osi równa się zeru. I tak np. jeżeli mamy powierzchnię w rodzaju jak na Tab. IX_{10}, której środek ciężkości leży w O, a która ma tę własność, że MM dzieli ją na dwie części takie, że każdemu elementowi jednej (np. A, B,..,) odpowiada element drugiej (A', B'....), a wszystkie proste (AA' BB'....), łączące odpowiednie elementy, są równoległe i przepołowione prostą M, czyli określając to inaczej, jeżeli odcięte obwodu (x_1 x_1) w pewnym kierunku mierzone są w każdem miejscu sobie równe, to prosta MM i równoległa do AA', BB',.... prosta NN, przechodząca przez środek ciężkości, są przedłużonemi średnicami sprzężonemi elipsy. Jest to widoczne, gdyż moment odśrodkowy danej powierzchni względem *MM* i *NN* równa się zeru. Jeżeli bowiem weźmiemy pod uwagę dwa jakiekolwiek, odpowiadające sobie, elementy np. *A* i *A'*, to otrzymamy ich momenty odśrodkowe względem *MM* i *NN*, mnożąc te równe sobie elementy przez *mn* i przez—*mn*¹).* Otrzymujemy dwa równe momenty, zaopatrzone przeciwnemi znakami. To samo stosuje się do każdej pary elementów, a więc i do całej powierzchni α. Więc suma wszystkich momentów odśrodkowych równa się zeru, co było do okazania.

Jeżeli prosta *NN* jest prostopadła do *MM*, to oczywiście *M* jest osią symetryi i *MM*, *NN* wskazują kierunek głównych osi elipsy. Tak np. jeżeli mamy przekrój szyny kolejowej [Tab. X_1], to odrazu wiemy, że proste *X* i *Y* są przedłużonemi głównemi osiami elipsy, więc że do wykreślenia elipsy wystarcza znajomość wielkości tylko tych osi. Wystarcza znajomość momentów względem prostych *X* i *Y*.

Jeżeli powierzchnia jakakolwiek [np. Tab. IX_{11}] ma dwie ukośne osi symetryi, to oczywiście elipsą środkową jest koło, bo osi symetryi są, jakeśmy tego dowiedli, głównemi osiami elipsy środkowej, a ukośne główne osi ma tylko jedno koło. Łatwo zauważyć, że z tego samego powodu elipsą środkową powierzchni koła jest koło.

Z Tab. IX_7 łatwo zauważyć znaczenie geometryczne prawa twierdzącego, że dla osi głównych elipsy M_0 równa się *0*, gdyż wtedy prostokąt *ORTQ* nie istnieje wcale, bo punkt *T* upada na *Q*. Podobnie rzecz się ma i z osiami sprzężonemi.

§ 50 Elipsa środkowa najprostszych powierzchni (przekrojów) znajduje się najprędzej za pomocą obliczania analitycznego i metoda wykreślna oddaje dopiero tam wielkie usługi, gdzie ograniczenie przekrojów jest nieregularne. W najprostszych przekrojach znanemi są zawsze kierunki dwóch osi sprzężonych środkowej elipsy. Żeby znaleść *k*,

---

*) Wprawdzie w poprzedzających wywodach mieliśmy tylko momenty odśrodkowe względem osi prostokątnych na uwadze, lecz bardzo łatwo przekonać się o tem, że zachowują one znaczenie i dla osi ukośnych.

to jest odległość stycznych równoległych do tych osi, tak postępujemy: M_b równa się, jak wiadomo αk^2, otóż, jeżeli mamy analityczne wyrażenie na M_b, to otrzymamy:

$$k = \sqrt{\frac{M_b}{\alpha}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1.$$

Zastosujmy to ogólne prawidło do kilku przekrojów.

1. Moment bezwładności, analitycznie wyrażony, prostokąta $ABCD$ [Tab. XI_{12}] o wysokości h a podstawie p względem osi X, przechodzącej przez środek ciężkości, równa się $\frac{1}{12}\,ph^3$, a względem osi Y równa się $\frac{1}{12}\,hp^3$. Ponieważ $\alpha = bh$, więc według § 46:

$$k_x = \sqrt{\frac{1ph^3}{12.ph}} = \sqrt{\frac{1}{12}}\,h = 0{\cdot}28h,$$

$$k_y = \sqrt{\frac{1.p^3h}{12.ph}} = \sqrt{\frac{1}{12}}\,p = 0{\cdot}28p$$

Przy pomocy tych danych możemy wykreślić elipsę środkową.

2. W trójkącie ABC [Tab. XI_{13}] sprężonemi osiami są linie, łączące wierzchołki z środkami przeciwległych boków i równolegle do tych ostatnich przez środek ciężkości przeprowadzone. Moment bezwładności względem osi, przechodzącej przez AB, jest równy $\frac{1}{12}\,ph^3$; jeżelibyśmy przyjęli środek elipsy w C_1, to k równałoby się $\sqrt{\frac{2ph^3}{12ph}} = \sqrt{\frac{1}{6}}\,h$; lecz ponieważ szukamy k_s względem osi x_s, przechodzącej przez środek ciężkości, której odległość od x równa się $i = \frac{1}{3}h$, więc $k^2{}_s = k^2 - i^2$ $= \frac{1}{6}\,h^2 - \frac{1}{9}h^2 = \frac{1}{18}\,h^2$,

$$k_s = \sqrt{\frac{1}{18}}\,h = 0{\cdot}2357h.$$

W podobny sposób znajdujemy:

$$k_y = 0{\cdot}4082h.$$

3. Koło. M_b względem każdej osi, przechodzącej przez środek równa się $\frac{1}{4}\,\pi r^3$, więc $k = \sqrt{\frac{1\pi r^3}{4\pi r^2}} = \frac{r}{2}$. Elipsa środkowa jest kołem o promieniu $\frac{1}{2}\,r$.

Podajemy obok tabliczkę, zestawiającą powierzchnie, momenty statyczne i momenty bezwładności prostokąta, trójkąta i trójkąta parabolicznego względem osi X. Są to momenty, najczęściej w Statyce natrafiane, i tabliczka jest tak symetrycznie ułożona, że ją łatwo zapamiętać.

Powierzchnia	bh	$\frac{1}{2}bh$	$\frac{1}{3}bh$
Moment statyczny	$\frac{1}{2}bh^2$	$\frac{1}{3}bh^2$	$\frac{1}{4}bh^2$
Moment bezwładności	$\frac{1}{3}bh^3$	$\frac{1}{4}bh^3$	$\frac{1}{5}bh^3$

§ 51. **Powierzchnie, ograniczone dowolnemi krzywemi.** Aby znaleść moment bezwładności i elipsę środkową takich powierzchni (np. α Tab. IX_{14}), postępujemy drogami, wskazanemi w § 43 i nast. Dzielimy ją na kilka mniejszych części, naprzykład równoległemi na paski (jak na Tab. VI_3) i przypuszczamy, że w środku ciężkości każdego działają siły do jego powierzchni proporcyonalne. Następnie wykreślamy wielobok sznurowy MNO dla tych sił, a jego odcinki na prostej X, równoległej do kierunku pasków i przechodzącej przez środek ciężkości S, są proporcyonalne do momentów statycznych odpowiednich pasków (§ 43) względem X. Odcinki te uważamy za siły, działające w odpowiednich paskach, wykreślamy dla nich wielobok sznurowy $M'N'O'$, którego odcinki na prostej X są proporcyonalne do momentów bezwładności odpowiednich pasków. Suma tych odcinków AB jest proporcyonalna do całego momentu bezwładności danej powierzchni względem prostej X, i znając odległości biegunów wieloboków sił, z łatwością można znaleść prawdziwą wielkość momentu bezwładności. Wiemy z § 46, że ${}^xM_b = \alpha k^2$, stąd $k = \sqrt{\frac{{}^xM_b}{\alpha}}$; trzeba więc podzielić znaleziony moment bezwładności przez powierzchnię i wyciągnąć z ilorazu pierwiastek kwadratowy, żeby otrzymać odległość k stycznych m i n.

równoległych do X. Jeżeli potem weźmiemy inny kierunek pasków, równoległy do Y, to otrzymamy wskazanym wyżej sposobem drugą parę stycznych m' i n' do elipsy. Te cztery styczne nie wystarczają do wykreślenia elipsy, trzeba więc jeszcze raz dzielić na paski w kierunku prostej Z. Otrzymamy trzy pary stycznych, przy pomocy których wykreślić możemy całą elipsę sposobami, wskazanemi w Geometryi.

