Dr. Brennecke, BERÜHRUNGS-AUFGABE.

Einführung in die neuere Geometrie.

Die

BERÜHRUNGS-AUFGABE

für

KREIS UND KUGEL

in sechsfacher geometrischer Behandlung.

Ergänzungsband zu jedem Lehrbuche der elementaren Geometrie,

herausgegeben

von

Dr. Brennecke,

Direktor der Realschule zu Posen.

Mit 45 in den Text gedruckten Figuren und 39 Figuren auf drei lithographirten Tafeln.

Berlin.

Verlag von Th. Chr. Fr. Enslin.

1860.

Posen, gedruckt bei M. Zoern.

Seinem Freunde

CARL SCHMIDT

widmet diese Schrift

zur Erinnerung

an

früheres collegialisches Zusammenwirken und gemeinschaftliche Studien

der Verfasser.

VORWORT.

Während meiner Wirksamkeit als Direktor der Realschule zu Kolberg lebte ich, namentlich in den Jahren 1850 und 1851, mit meinem damaligen Mitarbeiter, dem Oberlehrer Schmidt, jetzt Rektor an der Oberschule zu Neustadt-Eberswalde, welcher an der Realschule zu Kolberg den mathematischen Unterricht auf der obersten Stufe ertheilte, in einer engen Conjunctio literarum. Diesem wissenschaftlichen Verkehre, welcher noch bis heute fortdauert, und durch Austausch von Briefen und bei gelegentlichen Besuchen, wie in den vorjährigen Sommerferien, unterhalten wird, verdankt dieses Buch seine Entstehung. Das ganze Verdienst desselben und die Originalität der wissenschaftlichen Erfindung und Begründung darin gebührt dem Rektor Schmidt, ich habe nur dabei die Mühe der äusseren Ausführung übernommen.

Die ersten Abschnitte bis Seite 72 einschliesslich sind schon früher (1853) veröffentlicht worden und mit Beifall im Inlande und Auslande (England) aufgenommen worden. In dieser neuen Ausgabe sind hinzugekommen „die Grundlehren der neueren Geometrie als Vorbereitung auf drei andere Auflösungen der Berührungsaufgabe, diese drei Auflösungen selbst und die Behandlung der Berührungsaufgabe mit Hülfe der Kegelschnitte, so wie eine Sammlung von Aufgaben, betreffend die Berührung und den orthogonalen Schnitt;“ ausserdem sind 3 lithographische Tafeln mit 39 Figuren hinzugefügt worden. In dieser neuen erweiterten Gestalt kann das Buch als ein Ergänzungsband für alle Lehrbücher der elementaren Geometrie gelten, und als Einführung in das Studium der neueren Geometrie und der Kegelschnitte dienen. Zugleich ist es eine Monographie für die geometrischen Lösungen des Berührungsproblems, welches in diesem Buche im Zusammenhange mit einer Ausführlichkeit behandelt worden ist, wie in keinem anderen Werke der mathematischen Litteratur.

Am 6. Oktober 1859 ist von Sr. Excellenz dem Minister der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten Herrn v. Bethmann-Hollweg eine Unterrichts- und Prüfungs-Ordnung der Realschulen und höheren Bürgerschulen erlassen worden, welche von allen denkenden und gebildeten preussischen Patrioten mit grosser Freude aufgenommen worden ist. In dieser Unterrichts- und Prüfungs-Ordnung ist das Ziel für den mathematischen Unterricht auf Realschulen näher und bestimmter angegeben worden, als in der früher gültigen vorläufigen Instruktion vom 8. März 1832. In den erläuternden Bemerkungen zu dieser neuen Unterrichts- und Prüfungs-Ordnung befinden sich sehr beherzigungswerthe Winke über die beim mathematischen Unterrichte zu befolgende Methode. Es heisst darin wörtlich, wie folgt:

„Die Sache der Schule ist auch auf diesem Gebiete (des mathematischen Unterrichts) Übung und Weckung der wissenschaftlichen Selbstthätigkeit, welche sich überall die Strenge eines folgerichtigen Denkens und scharfer Begriffsunterscheidung zur Pflicht macht, und es weiss, dass auswendig gelernte Mathematik werthlos ist. Es kommt für den Charakter einer Realschule und für die Erfüllung ihrer allgemeinen Aufgabe wesentlich darauf an, in welcher Weise der mathematische Unterricht gehandhabt wird. Bildet er daselbst wirklich eine Gymnastik des Geistes, welche die Denkkraft weckt und übt und, indem sie die Fruchtbarkeit eines streng methodischen Verfahrens zum Bewusstsein bringt, das Produktionsvermögen stärkt, und bei der den Schülern eine mechanische Auffassung unmöglich, dagegen die Freiheit und Sicherheit des Blicks und Urtheils zu eigen gemacht wird, welche die Entwickelung eines Satzes nach allen Seiten verfolgen kann, und durch die Verschiedenheit der Form und Stellung, worin derselbe Gegenstand erscheinen mag, sich nicht beirren lässt, nur dann ist die Mathematik unter den Bildungsmitteln der Realschule das wichtigste und wirksamste.“

Es giebt sicherlich kein Gebiet in der gesammten Mathematik, worauf die obigen Worte besser passten, als auf das Berührungsproblem, so dass es scheint, als ob sie ganz speciell dafür geschrieben wären. Es ist nicht möglich, Auflösungen für das Berührungsproblem mechanisch und mit dem Gedächtnisse aufzufassen; jede andere Lage der Figur würde denjenigen, der keine geometrische Anschauung und Auffassung besitzt, sich nicht eine mathematische Facultas errungen hat, ausser Fassung bringen. Jeder, der das im vorliegenden Werkchen abgehandelte Berührungsproblem nach irgend einer Methode und durch irgend eine der verschiedenen Lösungsweisen hat bewältigen lernen, wird einen merklichen Fortschritt in seiner geometrischen Bildung wahrnehmen. Denn keine der Lösungsweisen lässt sich in einigen kurzen, wohl gemerkten Phrasen nachsprechen; und wenn dies auch gelänge, so würde bei einer veränderten Lage der Bestimmungsstücke doch immer nur eine geübte geometrische Anschauung aus der Noth helfen. Es ist das Berührungsproblem des Apollonius von Perga das berühmteste der ganzen Geometrie. Es ist zur Auflösung von Berührungsaufgaben die vollkommne Bekanntschaft mit der Kreislehre erforderlich, denn alle Lehrsätze vom Kreise finden hier in den mannigfaltigsten Verbindungen ihre Anwendung. Dies war auch die Ursache, warum die griechischen Mathematiker diese Aufgabe ihren Schülern vorlegten, welche dabei die ganze Kreislehre wiederholen und dadurch unabhängig vom Worte des Lehrers in Erfindung und Auflösung von Aufgaben geübt werden sollten. Es sind nun in diesem Werkchen sechs verschiedene Lösungsweisen dargeboten worden, von denen jede einzelne ihre eigenthümlich bildende Kraft hat; ausserdem ist durch Fragen und Aufgaben eine vielfache Gelegenheit gegeben worden zu weiterem Nachdenken und eigener Überlegung.

Neben dem beabsichtigten Hauptzwecke dieses Buches: Belebung der geometrischen Anschauung, Übung in der Auffassung räumlicher Beziehungen, Befähigung für mathematische Studien, kann dasselbe noch benutzt werden zu Übungen im geometrischen Zeichnen, wofür es als reiche Aufgabensammlung betrachtet werden kann, indem jede einzelne Aufgabe und jede einzelne Lösung dafür vielfache Abänderungen nach Lage und Grösse der gegebenen Bestimmungsstücke zulässt. Aus diesem Grunde ist auf die Korrektheit der in diesem Buche befindlichen 84 Figuren besonderer Fleiss verwendet worden.

Als Vorbildung für das Verständniss dieses Werkchens wird nur die Bekanntschaft mit der Elementargeometrie und den Anfangsgründen der Raumgrössenlehre, namentlich der Lehre von der Kugel, vorausgesetzt, so dass jeder in der Mathematik für die Prima reife Schüler eines Gymnasiums oder einer Realschule dasselbe mit Nutzen wird durcharbeiten können. Es eignet sich daher diese Monographie zur Einführung für die Prima und zur Anschaffung für Schülerbibliotheken höherer Lehranstalten, zugleich aber auch als Prämie für strebsame Schüler, zu welchem Zwecke auch auf die äussere Ausstattung besondere Sorgfalt verwendet worden ist, und elegant gebundene Exemplare in der Verlagsbuchhandlung stets vorräthig gehalten werden.

Inhaltsangabe.

Vorbereitende Betrachtungen, Seite 1—24.

§§. 1—8. Der äussere, der innere Ähnlichkeitspunkt; von den äusseren, von den inneren Ähnlichkeitsstrahlen und ihren potenzhaltenden Punkten; von den Symmetralen.......................... Seite 1—9.
§§. 9—12. Die Lehre von der Chordale und ihrer Construction...... „ 9—12.
§§. 13—15. Von den Orthogonalkreisen.......................... „ 13—14.
§§. 16—21. Über die Berührung von zwei Kreisen durch einen dritten, von einem Kreise und einer geraden Linie durch einen Kreis, von einem Orthogonalkreise für zwei gegebene Kreise, Berührung von zwei Kreisen durch zwei andere, von zwei Orthogonalkreisen für zwei andere Kreise, von einem Berührungs- und einem Orthogonalkreise für zwei andere.......................... „ 15—24.

Das Berührungsproblem für den Kreis, Seite 25—49.

Die neun ersten Aufgaben: 1. drei Punkte; 2. zwei Punkte und eine Linie; 3. zwei Punkte und ein Kreis; 4. ein Punkt, zwei Linien; 5. ein Punkt, eine Linie, ein Kreis; 6. ein Punkt und zwei Kreise; 7. drei Linien; 8. zwei Linien und ein Kreis; 9. eine Linie und zwei Kreise.......................... Seite 25—42.
Die 10. Aufgabe. Drei Kreise. In doppelter Behandlung.............. „ 43—49.

Das Berührungsproblem für die Kugel, Seite 50—72.

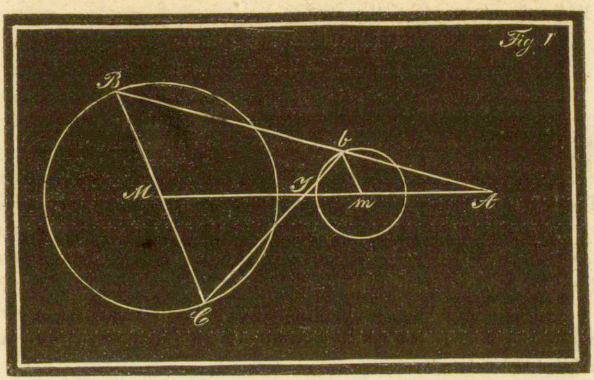
Fünfzehn Aufgaben. 1. vier Punkte.......................... Seite 50—52.
2. drei Punkte und eine Ebene.......................... „ 52—53.
3. drei Punkte und eine Kugel.......................... „ 53—54.
4. zwei Ebenen und zwei Punkte.......................... „ 55.
5. zwei Punkte, eine Ebene und eine Kugel.......................... „ 56—60.
6. zwei Punkte, zwei Kugeln.......................... „ 60—64.
7. ein Punkt, drei Ebenen.......................... „ 64.
8. ein Punkt, zwei Ebenen, eine Kugel.......................... „ 65.
9. ein Punkt, eine Ebene, zwei Kugeln.......................... „ 66.
10. ein Punkt und drei Kugeln.......................... „ 67.
11. vier gegebene Ebenen.......................... „ 68.
12. drei Ebenen und eine Kugel.......................... „ 69.
13. zwei Ebenen und zwei Kugeln.......................... „ 69—70.
14. drei Kugeln und eine Ebene.......................... „ 70.
15. vier Kugeln.......................... „ 71—72.

Grundlehren der neueren Geometrie, Seite 73—83.

Harmonische Theilung, harmonisches Strahlenbüschel, Transversalen, vollständiges Vierseit, Pol und Polare am Kreise, Pole bei orthogonalen Kreisen, Tangenten am Kreise und Pole, Sekanten von den Polen, vollständiges Kreisviereck; sämmtliche Polare der Punkte einer Linie schneiden sich in ihrem Pole, eine Linie durch den Pol hat ihren Pol in der Polare.
Dritte Auflösung der Berührungsaufgabe mit Hülfe der Lehre von der Polare (Gergonne).......................... Seite 83—87.
Vierte Auflösung der Berührungsaufgabe nach Pfaff.............. „ 87—90.
Fünfte Auflösung der Berührungsaufgabe.......................... „ 91—93.
Sechste Behandlung der Berührungsaufgabe mit Hülfe der Kegelschnitte.......................... „ 94—106.
Bestimmung geometrischer Örter bei orthogonalen Kreisen........... „ 107—109.
Sammlung leichter Übungsaufgaben über die Berührung und den orthogonalen Schnitt.......................... „ 109—110.
Corrigenda et Addenda.......................... „ 110—112.
Analytische Behandlung des Berührungsproblems, praktische Anwendung in der Mechanik.......................... „ 112.
Drei lithographirte Tafeln mit 39 Figuren.

Vorbereitende Betrachtungen.

§. 1. Der äussere Aehnlichkeitspunkt.



Es sind um M und m zwei Kreise mit den Halbmessern $MB = R$ und $mb = r$ beschrieben worden. In dem Kreise um M ist der Halbmesser MB beliebig, in dem Kreise um m ist der Halbmesser $mb \ddagger MB$ und in derselben Richtung, hier nach oben, endlich ist die gerade Linie Bb gezogen worden, welche die Centrale Mm in A schneidet. Es soll die Entfernung AM bestimmt werdeu, eben so Am. Die Entfernung der Mittelpunkte M uud m, d. h. Mm, wird durch c bezeichnet.

$$AM : Am = MB : mb.$$

$$AM : AM - c = R : r.$$

$$c : R - r = AM : R, \text{ daher } AM = \frac{c \,.\, R}{R - r}.$$

Eben so findet man $Am = \dfrac{c \,.\, r}{R - r}$.

Der für AM und Am gefundene Ausdruck ist unabhängig von der besonderen Lage des Punktes B. Wie man B wählen mag, wenn man danach wie oben die Lage des Punktes b bestimmt, immer wird Bb durch denselben Punkt A gehen. In dem Punkte A werden sich also unzählig viel Secanten der beiden Kreise durchschneiden, welche durch die Punkte hindurchgehen, deren

Halbmesser parallel laufen und gleich gerichtet sind. Der Punkt A heisst der äussere Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise.

Aufgabe: Es sind zwei Kreise gegeben, ihren äusseren Aehnlichkeitspunkt zu suchen:

1) Wenn die Kreise ausser einander liegen, 2) wenn sie sich von aussen berühren, 3) wenn sie zum Theil in einander, zum Theil ausser einander liegen, 4) wenn sie sich von innen berühren, 5) wenn der eine Kreis vollständig in dem andern liegt, 6) wenn sie concentrisch sind.

Wo liegt der äussere Aehnlichkeitspunkt von zwei Kreisen, deren Halbmesser gleich sind?

§. 2. Der innere Aehnlichkeitspunkt.

Es sind (Fig. I.) um M und m zwei Kreise mit dem Halbmesser $MB = R$ und $mb = r$ beschrieben worden. In dem Kreise um M ist der Halbmesser MC beliebig, in dem Kreise um m ist der Halbmesser $mb \nparallel MC$, aber nach entgegengesetzter Richtung, hier MC nach unten, mb nach oben, endlich ist die gerade Linie Cb gezogen worden, welche die Centrale in I schneidet. Es soll die Entfernung IM bestimmt werden, ebenso Im.

$$IM : Im = MC : mb.$$
$$IM : c - Im = R : r.$$
$$c : R + r = IM : R, \text{ also } IM = \frac{c \cdot R}{R + r}.$$

Ebenso findet man $Im = \dfrac{c \cdot r}{R + r}$.

Der für IM und Im gefundene Ausdruck ist unabhängig von der besonderen Lage des Punktes C. Wie man C wählen mag, wenn man danach die Lage des Punktes b bestimmt, immer wird Cb durch denselben Punkt I gehen. In dem Punkte I werden sich also unzählig viel Secanten der beiden Kreise schneiden, welche durch Punkte hindurchgehen, deren Halbmesser parallel laufen und entgegengesetzt gerichtet sind. Der Punkt I heisst der innere Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise.

Aufgabe: Es sind zwei Kreise gegeben, ihren innern Aehnlichkeitspunkt zu finden, unter den im §. 1 angeführten sechs Voraussetzungen.

Es soll der innere Aehnlichkeitspunkt von zwei Kreisen gesucht werden, deren Halbmesser gleich sind.

§. 3. Vom äussern und innern Aehnlichkeitspunkt.

In obiger Figur ist nach §. 1 der äussere Aehnlichkeitspunkt A construirt worden, nach §. 2 der innere Aehnlichkeitspunkt I.

Es ist $IM = \dfrac{cR}{R + r}$, $Im = \dfrac{cr}{R + r}$, $AM = \dfrac{cR}{R - r}$, $Am = \dfrac{cr}{R - r}$.

Es folgt daraus die Proportion $IM : Im = AM : Am$, d. h. die vier Punkte M, I, m, A sind harmonische Punkte, und zwar die Mittelpunkte der Kreise entsprechende Punkte, eben so sind der äussere und innere Aehnlichkeitspunkt entsprechende Punkte*).

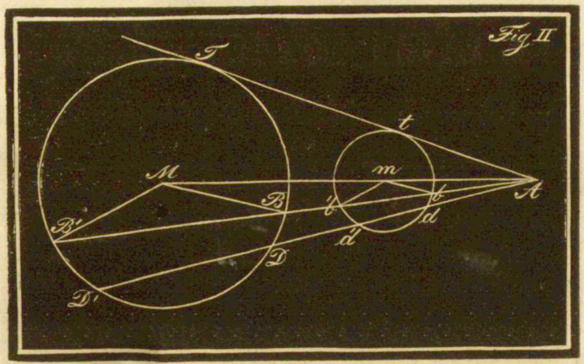
---

*) Vier Punkte (M, I, m, A) auf einer geraden Linie (MA) heissen harmonisch, wenn das Rechteck aus den beiden äusseren Stücken (MI und mA) gleich ist dem Rechteck aus dem mittleren Stück (Im) und der ganzen Linie (MA).

Aufgabe: Die Mittelpunkte zweier Kreise sind gegeben und einer ihrer Aehnlichkeitspunkte, man soll den andern suchen.

Die Mittelpunkte zweier Kreise, ein Aehnlichkeitspunkt und ein Halbmesser, sind gegeben, man soll die Kreise construiren.

§. 4. Von den äusseren Aehnlichkeitsstrahlen.



Ein Strahl, gezogen aus dem äusseren Aehnlichkeitspunkt, heisst ein **äusserer Aehnlichkeitsstrahl.**

Hat ein äusserer Aehnlichkeitsstrahl einen Punkt mit der einen Kreisperipherie gemein, so muss er auch mit der anderen Kreisperipherie einen Puukt gemein haben, und es sind alsdann die Radien dieser beiden Punkte parallel und gleich gerichtet.

Es habe der äussere Aehnlichkeitsstrahl A B mit dem Umfange des Kreises 𝔎 (um M) den Punkt B gemein, so ziehe man MB, ferner aus m den Halbmesser mb ⫲ MB, gleich gerichtet. Es geht nach §. 1 die Linie Bb durch den Punkt A d. h. die Punkte B, b und A liegen in gerader Linie, oder die Linie AB geht durch den Punkt b der Kreisperipherie von 𝔨 (um m), und MB ⫲ mb. Hat ferner der äussere Aehnlichkeitsstrahl AB einen **zweiten** Punkt B^1 gemein mit der Kreisperipherie von 𝔎, so muss er auch einen **zweiten** Punkt b^1 mit der Kreisperipherie von 𝔨 gemein haben, so dass MB^1 ⫲ mb^1.

Hat ein äusserer Aehnlichkeitsstrahl **nur** Einen Punkt mit der einen Kreisperipherie gemein, d. h. tangirt er den einen Kreis, so tangirt er **auch** den anderen; denn sollte er den zweiten schneiden, d. h. zwei Punkte mit seiner Peripherie

---

Aus MI . mA = Im . MA folgt die Proportion MI : mI = MA : mA, und umgekehrt: Gilt für vier Punkte (M, I, m, A) diese Proportion, so folgt daraus die Gleichung MI . mA = mI . MA, d. h. die Punkte sind harmonisch.

Wo liegt der vierte harmonische Punkt A, wenn der zweite I in der Mitte zwischen dem ersten und dritten, M und m, liegt? Wohin rückt der vierte harmonische Punkt, wenn der zweite aus der Mitte von Mm nach m zu hinrückt? Wohin rückt der vierte, wenn der zweite nach M zu hinrückt?

Gilt dasselbe, wenn man den zweiten und vierten Punkt als festliegend, den ersten und dritten aber als sich bewegend betrachtet?

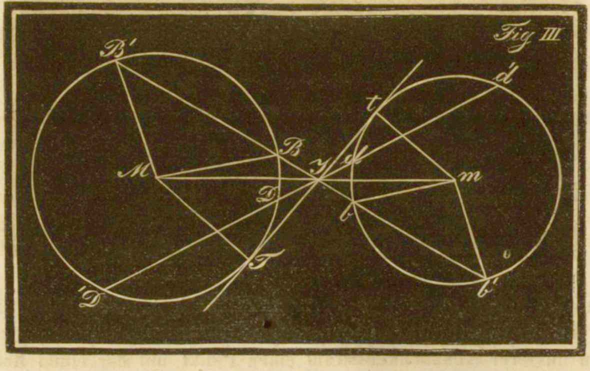
Die alternirenden Punkte, der erste und dritte, sowie der zweite und vierte, heissen **entsprechende** oder **zugeordnete** Punkte.

gemein haben, so müsste er nach dem Vorigen auch mit der Peripherie des ersten zwei Punkte gemein haben.

Hat ein äusserer Aehnlichkeitsstrahl gar keinen Punkt mit der einen Kreisperipherie gemein, d. h. liegt er ganz ausserhalb des einen Kreises, so liegt er auch ganz ausserhalb des anderen Kreises, was ebenfalls indirect folgt.

Ein äusserer Aehnlichkeitsstrahl ist also immer zu gleicher Zeit entweder Secante, oder Tangente an *beide* Kreise, oder liegt ausserhalb der *beiden* Kreise.

§. 5. Von den inneren Aehnlichkeitsstrahlen.



Ein Strahl, gezogen aus dem inneren Aehnlichkeitspunkte, heisst ein *innerer Aehnlichkeitsstrahl*.

Hat ein innerer Aehnlichkeitsstrahl einen Punkt mit der einen Kreisperipherie gemein, so muss er auch mit der anderen Kreisperipherie einen Punkt gemein haben, und es sind alsdann die Radien dieser beiden Punkte parallel und entgegengesetzt gerichtet.