§ 52. Jeżeli powierzchnia, której moment bezwładności znaleść mamy, jest symetryczna, jak np. przekrój szyny kolejowej [Tab. X_1] to, jak wiadomo z § 49, mamy już odrazu kierunek głównych osi elipsy bezwładności, bo jedną z nich musi być oś symetryi YY, a drugą prosta XX do niej prostopadła, przechodząca przez środek ciężkości. W tym wypadku znajomość dwóch osi zupełnie wystarcza do wykreślenia elipsy środkowej. Będziemy więc postępowali tutaj zupełnie tak, jak w poprzedzającym paragrafie, tylko zamiast dzielić daną powierzchnię na paski, idące w trzech kierunkach, dzielić będziemy na paski dwojakiego kierunku: raz równoległe do XX, raz prostopadle. Ponieważ z takiemi przekrojami bardzo się często ma do czynienia, więc zatrzymamy się tutaj cokolwiek dłużej i przejdziemy całe wykreślenie od początku do końca.

Przy podziale danej powierzchni na paski, trzeba uważać, żeby tak wypadały, by ich ograniczenie krzywolinijne uważać można było za prostolinijne, a każdy pasek (oprócz ostatniego, który jest więcej do odcinka parabolicznego podobny) za trapez. Szerokość pasków może być dowolna, lecz lepiej jest mieć je nie szersze jak 1^{cm}. Zwykle się bierze 0'5 do 1^{cm}. Skoro już podzieliliśmy przekrój na paski, przypuszczamy, że w środku ciężkości każdego z nich działają siły do ich powierzchni proporcyonalne, a których wielkość możemy otrzymać odrazu, przekształcając każdy pasek na jednę podstawę a. Jeżeli α oznacza powic zchnię całego przekroju, $\Delta\alpha$ element tej powierzchni, czyli powierzchnię paska jakiegokolwiek, z' całą powierzchnię α, przekształconą na podstawę a (więc $az' = \alpha$), $\Delta z'$ przekształconą powierzchnię jakiegokolwiek paska, to:

$$\Delta\alpha = a\Delta z' \quad . \; . \; . \; . \; . \; 1).$$

Najlepiej jest wziąć a równe okrągłej liczbie i jeżeli wszystkie paski są równej szerokości, (co się prawie zawsze w praktyce robi) np. 1^{cm}, to a powinno być wielokrotną szerokości pasków, bo wtedy możemy wysokości środkowe trapezów uważać za linie proporcyonalne do ich powierzchni i jeżeli a jest np. $= 3^{cm}$, to trzeba wtedy podzielić tylko tę wysokość przez 3, żeby otrzymać przekształconą powierzchnię trapezu. Naturalnie, jeżeli przy podziale na równej szerokości paski, wypadną ograniczenia liniami, których nie możemy przyjąć za proste (jak np. u góry szyny i w załamaniach profilu), to należy wtedy to ograniczenie zmienić na prostolinijne (§ 10). Powierzchnię górną podobną do parabolicznej trzeba osobno przekształcać.

Po takiem przekształceniu otrzymamy szereg odcinków $\Delta z'$, który uważamy za szereg sił, działających w odpowiednich środkach ciężkości pasków i odcinamy w porządku, w jakim się rzeczywiście znajdują na prostej m, równoległej do kierunku pasków. Otrzymujemy wielobok sił, który jest w tym wypadku prostą, której długość z' wynosi. Przyjmujemy potem biegun dowolny O, którego odległość od z' równa się b (najwygodniej jest ustawić go w środku długości z' i tak żeby jego odległość od z' wynosiła mniej więcej pół z'), (najlepiej jeżeli ab jest okrągłą liczbą) i wykreślamy odpowiedni wielobok sznurowy $M12\ldots\ldots N$. Pozioma, przez przecięcie skrajnych boków przechodząca, przecina, jak wiadomo, oś symetryi w środku ciężkości S. Odcinki wieloboku sznurowego na tej poziomej, pomnożone przez b, są momentami statycznemi odcinków $\Delta z'$ względem niej samej. Nazwijmy każdy z tych odcinków $\Delta z''$. Widoczne jest z figury, że suma wszystkich: $\Sigma\Delta z'' = z'' = 0$. Zresztą wiadomo, że moment statyczny względem osi, przechodzącej przez środek ciężkości, równa się 0. Jeżeli y oznacza odległość paska któregokolwiek od XX, to:

$$\Delta z' y = \Delta z'' b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2).$$

Następnie uważamy odcinki $\Delta z''$ za siły, działające w tych samych liniach, co $\Delta z'$*). Nie potrzebujemy ich składać w wie-

*) Wprawdzie to nie jest zupełnie dokładne, ponieważ odcinki $\Delta z''$, przedstawiające momenty statyczne, uważane przez nas za siły, powinny być przyłożone w ich środkach, a nie w środ-

loboku sił, bo mamy go już na linii XX jako odcinek między skrajnym a środkowym bokiem wieloboku sznurowego. Przyjmujemy nowy biegun O' w odległości c i wykreślamy odpowiedni wielobok sznurowy. Nazwijmy Δz odcinki na XX. Oczywiście:

$$\Delta z'' y = \Delta z'' c;$$

przyjmijmy, że $c = z'$, tj. równa się długości pierwszego wieloboku sił:

$$\Delta z'' y = \Delta z''' z' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 3).$$

Ostatni wielobok sznurowy jest jak litera S, wykrzywiony i widoczne jest odrazu z figury, że suma wszystkich odcinków na XX: $\Sigma \Delta z''' = z''$ nie równa się zeru, bo wszystkie odcinki mają tok jednakowy. Oczywiste jest, że tok jednakowy być musi, gdyż wszystkie momenty bezwładności mają znak jeden, bo ramię y, czy ujemne czy też dodatnie, jest zawsze dodatnie, skoro je podniesiemy do kwadratu i tylko znak powierzchni może wpłynąć na zmianę znaku momentu bezwładności.

Przemnóżmy przez siebie równania *1)*, *2)* i *3)*.

$$\Delta \alpha . \Delta z' z y . \Delta z'' y = a \Delta z' . \Delta z'' b . \Delta z''' z', \text{ stąd:}$$

$$\Delta \alpha y^2 = a b z' \Delta z''';$$

$$^x M_h = \Sigma \Delta \alpha y^2 = a b z' \Sigma \Delta z''', \text{ więc:}$$

$$^x M_b = a b z' z'''.$$

Wyrażając to ostatnie równanie słowami: otrzymamy moment bezwładności względem osi X, mnożąc odcinek z''' z drugiego wieloboku sznurowego przez iloczyn z podstawy przekształcenia i obu odległości biegunów b i z'.

---

kach ciężkości pasków, które nie upadają na środki momentów. Lecz różnice, które otrzymujemy, dzieląc powierzchnie na paski półcentymetrowe lub nawet centymetrowe, są tak małe, że ich zwykle dojrzeć nie możemy, więc też przyjmujemy, że odcinki $\Delta z''$ są przyczepione w środkach ciężkości pasków

Jak wiadomo ${}^xM_b = \alpha k^2$, stąd $k = \sqrt{{}^xM_b : \alpha}$. Żeby więc w naszym wypadku znaleść odległość k stycznych równoległych do XX, podstawmy zamiast ${}^xM_b$ i α ich wartości $abz'\Delta z'''$ i az':

$$k = \sqrt{\frac{{}^xM_b}{\alpha}} = \sqrt{\frac{abz'z'''}{az'}} = \sqrt{bz'''}$$

To ostatnie równanie powiada nam, że jeżeli dodamy na prostej linii od A do B, b [Tab. X_2] a od B do C, z''' i opiszemy na średnicy AC koło, to prostopadła w B wystawiona równa się k, t. j. odległości stycznej równoległej do XX. Ta odległość jest w naszym wypadku połową głównej osi elipsy; K_1 i K_2 są punktami elipsy.

Żeby wykreślić całą elipsę, znajdujemy w sposób zupełnie analogiczny moment bezwładności względem osi YY do XX prostopadłej i na podstawie tego momentu nową odległość k, czyli długość nowej półosi. W ten sposób znajdujemy główne osi elipsy i jej wykreślenie nie przedstawia żadnych trudności.

§ 52 **Jądro środkowe.** Jeżeli elipsa [Tab. X_3] przedstawia elipsę środkową powierzchni α, a biegunem prostej p jest punkt P, to przeciwbiegunem nazywamy punkt P', tak położony na średnicy przechodzącej przez P, że $P'S = SP$. Jeżeli styczna do obwodu powierzchni α zmienia ciągle położenie (kilka stycznych są oznaczone liniami kreskowanemi), to przeciwbiegun zmienia ciągle swe położenie i opisuje zamkniętą krzywą, zwaną jądrem środkowem. O znaczeniu jądra tego i o jego zastosowaniu mówić będziemy w następującym rozdziale, tymczasem podajemy tu sposób jego wykreślania, ponieważ znajduje się ono, jak widzimy, w blizkim związku z elipsą środkową, której wykreślenie opisaliśmy w poprzedzających paragrafach.

Jednym w najprostszych sposobów wykreślenia jest następujący: [Tab. X_4). Wykreślamy przedewszystkiem na głównych osiach elipsy, jako na średnicach, koła. Następnie przedłużamy główne osi elipsy AA i BB i wykreślamy dowolną styczną do danego przekroju, przecinającą AA i BB w punktach Q i Q'. Z punktu Q prowadzimy dwie styczne do dużego koła i łączymy punkty styczności K i K prostą KK', z punktu Q' prowadzimy także dwie styczne do małego koła i łączymy punkty styczności prostą LL'. Na przecięciu LL' i KK' w punkcie P eży biegun prostej QQ'. Żeby znaleść przeciwbiegun, łączylmy P ze środkiem ciężkości S, przedłużamy prostą łączącą odcinamy na niej od S do P' odcinek równy PS; P' jest iszukanym przeciwbiegunem. Następnie przeprowadzamy inne styczne i znajdujemy inne bieguny które gdy połączymykrzywą ciągłą *mmm*, otrzymamy jądro. Uważać należy, żeby styczna nie wchodziła nigdy wewnątrz przekroju, t. j. żeby nie przyjmowała położenia takiego, jak np. DD'. Więc między RR', TT' nie może być żadnych stycznych.

Tab I

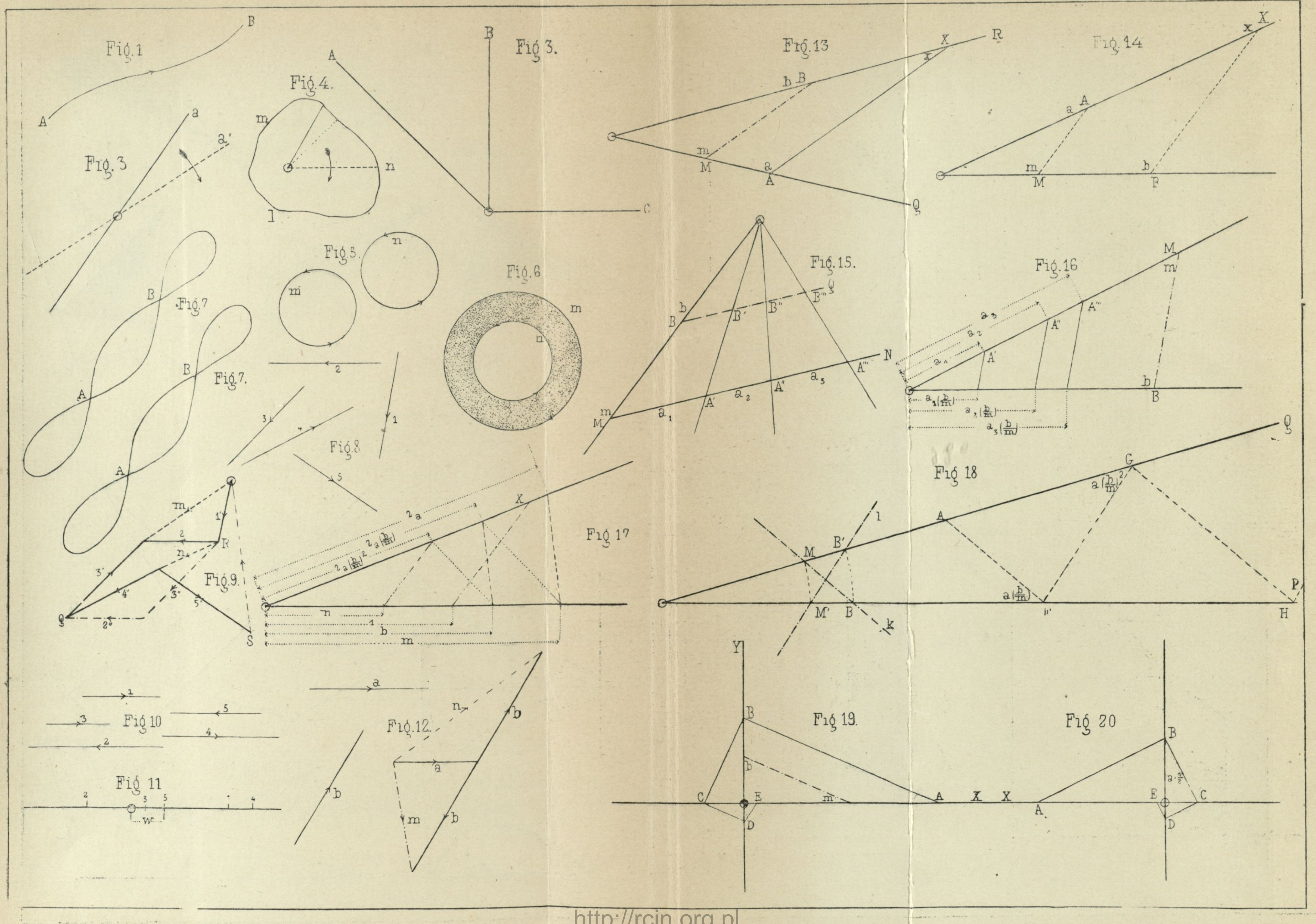


Fig. 1
Fig. 3
Fig. 4.
Fig 3.
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 5.
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 7.
Fig. 15.
Fig. 16
Fig. 8
Fig. 9.
Fig 17
Fig 18
Fig 10
Fig. 12.
Fig 11
Fig 19.
Fig 20