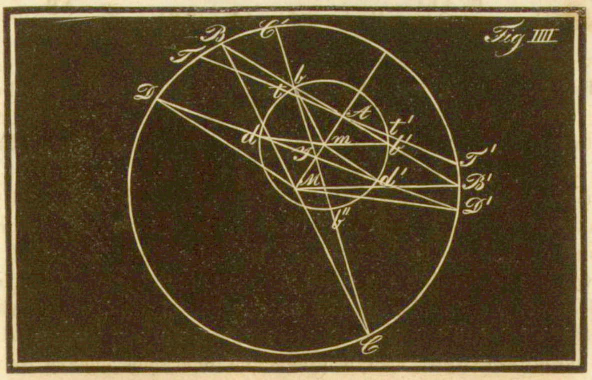
Es habe der innere Aehnlichkeitsstrahl IB mit dem Umfange des Kreises $\mathfrak{K}$ den Punkt B gemein, so ziehe man MB, ferner aus m den Halbmesser $mb \# MB$, entgegengesetzt gerichtet. Es geht nach §. 2 die Linie Bb durch den Punkt I, d. h. die Punkte B, b und I liegen in gerader Linie, oder die Linie IB geht durch den Punkt b der Kreisperipherie von $\mathfrak{k}$, und $MB \# mb$. Hat ferner der innere Aehnlichkeitsstrahl IB einen zweiten Punkt B^1 gemein mit der Kreisperipherie von $\mathfrak{K}$, so muss er auch einen *zweiten* Punkt b^1 mit der Kreisperipherie $\mathfrak{k}$ gemein haben, so dass $MB^1 \# mb^1$.

Hat ein innerer Aehnlichkeitsstrahl *nur* Einen Punkt mit der einen Kreisperipherie gemein, d. h. tangirt er den einen Kreis, so tangirt er *auch* den anderen; was wie in §. 4 indirect folgt.

Hat ein innerer Aehnlichkeitsstrahl gar keinen Punkt mit der einen Kreisperipherie gemein, d. h. liegt er ganz ausserhalb des einen Kreises, so liegt er auch ganz ausserhalb des anderen Kreises, was gleichfalls indirect folgt.

Ein innerer Aehnlichkeitsstrahl ist also immer zu gleicher Zeit entweder Secante, oder Tangente an *beide* Kreise, oder liegt ausserhalb der *beiden* Kreise.

§. 6.



Was in den vorigen fünf Paragraphen gelehrt worden ist, hat allgemeine Gültigkeit für jede beliebige Lage der beiden Kreise. In der obigen Zeichnung ist der Fall dargestellt worden, wo der eine Kreis in dem anderen liegt. Der äussere Aehnlichkeitspunkt ist mit A, der innere mit I bezeichnet worden. Es ist deutlich, dass hier jeder äussere Aehnlichkeitsstrahl für beide Kreise Secante ist, eben so jeder innere Aehnlichkeitsstrahl.

In den Fällen, wo bei einem ausserhalb beider Kreise liegenden Aehnlichkeitspunkte die Tangenten von demselben auftreten, treten bei einem innerhalb beider Kreise liegenden Aehnlichkeitspunkte die kleinsten Sehnen durch denselben auf, d. h. die Sehnen, welche senkrecht auf dem Radius stehen, der durch denselben Punkt geht. So gilt der Satz: Ist ein äusserer oder innerer Aehnlichkeitsstrahl kleinste Sehne in dem Kreise $\mathfrak{K}$, so ist er auch kleinste Sehne in dem Kreise $\mathfrak{k}$. Z. B. Durch den Punkt A ist die kleinste Sehne im Kreise $\mathfrak{K}$ gezogen worden, es ist der innere Aehnlichkeitsstrahl BB^1, so ist derselbe, nämlich der Theil bb^1 davon auch kleinste Sehne in dem Kreise $\mathfrak{k}$. Es steht nämlich BB^1 senkrecht auf der durch A aus dem Mittelpunkt M des Kreises $\mathfrak{K}$ gezogenen Linie Mm, eben so bb^1 senkrecht auf der durch I aus dem Mittelpunkt m des Kreises $\mathfrak{k}$ gezogenen Linie mM.

§. 7. Von den potenzhaltenden Punkten der Aehnlichkeitsstrahlen.

Ein Aehnlichkeitsstrahl ist nach §. 4 und 5 zu gleicher Zeit Secante oder Tangente an beide Kreise. Z. B. (Fig. II.) AB schneidet die Kreisperipherie von $\mathfrak{K}$ in B und B^1, muss daher auch die Kreisperipherie von $\mathfrak{k}$ schneiden, was in b und b^1 geschieht, und zwar so, dass $MB \mathrel{\#} mb$, $MB^1 \mathrel{\#} mb^1$, gleich gerichtet. Es sind immer je zwei Radien in beiden Kreisen nicht parallel, z. B. ist MB^1 nicht parallel mit mb, eben so MB nicht parallel mit mb^1. Die Punkte in beiden Kreisen, welche den nicht parallelen Radien entsprechen, heissen potenzhaltend, es sind daher B und b^1 potenzhaltende Punkte, eben so B^1 und b.

Die Rechtecke aus den Entfernungen von je zwei potenzhaltenden Punkten desselben Aehnlichkeitsstrahles vom Aehnlichkeitspunkte sind gleich. Z. B. $Ab \,.\, AB^1 = Ab^1 \,.\, AB$. (Fig. II und IV.)

Beweis: $Ab : AB = mb : MB$ oder $Ab = \frac{r \,.\, AB}{R}$; $Ab^1 : AB^1 = mb^1 : MB^1$, oder $AB^1 = \frac{R \,.\, Ab^1}{r}$. Es ist daher $Ab \,.\, BB^1 = \frac{r \,.\, AB}{R} \times \frac{R \,.\, Ab^1}{r} = AB \,.\, Ab^1$.

Das Rechteck aus den Entfernungen zweier potenzhaltenden Punkte vom Aehnlichkeitspunkte ist gleich dem Rechteck aus den Entfernungen der Berührungspunkte vom Aehnlichkeitspunkte, wenn man von demselben an beide Kreise Tangenten gezogen hat. Z. B. $Ab \,.\, AB^1 = At \,.\, AT$. (Fig. II.)

Beweis: $Ab \,.\, Ab^1 = At^2$, $AB \,.\, AB^1 = AT^2$, daher $Ab \,.\, AB^1 \times Ab^1 \,.\, AB = (At \,.\, AT)^2$. Da aber $Ab \,.\, AB^1 = Ab^1 \,.\, AB$, so ist, wenn man aus dem obigen Ausdrucke auf beiden Seiten die Wurzel auszieht, $AB \,.\, Ab^1 = At \,.\, AT$.

Was von den Rechtecken aus den Entfernungen von je zwei potenzhaltenden Punkten desselben Aehnlichkeitsstrahles vom Aehnlichkeitspunkte bewiesen worden ist, gilt von je zwei potenzhaltenden Punkten jedes Aehnlichkeitsstrahls, wofern man nur denselben, also den äusseren oder den inneren Aehnlichkeitspunkt beibehält. Z. B. $Ab^1 \,.\, AB = Ad \,.\, AD^1$.

Beweis: $Ab^1 \,.\, AB = At \,.\, AT$, $Ad \,.\, AD^1 = At \,.\, AT$.

Was in Rücksicht auf den äusseren Aehnlichkeitspunkt oben bewiesen worden ist, gilt auch gerade so von dem inneren. In den Beweisen ist bloss anstatt der Figur II. zu nehmen die Figur III., anstatt A zu setzen I. Es heissen die Sätze alsdann in Zeichen ausgesprochen:

$Ib \,.\, IB^1 = Ib^1 \,.\, IB$, $Ib \,.\, IB^1 = It \,.\, IT$, $Ib^1 \,.\, IB = It \,.\, IT$.

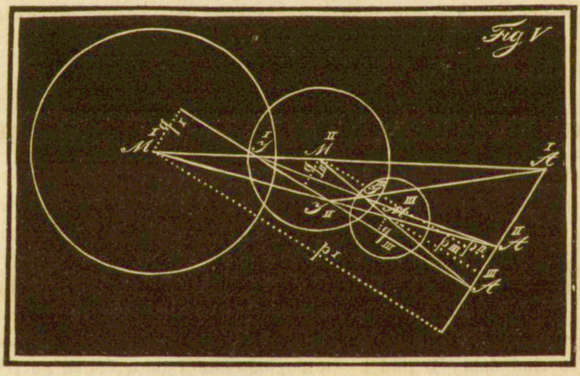
Dieselben Sätze bleiben noch gültig, wenn der eine Kreis in dem andern liegt, alsdann muss anstatt der Tangente die halbe kleinste Sehne genommen werden.

Der obige Beweis gilt auch bei der Lage in Figur IV., wo der Kreis 𝔨 ganz innerhalb des Kreises 𝔎 liegt, nur müssen der Figur wegen die Buchstaben B, b mit den Buchstaben T, t vertauscht werden.

Es ist $At \,.\, AT^1 = At^1 \,.\, AT$, $At \,.\, AT^1 = Ab^1 \,.\, AB$, $At^1 \,.\, AT = Ab \,.\, AB^1$.

Jede zwei Ähnlichkeitsstrahlen (entweder äussere oder innere) liefern

§. 8. Von den Symmetralen.



1) Wenn die Mittelpunkte von drei Kreisen in gerader Linie liegen, so liegen sämmtliche sechs Aehnlichkeitspunkte in derselben geraden Linie. Diesen Fall wollen wir zunächst immer von unseren Betrachtungen ausschliessen.

zwei Systemen von je vier Punkten (die Durchschnittspunkte mit den Kreisen) durch welche sich ein Kreis legen lässt.

2) Liegen die drei Mittelpunkte nicht in gerader Linie, so bilden sie ein Dreieck. In den Seiten dieses Dreiecks liegen die drei inneren Aehnlichkeitspunkte, befinden sich daher nie in derselben geraden Linie. Eben so kann man zeigen, dass eine gerade Linie, welche durch zwei äussere Aehnlichkeitspunkte hindurch geht, nicht durch den dritten inneren gehen kann. In der obigen Figur lässt sich z. B. leicht nachweisen, dass $A_1 A_2$ nicht durch I_3 hindurch geht.

Anmerkung. Die Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_3$ haben die Mittelpunkte M_1, M_2 und M_3, die Radien R_1, R_2 und R_3. Die Aehnlichkeitspunkte von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ sind A_1 und I_1, von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_3$ sind A_2 und I_2, von $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_3$ sind A_3 und I_3. Die Centrale von $\mathfrak{K}_1$ uud $\mathfrak{K}_2$ wollen wir durch $\mathfrak{C}_1$, von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_3$ durch $\mathfrak{C}_2$, von $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_3$ durch $\mathfrak{C}_3$ bezeichnen.

Sehe ich nämlich M_1 als Spitze des Dreiecks $M_1 M_2 M_3$ an, so ist $M_2 M_3$ die Grundlinie. In der Verlängerung von $M_1 M_2$ liegt A_1, in der von M_1 und M_3 liegt A_2. Beide Punkte A_1 und A_2 liegen also auf den Verlängerungen zweier Dreiecksseiten des Dreiecks $M_1 M_2 M_3$; es ist also unmöglich, dass ihre Verbindungslinie $A_1 A_2$ durch die dritte Dreiecksseite selbst gehe. $A_1 A_2$ kann also durch den zwischen M_2 und M_3 liegenden Punkt I_3 nicht hindurch gehen. Kann ich daher von zwei beliebigen der drei Aehnlichkeitspunkte A_1, A_2 und A_3, welche der obigen Bedingung gemäss ausgewählt sind, beweisen, dass die durch sie gelegte gerade Linie die dritte Centrale in dem äusseren *oder* inneren Aehnlichkeitspunkte schneiden muss, so ist damit bewiesen, dass sie durch den *äusseren* gehen muss, dass also *alle drei äusseren* Aehnlichkeitspunkte in derselben geraden Linie liegen.

Man ziehe von M_1, M_2 und M_3 parallele Linien $p_1 \parallel p_2 \parallel p_3$ nach der geraden Linie $A_1 A_2$, von welcher man noch nicht weiss, wo sie die Centrale $\mathfrak{C}_3$ schneidet. Aus $p_1 \parallel p_2$ ergiebt sich $p_1 : p_2 = A_1 M_1 : A_1 M_2$, und weil A_1 äusserer Aehnlichkeitspunkt von $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ ist, $p_1 : p_2 = R_1 : R_2$. Eben so ergiebt sich $p_3 : p_1 = R_3 : R_1$. Durch Verbindung beider Proportionen folgt $p_3 : p_2 = R_3 : R_2$. Bezeichnen wir den Durchschnittspunkt von $A_1 A_2$ und $\mathfrak{C}_3$ durch X, so folgt, da $p_3 : p_2 = XM_3 : XM_2$ ist, $R_2 : R_3 = XM_2 : XM_3$, d. h. X, welches auf der Centrale $\mathfrak{C}_3$ liegt, ist *entweder* äusserer *oder* innerer Aehnlichkeitspunkt der Kreise $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_3$. *Innerer* kann er nach dem Obigen nicht sein, folglich ist er *äusserer*. Die drei Punkte A_1, A_2 und A_3 liegen also in gerader Linie. Diese Linie heisst die *äussere Symmetrale*.

Da der äussere und innere Aehnlichkeitspunkt von zwei Kreisen im Allgemeinen verschieden sind und immer auf derselben geraden Linie, der Centrale, liegen, so folgt duraus, dass, gewisse Gränzfälle ausgenommen, welche eine besondere Behandlung verlangen, eine Linie, welche durch zwei äussere Aehnlichkeitspunkte geht, *nie* durch den dritten *inneren* gehen kann, denn sie *muss* durch den dritten *äusseren* hindurch gehen.

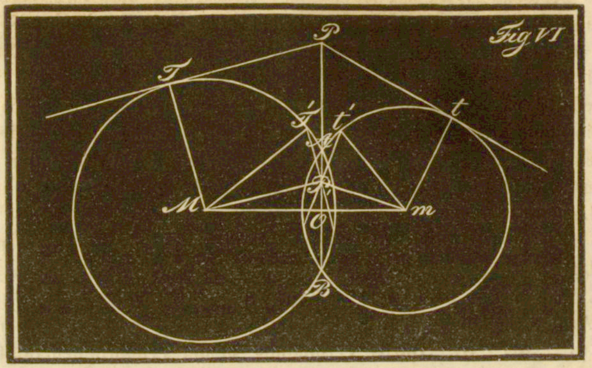
Man kann ausserdem beweisen, dass immer zwei innere und der dritte äussere Aehnlichkeitspunkt in gerader Linie liegen, z. B. dass $I_1 I_2$ durch A_3 hindurch geht.

Man ziehe von M_1, M_2 und M_3 auf $I_1 I_2$ die Parallelen $q_1 \parallel q_2 \parallel q_3$. Da $q_1 \parallel q_2$, so ist $q_1 : q_2 = I_1 M_1 : I_1 M_2$. Da I_1 innerer Aehnlichkeitspunkt von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ ist, so ist $I_1 M_1 : I_1 M_2 = R_1 : R_2$, daher $q_1 : q_2 = R_1 : R_2$. Ebenso lässt sich beweisen, dass $q_3 : q_1 = R_3 : R_1$. Durch Verbindung der beiden Proportionen folgt $q_3 : q_2 = R_3 : R_2$. Bezeichnen wir den Durchschnittspunkt von $I_1 I_2$ mit $\mathfrak{C}_3$ durch Y, so folgt, da $q_2 : q_3 = YM_2 : YM_3$ ist, $R_2 : R_3 = YM_2 : YM_3$. Folglich muss Y, welches auf der Centrale $\mathfrak{C}_3$ liegt, entweder äusserer oder innerer Aehnlichkeitspunkt der Kreise $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_3$ sein. Innerer kann er nicht sein, da die inneren Aehnlichkeitspunkte nicht in einer geraden Linie liegen, folglich ist er äusserer. Die drei Punkte I_1, I_2 und A_3 liegen also in gerader Linie. Dasselbe gilt von den Punkten I_1, I_3 und A_2; oder I_2, I_3 und A_1. Diese drei Linien heissen die inneren Symmetralen.

Die vier Symmetrallinien $A_1 A_2 A_3$, $I_1 I_2 A_3$, $I_1 I_3 A_2$, $I_2 I_3 A_1$ bilden ein vollständiges Vierseit, dessen sechs Ecken die sechs Aehnlichkeitspunkte A_1, A_2, A_3, I_1, I_2, I_3, und dessen drei Diagonalen die Centralen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ und $\mathfrak{C}_3$ sind, welche durch die entsprechenden Aehnlichkeitspunkte harmonisch getheilt werden.

Aufgabe: Es ist ein vollständiges Vierseit gegeben, man soll mit Hülfe desselben die drei Kreise finden, zu welchen die vier Seiten die Symmetralen sind.

§ 9. Vorbereitende Sätze für die Chordale.



1) Hat ein Punkt O der Centrale von zwei Kreisen die Eigenschaft, dass $OM^2 - Om^2 = R^2 - r^2$, so hat jeder Punkt des Lothes OP, das man in O auf der Centrale errichtet, dieselbe Eigenschaft, d. h. $PM^2 - Pm^2 = R^2 - r^2$.

2) Umgekehrt: Hat der Punkt die Eigenschaft, dass $PM^2 - Pm^2 = R^2 - r^2$, so hat auch der Fusspunkt O des von P auf die Centrale gefällten Lothes dieselbe Eigenschaft, d. h. $OM^2 - Om^2 = R^2 - r^2$.

3) Hat der Punkt O der Centrale von zwei Kreisen die Eigenschaft, dass $OM^2 - Om^2 = R^2 - r^2$, so ist das in O auf der Centrale errichtete Loth der geometrische Ort aller Punkte, z. B. P, für welche $PM^2 - Pm^2 = R^2 - r^2$.

Sind nämlich in einer gegebenen geraden Linie zwei feste Punkte vorhanden M und m, so ist für jeden veränderten Ort des Punktes O die Differenz $OM - Om$ eine andere, eben so natürlich die Differenz $OM^2 - Om^2$.

4) Jeder Punkt der Linie OP, welche auf die in No. 1 angegebene Weise gezogen ist, hat die Eigenschaft, dass die von ihm an die beiden Kreise gelegten Tangenten gleich sind, z. B. $PT = Pt$.

Beweis: $PM^2 = PT^2 + MT^2$, $Pm^2 = Pt^2 + mt^2$; also $PM^2 - Pm^2 = PT^2 - Pt^2 + MT^2 - mt^2$. Da aber $PM^2 - Pm^2 = R^2 - r^2$ und $MT = R$, $mt = r$ ist, so ist $PT^2 - Pt^2 = o$, d. h. $PT = Pt$.

5) Kein Punkt ausserhalb der obigen Linie OP hat die Eigenschaft, dass die von ihm an beide Kreise gezogenen Tangenten gleich sind. Die Linie OP ist

also der geometrische Ort aller Punkte, von welchen ich an die beiden Kreise gleiche Tangenten ziehen kann.

6) Wo keine Tangenten möglich sind, vertreten die Hälften der kleinsten Sehnen ihre Stelle.

Liegt der eine von zwei Kreisen zum Theil innerhalb, zum Theil ausserhalb des andern, so haben sie eine gemeinschaftliche Sehne, in der obigen Figur AB. Diese gemeinschaftliche Sehne AB steht senkrecht auf der Centrale Mm, hier im Punkte O, und zwar ist $OM^2 - Om^2 = R^2 - r^2$. AB erfüllt also die in No. 1 verlangte Bedingung. Jeder Punkt von AB ausserhalb der beiden gegebenen Kreise hat also die Eigenschaft, dass die von ihm an beide Kreise gezogenen Tangenten gleich sind. Jeder Punkt von AB innerhalb der beiden gegebenen Kreise hat die Eigenschaft, dass die Hälften der durch ihn gezogenen kleinsten Sehnen in beiden Kreisen gleich sind. Z. B. ist P^1T^1, wo $P^1T^1 \perp MP^1$ steht, gleich P^1t^1, wo $P^1t^1 \perp mP^1$ steht. Denn $MT_1{}^2 - mt_1{}^2 = P^1M^2 - P^1m^2 + P^1T_1{}^2 - P^1t_1{}^2$ oder $R^2 - r^2 = R^2 - r^2 + P^1T_1{}^2 - P^1t_1{}^2$.

Oder: Ist AB die gemeinschaftliche Sehne der beiden Kreise M und m, und P ein Punkt ausserhalb derselben, so ist $PT^2 = PA \,.\, PB$, eben so $Pt^2 = PA \,.\, PB$. Daher ist $PT = Pt$, oder: die von P an beide Kreise gezogenen Tangenten sind gleich. Eben so ist $P^1T_1{}^2 = P^1A \,.\, P^1B$, desgleichen $P^1t_1{}^2 = P^1A \,.\, P^1B$, daher $P^1T^1 = P^1t^1$.

7) Man sagt von dem Punkt P, es sei ein Punkt der Chordale für die beiden Kreise M und m; dasselbe sagt man von dem Punkte P^1. Kennt man Einen Punkt der Chordale, so kennt man die Chordale selbst. Man hat dann nur nöthig, von demselben ein Loth auf die Centrale zu fällen und dieses Loth nach beiden Seiten bis ins Unendliche zu verlängern.

Die

§. 10. Von der Chordale.

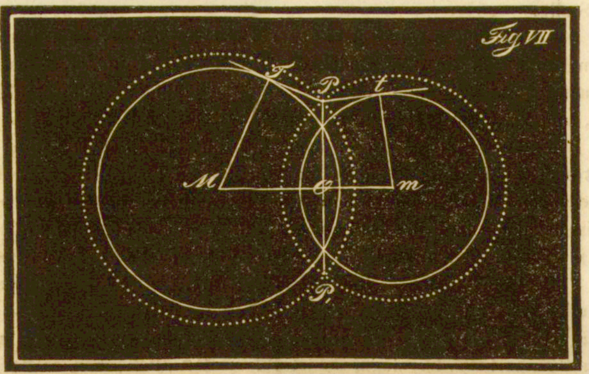
Unter der Chordale von zwei gegebenen Kreisen versteht man den geometrischen Ort aller Punkte, von welchen die an beide Kreise gezogenen Tangenten oder die in beiden Kreisen gezogenen kleinsten Sehnen gleich sind.

Die Chordale ist nach dem vorigen Paragraphen eine gerade Linie, welche senkrecht auf der Centrale steht. Wird die Figur VI. beibehalten, so ist OP die Chordale der Kreise M und m, $PT = Pt$, $P^1T^1 = P^1t^1$. Der Durchschnittspunkt der Chordale und Centrale heisst O. Es ist $OM^2 - Om^2 = R^2 - r^2$. Dasselbe gilt von jedem beliebigen Punkte P der Chordale, d. h. es ist $PM^2 - Pm^2 = R^2 - r^2$.

Schneiden sich zwei Kreise $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{k}$, so hat ihr Durchschnittspunkt, z. B. A die Eigenschaft, dass $AM^2 - Am^2 = R^2 - r^2$. Ihr Durchschnittspunkt ist also ein Punkt der Chordale. Dasselbe findet bei der Berührung statt. Schneiden sich also zwei Kreise, so ist ihre gemeinschaftliche Sehne die Chordale für beide Kreise. Berühren sich zwei Kreise, so geht ihre Chordale durch den Berührungspunkt, oder die gemeinschaftliche Tangente ist ihre Chordale.