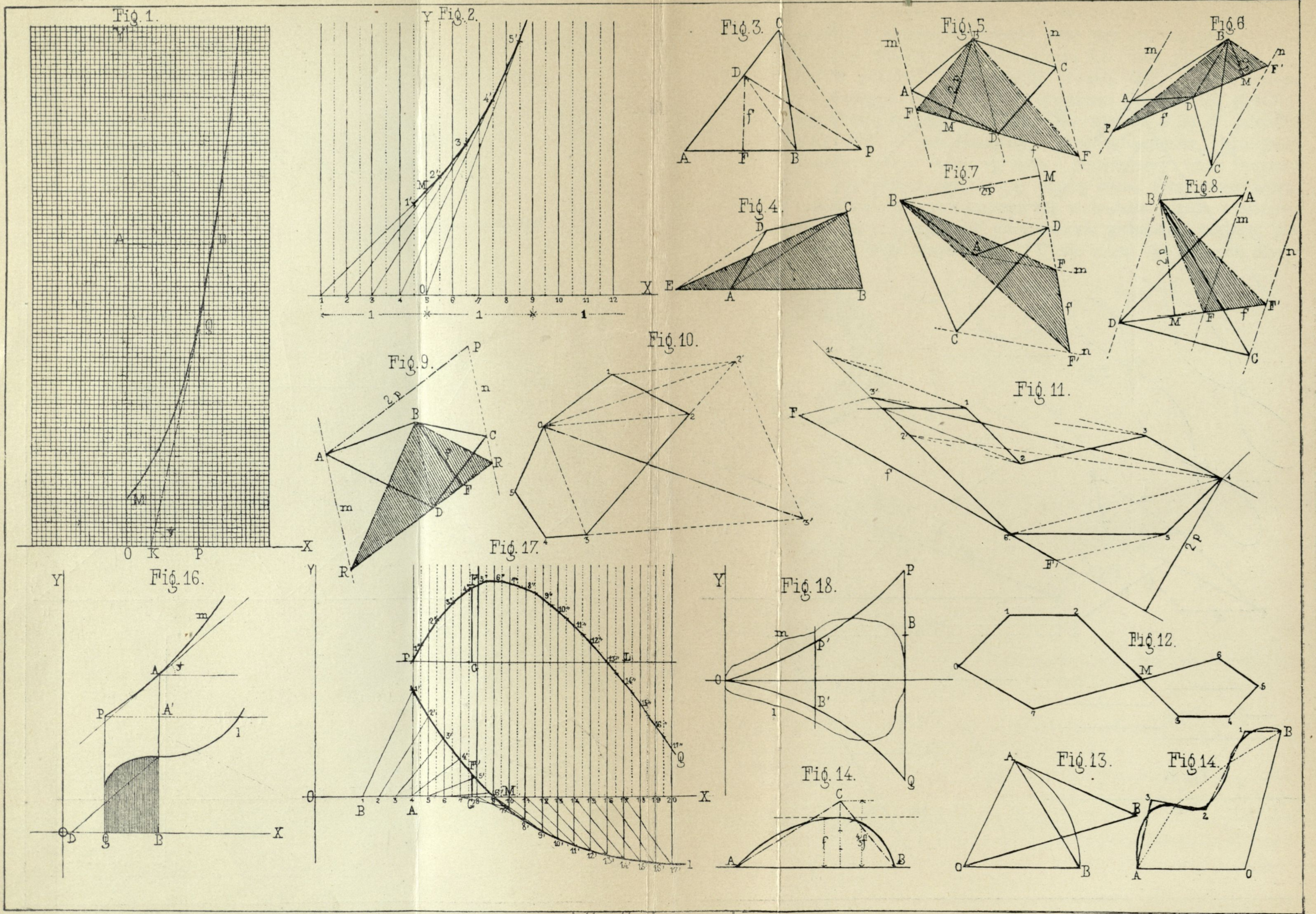
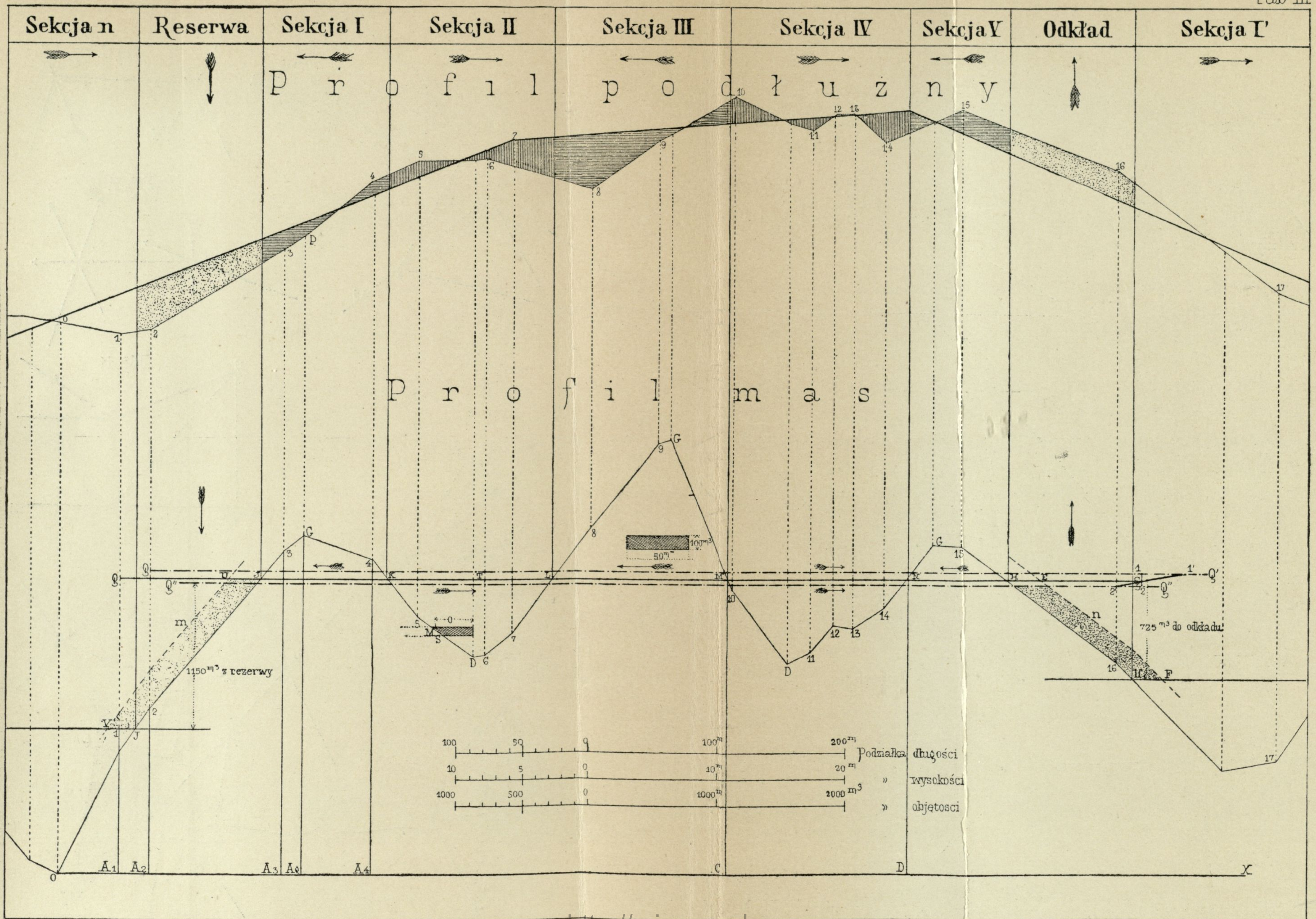


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 14.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.

Tab III


Sekcja n
Reserwa
Sekcja I
Sekcja II
Sekcja III
Sekcja IV
Sekcja V
Odkład
Sekcja I'
Profil podłużny
Profil mas
100 m³
50 m
1150 m³ z rezerwy
725 m³ do odkładu
Podziałka długości
» wysokości
» objętości
100 50 0 100 m 200 m
10 5 0 10 m 20 m
1000 500 0 1000 m 2000 m³
A1 A2 A3 A4 C D X
Q Q' Q''

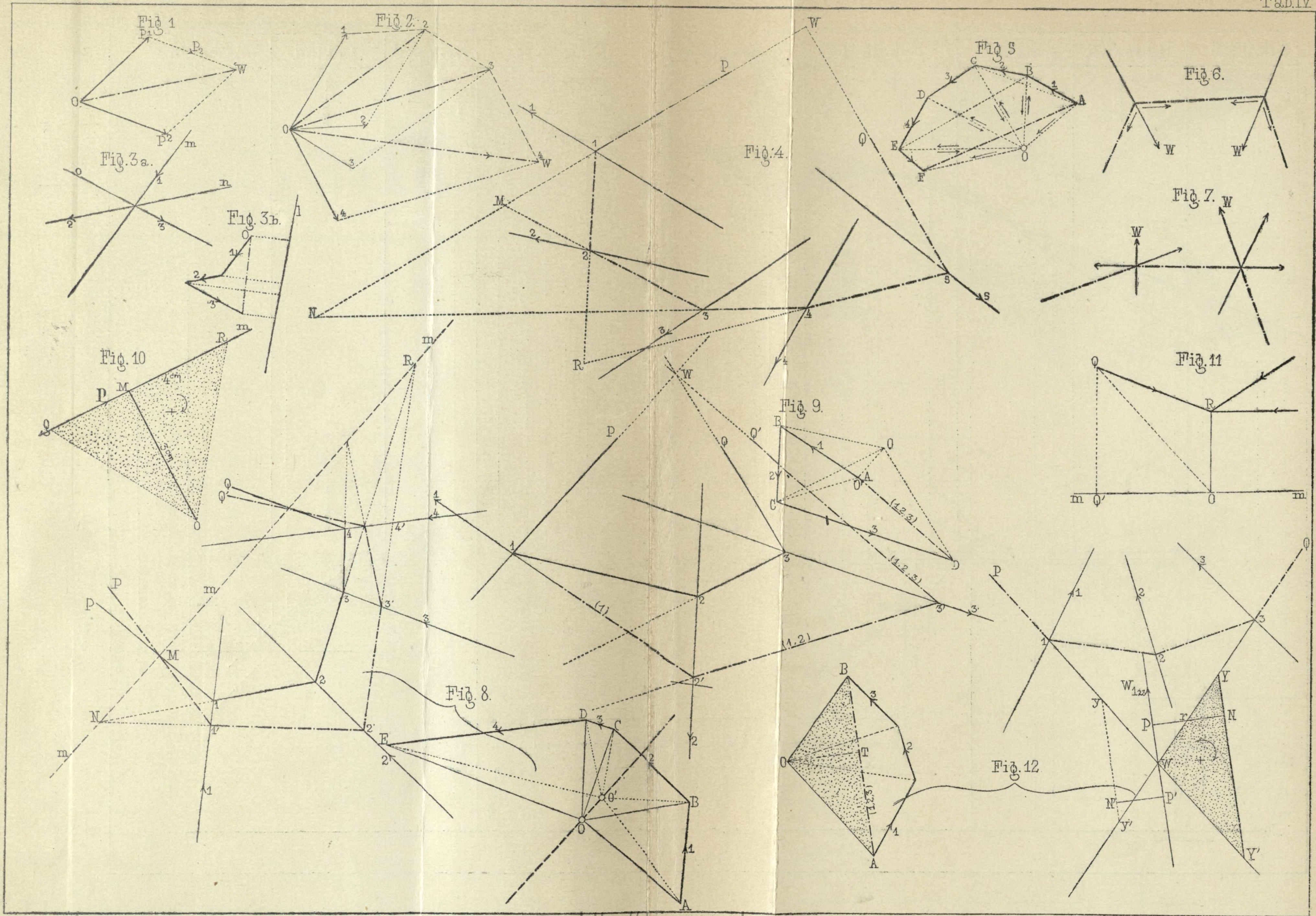


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3a.
Fig. 3b.
Fig. 4.
Fig. 5
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12