Die Chordale ist zugleich für zwei Kreise, welche sich schneiden, der Geometrische Ort für die Mittelpunkte der gleichen kleinsten Sehnen für beide Kreise

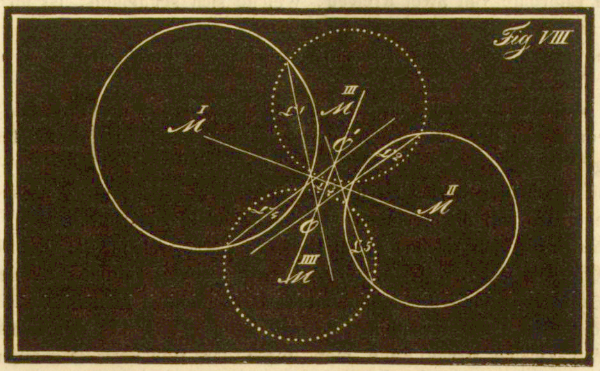
Andere Darstellung der Lehre von der Chordale.



Es ist ein Kreis um M gegeben, ausserhalb desselben der Punkt P, von welchem an den Kreis die Tangente PT gezogen worden ist. Es ist nun leicht, den Abstand PM zu finden. Es ist nämlich $PM^2 = R^2 + PT^2$. Angenommen: PT sei gegeben und eine beständige Grösse t, so ist es leicht, den geometrischen Ort aller Punkte zu finden, welche die Eigenschaft haben, dass die von ihnen an den Kreis M gezogenen Tangenten die gegebene Grösse t haben. Es ist dies ein Kreis, dessen Mittelpunkt M ist, und dessen Radius gleich $\sqrt{R^2 + t^2}$ ist. Man kann auf gleiche Weise den geometrischen Ort aller Punkte finden, welche die Eigenschaft haben, dass die von ihnen an den Kreis m gezogenen Tangenten die gegebene Grösse t haben. Es ist dies ein Kreis, dessen Mittelpunkt m ist, und dessen Radius gleich $\sqrt{r^2 + t^2}$ ist. Wir haben dadurch zwei Kreise erhalten, welche sich im Allgemeinen in zwei Punkten P und P_1 schneiden werden. Jeder der Punkte P und P_1 hat also die Eigenschaft, dass die von ihm an die Kreise M und m gezogenen Tangenten gleich t sind. Kein anderer Punkt als P und P_1 hat diese Eigenschaft. Ferner geht aus dem Obigen hervor, dass $PM^2 = R^2 + t^2$, ebenso dass $Pm^2 = r^2 + t^2$ ist, daher ist $PM^2 - Pm^2 = R^2 - r^2$. Dasselbe gilt vom Punkte P_1. Die Linie PP_1 hat also als gemeinschaftliche Sehne der beiden punktirten Hülfskreise um M und m die Eigenschaft, auf der Centrale Mm senkrecht zu stehen in O. Es hat also auch der Punkt O die Eigenschaft, dass $OM^2 - Om^2 = R^2 - r^2$. Da nur ein einziger Punkt O in der geraden Linie Mm diese Eigenschaft haben kann, da ferner PP_1 in O auf Mm senkrecht steht, so muss *unabhängig von jedem besonderen Werth der gleichen Tangente* t an beide gegebene Kreise, die Linie PP_1, die gemeinschaftliche Sehne der um M und m mit den Radien $\sqrt{R^2 + t^2}$ und $\sqrt{r^2 + t^2}$ beschriebenen Kreise, stets dieselbe gerade Linie sein, welche den Namen der Chordale trägt.

Um also die Chordale für zwei gegebene Kreise, deren Mittelpunkte M und m und Radien R und r man kennt, zu finden, hat man nur nöthig, aus M mit dem Radius $\sqrt{R^2 + t^2}$ und aus m mit dem Radius $\sqrt{r^2 + t^2}$ einen Kreis zu beschreiben. t ist eine beliebige Strecke, welche man so zu wählen hat, dass die beiden beschriebenen Kreise sich schneiden. Alsdann ist die gemeinschaftliche Sehne PP_1 der beiden beschriebenen Kreise die Chordale für die beiden gegebenen Kreise.

§. 11. Ueber die Chordale von drei gegebenen Kreisen.



Es sind die drei Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_3$ um M_1, M_2 und M_3 gegeben. Die Chordale von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_3$ ist mit $\mathfrak{C}_1$, die Chordale von $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_3$ ist mit $\mathfrak{C}_2$, die Chordale von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ ist mit $\mathfrak{C}_3$ bezeichnet worden. Es wird behauptet:

1. Entweder schneiden sich $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ und $\mathfrak{C}_3$ in demselben Punkte;
2. Oder $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ und $\mathfrak{C}_3$ laufen parallel;
3. Oder $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ und $\mathfrak{C}_3$ fallen zusammen.

1) Angenommen, $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ schneiden sich in O, so kann bewiesen werden, dass $\mathfrak{C}_3$ durch denselben Punkt O hindurchgeht. Weil O ein Punkt der Chordale $\mathfrak{C}_1$ von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_3$ ist, so sind die von O aus an die Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_3$ gezogenen Tangenten gleich, wir wollen ihre Länge durch t bezeichnen; weil O ein Punkt der Chordale $\mathfrak{C}_2$ von $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_3$ ist, so sind die von O aus an die Kreise $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_3$ gezogenen Tangenten gleich. Die Tangente von O an $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_3$ hat die Länge t, also hat die von O an den Kreis $\mathfrak{K}_2$ gezogene Tangente dieselbe Länge; d. h. die Tangenten von O an die Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_3$ sind gleich lang oder O ist ein Punkt der Chordale von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, d. h. $\mathfrak{C}_3$ geht durch den Punkt O.

Haben also zwei Chordalen einen Punkt gemein, so geht die dritte durch denselben Punkt, welchen man den Chordalpunkt der drei gegebenen Kreise nennt.

2) Laufen zwei Chordalen $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ parallel, so kann die dritte $\mathfrak{C}_3$ weder die $\mathfrak{C}_1$ noch die $\mathfrak{C}_2$ schneiden, weil nach No. 1 sonst alle drei durch diesen Durchschnittspunkt hindurch gehen müssten. Laufen daher zwei Chordalen parallel, so muss die dritte auch mit denselben parallel laufen. Dies findet z. B. statt, wenn die Mittelpunkte der drei Kreise in derselben geraden Linie liegen. Die drei Chordalen stehen dann senkrecht auf der gemeinschaftlichen Centrale.

3) Es ist auch möglich, dass alle drei Chordalen zusammenfallen. Es findet dieses statt, wenn die drei Kreise eine gemeinschaftliche Sehne haben, welche alsdann Chordale der drei Kreise wird.

In der obigen Figur ist O^1 der Chordalpunkt der Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_3$.

§. 12. Construction der Chordale.

1) Die Chordale von zwei Kreisen, welche sich schneiden, ist ihre gemeinschaftliche Sehne. (Vergl. Seite 9, §. 10.)

2) Die Chordale von zwei Kreisen, welche sich berühren, ist ihre gemeinschaftliche Tangente.

3) Es bleibt noch übrig, die Construction anzugeben der Chordale von zwei Kreisen, von denen der eine ganz innerhalb oder ganz ausserhalb des anderen liegt. (Fig. VIII.)

Es sind die beiden Kreise M_1 und M_2 gegeben, welche ganz ausserhalb einander liegen: man soll die gemeinschaftliche Chordale construiren.

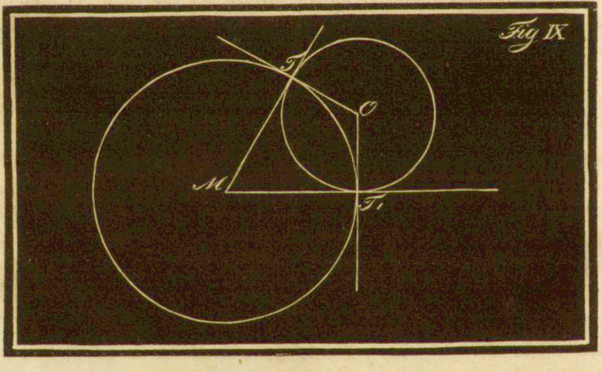
Auflösung: Man zeichne einen Hülfskreis M_3, welcher M_1 und M_2 schneidet. Die Chordale $\mathfrak{C}_1$ von M_1 und M_3 ist ihre gemeinschaftliche Sehne, ebenso $\mathfrak{C}_2$ von M_2 und M_3, der Durchschnittspunkt O der beiden gemeinschaftlichen Sehnen $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ ist der Chordalpunkt (vergl. Seite 11, §. 11) der Kreise M_1, M_2 und M_3. Auf gleiche Weise kann man durch den Hülfskreis M_4 einen zweiten Punkt O^1 der Chordale von M_1 und M_2 finden, indem man die Sehnen $\mathfrak{C}_4$ und $\mathfrak{C}_5$ zieht. Die beiden Punkte O und O^1 bestimmen die Lage der gesuchten Chordale OO^1 oder $\mathfrak{C}_3$.

Nachdem man den Punkt O gefunden hat, könnte man auch auf die Centrale M_1 und M_2 ein Loth fällen. Dieses Loth wäre alsdann die gesuchte Chordale $\mathfrak{C}_3$. Vergleiche die Zeichnung.

Sind die Mittelpunkte M_1 und M_2 nicht gegeben, so würde die obige Auflösung nur 2 Kreise und 5 Linien erfordern; dagegen die letzte Lösung 12 Kreise und 8 Linien.

Wo liegt die Chordale von zwei gegebenen Kreisen in den sechs verschiedenen Lagen, welche dieselben zu einander einnehmen können? Z. B. wenn der eine Kreis ganz innerhalb des anderen liegt, oder wenn beide Kreise concentrisch sind?

§. 13. Von den Orthogonalkreisen.



Zwei Kreise schneiden einander orthogonal, wenn sie sich in einem Punkte so schneiden, dass die Tangenten dieses Punktes für beide Kreise auf einander senkrecht stehen.

Z. B. TO ist in T Tangente an den Kreis um M, und TM ist in T Tangente an den Kreis um O.

Alsdann fällt 1) der Radius des einen Kreises mit der Tangente des anderen für denselben Punkt zusammen; 2) die Radien beider Kreise für diesen gemeinschaftlichen Punkt stehen auf einander senkrecht.

Oder: Ist eine der drei oben genannten Bedingungen erfüllt, so sind alle erfüllt und die Kreise schneiden sich orthogonal.

Zwei Kreise, welche sich orthogonal schneiden, müssen sich in zwei Punkten schneiden. Bei zwei Kreisen, welche sich berühren, bilden nämlich die Radien des Berührungspunktes eine gerade Linie, stehen also nicht auf einander senkrecht.

Die Durchschnittspunkte der beiden Kreise heissen in der obigen Figur T und T_1. Es wird vorausgesetzt, dass sich die beiden Kreise in T orthogonal schneiden, d. h. dass MTO ein rechter Winkel ist. Aus der Congruenz der Dreiecke OTM und OT^1M folgt, dass OT^1M auch ein rechter Winkel ist, d. h. dass $OT^1 \perp T^1M$.

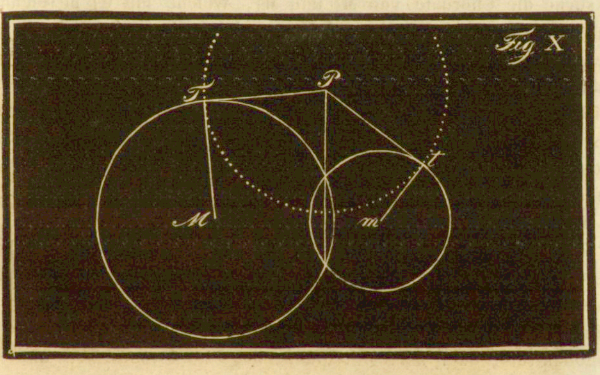
Schneiden sich daher zwei Kreise orthogonal in einem Durchschnittspunkte, so muss dies auch noch in einem zweiten der Fall sein.

Jeder Punkt O in der Linie TO erfüllt die Bedingung, dass ein von ihm mit dem Radius OT beschriebener Kreis M orthogonal schneidet. Durch einen jeden Punkt des Umfangs eines Kreises lassen sich also unendlich viel Orthogonalkreise ziehen.

Aufgabe: Es ist ein Kreis M und in der Peripherie desselben der Punkt T gegeben, man soll durch denselben einen Orthogonalkreis legen.

Es sind unzählig viel Auflösungen möglich. Je zwei Orthogonalkreise auf verschiedenen Seiten von MT haben denselben Halbmesser. Uebrigens sind die Halbmesser verschieden und wachsen von 0 bis ∞.

§. 14. An zwei gegebene Kreise einen Orthogonalkreis zu beschreiben.



Es sind die beiden Kreise um M und m gegeben. Es soll ein Orthogonalkreis an beide beschrieben werden.

Analysis: Angenommen, ein um P beschriebener Kreis mit dem Radius PT erfülle die Bedingungen, für die beiden gegebenen Kreise ein Orthogonalkreis zu sein, so muss der Kreis P den Kreis M in zwei Punkten schneiden, ebenso den Kreis m. Die beiden Durchschnittspunkte von Kreis P und M, z. B. T, haben die Eigenschaft, dass $TP \perp TM$; dasselbe findet statt für die Kreise P und m, d. h. es ist $tP \perp tm$. Weil T und t im Umfange des Kreises von P liegen, so ist $PT = Pt$, oder nach §. 10, Seite 9 ist P ein Punkt in der Chordale der beiden Kreise M und m.

Jeder Punkt dieser Chordale kann als Mittelpunkt eines Orthogonalkreises an die beiden gegebenen Kreise M und m angesehen werden. Man hat nur nöthig, von ihm an beide Kreise Tangenten zu ziehen, welche gleich sind, und mit deren Länge als Radius von ihm als Mittelpunkt einen Kreis zu beschreiben. Aus der Analysis ergiebt sich, dass der Mittelpunkt des gesuchten Orthogonalkreises immer in der Chordale liegen muss.

Die Chordale von zwei gegebenen Kreisen ist also der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche die beiden gegebenen Kreise orthogonal schneiden.

Anmerkung. Ein Kreis von P in Fig. VII. mit dem Radius $PT = Pt$ beschrieben, ist ein Orthogonalkreis für die Kreise M und m.

Der Mittelpunkt des gesuchten Chordalkreises ist aber stets ausserhalb der beiden gegebenen Kreise zu nehmen, weil von ihm an beide Kreise gleiche Tangenten gezogen werden müssen.

Folgerung: Schneidet ein Kreis (3) zwei Kreise (1) und (2) orthogonal, thut der Kreis (4) dasselbe, so ist die Centrale von (3) und (4) zugleich Chordale von (1) und (2).

§. 15. An drei gegebene Kreise einen Orthogonalkreis zu beschreiben.

(Vergl. Fig. VIII.)

Es sind drei Kreise M_1, M_2 und M_3 gegeben, man soll für sie einen gemeinschaftlichen Orthogonalkreis ziehen.

Man suche die Chordale von M_1 und M_3, welche mit $\mathfrak{C}_1$ bezeichnet worden ist; ebenso die Chordale von M_2 und M_3, welche mit $\mathfrak{C}_2$ bezeichnet worden ist; desgleichen die Chordale von M_1 und M_2, welche mit $\mathfrak{C}_3$ bezeichnet worden ist. Alsdann sind nach §. 11, Seite 11 folgende drei Fälle möglich.

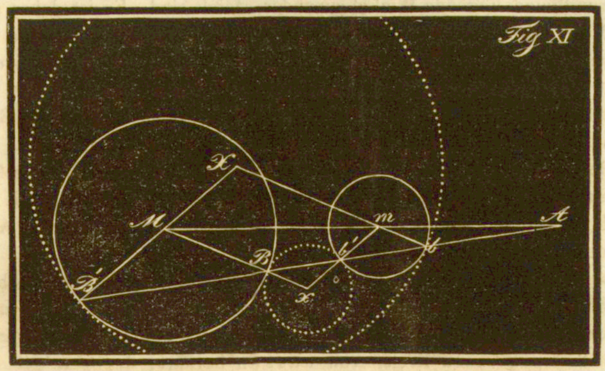
1) Die drei Chordalen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ und $\mathfrak{C}_3$ schneiden sich in demselben Punkte O. Alsdann ist dieser Punkt der Mittelpunkt des gesuchten Orthogonalkreises. Von O aus können an die Kreise M_1, M_2 und M_3 gleiche Tangenten gezogen werden. Die Länge dieser Tangente ist der Radius des gesuchten Kreises. Es ist nur eine einzige Auflösung möglich.

Von den Kreisen M_1, M_2 und M_4 ist der Chordalpunkt in Fig. VIII. der Punkt O^1. Also ist O^1 der Mittelpunkt des gemeinschaftlichen Orthogonalkreises für die Kreise M_1, M_2 und M_4.

2) Die drei Chordalen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ und $\mathfrak{C}_3$ laufen parallel. Alsdann giebt es keinen Orthogonalkreis, oder sein Mittelpunkt liegt im Unendlichen und der Radius ist unendlich gross. Es giebt keine Auflösung.

3) Die drei Chordalen fallen zusammen. Alsdann kann jeder ihrer Punkte ausserhalb der drei Kreise als Mittelpunkt des gemeinschaftlichen Orthogonalkreises angenommen werden, dessen Radius die Länge der von dem angenommenen Punkte an die drei Kreise gezogenen Tangenten hat. Es giebt unendlich viel Auflösungen.

§. 16. Sätze über die Berührung von zwei Kreisen durch einen dritten.



1) Es sind zwei Kreise um M und m gegeben, man soll einen dritten finden, welcher beide gleichartig berührt.

Die Halbmesser der Kreise um M und m werden durch R und r bezeichnet.

A. Man beschreibe über Mm ein Dreieck, dessen drei Seiten Mm, $R + \varsigma$, $r + \varsigma$ werden, wo ς so gewählt sein muss, dass ein Dreieck möglich ist. Das Dreieck Mxm hat $xM = R + \varsigma$, $xm = r + \varsigma$. x ist der Mittelpunkt des Kreises, dessen Radius ς ist. Der Kreis um x berührt den Kreis M in B, den Kreis m in b^1, beide Kreise von aussen. Da für ς unendlich viel Werthe möglich sind, so lässt die Aufgabe unendlich viel Auflösungen zu.

Es soll bewiesen werden, dass die Berührungspunkte B und b^1 potenzhaltende Punkte des äusseren Aehnlichkeitspunktes sind, weil die Berührung eine gleichartige ist, bei beiden Kreisen von aussen.

Man ziehe die Linie Bb^1, so schneidet dieselbe den Kreis um M noch in B^1, den Kreis um m in b. Man ziehe die Halbmesser MB^1, mb, so erhält man die gleichschenkeligen Dreiecke MBB^1, xBb^1 und mbb^1, in welchen alle sechs an den Grundlinien liegende Winkel unter einander gleich sind, z. B. die Winkel mbb^1 und MBB^1 oder mb^1b und MB^1B, woraus die Parallelität der Linien mb und MB oder $mb^1 \# MB^1$ folgt.

Die parallelen Radien sind gleich gerichtet, also geht die durch ihre Endpunkte gezogene Linie Bb^1 durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt nach §. 1, Seite 1.

B. Man hätte auch über Mm ein Dreieck beschreiben können mit den Seiten $\varsigma^1 - R$, $\varsigma^1 - r$ und Mm, und hätte als Spitze X gefunden, $XB^1 = Xb = \varsigma^1$. Ein aus X mit dem Halbmesser ς^1 beschriebener Kreis würde alsdann die beiden gegebenen Kreise von innen berührt haben. ς^1 musste so gewählt werden, dass die Construction des Dreiecks XMm möglich war. Es ergeben sich also unendlich viel Auflösungen.

Es soll bewiesen werden, dass die Berührungspunkte B^1 und b potenzhaltende Punkte des äusseren Aehnlichkeitspunktes sind, weil die Berührung eine gleichartige ist, bei beiden Kreisen von innen.

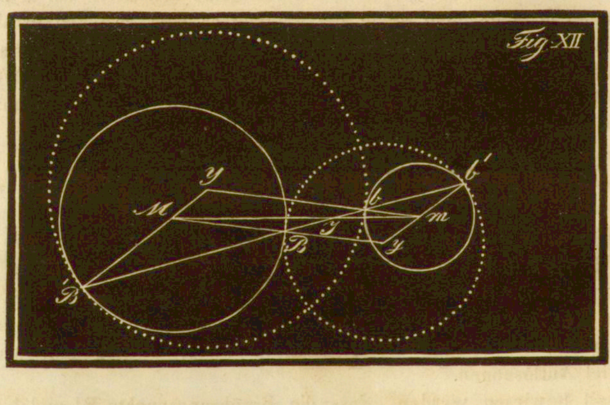
Man ziehe die Linie B^1b, welche den Kreis um M noch in B, den Kreis um m noch in b^1 schneidet. Man ziehe darauf die Halbmesser MB, mb^1, so erhält man die gleichschenkeligen Dreiecke MBB^1, mbb^1, XB^1b, in welchen alle sechs an den Grundlinien liegende Winkel einander gleich sind. Es ist daher $mb \mathrel{\#} MB$, $mb^1 \mathrel{\#} MB^1$, die parallelen Radien sind gleich gerichtet. Es geht daher die durch ihre Endpunkte gezogene gerade Linie B^1b durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise M und m.

Berührt daher ein Kreis zwei andere gleichartig, so sind die Berührungspunkte potenzhaltende Punkte des äusseren Aehnlichkeitspunktes.

C. Daraus ergiebt sich ein Verfahren, vermittelst des äusseren Aehnlichkeitspunktes an zwei gegebene Kreise einen Kreis zu ziehen, welcher beide von aussen oder beide von innen berührt. Die Aufgabe gestattet unendlich viel Auflösungen für jede der beiden Forderungen.

Es sind z. B. die Kreise um M und m gegeben, man soll an beide einen Kreis ziehen, der beide von aussen berührt. Man ziehe einen beliebigen äusseren Aehnlichkeitsstrahl Abb^1BB^1, so geben die beiden Punkte B und b^1 einen Kreis, der die beiden gegebenen Kreise von aussen berührt; dagegen geben die beiden Punkte b und B^1 einen Kreis, der die beiden gegebenen Kreise von innen berührt. Man ziehe nämlich die Radien mb^1 und MB, verlängere sie bis zum Durchschnittspunkte in x, so lässt sich beweisen, dass $xb^1 = xB$, d. h. ein aus x mit xb^1 oder xB beschriebener Kreis die beiden gegebenen Kreise in b^1 und B berührt. Es ist nämlich die Gleichschenkeligkeit der Dreiecke mbb^1 und MBB^1 bekannt. Weil AB ein äusserer Aehnlichkeitsstrahl ist, so ist $mb \mathrel{\#} MB$, also sind die Winkel mbb^1 und MBB^1 gleich oder Winkel $mb^1b = MBB^1$, also sind auch ihre Scheitelwinkel xb^1B und xBb^1 gleich.

Hätte ein Kreis gesucht werden sollen, der beide von innen berührt, so hätte man die Punkte b und B^1 nehmen und die Radien bm und B^1M bis zum Durchschnittspunkte in X verlängern müssen. Alsdann wäre X der Mittelpunkt des gesuchten Kreises geworden und $Xb = XB^1$ sein Radius. Die Gleichschenkeligkeit der beiden Dreiecke mbb^1 und MBB^1 ist bekannt, die des Dreiecks XbB^1 hätte erwiesen werden müssen aus $mb^1 \mathrel{\#} MB^1$.



2) Es sind zwei Kreise um M und m gegeben, man soll einen dritten finden, welcher beide Kreise ungleichartig berührt.

A. Man beschreibe über Mm ein Dreieck, dessen Seiten Mm, $\varrho - r$, $R + \varrho$ werden, wo ϱ so gewählt werden muss, dass ein Dreieck möglich ist. Das Dreieck ist Mym, $yM = R + \varrho$, $ym = \varrho - r$. y ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, dessen Radius ϱ ist. Der Kreis um y berührt den Kreis M in B von aussen, den Kreis m in b, von innen. Da für ϱ unendlich viel Werthe möglich sind, so lässt die Aufgabe unendlich viel Auflösungen zu.

Es soll bewiesen werden, dass die Berührungspunkte B und b^1 potenzhaltende Punkte des inneren Aehnlichkeitspunktes sind, weil die Berührung eine ungleichartige ist, bei M von aussen, bei m von innen.

Man ziehe die Linie Bb^1, so schneidet dieselbe den Kreis um M noch in B^1, den Kreis um m in b. Man ziehe die Halbmesser MB, MB^1, mb, mb^1, so erhält man die gleichschenkeligen Dreiecke MBB^1, yBb^1 und mbb^1, in welchen alle sechs an den Grundlinien liegende Winkel unter einander gleich sind, z. B. die Winkel mbb^1 und MBB^1 oder mb^1b und MB^1B, woraus die Parallelität der Linien mb und MB oder $mb^1 \#\ MB^1$ folgt. Die parallelen Radien sind aber entgegengesetzt gerichtet, z. B. mb nach oben, MB nach unten, also geht die durch ihre Endpunkte gezogene Linie Bb^1 durch den inneren Aehnlichkeitspunkt nach §. 2, Seite 2.

B. Man hätte auch über Mm ein Dreieck beschreiben können mit den Seiten $\varrho^1 - R$, $\varrho^1 + r$ und Mm, und hätte als Spitze Y gefunden, $YB^1 = Yb = \varrho^1$. Ein aus Y mit dem Halbmesser ϱ^1 beschriebener Kreis würde alsdann den Kreis M von innen, den Kreis m von aussen berührt haben. ϱ^1 musste so gewählt werden, dass die Construction des Dreiecks YMm möglich war. Es ergeben sich also unendlich viel Auflösungen.

Es soll bewiesen werden, dass die Berührungspunkte b und B^1 potenzhaltende Punkte des inneren Aehnlichkeitspunktes sind, weil die Berührung eine ungleichartige ist, bei M von innen, bei m von aussen.

Man ziehe die Linie B^1b, welche den Kreis um M noch in B, den Kreis um m noch in b^1 schneidet. Man ziehe darauf die Halbmesser MB^1, MB, mb, mb^1, so erhält man die gleichschenkeligen Dreiecke, MBB^1, mbb^1, YB^1b, in welchen alle sechs an den Grundlinien liegende Winkel einander gleich sind. Es ist daher $mb \#\ MB$, $mb^1 \#\ MB^1$, die parallelen Radien sind entgegengesetzt gerichtet. Es geht daher die durch ihre Endpunkte gezogene gerade Linie B^1b durch den inneren Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise M und m.

Berührt daher ein Kreis zwei andere ungleichartig, so sind die Berührungspunkte potenzhaltende Punkte des inneren Aehnlichkeitspunktes.

C. Daraus ergiebt sich ein Verfahren, vermittelst des inneren Aehnlichkeitspunktes an zwei gegebene Kreise einen Kreis zu zeichnen, welcher den einen von aussen, den anderen von innen berührt. Die Aufgabe gestattet unendlich viel Auflösungen für jede der beiden Forderungen.

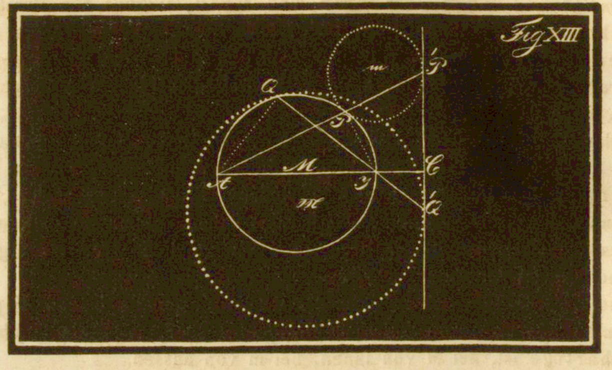
Es sind z. B. die Kreise um M und m gegeben, man soll an beide einen Kreis ziehen, der M von aussen, m von innen berührt. Man ziehe einen beliebigen inneren Aehnlichkeitsstrahl IB, so geben die beiden Punkte B und b^1 einen Kreis, der M von aussen, m von innen berührt; dagegen geben die beiden Punkte B^1 und b einen Kreis, der M von innen und m von aussen berührt. Man ziehe nämlich die Radien mb^1 und MB, verlängere sie bis zum Durchschnittspunkt in y, so lässt sich beweisen, dass $yb^1 = yB$, dass ein aus y mit yb^1 oder yB beschriebener Kreis die beiden gegebenen Kreise in b^1 und B berührt. Es ist nämlich die Gleichschenkeligkeit der Dreiecke mbb^1 und MBB^1 bekannt. Weil IB

3

ein innerer Aehnlichkeitsstrahl ist, so ist ferner $mb \mathrel{\#} MB$, also sind die Winkel mbb^1 und MBB^1 gleich, also ist auch $yb^1B = yBb^1$ d. h. $yB = yb^1$.

Hätte ein Kreis gesucht werden sollen, der M von innen und m von aussen berührt, so hätte man die Punkte b und B^1 nehmen müssen, die Radien mb und MB^1 bis zum Durchschnittspunkte in Y verlängern. Alsdann wäre Y der Mittelpunkt des gesuchten Kreises geworden und $Yb = YB^1$ sein Radius. Die Gleichschenkeligkeit der beiden Dreiecke mbb^1 und MBB^1 ist bekannt, die des Dreiecks YbB^1 hätte erwiesen werden müssen aus $mb^1 \mathrel{\#} MB^1$.

§. 17. Ueber die Berührung von einem Kreise und einer geraden Linie durch einen Kreis.



1) Man kann jeden Kreis als eine gerade Linie ansehen: wenn man annimmt, dass der Radius des Kreises unendlich ist und der Mittelpunkt unendlich weit, entweder nach links oder nach rechts liegt.

2) Man kann daher von der Centrale eines Kreises und einer geraden Linie sprechen. Die Centrale steht in ihren Durchschnittspunkten immer senkrecht auf den Kreisen, zu welchen sie gehört; folglich wird die Centrale von dem Kreise um M und der geraden Linie P^1Q^1 gefunden, wenn man von dem Mittelpunkt M auf P^1Q^1 ein Loth MC fällt.

3) Man kann von dem äusseren und dem inneren Aehnlichkeitspunkte eines Kreises und einer geraden Linie reden. Man denke sich z. B. den Mittelpunkt der geraden Linie als eines Kreises hier rechts, so muss, da der Radius eines Kreises immer senkrecht auf dem Umfange steht, jeder Radius der geraden Linie senkrecht auf ihr selbst stehen; der aus M in dem Kreise um M parallele Radius damit, sei er gleich oder entgegengesetzt gerichtet, also zusammenfallen mit der Centrale, d. h. der äussere Aehnlichkeitspunkt muss in A, der innere in I fallen, beide müssen in die Durchschnittspunkte der Centrale mit dem Umfange des Kreises fallen, der eine links, der andere rechts von M. Man kann den Radius der geraden Linie als eines Kreises an jeder beliebigen Stelle senkrecht auf der geraden Linie annehmen, z. B. in P^1, so wird AP^1 der äussere Aehnlichkeitsstrahl, oder in Q^1, so wird IQ^1 der innere Aehnlichkeitsstrahl. Dabei ist der Mittelpunkt der geraden Linie als eines Kreises immer rechts angenommen worden.

4) Zieht man von A aus einen äusseren Aehnlichkeitsstrahl AP^1, welcher die gerade Linie P^1Q^1 in P^1 schneidet, so ist das Product $AP \,.\, AP^1$ constant, in welcher Richtung auch immer AP^1 gezogen sein mag. Man ziehe nämlich die Hülfslinie PI, so lässt sich nachweisen, dass die Dreiecke API und ACP^1 ähnlich sind, woraus die Proportion $AP : AI = AC : AP^1$ oder $AP \,.\, AP^1 = AI \,.\, AC$ folgt, welche Gleichung unabhängig ist von jeder besonderen Lage von AP. Je mehr sich AP von Am entfernt, desto kleiner wird der Factor AP, desto grösser wird der Factor AP^1, während das Product $AP \,.\, AP^1$ constant bleibt $= AI \,.\, AC$. Wenn AP parallel der geraden Linie wird, so wird AP gleich Null, AP^1 wird unendlich. Es ist dies ein Beispiel, wo $0 \,.\, \infty$ eine endliche Grösse als Product giebt.

Auf dieselbe Weise lässt sich darthun, dass, wenn man durch I einen inneren Aehnlichkeitsstrahl zieht, IQ, denselben bis zum Durchschnitt Q^1 mit der geraden Linie verlängert, das Product $IQ \,.\, IQ^1 = IC \,.\, IA$ ist. Man hat dazu nur nöthig, die Hülfslinie QA zu ziehen und die Aehnlichkeit der Dreiecke ICQ^1 und IQA zu beweisen. Die obige Gleichung bleibt richtig für jede Lage von IQ. Auch hier haben wir, wenn $IQ \nparallel$ der gegebenen geraden Linie gezogen wird, ein Beispiel davon, dass eine unendlich kleine Grösse mit einer unendlich werdenden multiplicirt zum Producte eine e n d l i c h e Grösse giebt, nämlich $IC \,.\, IA$.

Die Punkte P und P^1 heissen potenzhaltende Punkte des äusseren Aehnlichkeitspunktes A, die Punkte Q und Q^1 heissen potenzhaltende Punkte des inneren Aehnlichkeitspunktes I.

5) Es lässt sich nachweisen, dass wenn ein Kreis einen gegebenen Kreis und eine gerade Linie berührt, die Berührungspunkte potenzhaltende sind, und zwar vom äusseren Aehnlichkeitspunkte, wenn der Kreis von aussen berührt wird und vom inneren Aehnlichkeitspunkte, wenn der Kreis von innen berührt wird.

Der Kreis m berühre M von aussen in P, die gerade Linie in P^1, so soll man beweisen, dass P und P^1 potenzhaltende Punkte sind, d. h., dass die Linie PP^1 durch A hindurchgeht. Zum Beweise muss man m mit P und P^1 verbinden, eben so M mit P, so muss mP und MP in dieselbe gerade Linie fallen, da der Berührungspunkt P in der Centrale Mm liegen muss. Wird nun der Durchschnittspunkt von PP^1 mit AI durch X bezeichnet, so geht aus der Parallelität von mP^1 und AI hervor (beide stehen auf der gegebenen geraden Linie senkrecht), dass MPX ein gleichschenkeliges Dreieck ist, d. h. dass $MP = MX$ ist, oder das X in den Umfang des Kreises um M fällt, d. h. dass X und A zusammen fallen. Es geht also PP^1 durch A.

Eben so lässt sich nachweisen, dass Q und Q^1 potenzhaltende Punkte sind, wenn der Kreis um $\mathfrak{M}$ den gegebenen Kreis von innen in Q und die gegebene gerade Linie in Q^1 berührt. Man müsste dazu die Hülfslinien $\mathfrak{M}Q$ und $\mathfrak{M}Q^1$ ziehen, desgleichen MQ. Es liegen alsdann $\mathfrak{M}$, M und Q in derselben geraden Linie, welche die beiden parallelen Linien $\mathfrak{M}Q^1$ und MI, die beide senkrecht auf der gegebenen geraden Linie stehen, in M und $\mathfrak{M}$ schneidet. Bezeichnet man nun den Durchschnittspunkt QQ^1 und MI mit Y, so lässt sich aus der Gleichschenkeligkeit des Dreiecks $\mathfrak{M}QQ^1$ und der Parallelität von $\mathfrak{M}Q^1$ und MY beweisen, dass $MQ = MY$, oder das Y mit I zusammenfällt. Es schneidet also QQ^1 die Centrale in dem inneren Aehnlichkeitspunkte I.

6) Aus dem Obigen lässt sich ein Verfahren ableiten zur Lösung der Aufgabe, einen Kreis zu zeichnen, welcher einen gegebenen Kreis und eine gegebene gerade Linie z u g l e i c h berührt.

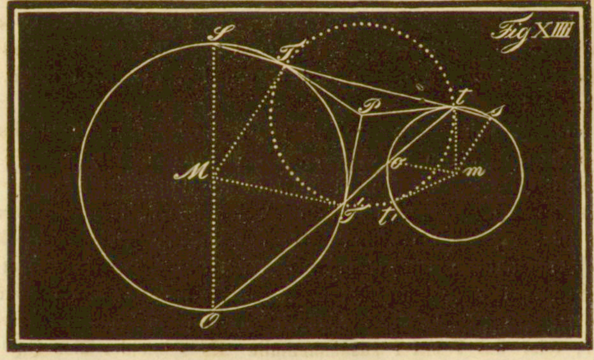
Es ist der Kreis um M und die gerade Linie gegeben, beide sollen berührt werden, der Kreis um M von aussen. Man ziehe einen beliebigen äusseren Aehnlichkeitsstrahl AP, welcher den Kreis in P, die gerade Linie in P^1 schneidet, so soll der gesuchte Kreis durch PP^1 hindurch gehen. Da er die gerade Linie berühren und mit ihr den Punkt P^1 gemein haben soll, so muss sein Mittelpunkt in einem Lothe liegen, das man in P^1 auf die gegebene gerade Linie errichtet hat. Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises liegt ferner in einem Lothe, das man in der Mitte von PP^1 darauf errichtet hat. Der Mittelpunkt m des gesuchten Kreises ist also leicht zu finden. Um zu beweisen, dass der gefundene Kreis um m die verlangten Bedingungen erfüllt, hat man nur nöthig zu beweisen, dass die Linie mP durch den Punkt M hindurch geht, was aus der Gleichschenkeligkeit des Dreiecks mPP^1 und der Parallelität von AI und mP^1 folgt. — Da AP beliebig gezogen war, so sind unendlich viel Auflösungen möglich.

Soll der Kreis M von innen berührt werden, so muss man einen beliebigen inneren Aehnlichkeitsstrahl IQ ziehen, denselben verlängern, bis er die Kreisperipherie in Q und die gegebene gerade Linie in Q^1 trifft. Ein Kreis gelegt durch Q und Q^1, dessen Mittelpunkt in einem Lothe liegt, das in Q^1 auf die gegebene gerade Linie errichtet ist, erfüllt dann die verlangten Bedingungen. Der Kreis um 𝔐 berührt den um M von innen in Q, die gerade Linie in Q^1. Zum Beweise hätte man nur nöthig, darzuthun, dass die gerade Linie 𝔐Q die Centrale AI in M schneidet, was sich aus der Gleichschenkeligkeit des Dreiecks $𝔐QQ^1$ und der Parallelität von AI und $𝔐Q^1$ ergiebt.

Aufgaben: 1) Es ist ein Kreis und eine gerade Linie gegeben und im Umfange des Kreises ist ein Punkt gegeben; man soll einen Kreis suchen, der durch diesen gegebenen Punkt hindurch geht, den gegebenen Kreis von aussen oder innen berührt und auch die gegebene gerade Linie berührt.

2) Dieselbe Aufgabe, nur dass der gegebene Pnnkt nicht im Umfange des Kreises, sondern in der gegebenen geraden Linie liegt.

§. 18. Von einem Orthogonalkreise für zwei gegebene Kreise.



1) Schneidet ein Kreis um P zwei andere Kreise um M und m orthogonal, so erhält man vier Durchschnittspunkte, von denen ein Punkt des einen Kreises immer zugehöriger potenzhaltender Punkt für einen Punkt des anderen Kreises ist.

entweder für einen äusseren oder für einen inneren Aehnlichkeitsstrahl, was sich leicht aus der Lage beurtheilen lässt.

Man erhält auf diese Weise vier Paare potenzhaltender Punkte, zwei Paare für den äusseren, zwei Paare für den inneren Aehnlichkeitspunkt. In der obigen Figur heissen die beiden Paare für den äusseren Aehnlichkeitspunkt T und t, desgleichen T^1 und t^1; für den inneren Aehnlichkeitspunkt sind es T^1 und t, desgleichen T und t^1.

Es soll bewiesen werden, dass T und t potenzhaltende Punkte vom äusseren Aehnlichkeitspunkte sind, d. h. dass die Linie Tt durch die Endpunkte von zwei parallelen und gleich gerichteten Radien der beiden Kreise M und m hindurch geht. Tt schneidet den Kreis um M noch in S, den Kreis um m in s. Man verbinde M mit T und S, desgleichen m mit t und s, ferner P mit T und t. Es kann, alsdann nachgewiesen werden aus der Gleichschenkeligkeit der Dreiecke MTS, mts, PTt, und daraus, dass $PT \perp MT$, desgleichen $Pt \perp mt$, dass die vier Winkel MTS, MST, mts, mst unter einander gleich sind, d. h. dass $MS \# mt$ $ms \# MT$, oder dass Tt durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise M und m hindurch geht.

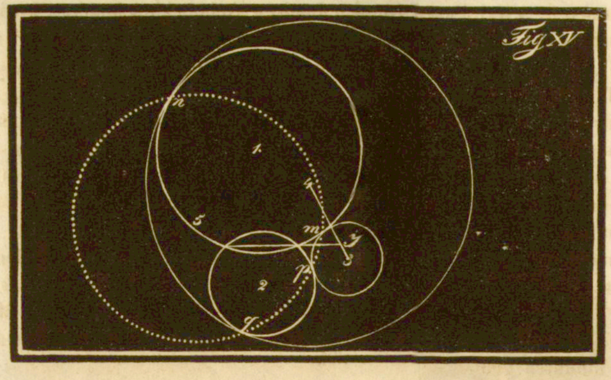
Eben so kann man beweisen, dass T^1 und t potenzhaltende Punkte des inneren Aehnlichkeitspunktes der Kreise M und m sind, d. h. dass T^1t durch I hindurch geht, was der Fall ist, wenn es durch die Endpunkte zweier parallelen, aber entgegengesetzt gerichteten Radien hindurch geht. T^1t schneidet den Umfang von M noch in O, den von m noch in o. Man verbinde M mit O und T^1, desgleichen m mit t und o, desgleichen P mit t und T^1. Es ist dann klar, dass die Dreiecke MT^1O und mto gleichschenkelig sind, eben so Dreieck PT^1t. Es ist nun ferner $mto + T^1tP = R$, desgleichen $MT^1O + tT^1P = R$; da aber $T^1tP = tT^1P$, so ist $mto = MT^1O$, d. h. die Winkel an den Grundlinien in den beiden gleichschenkeligen Dreiecken mto und MT^1O sind alle vier unter einander gleich, oder $mo \# MT^1$, $mt \# MO$, in beiden Fällen entgegengesetzt gerichtet. Folglich geht T^1t durch den inneren Aehnlichkeitspunkt der Kreise M und m, und T^1 und t sind potenzhaltende Punkte für den inneren Aehnlichkeitsstrahl.

2) Daraus ergiebt sich ein Verfahren, für zwei gegebene Kreise M und m einen Orthogonalkreis zu construiren.

Man ziehe einen äusseren oder einen inneren Aehnlichkeitsstrahl, z. B. einen äusseren AT, nehme ein Paar der dadurch entstehenden potenzhaltenden Punkte, z. B. t und T, ziehe die Radien mt und MT, errichte darauf in t und T Lothe $tP \perp tm$, $TP \perp MT$, der Durchschnittspunkt dieser Lothe P ist der Mittelpunkt des gesuchten Orthogonalkreises. Man hat zum Beweise nur nöthig, darzuthun, dass PTt ein gleichschenkeliges Dreieck ist, d. h. dass $PT = Pt$ ist, was sich aus $ms \# MT$, $mt \# MS$, der Gleichschenkeligkeit der Dreiecke MST und mts und $mt \perp Pt$, $MT \perp PT$ ergiebt. Es sind unendlich viel Auflösungen möglich.

Aufgabe: Es sind zwei Kreise gegeben, in dem Umfange des einen ein Punkt, man soll durch diesen Punkt einen Orthogonalkreis für beide beschreiben. Der äussere Aehnlichkeitspunkt giebt eine Auflösung, der innere eine zweite.

§. 19. Berührung von zwei Kreisen durch zwei andere.



Berührt der Kreis 1 die beiden Kreise 3 und 4, ebenso der Kreis 2 die beiden Kreise 3 und 4, so geht die Chordale von 1 und 2 durch einen Aehnlichkeitspunkt von 3 und 4; und zwar durch den äusseren, wenn beide Berührungen gleichartig sind; dagegen durch den inneren, wenn beide Berührungen ungleichartig sind.

Es sind hier folgende Fälle zu unterscheiden:

A. 1 berührt 3 und 4 äusserlich	(2 berührt 3 und 4 äusserlich	(1)	Die Chordale von 1 und 2 geht durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt von 3 und 4.
	(2 " " " " innerlich	(2)	
B. 1 " " " " innerlich	(2 " " " " äusserlich	(3)	
	(2 " " " " innerlich	(4)	
C. 1 " 3 äusserlich,	(2 berührt 3 äusserlich, 4 innerlich	(5)	Die Chordale von 1 und 2 geht durch den inneren Aehnlichkeitspunkt von 3 und 4.
4 innerlich,	(2 " 3 innerlich, 4 äusserlich	(6)	
D. 1 " 3 "	(2 " 3 äusserlich, 4 innerlich	(7)	
4 äusserlich,	(2 " 3 innerlich, 4 äusserlich	(8)	

Der Beweis ist für alle 8 Fälle übereinstimmend. Er soll für den 5ten Fall beispielsweise geführt werden. Kreis 1 berührt Kreis 3 von aussen in m, Kreis 4 von innen in n, so sind nach §. 16, Seite 15 m und n potenzhaltende Punkte von dem inneren Aehnlichkeitspunkte I von 3 und 4. Kreis 2 berührt Kreis 3 von aussen in p, Kreis 4 von innen in q, so sind eben so p und q potenzhaltende Punkte von dem inneren Aehnlichkeitspunkte I von 3 und 4, d. h. Im . In = Ip . Iq, oder die vier Punkte m, n, p und q liegen im Umfange eines Kreises, welchen wir durch 5 bezeichnen wollen. mn ist die Chordale von 5 und 1, ein Punkt dieser Chordale ist I; pq ist die Chordale von 5 und 2, ein Punkt dieser Chordale ist I. Folglich ist nach §. 11, Seite 11, I der Chordalpunkt der Kreise 5, 1 und 2, d. h. I liegt in der Chordale der Kreise 1 und 2.

Die obige Figur würde gleichfalls zur Erläuterung und zu dem Beweise von 2 dienen können. Man hätte dann nur nöthig, die Zahlen 1 und 3 zu vertauschen. eben so 2 und 4. Es liesse sich dann beweisen, dass die Chordale der obigen mit 3 und 4 bezeichneten Kreise durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt von 1 und 2 geht.