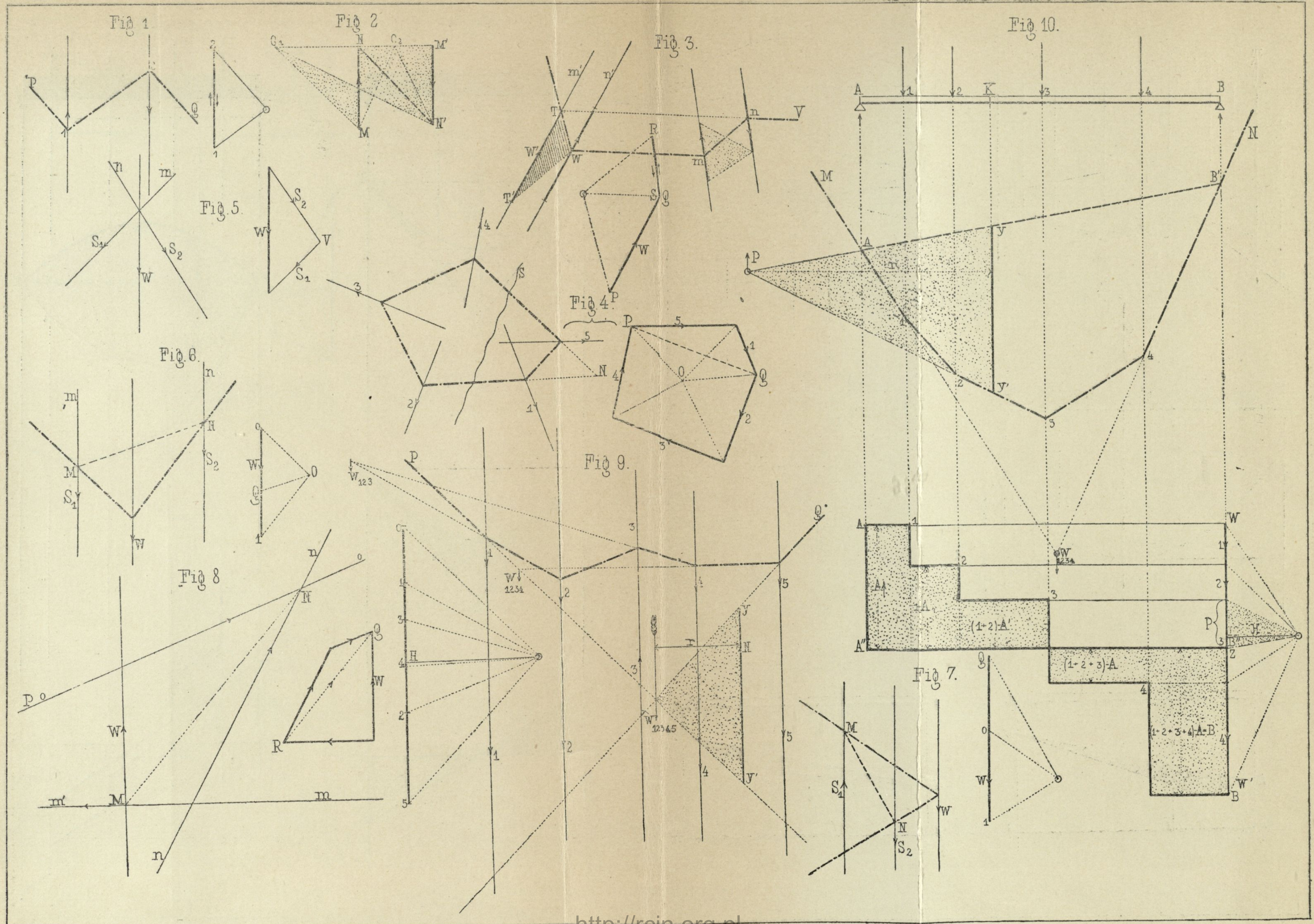


Fig 1.
Fig 2.
Fig 3.
Fig 4.
Fig 5.
Fig 6.
Fig 7.
Fig 8.
Fig 9.
Fig 10.

Fig. 1

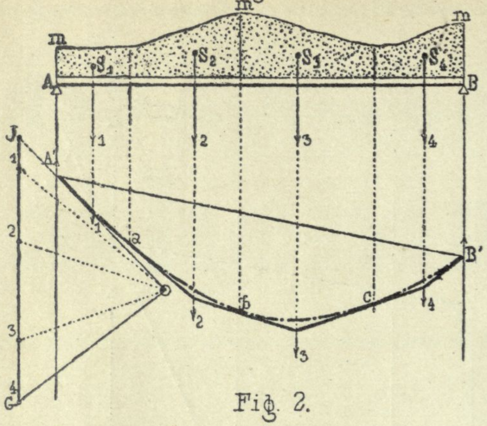


Fig. 3

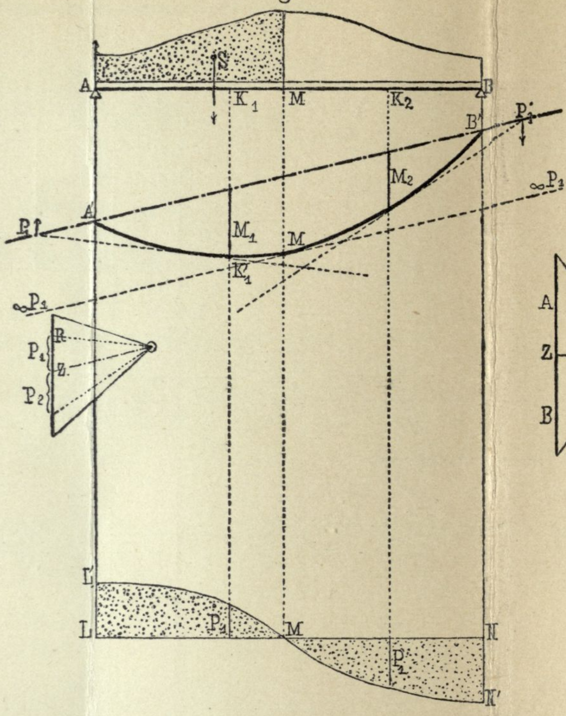


Fig. 3.

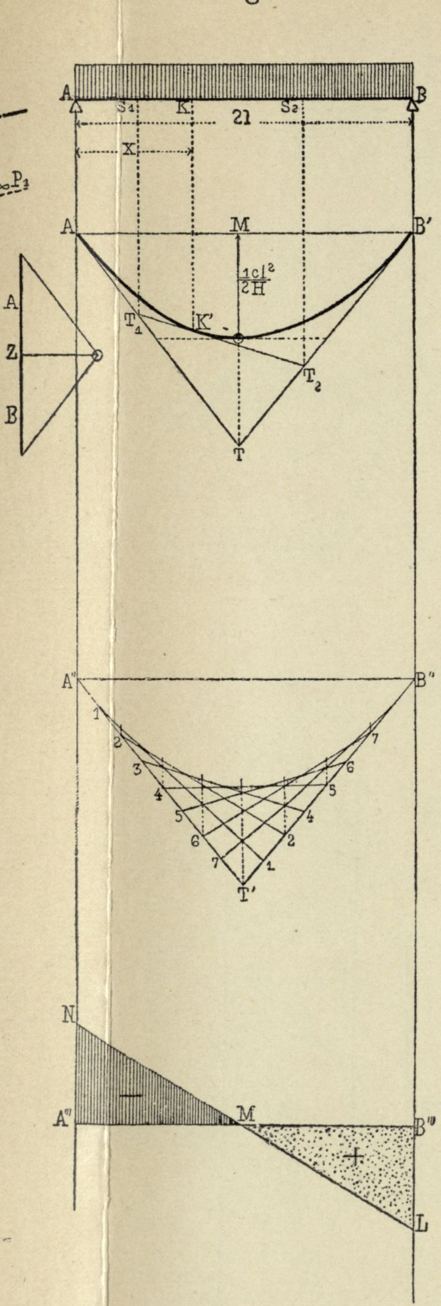


Fig. 4.

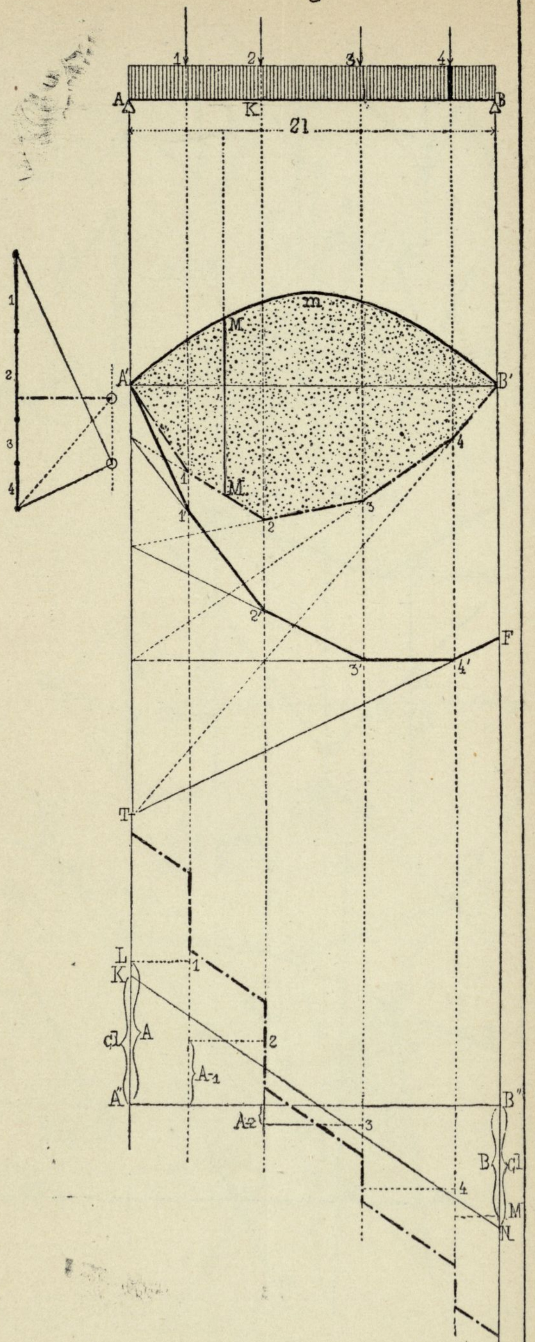


Fig. 2.