Da der Kreis 3 hier innerhalb des Kreises 4 liegt, so liegen die potenzhaltenden Punkte des inneren Aehnlichkeitspunktes auf derselben Seite der

Centrale, hier links; die potenzhaltenden Punkte des äusseren Aehnlichkeitspunktes würden alsdann auf verschiedenen Seiten der Centrale liegen.

In Figur 11 haben wir ein Beispiel des dritten Falles. Die Chordale von X und x geht durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt von M und m. Eben so haben wir in Figur 11 ein Beispiel vom achten Falle. Die Chordale von M und m geht durch den inneren Aehnlichkeitspunkt von X und x. In Figur 12 haben wir ein Beispiel des siebenten Falles. Die Chordale von Y und y geht durch den inneren Aehnlichkeitspunkt von M und m. Eben so geht die Chordale von M und m durch den inneren Aehnlichkeitspunkt von Y und x.

§. 20. Von zwei Orthogonalkreisen für zwei andere Kreise.

Schneidet der Kreis (1) die Kreise (3) und (4) orthogonal, schneidet eben so der Kreis (2) die Kreise (3) und (4) orthogonal, so geht die Chordale von (1) und (2) durch den äusseren und durch den inneren Aehnlichkeitspunkt von (3) und (4). (Vergl. §. 14, Seite 13.)

Beweis: Nach §. 14, Seite 13 liegen die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene Kreise (1) und (2) orthogonal schneiden, wie hier die Kreise (3) und (4), in der Chordale von (1) und (2); der Mittelpunkt von (3) liegt also in der Chordale von (1) und (2), ebenso der Mittelpunkt von (4), d. h. die Centrale von (3) und (4), in welcher auch die beiden Aehnlichkeitspunkte von (3) und (4) liegen, ist zugleich Chordale von (1) und (2).

Ebenso hätte man bei den obigen Voraussetzungen behaupten können, dass die Chordale von (3) und (4) durch den äusseren und durch den inneren Aehnlichkeitspunkt von (1) und (2) geht, d. h. die Centrale der Kreise (1) und (2) ist.

§. 21. Von einem Berührungs- und einem Orthogonalkreise für zwei andere.

Berührt der Kreis (3) die Kreise (1) und (2), schneidet ferner der Kreis (4) die Kreise (1) und (2) orthogonal, so geht die Chordale von (3) und (4) durch einen Aehnlichkeitspunkt von (1) und (2) und zwar:

1) durch den äusseren bei einer gleichartigen Berührung,

2) durch den inneren bei einer ungleichartigen Berührung.

Der Kreis (3) berührt die Kreise (1) und (2) in den Punkten m und p; der Kreis (4) schneidet (1) und (2) orthogonal in den Punkten n, q, r und s. m und p sind potenzhaltende Punkte des äusseren Aehnlichkeitspunktes A der Kreise (1) und (2), weil die beiden Kreise (1) und (2) gleichartig, hier von aussen, berührt werden. Die Punkte n und q sind potenzhaltende Punkte des äusseren Aehnlichkeitspunktes A der Kreise (1) und (2), desgleichen die Punkte r und s, während n und r potenzhaltende Punkte des inneren Aehnlichkeitspunktes I der Kreise (1) und (2) sind, desgleichen q und s. Es ist also $Ap \cdot Am = Aq \cdot An$, oder die vier Punkte m, p, n und q liegen im Umfange desselben Kreises, hier des Kreises 5. Est ist nun mp die Chordale der Kreise 5 und 3, nq die Chordale der Kreise 5 und 4, also der Durchschnittspunkt von mp und nq, d. h. A ist der Chordalpunkt der Kreise 5, 3 und 4. Die Chordale der Kreise (3) und (4) geht also durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt der Kreise (1) und (2).

Zusatz zu den §§. 19 — 21.

Zwei Kreise können von einem dritten und von einem vierten zugleich berührt (§. 19), zugleich orthogonal geschnitten (§. 20) werden, oder der eine kann berührt, der andere orthogonal geschnitten werden (§. 21): alsdann geht die Chordale der thätigen Kreise stets durch einen Aehlichkeitspunkt der leidenden Kreise; durch den äusseren bei gleichartiger Berührung, durch den inneren bei ungleichartiger Berührung. Es wird hierbei vorausgesetzt, dass die beiden leidenden Kreise zugleich gleichartig oder ungleichartig berührt werden.

Erster Abschnitt.

Das Berührungsproblem für den Kreis.

Uebersichtstabelle der Aufgaben.

Punkte.	Linien.	Kreise.	Aufgabe.
3	—	—	1
2	1	—	2
2	—	1	3
1	2	—	4
1	1	1	5
1	—	2	6
—	3	—	7
—	2	1	8
—	1	2	9
—	—	3	10

Vorbemerkung. Bei der Auflösung einer jeden dieser Aufgaben soll der gesuchte Kreis drei Bedingungen erfüllen. Wir werden die Auflösung gewöhnlich dadurch bewirken, dass wir einen Kreis suchen, der zwei der verlangten Bedingungen erfüllt. Wir werden finden, dass es unendlich viel solcher Kreise giebt; wir werden den geometrischen Ort ihrer Mittelpunkte bestimmen. Nachdem dies geschehen ist, werden wir von den unendlich vielen Kreisen diejenigen heraussuchen, deren Anzahl eine bestimmte ist, welche auch noch die dritte Bedingung erfüllen. Wir werden uns der Methode der Oerter bedienen. Ausserdem werden wir aber noch eine andere Methode, die der Zurückführung anwenden. Wir werden eine spätere Aufgabe auf eine frühere zurückzuführen suchen, deren Lösung uns bekannt ist.

Aufgabe 1.

Einen Kreis zu zeichnen, der durch drei gegebene Punkte hindurch geht.

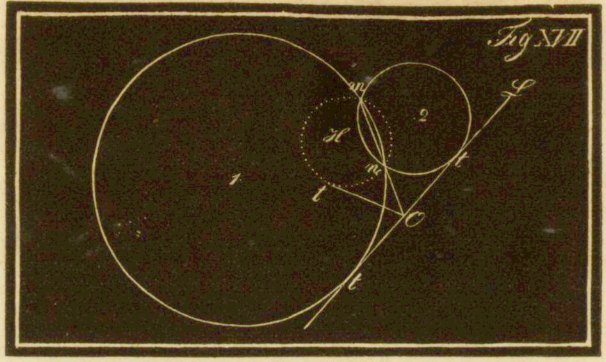
Es sind die drei Punkte m, n und o gegeben; es soll durch dieselben ein Kreis gelegt werden. Ich suche den geometrischen Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch zwei dieser Punkte z. B. m und n hindurch gehen. Es ist dies das Loth l, das man in der Mitte von mn darauf errichten kann. Auf gleiche

Weise erhalte ich den geometrischen Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch n und o hindurch gehen, indem ich die Strecke no halbire und im Mittelpunkte ein Loth l^1 darauf errichte. Ich finde auf diese Weise, dass der Mittelpunkt des gesuchten Kreises zugleich in den beiden geraden Linien l und l^1 liegt, also ihr Durchschnittspunkt M ist. Da zwei gerade Linien l und l^1 nur Einen Durchschnittspunkt haben, so genügt nur Ein Kreis den drei Bedingungen der Aufgabe.

Wie wird die Aufgabe gelöst, wenn die drei gegebenen Punkte in derselben geraden Linie liegen?

Aufgabe 2.

Es sind zwei Punkte und eine gerade Linie gegeben, man soll einen Kreis suchen, der durch die beiden Punkte geht und die gerade Linie berührt.



Es sind die Punkte m und n gegeben und die gerade Linie 𝔏, man soll einen Kreis beschreiben, der durch m und n geht und die Linie 𝔏 berührt.

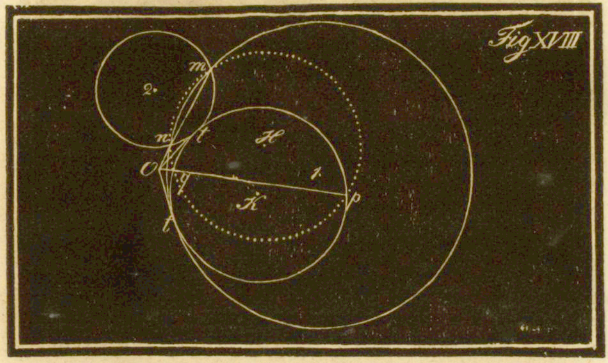
Man zeichne sich einen Kreis, welcher durch die beiden gegebenen Punkte m und n geht, also zwei Bedingungen erfüllt. Wir wollen diesen Hülfskreis durch H bezeichnen, den gesuchten Kreis durch 𝔎. Die beiden Kreise 𝔎 und H haben die Punkte m und n gemein, ihre Chordale ist also mn, d. h. jeder Punkt dieser Linie hat die Eigenschaft, dass die von ihm an die Kreise 𝔎 und H gezogenen Tangenten gleich sind. Die Linie 𝔏 soll aber auch eine Tangente an den Kreis 𝔎 werden. Man nehme daher den Durchschnittspunkt von mn und 𝔏 und bezeichne ihn mit O, so hat O die Eigenschaft, dass die von ihm an die Kreise 𝔎 und H gezogenen Tangenten gleich sind. Ich ziehe von O aus an den punktirten Kreis H die Tangente Ot, um ihre Länge zu erfahren. Ich kann nun die Länge Ot von O aus nach oben und nach unten abtragen und erhalte auf diese Weise zwei Punkte in 𝔏. Man lege einen Kreis 𝔎 durch die Punkte m, n und t. Dieser Kreis hat die Eigenschaft, dass er mit der Linie 𝔏 den Punkt t gemein hat. Ot hat aber die Länge, welche jede Tangente haben muss, die von O an einen Kreis gezogen worden ist, welcher durch die Punkte m und n geht; folglich ist Ot wirklich eine Tangente an den Kreis, welcher durch die Punkte m, n und t geht. Der Kreis 𝔎 erfüllt also auch die Bedingung, dass er die gerade Linie 𝔏 berührt.

Die Auflösung ist zurückgeführt worden auf die Aufgabe 1. Es giebt zwei Auflösungen. Der Kreis 2 liegt oberhalb mn, der Kreis 1 unterhalb mn.

Wie wird die Aufgabe gelöst, wenn mn $\neq \mathfrak{L}$ ist? Wie, wenn einer der beiden Punkte in der Linie $\mathfrak{L}$ liegt? Wie, wenn der Punkt m in $\mathfrak{L}$ liegt und mn $\perp \mathfrak{L}$ ist? Wie, wenn beide Punkte m und n in $\mathfrak{L}$ liegen?

Aufgabe 3.

Es sind zwei Punkte und ein Kreis gegeben, man soll einen Kreis beschreiben, der durch die beiden gegebenen Punkte geht und den gegebenen Kreis berührt.



Es sind die beiden Punkte m und n, so wie der Kreis K gegeben, man soll einen Kreis beschreiben, der durch die Punkte m und n geht und den Kreis K berührt.

Man beschreibe einen Kreis H, welcher durch die Punkte m und n geht, also zwei Bedingungen erfüllt, ausserdem den Kreis K in zwei Punkten p und q schneidet. Die Chordale des gesuchten Kreises und des Kreises H ist also mn, die des gesuchten Kreises und des gegebenen Kreises ist pq. Der Durchschnittspunkt O von pq und mn ist also der Chordalpunkt des gesuchten Kreises, des gegebenen Kreises und des Hülfskreises.

Man ziehe nun von O die beiden Tangenten Ot an den gegebenen Kreis, so erhält man zwei Punkte t. Ein Kreis durch die drei Punkte m, n und t gelegt, wird die Eigenschaft haben, dass die an ihn von O aus gezogene Tangente gleich ist der von O aus an den gegebenen Kreis gezogenen Tangente, welche letztere gleich Ot ist. Ist aber ein Punkt O ausserhalb eines Kreises (des gesuchten) gegeben und t ein Punkt im Umfange desselben, ferner Ot so lang als die von O an diesen Kreis gezogene Tangente, so ist diese Linie Ot die Tangente selbst. Der gegebene und der gesuchte Kreis haben also in dem Punkt t eine gemeinschaftliche Tangente Ot, berühren sich also in dem Punkte t. Durch jeden der beiden Punkte t kann ich einen Kreis legen, welcher ausserdem durch die Punkte m und n geht. Ich erhalte also zwei Kreise 1 und 2, welche den drei gegebenen Bedingungen genügen, von denen 1 den gegebenen Kreis von innen, 2 den gegebenen Kreis von aussen berührt.

Die Aufgabe 3 ist auf die Aufgabe 1 zurückgeführt worden.

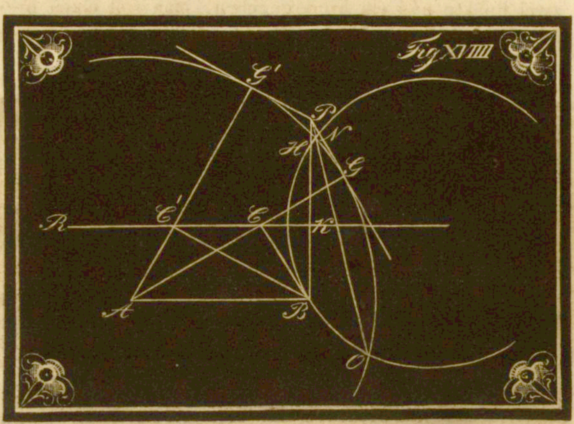
4*

1) Wenn die Punkte m und n von dem Mittelpunkte K des gegebenen Kreises gleich weit abstehen, so wird $mn \# pq$. Wie werden alsdann die beiden gesuchten Kreise beschrieben?

2) Auflösung der Aufgabe, wenn die Punkte m und n innerhalb des gegebenen Kreises liegen.

3) Auflösung der Aufgabe, wenn der eine Punkt m oder n im Umfange des gegebenen Kreises liegt.

4) Für welche Lage der Punkte m und n ist die Auflösung der Aufgabe unmöglich?



Das Berührungsproblem liefert elegante Auflösungen für viele geometrische Aufgaben, deren Behandlung sonst ziemlich weitläuftig ist. Z. B. kann man mit Hülfe des Berührungsproblems die Aufgabe lösen, ein Dreieck zu construiren aus der Grundlinie, der Summe der beiden anliegenden Seiten und der Höhe.

Analysis. Angenommen, ABC sei das gefundene Dreieck, man habe in B auf die gegebene Grundlinie AB ein Loth BH errichtet nach der Seite, wo C liegt, und dasselbe gleich der gegebenen doppelten Höhe des Dreiecks gemacht: so ist klar, dass $CB = CH$ ist, d. h. dass ein aus C mit der Seite CB beschriebener Kreis durch H geht. Beschreibe ich ferner aus A einen Kreis mit der gegebenen Summe s der anliegenden Seiten, d. h. mit $CA + CB$, so wird AC über C hinaus verlängert den Umfang in G treffen, so dass $CA + CG = CA + CB$ wird. Ein aus C mit dem Halbmesser CB beschriebener Kreis wird also durch die Punkte B und H gehen, wo $BH \perp BA$ und $BH = 2h$ ist, und den Kreis um A, beschrieben mit dem Halbmesser $CA + CB = s$, in G berühren. Es liegen nämlich die Mittelpunkte der beiden Kreise um A und C mit dem Punkte G, den beide gemein haben, in gerader Linie. Der gesuchte Kreis um C muss also die Eigenschaft haben, durch die Punkte B und H zu gehen und den Kreis um A mit dem Halbmesser s zu berühren.

Construction. Man beschreibe aus A mit dem Halbmesser s einen Kreis, errichte in B ein Loth $BH \perp AB$, mache $BH = 2h$ (h ist die gegebene Höhe), so findet man die Punkte B und H. Es handelt sich jetzt darum, einen Kreis zu beschreiben, der durch die gegebenen Punkte B und H geht und den gegebenen Kreis um A mit dem Halbmesser s berührt. Es sind zwei Auflösungen möglich, indem zwei Berührungspunkte G und G^1 gefunden werden. Man verbinde nun

z. B. G mit A, so ist AG ein Ort für den Mittelpunkt des gesuchten Kreises, desgleichen die gerade Linie KR, welche ich in K senkrecht auf BH, wo K die Mitte von BH ist, nämlich $KB = KH$, errichtet habe. Der Durchschnittspunkt der Linien AG oder AG^1 und KR giebt den Punkt C oder C^1 als dritten Punkt des gesuchten Dreiecks.

Es ist leicht zu beweisen, dass das Dreieck ABC oder ABC^1 die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Vergleichen wir die beiden Figuren (19) und (18), so finden wir, dass was in (18) die beiden Punkte m und n sind, in (19) die Punkte B und H sind. Der Kreis K in (18) wird in (19) vorgestellt durch den Kreis, beschrieben aus A mit dem Halbmesser $s = CA + CB$. Während in (18) die beiden gegebenen Punkte ausserhalb des gegebenen Kreises liegen, befinden sie sich in (19) innerhalb des gegebenen Kreises. Was in (18) die Linie mn ist, wird in (19) dargestellt durch die Linie BH. In (19) liegt der Hülfskreis, welcher in (18) mit H bezeichnet und punktirt worden ist, nach rechts von HB, er schneidet den gegebenen Kreis in den Punkten N und O, in (18) dagegen in den Punkten p und q. Was in (18) der Punkt O ist, ist in (19) der Punkt P, die von ihm aus gezogenen Tangenten heissen in (19) PG und PG^1, in (18) Ot. Die Punkte G und G^1 in (19) sind also gleichbedeutend mit den beiden Punkten t. Der Kreis (1) in (18) wird in (19) dargestellt durch den Kreis, dessen Mittelpunkt C und Radius $CG = CB$ ist. Der Kreis (2) in (18) wird in (19) dargestellt durch den Kreis, dessen Mittelpunkt C^1 und Radius C^1G^1 ist. Die beiden gefundenen Kreise berühren hier den gegebenen von innen.

Vergl. über diese Aufgabe das Programm der Realschule zu Colberg vom Jahre 1852.

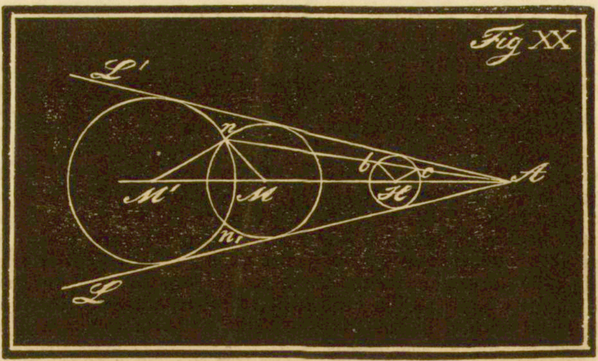
Auf ähnliche Weise kann man die Aufgabe lösen: Ein Dreieck zu construiren aus folgenden drei Stücken: 1) der Grundlinie, 2) der Differenz der beiden anliegenden Seiten, 3) der Höhe.

Man beschreibt nämlich aus dem einen Endpunkte A der Grundlinie einen Kreis mit der gegebenen Differenz, errichtet in dem anderen Endpunkte B ein Loth, welches man gleich der doppelten Höhe macht, $BH = 2h$. Man sucht darauf einen Kreis, welcher durch die beiden Punkte B und H geht und den gegebenen Kreis berührt. Man findet nach der Aufgabe 3 zwei Kreise, welche die verlangten Bedingungen erfüllen. Der eine Kreis (1) berührt den gegebenen Kreis von aussen in G, der andere von innen in G^1. Die Spitze des gesuchten Dreiecks liegt in dem einen Falle im Durchschnitt von AG und KR, im andern Falle von AG^1 und KR, wo KR so gezogen ist, wie es die Auflösung der vorigen Aufgabe angiebt.

Auf Aufgabe 3 kann man auch die Aufgabe zurückführen: Ein Dreieck zu construiren, von welchem die Grundlinie, ein anliegender Winkel und die Summe der beiden anderen Seiten gegeben sind: der eine gegebene Punkt liegt alsdann im Umfange des gegebenen Kreises, dessen Radius die gegebene Summe ist.

Aufgabe 4.

Es sind zwei gerade Linien und ein Punkt gegeben, man soll einen Kreis beschreiben, welcher die beiden gegebenen geraden Linien berührt und durch den gegebenen Punkt geht.



Es sind die beiden geraden Linien $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}^1$ gegeben und der Punkt n, man soll einen Kreis beschreiben, welcher die beiden gegebenen geraden Linien $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}^1$ berührt und durch den gegebenen Punkt n geht.

Man beschreibe einen Kreis, welcher zwei Bedingungen erfüllt, z. B. die beiden gegebenen geraden Linien $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}^1$ berührt. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche diese beiden Bedingungen erfüllen, kann leicht gefunden werden. Angenommen nämlich, die beiden Linien $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}^1$ schnitten sich in A, so müsste man den Winkel $\mathfrak{L}A\mathfrak{L}^1$ halbiren durch die Linie AH, so dass die Winkel $HA\mathfrak{L}$ und $HA\mathfrak{L}^1$ gleich werden. Die Linie AH ist der gesuchte geometrische Ort. Jeder Punkt dieser Linie AH kann als Mittelpunkt eines Kreises angenommen werden, welcher die beiden gegebenen Linien $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}^1$ berührt, z. B. der Punkt H. Man beschreibe aus H den Hülfskreis, welcher die beiden gegebenen geraden Linien berührt. Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises liegt ebenfalls in der Linie AH. Der gesuchte Kreis und der Hülfskreis sollen jede der Linien $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}^1$ berühren, d. h. $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}^1$ sollen Tangenten an beide Kreise werden. Der gesuchte Kreis und der Hülfskreis haben zur Centrale AH. Die Tangente $\mathfrak{L}$ an beide Kreise schneidet die Centrale in A, der Punkt A ist daher der äussere Aehnlichkeitspunkt für beide.

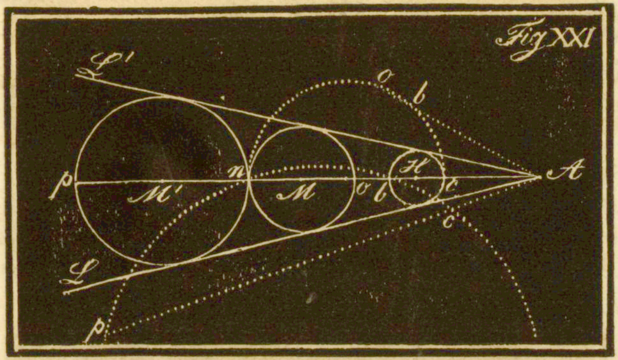
Der gegebene Punkt n soll im Umfange des gesuchten Kreises liegen. Man ziehe die Linie An, so wird dieselbe den Hülfskreis in zwei Punkten c und b schneiden. An ist ein äusserer Aehnlichkeitsstrahl für den Hülfskreis und den gesuchten Kreis. Man kann nun n ansehen als potenzhaltenden Punkt von c oder b. Soll n der potenzhaltende Punkt von c sein, so muss man aus n eine Parallele nM mit bH ziehen. nM schneidet AH in M. In dem Kreise, beschrieben aus M mit dem Radius Mn, ist nun $Hb \;\#\; Mn$. bn geht also durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt der Kreise H und M, welches also A sein muss. Da nun der äussere Aehnlichkeitsstrahl $A\mathfrak{L}$ eine Tangente an den Kreis H ist, so ist er es auch nach §. 4, Seite 3 an den Kreis M. Aus demselben Grunde tangirt die

Linie $\mathfrak{L}^1$ den Kreis M. Der Kreis M wird also von den Linien $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}^1$ tangirt und geht durch den Punkt n.