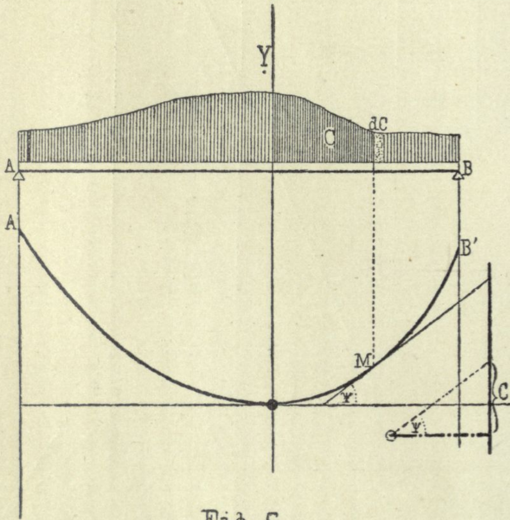


Fig. 5.

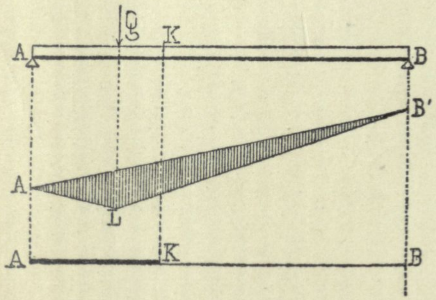
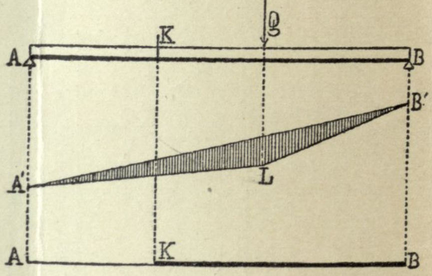


Fig. 6.



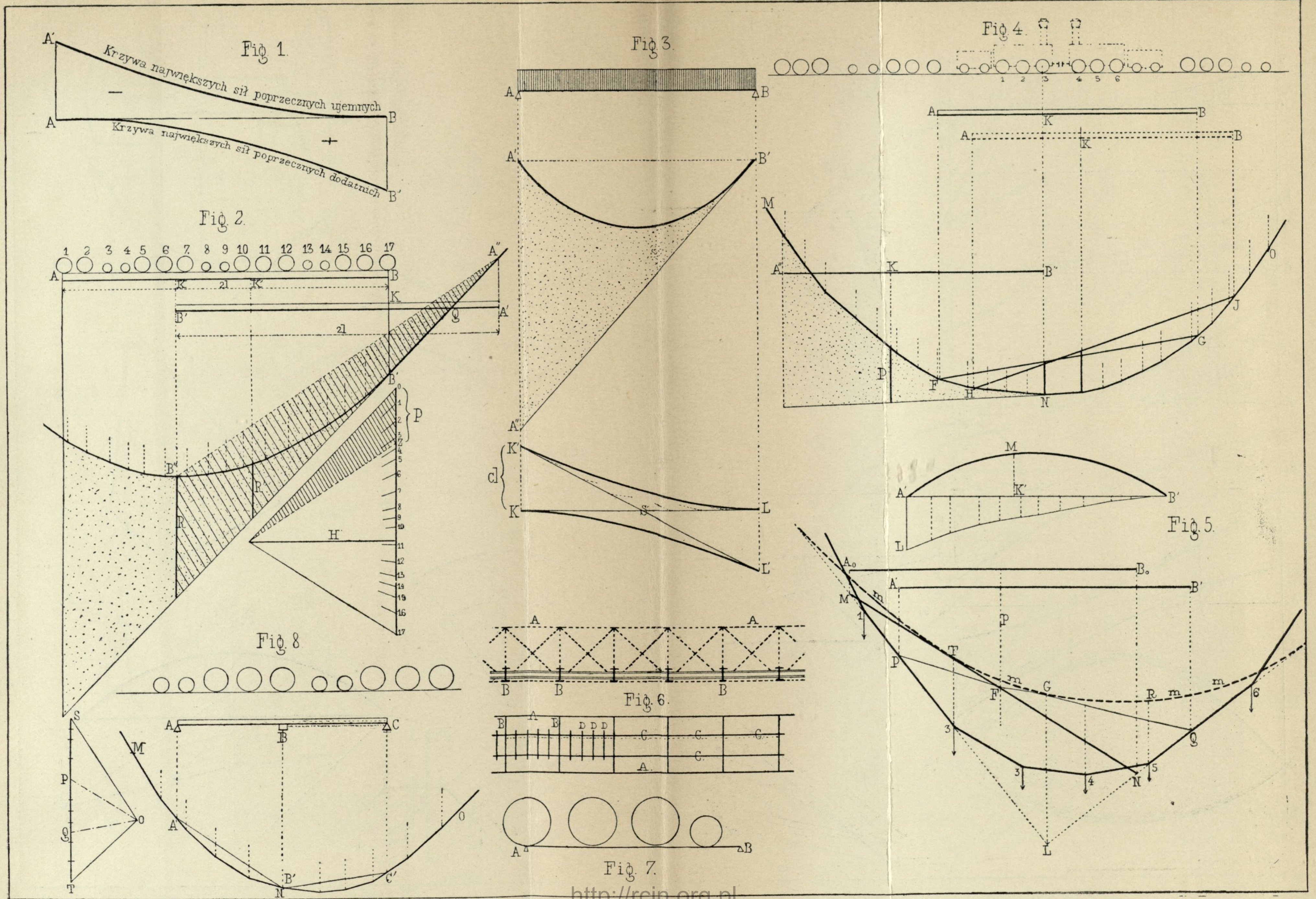


Fig. 1.
Krzywa największych sił poprzecznych ujemnych
Krzywa największych sił poprzecznych dodatnich
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.