Zieht man nM^1 ⫲ cH, so erhält man in AH den Punkt M^1. Ein Kreis, beschrieben aus M^1 mit dem Radius nM^1, erfüllt ebenfalls die drei Bedingungen der Aufgabe.

Es giebt zwei Kreise, welche die verlangten Bedingungen erfüllen.

Andere Auflösung. Man hätte die obige Aufgabe auch noch durch Zurückführung auf die Aufgabe 2 lösen können. Man hätte nur nöthig gehabt, von n ein Loth auf die Mittellinie AH zu fällen und jenseits derselben bis n^1 zu verlängern, so dass nn^1 durch die Mittellinie halbirt wäre. Jeder Kreis, der durch n geht, und dessen Mittelpunkt in der Mittellinie liegt, muss nun auch durch n^1 gehen. Man beschreibe daher nach Aufgabe 2 einen Kreis, der durch die beiden Punkte n und n^1 geht und eine der beiden gegebenen Linien $\mathfrak{L}$ oder $\mathfrak{L}^1$ berührt.



Liegt der gegebene Punkt n in der Linie AH, so muss die Auflösung der Aufgabe anders bewirkt werden. Der Hülfskreis H wird jedoch wie vorhin construirt. Wir wollen die Punkte, in welchen er die Linie AH schneidet, durch c und b bezeichnen. Es ist klar, dass der gesuchte Kreis die Linie AH in zwei Punkten schneiden muss, von denen der eine n ist. Den anderen wollen wir durch x bezeichnen. Gelingt es uns, x zu finden, so erhalten wir damit auch den Mittelpunkt M des gesuchten Kreises, M muss nämlich in der Mitte von xn liegen.

Da $\mathfrak{L}$ zugleich den Kreis H und den Kreis M tangiren soll, so muss $\mathfrak{L}$ durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt beider gehen, indem die Berührungspunkte mit beiden auf dieselbe Seite der Centrale fallen sollen. Dasselbe gilt von der Linie $\mathfrak{L}^1$. Die Linie AH wird daher ein äusserer Aehnlichkeitsstrahl für die beiden Kreise H und M. Man erhält dadurch auf dieser Linie zwei Paare potenzhaltender Punkte. Je nachdem man n als zugehörigen potenzhaltenden Punkt von b oder von c annimmt, erhält der Punkt x eine andere Lage. Es werden auf diese Weise zwei Kreise M und M^1 gefunden, welche beide die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Wir wollen zuerst n als zugehörigen potenzhaltenden Punkt zu c betrachten, alsdann wird x zugehöriger potenzhaltender Punkt von b, und zwar wird $Ac \,.\, An = Ab \,.\, Ax$. Es handelt sich darum, Ax zu finden. Man lege durch die Punkte c und n einen Kreis dergestalt, dass eine Strecke von der Länge Ab von A aus abgeschnitten werden kann, welche Secante an den beschriebenen Kreis wird.

Ab wird diesen Kreis noch in einem zweiten Punkte o schneiden, daher wird Ac . An = Ab . Ao sein. Es ist daher Ao = Ax. Um x zu finden, muss man Ao von A aus auf AH abschneiden. Der Mittelpunkt M des gesuchten Kreises fällt daher in die Mitte von on.

Man kann auch n als *zugehörigen* potenzhaltenden Punkt von b ansehen. Alsdann muss Ab . An = Ac . Ax werden. Um Ax zu finden, muss man durch b und n einen Kreis legen dergestalt, dass ein von A mit dem Halbmesser Ac beschriebener Kreis den Umfang des durch b und n gelegten Kreises schneidet. Man zieht nun aus A durch c eine Secante für den durch b und n beschriebenen Kreis, so erhält man den *zweiten* Durchschnittspunkt p, so dass Ac . Ap = Ab . An. Man schneide Ap von A aus auf der Linie AH ab. Der Mittelpunkt M¹ des *zweiten* Kreises, welcher die gegebenen Bedingungen erfüllt, liegt in der Mitte von np.

1) Wie wird die Aufgabe gelöset, wenn die gegebenen Linien *parallel* laufen und a) der gegebene Punkt *ausserhalb*, ferner b) der gegebene Punkt *in* der Mittellinie liegt, welche von den beiden gegebenen Linien gleich weit absteht?

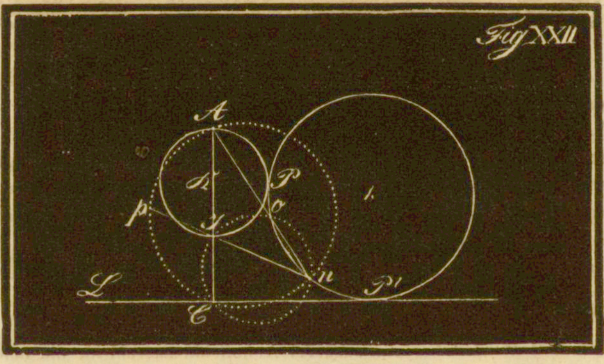
2) Wie wird die Aufgabe gelöset, wenn der gegebene Punkt in einer der beiden Linien liegt?

3) Was ist über die Aufgabe zu sagen, wenn der gegebene Punkt in den Durchschnittspunkt der beiden Linien fällt?

4) In welchen Fällen ist die Aufgabe *unmöglich*?

Aufgabe 5.

Es ist ein Punkt, eine Linie und ein Kreis gegeben: man soll einen Kreis suchen, der durch den Punkt geht, die gerade Linie und den Kreis zugleich berührt.



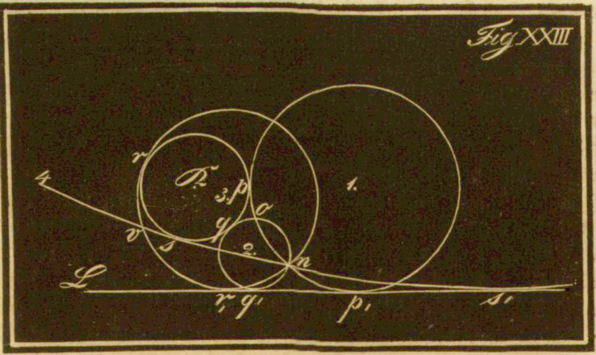
Es ist der Punkt n gegeben, die gerade 𝔏 und der Kreis 𝔎: man soll einen Kreis suchen, der durch den Punkt n geht, die gerade Linie 𝔏 und den Kreis 𝔎 zugleich berührt.

Diese Aufgabe soll durch *Zurückführung* auf eine frühere gelöset werden.

Der gesuchte Kreis soll eine gerade Linie und einen Kreis berühren. Diese Aufgabe kann nach §. 17, Seite 19, No. 6 gelöset werden. Es handelt sich nun darum, von allen den *unzählig* viel möglichen Kreisen, durch welche diese *beiden* Bedingungen erfüllt werden, *diejenigen* Kreise herauszufinden, welche *ausser*-

dem durch den Punkt n gehen. Man muss sich diese Kreise in zwei Gruppen theilen, erstens diejenigen, welche den Kreis $\mathfrak{K}$ von aussen berühren, zweitens diejenigen, welche den Kreis $\mathfrak{K}$ von innen berühren. Berührt ein Kreis den Kreis $\mathfrak{K}$ von aussen und ausserdem die gerade Linie, so sind die Berührungspunkte potenzhaltende Punkte des äusseren Aehnlichkeitspunktes A. Bezeichnen wir, wie in der Fig. XIII., die Berührungspunkte mit P und P^1, so finden wir, dass P^1P durch den Punkt A hindurch gehen muss. Der gesuchte Kreis soll nun aber auch durch den Punkt n hindurch gehen. Ziehen wir daher die Linie An, so muss dieselbe den gesuchten Kreis noch in einem anderen Punkte schneiden, so dass $Ao \cdot An = AP \cdot AP^1$ wird. Es handelt sich darum, diesen Punkt o zu finden. Da $AP \cdot AP^1 = AI \cdot AC$ ist (vergl. §. 17, 4. Seite 19), so muss auch $Ao \cdot An = AI \cdot AC$ sein. Man lege daher durch n, I und c einen Kreis, wodurch man, indem man An zieht, den Punkt o findet. Der gesuchte Kreis muss also ausser durch n auch durch o gehen, den Kreis um $\mathfrak{K}$ und die gerade Linie berühren. Es ist damit die Aufgabe auf eine frühere zurückgeführt worden, entweder auf No. 2 oder No. 3, durch zwei Punkte n und o einen Kreis zu legen, welcher eine gerade Linie $\mathfrak{L}$ berührt, oder welcher einen gegebenen Kreis $\mathfrak{K}$ berührt. In beiden Fällen findet man zwei Kreise, welche die gegebenen Bedingungen erfüllen.

Es ist leicht zu beweisen, dass ein Kreis 1, welcher durch die Punkte n und o geht und die gerade Linie $\mathfrak{L}$ berührt, auch den Kreis $\mathfrak{K}$ berühren muss. Man ziehe nämlich die Linie AP^1, so wird dieselbe den Kreis 1 und den Kreis $\mathfrak{K}$, jeden noch in einem zweiten Punkte, schneiden, den Kreis 1 in x, den Kreis $\mathfrak{K}$ in P. Es muss nun nachgewiesen werden, dass die Punkte x und P zusammen fallen. Da der Punkt P im Umfange des Kreises um $\mathfrak{K}$ liegt, so ist $AP \cdot AP^1 = AI \cdot AC$; da der Punkt x im Umfange des Kreises 1 liegt, so ist $Ax \cdot AP^1 = Ao \cdot An = AI \cdot AC$. Es ist also $AP \cdot AP^1 = Ax \cdot AP^1$, oder $Ax = AP$, d. h. die Punkte x und P fallen zusammen, oder die Kreise 1 und $\mathfrak{K}$ haben den Punkt P gemein. Hätten die Kreise 1 und $\mathfrak{K}$ noch einen anderen Punkt y gemein, so liesse sich nachweisen, dass, wenn man die Linie Ay zöge, dieselbe die gerade Linie $\mathfrak{L}$ in dem Punkte y^1 schneiden müsste, welcher Punkt zugleich in der Linie $\mathfrak{L}$ und in dem Kreise 1 liegen müsste, was gegen die Forderung wäre, dass der Kreis 1 die gerade $\mathfrak{L}$ berühren soll. Nimmt man anstatt des äusseren Aehnlichkeitspunktes den inneren, so liesse sich auf ähnliche Weise darthun, dass es zwei Kreise giebt, welche durch den Punkt n gehen, die gerade Linie berühren und den Kreis $\mathfrak{K}$ von innen berühren. Zu diesem Behufe muss durch n, C und A ein Hülfskreis gelegt und die Linie nI gezogen werden, welche den Umfang des Kreises noch in einem Punkt p trifft. Es handelt sich dann darum, durch die Punkte n und p einen Kreis zu legen, welcher entweder die gerade Linie oder den Kreis berührt; wird die eine dieser Bedingungen erfüllt, so wird die andere von selbst erfüllt, was ganz analog wie vorher bewiesen wird.



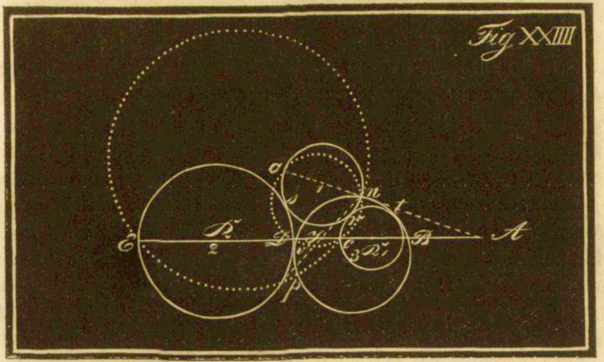
Die obige Auflösung gestattet also nach der letzten Betrachtung vier Auflösungen. Es erfüllt der Kreis 1 die geforderten drei Bedingungen. Die Berührungspunkte sind p und p^1, die Linie pp^1 geht durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt des Kreises 𝔎 und der geraden Linie 𝔏. Es wurde nämlich vorher der Punkt o gefunden, durch welchen alle Kreise gehen müssen, welche die geforderten Bedingungen erfüllen und zwar den Kreis 𝔎 von aussen berühren sollen. Der Kreis 1 berührt den Kreis 𝔎 von aussen, eben so der Kreis 2. Der Kreis 2 erfüllt ebenfalls die drei Bedingungen. Die Berührungspunkte sind q und q^1, die Linie qq^1 geht durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt des Kreises 𝔎 und der geraden Linie 𝔏. Die beiden Kreise, welche die drei geforderten Bedingungen erfüllen und den Kreis 𝔎 von innen berühren sollen, müssen ausser durch den Punkt n noch durch den Punkt v gehen. Kreis 3 erfüllt die drei Bedingungen, die Berührungspunkte sind r und r^1, die Linie rr^1 geht durch den inneren Aehnlichkeitspunkt des Kreises 𝔎 und der geraden Linie 𝔏. Kreis 4 genügt ebenfalls den Bedingungen der Aufgabe, die Berührungspunkte sind s und s^1, die Linie ss^1 geht durch den inneren Aehnlichkeitspunkt des Kreises 𝔎 und der geraden Linie 𝔏.

Es ist $AI . AC = Ap . Ap^1 = Aq . Aq^1$, ebenso $IA . IC = Ir . Ir^1 = Is . Is^1$.

Auflösung der obigen Aufgabe: 1) wenn der gegebene Punkt in der geraden Linie oder in dem Umfange des Kreises liegt, 2) wenn die gerade Linie durch den äusseren oder inneren Aehnlichkeitspunkt geht, 3) wenn die gerade Linie den Kreis schneidet, 4) wenn die gerade Linie durch den Mittelpunkt des Kreises geht. 5) Betrachtung aller Fälle, wenn der gegebene Punkt innerhalb des gegebenen Kreises liegt. 6) In welchen Fällen ist die Auflösung der Aufgabe unmöglich?

Aufgabe 6.

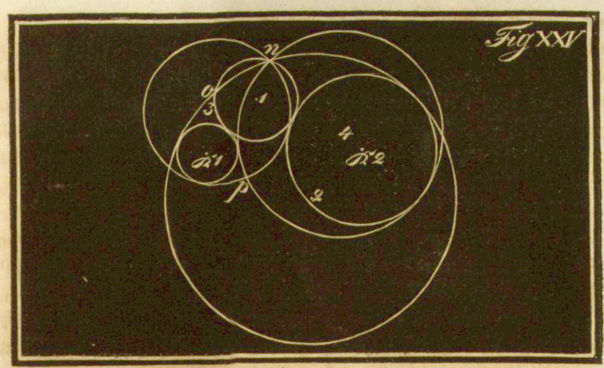
Es sind gegeben ein Punkt und zwei Kreise, man soll einen dritten Kreis beschreiben, welcher durch den gegebenen Punkt geht und die beiden Kreise berührt.



Es sind gegeben die Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, ebenso der Punkt n. Man soll einen Kreis beschreiben, welcher die beiden Kreise berührt und durch den Punkt n hindurch geht. Nach §. 16, Seite 15 und f., kann man unzählig viel Kreise ziehen, welche die beiden gegebenen Kreise berühren, und zwar ist eine vierfache Berührung möglich; es können beide Kreise gleichartig berührt werden mit Hülfe des äusseren Aehnlichkeitspunktes, d. h. beide von innen oder beide von aussen, oder ungleichartig mit Hülfe des inneren Aehnlichkeitspunktes, der eine von aussen und der andere von innen. Es sollen nun diejenigen Kreise herausgesucht werden, welche zugleich die dritte Bedingung erfüllen, durch den gegebenen Punkt n zu gehen.

Es sollen zuerst die Kreise gesucht werden, welche die beiden gegebenen Kreise gleichartig berühren. Dabei kommt der äussere Aehnlichkeitspunkt in Betracht. Die Berührungspunkte müssen alsdann nach §. 16, Seite 15 potenzhaltende Punkte des äusseren Aehnlichkeitspunktes sein. Wir wollen voraussetzen, dass es einen Kreis giebt, der die beiden Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ gleichartig berührt und durch den Punkt n geht, und dass die Berührungspunkte r und s heissen, so ist Ar . As das constante Product. Dieses Product kann man leicht finden, indem man von A einen beliebigen äusseren Aehnlichkeitsstrahl zieht, welcher die Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ schneidet, wodurch man jedesmal zwei Paare potenzhaltender Punkte erhält. Als einen solchen beliebigen Aehnlichkeitsstrahl kann man die Centrale annehmen, welche zwei Paare potenzhaltender Punkte B und E, desgleichen C und D liefert, d. h. es ist z. B. AC . AD = Ar . As. Legt man nun durch C, D und n einen Kreis (den punktirten Hülfskreis), so geben die Abschnitte der Secanten von A an diesen Hülfskreis lauter constante Producte = Ar . As. Zieht man die Secante An, so wird dieselbe den punktirten Hülfskreis noch in einem zweiten Punkte o treffen, so dass An . Ao = Ar . As. Es muss daher der Kreis, welcher $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ berührt und durch den Punkt n hindurch geht, auch durch den Punkt o hindurch gehen. Man construire daher einen Kreis, welcher durch die beiden Punkte n und o hindurch geht und ausserdem den Kreis $\mathfrak{K}_1$ berührt nach Aufgabe 3, Seite 27, so ist die vorliegende Aufgabe durch die Methode der Zurückführung gelöset worden. Nach Aufgabe 3 können zwei Kreise gefunden werden, welche durch die Punkte n und o gehen und den Kreis $\mathfrak{K}_1$ berühren; es lässt sich von jedem dieser Kreise leicht nachweisen, dass er auch den Kreis $\mathfrak{K}_2$ berühren muss. Wir wollen zu diesem Zwecke den Kreis (1) betrachten, welcher den Kreis $\mathfrak{K}_1$ in r berührt. Ziehen wir den äusseren Aehnlichkeitsstrahl Ar, so wird derselbe den Kreis 1 noch in s schneiden und den Kreis $\mathfrak{K}_2$ in x, und zwar ist Ar . As = An . Ao = AC . AD; ebenso, da A der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ ist, haben wir Ar . Ax = AC . AD, d. h. es ist Ar . As = Ar . Ax oder die Punkte s und x fallen zusammen. Der Kreis (1) hat also mit $\mathfrak{K}_2$ den Punkt s gemein. Es lässt sich leicht beweisen, dass er ausser s keinen anderen Punkt mit $\mathfrak{K}_2$ gemein haben kann, den Kreis $\mathfrak{K}_2$ also berühren muss. Angenommen, die Kreise (1) und $\mathfrak{K}_2$ hätten noch den Punkt y gemein, so könnte man den äusseren Aehnlichkeitsstrahl Ay ziehen, welcher jeden der Kreise 1 und $\mathfrak{K}_1$ noch in einem Punkte treffen müsste, z. B. 1 in w, $\mathfrak{K}_1$ in z, alsdann wäre Aw . Ay (wo w und y in Kreis 1 liegen) gleich An . Ao oder gleich AC . AD; ebenso wäre Az . Ay (wo y in Kreis $\mathfrak{K}_2$ und z in $\mathfrak{K}_1$ liegt) gleich AC . AD, d. h. Aw . Ay = Az . Ay oder z und w fielen zusammen, oder die Kreise 1 und $\mathfrak{K}_1$ hätten ausser r noch einen zweiten Punkt gemein, was gegen die Annahme ist, nach welcher sie sich berühren sollen. Der Kreis 1 berührt also ausser $\mathfrak{K}_1$ noch $\mathfrak{K}_2$. Durch dieselben Punkte n und o ist in Fig. XXV. noch der zweite Kreis gelegt worden, welcher die Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ gleichartig berührt, nämlich von innen.

Ein ähnliches Verfahren lässt sich für den inneren Aehnlichkeitspunkt durchführen. Ein Kreis, der $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ ungleichartig berührt, z. B. $\mathfrak{K}_1$ von innen und $\mathfrak{K}_2$ von aussen, liefert zwei Berührungspunkte t und v, welche potenzhaltende Punkte vom inneren Aehnlichkeitspunkte sind, d. h. It . Iv ist das constante Product. Es ist nun die Aufgabe, diese Punkte t und v zu finden. Zu diesem Zwecke muss man durch I einen beliebigen inneren Aehnlichkeitsstrahl ziehen, wozu man die Centrale wählen kann, um potenzhaltende Punkte vom inneren Aehnlichkeitspunkte zu erhalten. Man findet auf diese Weise z. B. die potenzhaltenden Punkte C und E von I, so dass IC . IE = It . Iv. Durch die drei Punkte n, C und E legt man einen Kreis, den punktirten Hülfskreis; zieht darauf den inneren Aehnlichkeitsstrahl np, so hat man It . Iv = In . Ip. Ein Kreis, gelegt durch die zwei Punkte n und p, welcher den Kreis $\mathfrak{K}_1$ berührt, muss nun auch den Kreis $\mathfrak{K}_2$ berühren. Es ist auf diese Weise der Kreis 3 gezeichnet worden, welcher durch den Punkt n geht und $\mathfrak{K}_1$ in t von innen, $\mathfrak{K}_2$ in v von aussen berührt. In Fig. XXV. ist auf dieselbe Weise noch der Kreis 4 gefunden worden, welcher durch den Punkt n geht, $\mathfrak{K}_1$ von aussen und $\mathfrak{K}_2$ von innen berührt.

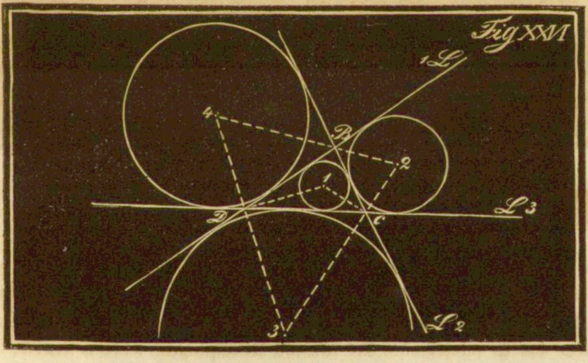


Die obige Aufgabe gestattet vier Auflösungen. Um die beiden Kreise zu finden, welche $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ gleichartig berühren, haben wir uns den Hülfspunkt o gesucht. Es wurde alsdann nach Aufgabe 3 ein Kreis gesucht, der durch die Punkte n und o geht und den Kreis $\mathfrak{K}_1$ oder $\mathfrak{K}_2$ einmal von aussen, das andere Mal von innen berührt. Auf diese Weise wurden mit Hülfe des äusseren Aehnlichkeitspunktes die Kreise 1 und 2 gefunden. Um die beiden Kreise zu finden, welche $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ ungleichartig berühren, haben wir uns den Hülfspunkt p gesucht. Es wurde alsdann nach Aufgabe 3 ein Kreis gesucht, der durch die Punkte n und p geht und den Kreis $\mathfrak{K}_1$ oder $\mathfrak{K}_2$ berührt, einmal von aussen, das andere Mal von innen, in jedem Falle wird alsdann der andere Kreis ungleichartig berührt. Auf diese Weise wurden mit Hülfe des inneren Aehnlichkeitspunktes die Kreise 3 und 4 gefunden.

1) Wie wird die Aufgabe gelöset, wenn der gegebene Punkt in dem Umfange des einen Kreises liegt (zwei Auflösungen)? 2) Wenn der eine Kreis innerhalb des anderen und der gegebene Punkt innerhalb des grösseren Kreises liegt? 3) In welchen Fällen ist die Aufgabe unmöglich?

Aufgabe 7.

Es sind drei gerade Linien gegeben, man soll einen Kreis beschreiben, welcher die drei geraden Linien berührt.



Die drei geraden Linien heissen $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ und $\mathfrak{L}_3$.

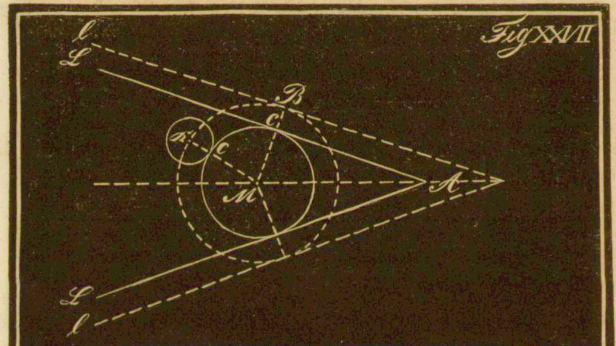
Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene gerade Linien z. B $\mathfrak{L}_2$ und $\mathfrak{L}_3$ berühren, ist die Halbirungslinie des Winkels C, welchen die beiden Linien bilden. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene gerade Linien $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_3$ berühren, ist die Halbirungslinie des Winkels D, welchen die beiden Linien bilden. Der Durchschnittspunkt dieser beiden Linien ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises (1), welcher zugleich die drei Linien $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ und $\mathfrak{L}_3$ berührt.

Wenn wir die drei inneren Winkel des Dreiecks BCD durch B, C und D bezeichnen, so können wir ihre resp. Nebenwinkel bezüglich B^1, C^1 und D^1 nennen. Es ist nun bekannt, dass die Halbirungslinien der Dreieckwinkel B, C und D sich in demselben Punkte schneiden müssen, was uns den Mittelpunkt des Kreises (1) liefert. Wir erhalten aber noch andere Kreise, welche auch alle drei Bedingungen erfüllen, nämlich den Kreis 2, dessen Mittelpunkt in dem Durchschnittspunkte der Halbirungslinien von B^1 und C^1 liegt; den Kreis 3, dessen Mittelpunkt in dem Durchschnittspunkte der Halbirungslinien von C^1 und D^1 liegt; den Kreis 4, dessen Mittelpunkt in dem Durchschnittspunkte der Halbirungslinien von B^1 und D^1 liegt. Vier Auflösungen.

1) Auflösung der Aufgabe für den Fall, dass zwei Linien parallel laufen. 2) Wo liegt der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, wenn sich die drei Linien in einem Punkte schneiden. 3) In welchen Fällen ist die Auflösung der Aufgabe unmöglich?

Aufgabe 8.

Es sind zwei gerade Linien gegeben und ein Kreis, man soll einen Kreis beschreiben, der die geraden Linien und den Kreis berührt.



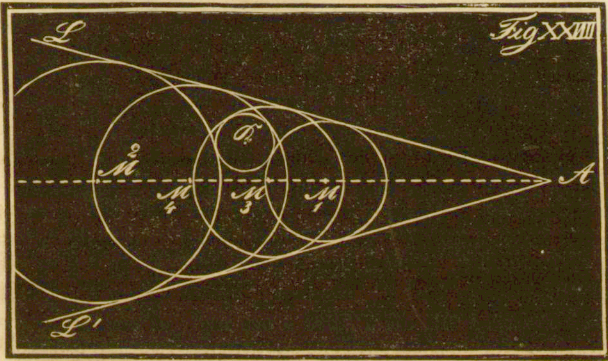
Die gegebenen geraden Linien heissen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}^1$, den Mittelpunkt des gegebenen Kreises wollen wir durch $\mathfrak{K}$ bezeichnen.

Es ist deutlich, dass, wenn die Auflösung der Aufgabe möglich ist, es Kreise geben wird, welche den gegebenen Kreis von aussen und solche, welche den gegebenen Kreis von innen berühren werden. Wir wollen uns zuerst mit denen beschäftigen, welche den gegebenen Kreis von aussen berühren. Es ist ferner deutlich, dass der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche der

Aufgabe genügen können, in der Mittellinie AM liegt, welche den Winkel halbirt, den die beiden Linien $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}^1$ bilden.

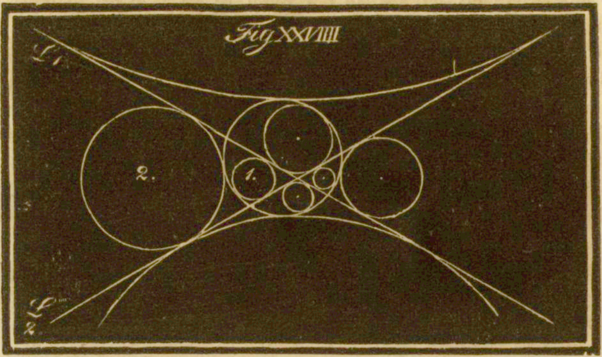
Wir wollen die Länge des Radius von dem gegebenen Kreise mit R bezeichnen. Man ziehe nun ausserhalb der beiden gegebenen geraden Linien, vom Mittelpunkte des gegebenen Kreises aus gerechnet, in den Entfernungen R von den beiden gegebenen geraden Linien Parallelen, damit, $\mathfrak{l} \# \mathfrak{L}$, $\mathfrak{l}^1 \# \mathfrak{L}^1$, $CB = \mathfrak{K}^1C^1$. Darauf löse man die Aufgabe, durch einen Punkt $\mathfrak{K}$ einen Kreis zu legen, welcher die beiden Linien $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}^1$ berührt (Aufg. 4, S. 30). Man erhält zwei Kreise. Wir wollen denjenigen betrachten, dessen Mittelpunkt von $\mathfrak{K}$ aus nach A hin liegt, und dessen Radius MB ist. In der Figur ist dieser Kreis punktirt. Verbindet man den Berührungspunkt B von $\mathfrak{l}$ mit dem Mittelpunkt M des gefundenen Kreises, so erhält man $BM \perp \mathfrak{l}$ und $BM \perp \mathfrak{L}$, $BC = \mathfrak{K}C^1C$; ebenso ist die Verbindungslinie des Berührungspunktes des Kreises M und der Linie $\mathfrak{l}^1$ mit dem Mittelpunkte M senkrecht auf beiden Linien $\mathfrak{l}^1$ und $\mathfrak{L}^1$. Ein mit dem punktirten Kreise concentrischer Kreis, mit dem Radius $MB - BC$, wo $BC = R$ ist, beschrieben, wird daher die Linie $\mathfrak{L}$ berühren; ebenso die Linie $\mathfrak{L}^1$ und den Kreis $\mathfrak{K}$, weil der Abstand der Mittelpunkte M und $\mathfrak{K}$ gleich ist der Summe ihrer Radien $M\mathfrak{K}$ und MC.

Mit Hülfe der Hülfslinien $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}^1$ findet man zwei Kreise, welche den gegebenen Kreis von aussen berühren. Hätte man die Linien $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}^1$ auf der inneren Seite der beiden gegebenen Linien gezogen in dem Abstande R davon, übrigens wie vorhin verfahren, so würde man zwei Kreise erhalten haben, welche den gegebenen Kreis von innen berühren.



In der Fig. XXVIII. sind alle vier möglichen Kreise, welche die Linien $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}^1$, wie auch den Kreis $\mathfrak{K}$ berühren, gezeichnet worden. Die zwei Kreise M_1 und M_2 berühren den gegebenen Kreis von aussen. Sie sind gefunden worden mit Hülfe der Linien $\mathfrak{l} \# \mathfrak{L}$, $\mathfrak{l}^1 \# \mathfrak{L}^1$, so dass die beiden Hülfsparallelen nach aussen liegen in einem dem Radius des gegebenen Kreises gleichen Abstande von der zugehörigen parallelen Linie. Um die Kreise M_3 und M_4 zu finden, welche den gegebenen Kreis von innen berühren, muss man die Hülfsparallelen innerhalb der gegebenen Linien in einem Abstande ziehen, welcher gleich ist dem Radius des gegebenen Kreises.

Bei der obigen Lage der Figur ist für die von aussen berührenden Kreise der Radius des concentrischen Hülfskreises gleich der Summe von dem Radius des gegebenen Kreises und dem Radius des gesuchten Kreises, dagegen für die von innen berührenden Kreise ist der Radius des gesuchten Kreises gleich der Summe von dem Radius des gegebenen Kreises und dem Radius des gesuchten concentrischen Hülfskreises. Es bleibt nun noch ein letzter möglicher Fall übrig, nämlich dass der Radius des gegebenen Kreises gleich wäre der Summe von dem Radius des gesuchten Kreises und dem Radius des concentrischen Hülfskreises. Dieser Fall tritt ein, wenn der Durchschnittspunkt der gegebenen geraden Linien *innerhalb* des gegebenen Kreises fällt und zwar für die den gegebenen Kreis von innen berührenden gesuchten Kreise.



Betrachtung der vorigen Aufgabe, wenn der Durchschnittspunkt der beiden gegebenen Linien in den gegebenen Kreis fällt.

Die obige Figur weiset *acht* Auflösungen nach. Durch zwei gerade Linien, welche sich schneiden, wird nämlich der Raum in vier Theile getheilt, innerhalb jedes Theils giebt es einen Kreis, der den gegebenen Kreis von innen berührt und einen anderen, der den gegebenen Kreis von aussen berührt.

Wir wollen den mit I bezeichneten Raum betrachten und nachweisen, wie die beiden gesuchten Kreise 1, den von *innen* berührt und 2, den von *aussen* berührt, gefunden worden sind. Wir wollen die beiden gegebenen geraden Linien durch $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ bezeichnen; die Parallele mit $\mathfrak{L}_1$, welche *innerhalb* I fällt, mit l_1, diejenige, welche *ausserhalb* fällt, mit $\mathfrak{l}_1$; desgleichen die Parallele $\mathfrak{L}_2$, welche *innerhalb* I fällt, mit l_2, diejenige, welche *ausserhalb* fällt, mit $\mathfrak{l}_2$. Der Abstand der Parallelen von den gegebenen geraden Linien ist immer der Radius des gegebenen Kreises.

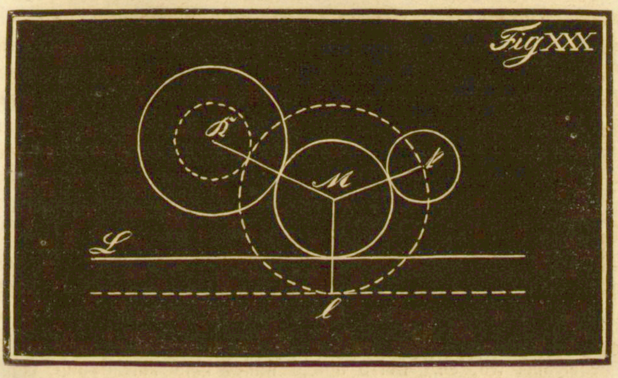
Um den Kreis 1 zu finden, muss man einen concentrischen Hülfskreis beschreiben, der l_1 und l_2 berührt und durch M, den Mittelpunkt des gegebenen Kreises, geht. Die Summe des Radius des concentrischen und des gesuchten Kreises ist alsdann gleich dem Radius des gegebenen Kreises. Um den Kreis 2 zu finden, muss man einen concentrischen Hülfskreis beschreiben, der $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ berührt und durch M geht, nachher den Radius verkürzen um den Radius des gegebenen Kreises. Die Summe des Radius des gesuchten und des gegebenen Kreises ist alsdann gleich dem Radius des concentrischen Hülfskreises.

Aufgabe: Es ist ein Winkel gegeben und *zwischen* seinen Schenkeln ein Kreisbogen mit *beliebig* liegendem Mittelpunkte: man soll einen Kreis beschreiben, der die Schenkel des Winkels und den Kreisbogen berührt.

Bei der Auflösung dieser Aufgabe muss man bedenken, dass in der Geometrie der Lage, im Gegensatze zu der Geometrie des Maasses, was die Geometrie des Euklides überwiegend war, jede gerade Linie unbegränzt und jeder Kreisbogen als Stück eines vollständigen Kreises gilt. Hat man nun die acht Kreise gefunden, die zu den beiden sich schneidenden Linien und dem vollständigen Kreise gehören, so werden darunter auch die beiden sein, die innerhalb der Schenkel des gegebenen Winkels den gegebenen Bogen berühren, und diese beiden hat man zu nehmen, wobei man dann sehr wohl die Construction der sechs anderen Kreise, sobald man sieht, dass sie nicht die erforderliche Lage haben, sich ersparen kann. Gerade so ist es z. B. mit einer Aufgabe, in der nach einer gewissen Anzahl Menschen gefragt wird, zu welcher Berechnung die Aufgabe eine höhere Gleichung liefern kann, unter deren Wurzeln nur eine positiv ist. Nur diese hat für den speciellen Fall, in welchem nach einer Anzahl Menschen gefragt wird, einen Sinn; die negativen oder imaginären Wurzeln, die z. B. bei einer kubischen Gleichung vorkommen könnten, haben für den vorliegenden Fall keinen Sinn; und sobald man sieht, dass das Resultat negativ oder imaginär wird, kann man von der weiteren Berechnung abstehen. Immer aber muss man den Weg über die höhere Gleichung nehmen, auch wenn man von vorn herein merken oder genau wissen sollte, dass nur ein Resultat möglich ist. So muss man auch hier eine Auflösung wählen, die für zwei sich schneidende Linien und einen um den Schnittpunkt herumliegenden Kreis acht Lösungen gewährt, von denen man, weil man nur zwei Winkelschenkel und ein Stückchen Kreisbogen als geltend ansieht, sechs als überflüssig verwerfen und nur zwei gelten lassen muss.

Aufgabe 9.

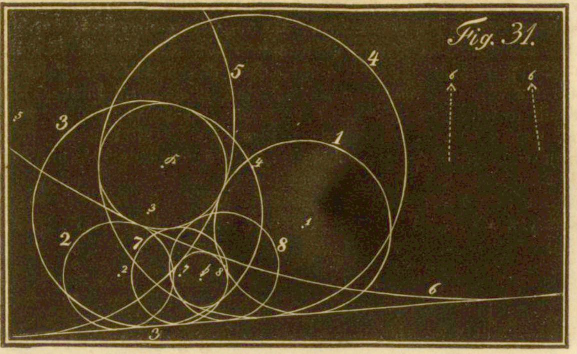
Einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei gegebene Kreise und eine gegebene Linie berührt.



Es sind die Kreise $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{k}$ mit den Radien R und r gegeben, ferner die gerade Linie $\mathfrak{L}$. Man soll einen Kreis beschreiben, welcher die beiden gegebenen Kreise und die gegebene gerade Linie berührt.

Man ziehe mit $\mathfrak{L}$ in der Entfernung r eine Parallele $\mathfrak{l}$, entweder von den beiden gegebenen Kreisen aus nach innen oder nach aussen, hier z. B. nach aussen. Der Abstand der Parallelen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{l}$ ist gleich dem Radius r des kleineren Kreises $\mathfrak{k}$. Man beschreibe darauf einen mit $\mathfrak{K}$ concentrischen Kreis mit dem Radius R — r. Dieser Kreis ist in der Figur punktirt worden. Der Abstand der concentrischen Kreislinien um $\mathfrak{K}$ ist also r. Man löse nun die Aufgabe, einen Kreis zu beschreiben, der die Linie $\mathfrak{l}$ berührt, ferner den mit $\mathfrak{K}$ concentrischen punktirten

Hülfskreis und ausserdem durch den Punkt 𝔣 geht. (Methode der Zurückführung.) Es ist dies die Aufgabe 5, welche vier Auflösungen liefert. In der obigen Figur ist der eine dieser Kreise gezeichnet, es ist der punktirte Kreis um M. Es ist nun leicht, den gesuchten Kreis selbst zu finden. Er ist concentrisch mit dem gefundenen Kreise; man hat nur nöthig, den Radius desselben um r zu verkürzen. Der ausgezogene Kreis um M berührt z. B. den gegebenen Kreis 𝔎, weil der Abstand der Mittelpunkte 𝔐𝔎 gleich ist der Summe der Radien; aus demselben Grunde wird der Kreis 𝔣 berührt. Die gerade Linie 𝔏 wird berührt, weil Ml ⊥ l, also auch senkrecht steht auf der mit l Parallelen 𝔏.



Die obige Aufgabe lässt vier Auflösungen zu, wenn man die Parallele l in dem Abstande r nach aussen zieht. Man findet die Kreise 1 und 2 ganz auf die oben angegebene Weise. Durch die Kreise 1 und 2 werden die beiden gegebenen Kreise von aussen berührt. Um die Kreise 3 und 4 zu finden, durch welche die beiden gegebenen Kreise von innen berührt werden, behält man den in der Fig. XXX. befindlichen mit 𝔎 concentrischen punktirten Hülfskreis bei, bedient sich aber der Parallele l, welche in dem Abstande r nach innen gezogen wird. Der Radius des Kreises, welcher die Linie l und den mit 𝔎 concentrischen Hülfskreis berührt, wird aber um r verlängert, um den gesuchten Kreis zu finden. Um die Kreise 5, 6, 7 und 8 zu finden, muss man sich eines anderen mit 𝔎 concentrischen Hülfskreises bedienen, dessen Radius R + r ist. Um 5 und 6 zu finden, muss man die ausserhalb gezogene Parallele l anwenden. Die Kreise 5 und 6 berühren 𝔎 von innen und 𝔣 von aussen. Der Mittelpunkt von 6 fällt ausserhalb der Figur nach oben rechts, der Kreis ist ausnahmsweise an seinem Umfange bezeichnet worden. Bei 5 und 6 findet eine Verkürzung von dem Radius des concentrischen Kreises um Länge r statt, bei 7 und 8 eine Verlängerung. Um 7 und 8 zu finden, muss man die innerhalb gezogene Parallele l anwenden. Die Kreise 7 und 8 berühren 𝔎 von aussen und 𝔣 von innen.

Aufgabe 10.

Es sind drei Kreise gegeben, man soll einen vierten beschreiben, welcher die drei gegebenen Kreise berührt.

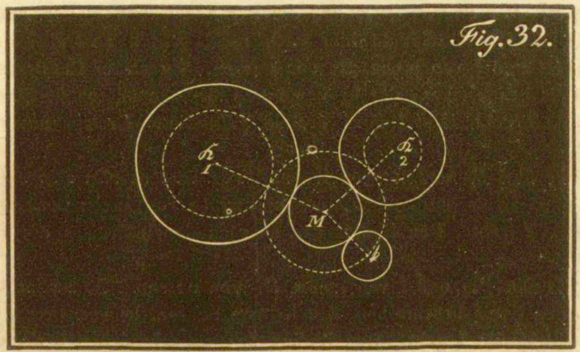


Fig. 32.

Die drei gegebenen Kreise sind $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{k}$, von diesen Kreisen soll $\mathfrak{k}$ den kleinsten Radius haben, den wir mit r bezeichnen wollen, während wir die Radien von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ mit R_1 und R_2 bezeichnen wollen.

Man beschreibe mit dem Radius $R_1 - r$ einen mit $\mathfrak{K}_1$ concentrischen Kreis, den wir mit k_1 bezeichnen wollen; desgleichen mit dem Radius $R_2 - r$ einen mit $\mathfrak{K}_2$ concentrischen Kreis, den wir mit k_2 bezeichnen wollen. Darauf beschreibe man einen Kreis der k_1 und k_2 von aussen berührt und durch den Mittelpunkt $\mathfrak{k}$ geht. Vergl. Aufgabe 6, Seite 40. Der Mittelpunkt des so gefundenen Kreises, welcher in der Figur punktirt ist, heisst M. Man verkürze darauf seinen Radius um r, so erhält man einen concentrischen Kreis, welcher in der Figur ausgezogen ist, der die drei gegebenen Kreise von aussen berührt.

Diese Aufgabe ist durch die Methode der Zurückführung gelöst worden.

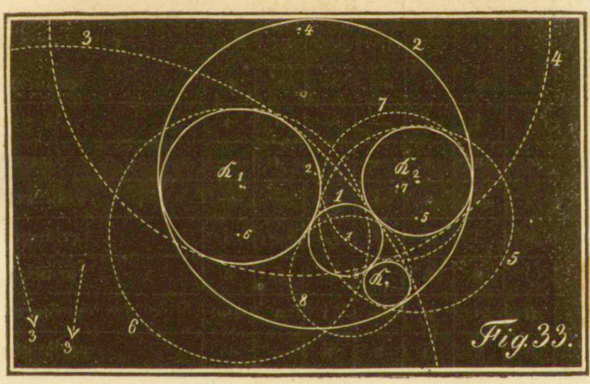


Fig. 33.

Es ist deutlich, dass die obige Aufgabe acht Auflösungen zulassen kann. Kreis 1 berührt die drei gegebenen Kreise von aussen.

Kreis 2 berührt die drei gegebenen Kreise von innen. Zur Construction von Kreis 2 hat man nur nöthig einen Kreis zu ziehen, der die beiden in Fig. 32 punktirten Hülfskreise k_1 und k_2 von innen berührt und durch den Mittelpunkt $\mathfrak{f}$ geht; nachher hat man den Radius des gefundenen Kreises um r zu verkürzen.

Für die Auflösung der folgenden Aufgaben bedürfen wir noch zwei anderer concentrischen Hülfskreise von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, welche beschrieben werden mit den Halbmessern $R_1 + r$ und $R_2 + r$, und die wir bezeichnen wollen mit k_1 und k_2.

Kreis 3, dessen Mittelpunkt hier nach rechts unten ausserhalb des Papiers fällt, berührt $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{f}$ von innen, $\mathfrak{K}_2$ von aussen. Zu seiner Construction müssen wir einen Kreis beschreiben, der k_1 von innen, k_2 von aussen berührt und durch den Mittelpunkt $\mathfrak{f}$ geht. Der Radius des so gefundenen Kreises muss man um r verlängern.

Kreis 4 berührt $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ von innen, $\mathfrak{f}$ von aussen. Zu seiner Construction muss man einen Kreis beschreiben, der k_1 und k_2 von innen berührt und durch den Mittelpunkt $\mathfrak{f}$ geht. Den Radius des so gefundenen Kreises muss man um r verkürzen.

Kreis 5 berührt $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{f}$ von innen, $\mathfrak{K}_1$ von aussen. Zu seiner Construction muss man einen Kreis beschreiben, der K_1 von aussen, k_2 von innen berührt und durch den Mittelpunkt $\mathfrak{f}$ geht. Den Radius des so gefundenen Kreises muss man um r verlängern.

Kreis 6 berührt $\mathfrak{K}_1$ von innen, $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{f}$ von aussen. Zu seiner Construction muss man einen Kreis beschreiben, der K_1 von innen, k_2 von aussen berührt und durch den Mittelpunkt $\mathfrak{f}$ geht. Den Radius des so gefundenen Kreises muss man um r verkürzen.