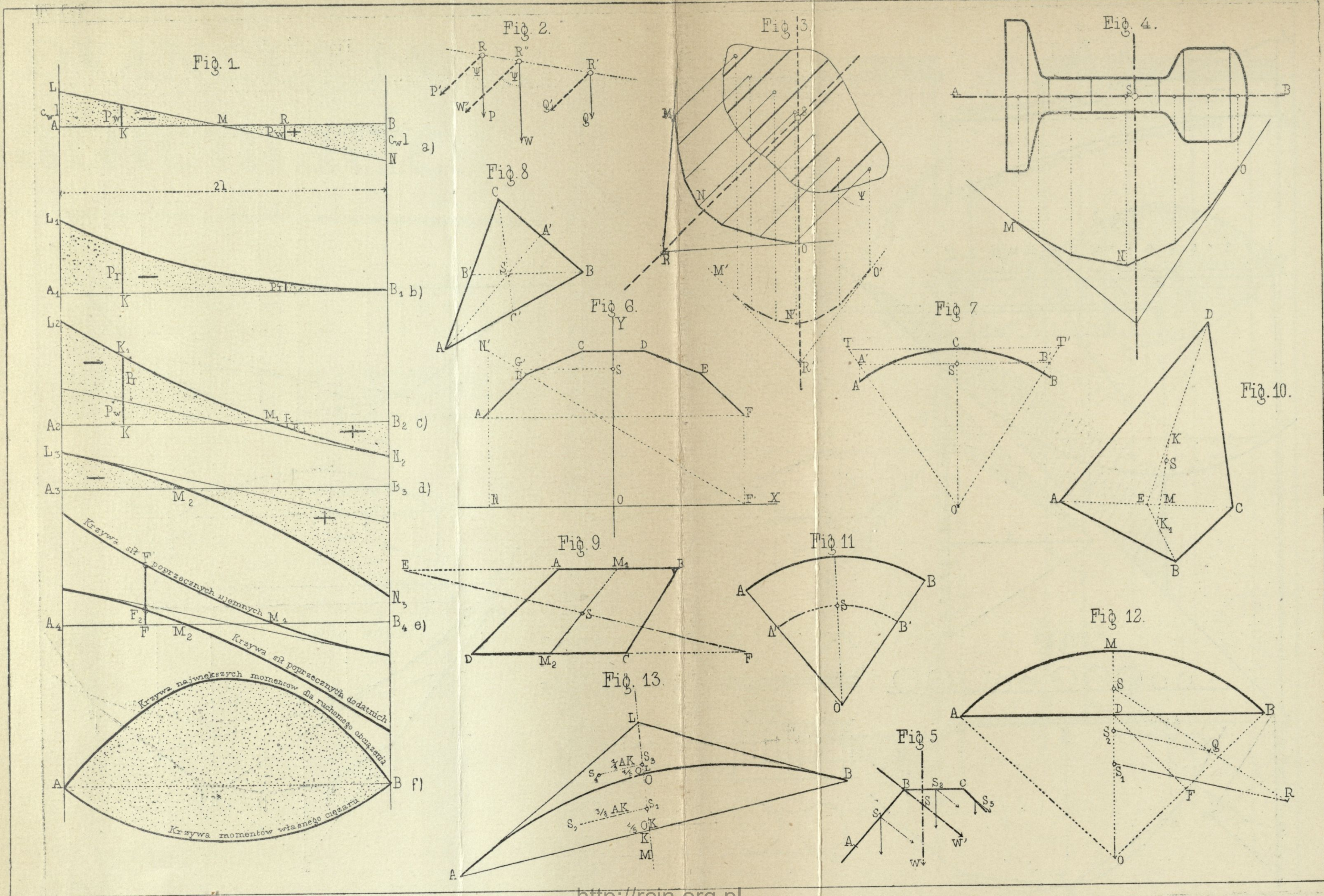


Fig. 1.
a)
b)
c)
d)
e)
f)
Krzywa sił poprzecznych ujemnych
Krzywa sił poprzecznych dodatnich
Krzywa największych momentów dla ruchomego obciążenia
Krzywa momentów własnego ciężaru
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5
Fig. 6.
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10.
Fig. 11
Fig. 12.
Fig. 13.

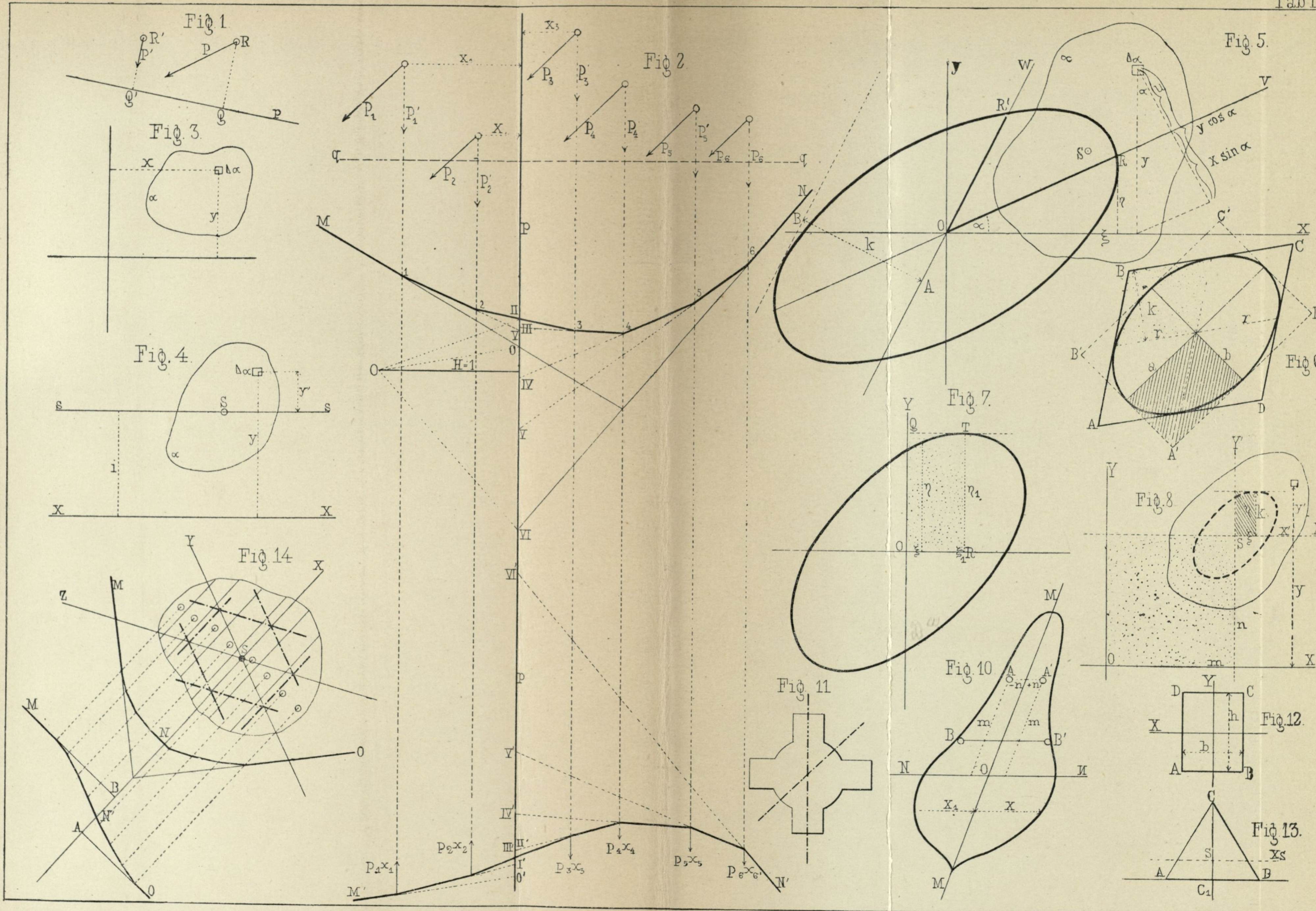


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 10.
Fig. 11
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14
y cos α
x sin α
H=1