Kreis 7 berührt $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{f}$ von aussen, $\mathfrak{K}_2$ von innen. Zu seiner Construction muss man einen Kreis beschreiben, der k_1 von aussen, K_2 von innen berührt und durch den Mittelpunkt $\mathfrak{f}$ geht. Den Radius des so gefundenen Kreises muss man um r verkürzen.

Kreis 8 berührt $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ von aussen, $\mathfrak{f}$ von innen. Zu seiner Construction muss man einen Kreis beschreiben, der K_1 und K_2 von aussen berührt und durch den Mittelpunkt $\mathfrak{f}$ geht. Den Radius des so gefundenen Kreises muss man um r verlängern.

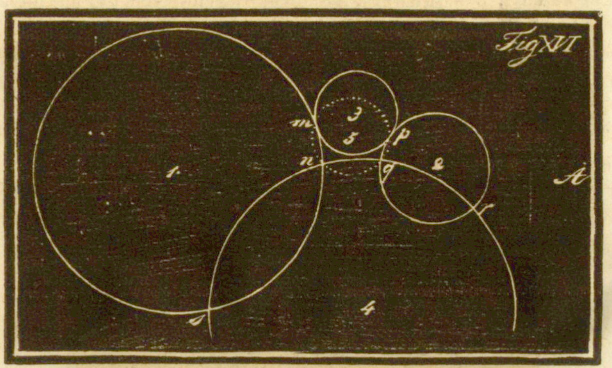
Berührungskreise	$\mathfrak{K}_1$	$\mathfrak{K}_2$	$\mathfrak{f}$	Hülfskreise				Verkürzung oder Verlängerung des Radius
				K_1	K_2	k_1	k_2	
1	a	a	a	—	—	a	a	verkürzt
2	i	i	i	—	—	i	i	verlängert
3	i	a	i	—	a	i	—	verlängert
4	i	i	a	i	i	—	—	verkürzt
5	a	i	i	a	—	—	i	verlängert
6	i	a	a	i	—	—	a	verkürzt
7	a	i	a	—	i	a	—	verkürzt
8	a	a	i	a	a	—	—	verlängert

Andere Behandlung der Aufgabe 10.

Erster vorbereitender Satz.

Es sind zwei Kreise (1) und (2) gegeben, welche von dem Kreise (4) orthogonal geschnitten werden. Es ist ferner ein Kreis (3) vorhanden, welcher den Kreis (1) berührt und zwar von aussen. Ausserdem geht die Chordale von (4) und (3) durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt von (1) und (2). Man soll beweisen: „dass der Kreis (3) auch den Kreis (2) berührt, und zwar von aussen."

Dieser Satz ist die Umkehrung von §. 21, S. 23, vergleiche dazu die Fig. XVI.



Der Punkt A hat nach der obigen Voraussetzung zwei Eigenschaften: 1) A ist ein Punkt der Chordale für die Kreise (3) und (4); 2) A ist der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreise (1) und (2).

Weil A ein Punkt der Chordale für die Kreise (3) und (4) ist, so ist $tg^2{}_3 = tg^2{}_4$. Da der Kreis (4) die Kreise (1) und (2) schneidet, so sind n und q potenzhaltende Punkte von A, ebenso s und r. (Vergl. §. 18, Seite 20.) Es ist also $tg^2{}_4 = Aq \,.\, An$. Der Kreis (3) berührt den Kreis (1) in m, ziehe ich nun Am, so muss dieselbe den Kreis (3) noch in einem anderen Punkte schneiden, welchen wir durch x_3 bezeichnen wollen. Es ist also $tg^2{}_3 = Am \,.\, Ax_3$. Folglich ist $Aq \,.\, An = Am \,.\, Ax_3$.

Weil A der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreise (1) und (2) ist, so muss, wenn ich Am ziehe, wo m ein Punkt von (1) ist, der Durchschnittspunkt von Am mit (2), welchen wir durch x_2 bezeichnen wollen, die Eigenschaft haben, dass $Am \,.\, Ax_2 = Aq \,.\, An$. Es ist folglich $Am \,.\, Ax_2 = Am \,.\, Ax_3$. Daraus folgt, dass die Punkte x_2 und x_3 zusammenfallen, d. h. dass die Kreise (3) und (2) Einen Punkt gemein haben, welchen wir in der Fig. XVI. mit p bezeichnet haben.

Es wäre noch möglich, dass die Kreise (3) und (2) noch einen anderen Punkt gemein hätten ausser p. Wir wollen diesen Punkt durch y_2 bezeichnen. Man ziehe die Linie Ay_2, so wird dieselbe den Umfang von (3) noch in einem anderen Punkte schneiden, welchen wir durch y_3 bezeichnen wollen, so is $Ay_2 \,.\, Ay_3 = Aq \,.\, An$, weil A ein Punkt der Chordale von (3) und (4) ist. Weil A der äussere Aehnlichkeitspunkt von (1) und (2) ist, und Ay_2 noch den Kreis (1) in einem potenzhaltenden Punkte zu y_2 treffen muss, welchen wir durch y_1 bezeichnen wollen, so ist $Ay_2 \,.\, Ay_1 = Aq \,.\, An$. Es ist folglich $Ay_2 \,.\, Ay_3 = Ay_2 \,.\, Ay_1$.

d. h. $Ay_3 = Ay_1$, oder die Kreise (3) und (1) haben ausser m noch einen zweiten Punkt y_1 oder y_3 gemein, was gegen die Voraussetzung ist, dass sie sich in m berühren sollen.

Die Kreise (3) und (2) haben also ausser p keinen anderen Punkt gemein, d. h. sie *berühren* sich, q. e. d.

Für die übrigen Fälle ist der Beweis übereinstimmend.

Berührt der Kreis (3) den Kreis (1) von innen und geht die Chordale von (3) und (4) durch A, so *muss* der Kreis (3) auch den Kreis (2) *von innen berühren*.

Berührt der Kreis (3) den Kreis (1) von aussen, und geht die Chordale von (3) und (1) durch I, den *inneren* Aehnlichkeitspunkt von (1) und (2), so *muss* der Kreis (3) auch den Kreis (2) *von innen berühren*.

Berührt der Kreis (3) den Kreis (1) von innen, und geht die Chordale von (3) und (4) durch I, so *muss* der Kreis (3) auch den Kreis (2) *von aussen berühren*.

Ueberhaupt: Geht die Chordale von (3) und (4) durch A, so findet eine *gleichzeitige gleichartige* Berührung der *beiden* Kreise (1) und (2) durch den Kreis (3) statt. Geht die Chordale von (3) und (4) durch I, so findet eine *gleichzeitige ungleichartige* Berührung der *beiden* Kreise (1) und (2) durch den Kreis (3) statt.

Zweiter vorbereitender Satz.

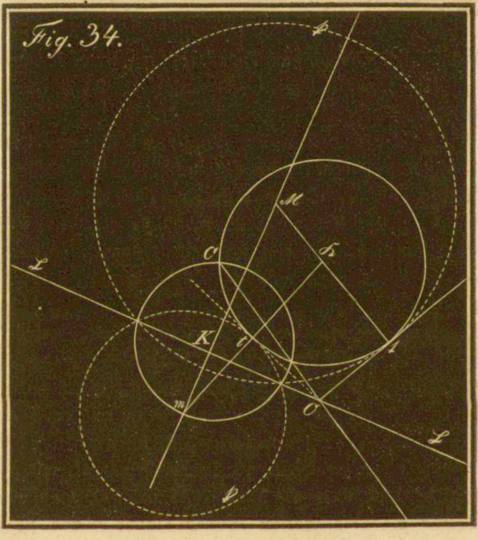


Fig. 34.

Es ist ein Kreis $\mathfrak{K}$ und ein anderer Kreis k gegeben, ausserdem eine gerade Linie L: man soll einen Kreis $\mathfrak{k}$ finden, welcher folgende Bedingungen erfüllt:

1) den Kreis $\mathfrak{K}$ *berührt*,

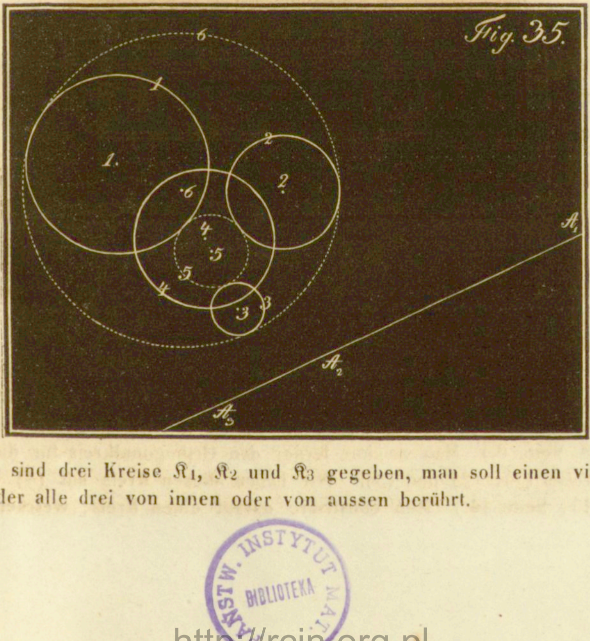
2) *mit* dem Kreise k die gegebene gerade Linie L zur *Chordale* hat.

Da die Linie L die Chordale werden soll von k und dem gesuchten Kreise, und die Chordale stets senkrecht steht auf der Centrale, so kann ich leicht eine gerade Linie finden, in welcher der Mittelpunkt des gesuchten Kreises liegen muss. Ich habe nur nöthig, von dem Mittelpunkte k ein Loth auf die Linie L zu fällen, so muss der Mittelpunkt M oder m, wie man ihn nennen will, des gesuchten Kreises darin liegen. Die drei Kreise 𝔎, k und f müssen einen Chordalpunkt haben. (Vergl. Seite 11.) Ich kenne die Chordale der Kreise 𝔎 und k, es ist CO; ich kenne die Chordale der Kreise k und f, es ist die Linie L. Der Durchschnitt von CO und L liefert also den Chordalpunkt der Kreise 𝔎, k und f, es ist der Punkt O. Die Tangenten von O an den Kreis 𝔎, oder k, oder f werden also dieselbe Länge haben. Von O kann ich an den Kreis 𝔎 zwei Tangenten ziehen Ot und Ot. Ich finde dadurch die Punkte t und t. Wir wollen zunächst den Punkt t betrachten. Ein Kreis f, der durch t geht, den Kreis 𝔎 in t berührt, und dessen Mittelpunkt m in dem Loth kM auf L liegt, wird also die verlangten Bedingungen erfüllen: es wird nämlich O ein Punkt der Chordale von f und 𝔎 sein, weil beide die gemeinschaftliche Tangente Ot haben und die Linie L, welche von O auf km gefällt ist, wird diese Chordale sein. Der Mittelpunkt aller Kreise aber, welche den Kreis 𝔎 berühren in t, liegt in der geraden Linie 𝔎t. Wir haben daher für den gesuchten Mittelpunkt zwei Oerter, das Loth km und die gerade Linie 𝔎t, ihr Durchschnittspunkt m giebt den Mittelpunkt des gesuchten Kreises, dessen Radius mt ist.

Der Punkt t liefert eine Auflösung, einen Kreis nämlich mit dem Mittelpunkte m, der den Kreis 𝔎 von aussen berührt; der Punkt t liefert ebenso eine Auflösung, nämlich einen Kreis mit dem Mittelpunkte M, der den Kreis 𝔎 in t von innen berührt, sein Radius ist Mt.

Die Aufgabe gestattet also zwei Auflösungen, einen Kreis mit dem Mittelpunkte m, der 𝔎 von aussen in t berührt, und einen Kreis mit dem Mittelpunkte M, der 𝔎 von innen in t berührt.

Andere Behandlung der Aufgabe 10.

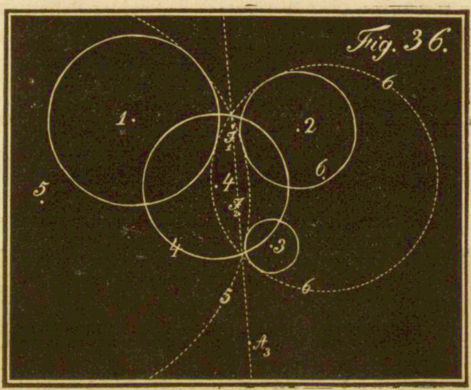


1. Es sind drei Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_3$ gegeben, man soll einen vierten Kreis zeichnen, der alle drei von innen oder von aussen berührt.

Auflösung. Man zeichne sich den Orthogonalkreis $\mathfrak{K}_4$ für die drei gegebenen Kreise nach §. 15, Seite 14. Hierauf ziehe man die äussere Symmetrale $A_1 A_2 A_3$ der drei gegebenen Kreise nach §. 8, Seite 6. Man construire darauf einen Kreis, der den Kreis (1) berührt und mit dem gefundenen Orthogonalkreise (4) die gemeinschaftliche Chordale $A_1 A_2 A_3$ hat (nach dem zweiten vorbereitenden Satze). Man findet zwei Kreise (5) und (6), welche diese Bedingungen erfüllen; (5) berührt (1) von aussen, (6) berührt (1) von innen. Sind aber zwei Kreise (1) und (2) gegeben, welche von dem Kreise (4) orthogonal geschnitten werden; ist ferner ein Kreis (5) vorhanden, welcher den Kreis (1) von aussen berührt; geht ferner die Chordale $A_1 A_2 A_3$ von (4) und (5) durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt A_1 von (1) und (2): so berührt (nach dem ersten vorbereitenden Satze) der Kreis (5) ebenfalls den Kreis (2) von aussen. Der Kreis (4) schneidet aber auch die Kreise (1) und (3) orthogonal, die Chordale $A_1 A_2 A_3$ von (4) und (5) geht ebenfalls durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt A_2 von (1) und (2), deshalb berührt der Kreis (5) ebenfalls den Kreis (3) von aussen. Kreis (5) berührt also alle drei Kreise (1), (2) und (3) zu gleicher Zeit von aussen.

Auf dieselbe Weise kann man darthun, dass der Kreis (6) alle drei Kreise (1), (2) und (3) zu gleicher Zeit von innen berühren muss.

Durch dieselbe Construction hätten wir auch in Fig. 33 die beiden Berührungskreise (1) und (2) finden können.



2. Es sind drei Kreise (1), (2) und (3) gegeben, man soll einen Kreis beschreiben, der zwei davon gleichartig berührt und den dritten ungleichartig mit den beiden anderen.

Es sind sechs Fälle möglich. Wir wollen hier die Fälle behandeln, wo (2) und (3) gleichartig berührt werden und (1) ungleichartig. Es kann (2) und (3) von aussen berührt werden und (1) von innen, oder (2) und (3) von innen und (1) von aussen.

Man zeichne sich die innere Symmetrale, welche durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt A_3 von (2) und (3) und den inneren I_1 von (1) und (2), so wie den inneren I_2 von (1) und (3) hindurchgeht; es ist dies die gerade Linie $I_1 I_2 A_3$. (Vergl. §. 8, Seite 6.) Man zeichne ferner den Orthogonalkreis für die drei gegebenen Kreise (1), (2) und (3). Wir haben diesen Kreis mit (4) bezeichnet. (Vergl. §. 15, Seite 14.) Man construire darauf einen Kreis, welcher Kreis (1) berührt und mit Kreis (4) zur Chordale $I_1 I_2 A_3$ hat (nach dem zweiten vorbereitenden Satze). Man findet zwei Kreise, von denen (5) den Kreis (1) von innen und (6) den Kreis (1) von aussen berührt. Es lässt sich nun nachweisen, dass Kreis (5) die Kreise (2) und (3) von aussen berühren und dass Kreis (6) die Kreise (2) und (3) von innen berühren muss. Wir wollen den Beweis nur für den ersten Fall durchführen.

Die Linie $I_1 I_2 A_3$ geht durch den Punkt I_1, inneren Aehnlichkeitspunkt der Kreise (1) und (2). Die Kreise (1) und (2) werden von (4) orthogonal geschnitten, der Kreis (5) berührt (1) von innen, also (2) von aussen (nach dem ersten vorbereitenden Satze). Ebenso wird der Beweis in Rücksicht auf den Kreis (3) durchgeführt.

Durch dieselbe Construction hätten wir auch in Fig. 33 die Kreise (3), (4), (5), (6), (7) und (8) finden können.

Zweiter Abschnitt.

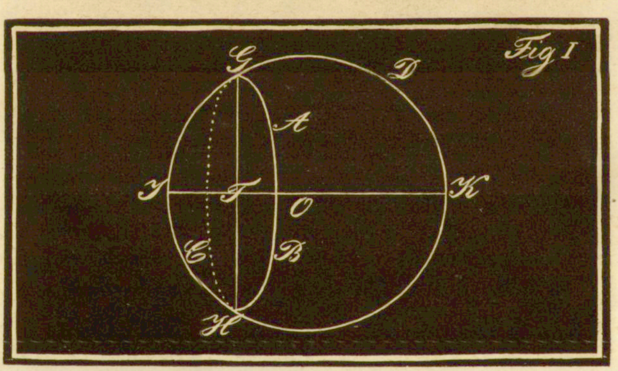
Das Berührungsproblem für die Kugel.

Uebersichtstabelle der Aufgaben.

Aufgabe.	Punkte.	Ebenen.	Kugeln.	Zurückgeführt auf:	Anzahl der Auflösungen.
1	4	—	—	I. 1	1
2	3	1	—	I. 2	2
3	3	—	1	I. 3	2
4	2	2	—	3	2
5	2	1	1	2	4
6	2	—	2	3	4
7	1	3	—	4	2
8	1	2	1	5 oder 4	4
9	1	1	2	5	8
10	1	—	3	6	8
11	—	4	—	—	8
12	—	3	1	7	4
13	—	2	2	8	8
14	—	1	3	9	16
15	—	—	4	10	16

Aufgabe 1.

Eine Kugel zu zeichnen, welche durch vier gegebene Punkte geht. Die gegebenen vier Punkte heissen A, B, C und D.



1. Man legt durch drei Punkte A, B und C einen Kreis. Man findet den Mittelpunkt davon F. Alsdann errichte man in F ein Loth auf die Ebene ABC. Wir wollen dieses Loth FK nennen. Durch FK und durch den Punkt D lege man eine Ebene, welche die Ebene ABC in der geraden Linie GH schneidet, welche ein Durchmesser des Kreises ABC wird. FK $\perp$ GH. Durch die drei Punkte G, H und D lege man einen Kreis, in dessen Ebene auch FK liegt, ja sogar, da es in der Mitte F der Sehne GH darauf senkrecht steht, verlängert ein Durchmesser davon wird. Man denke sich jetzt den Kreis GDH um seinen Durchmesser IK gedreht, bis dass er wieder in seine ursprüngliche Lage zurückgekommen ist, so wird er die Oberfläche einer Kugel beschrieben haben, deren Durchmesser IK und deren Mittelpunkt O (der Mittelpunkt des Kreises GDH) ist. Bei dieser Umdrehung bleibt GH stets senkrecht auf IK und beschreibt um F einen Kreis, mit dem Radius FG, dessen Ebene senkrecht auf FK steht, also mit der Ebene ABC zusammenfällt. In dem Umfange des Kreises, welchen FG bei dieser Drehung beschreibt, müssen aber auch die Punkte A, B und C liegen, indem sie sich in seiner Ebene befinden und FA = FB = FC = FG. Die Punkte A, B, C und D liegen also auf der Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunkt O und Radius OG = OA = OB = OC = OD ist.

Es ist nur Eine Auflösung möglich. In der obigen Figur zeigt IGDKH einen horizontalen Schnitt und GABHC einen verticalen Schnitt der gefundenen Kugel.

2. Man hätte auch nach der Construction des Kreises ABC, nachdem man ferner in F ein Loth FK auf die Ebene ABC errichtet und den Durchschnitt GH der Ebenen FKD und ABC gefunden hatte, auf folgende Weise fortfahren können. Man nehme die Ebene DGFHK, errichte in derselben auf GD in ihrer Mitte ein Loth, so muss dieses Loth die Linie FK schneiden, der gefundene Durchschnittspunkt heisse O, es ist der Mittelpunkt der gesuchten Kugel, deren Radius OG = OD ist. Denn da FK, worin O liegt, senkrecht steht auf der Ebene ABC, da ferner FA = FB = FC = FG ist, so muss OG = OA = OB = OC sein, d. h. A, B, C und D sind Punkte auf der Oberfläche der gefundenen Kugel.

Man kann diese Aufgabe auch noch anders lösen. Man lege durch A, B und C einen Kreis, dessen Mittelpunkt F ist. Man findet F, indem man AB halbirt in L und in L ein Loth LF auf AB in der Ebene ABC errichtet u. s. w. Man suche ferner den Mittelpunkt M des Kreises durch A, B und D, indem man in L auf AB in der Ebene ABD ein Loth LM errichtet u. s. w. Man erhält auf diese Weise die Ebene FLM, welche auf AB senkrecht steht. FLM ist der Neigungswinkel der Ebenen ABC und ABD. Man errichte dann in F ein Loth FK auf die Ebene ABC, so wird dasselbe fallen in die auf ABC lothrechte Ebene FLM. Man errichte ferner in M ein Loth MP auf die Ebene ABD, so wird dasselbe fallen in die auf ABD lothrechte Ebene FLM. Die Lothe FK und MP fallen also in dieselbe Ebene FLM, stehen senkrecht auf den Schenkeln eines Winkels FLM, schneiden sich daher in O. O ist daher der Mittelpunkt der gesuchten Kugel, OA = OB = OC und OA = OD sind die Radien.

Ist der Winkel FLM = 0, d. h. liegen A, B, C und D in derselben Ebene, so werden FK und MP parallel, d. h. O liegt im Unendlichen oder der Radius der gesuchten Kugel ist unendlich gross. Liegen aber ausserdem A, B, C und D im Umfange desselben Kreises, so giebt es unzählig viel Kugeln, welche die geforderten Bedingungen erfüllen. Der geometrische Ort für ihre Mittelpunkte ist ein Loth, das man im Mittelpunkte des Kreises ABCD auf die Ebene desselben errichtet. Eine Kugel, deren Mittelpunkt nämlich in der Ebene ABCD selbst liegt und mit dem Mittelpunkte des Kreises ABCD zusammenfällt, ist ein Minimum von allen Kugeln, welche sich durch die Punkte A, B, C und D legen lassen.

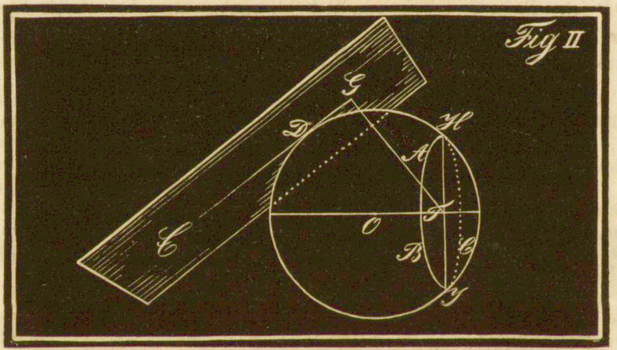
Liegen drei Punkte in derselben geraden Linie, so wird die Oberfläche der gesuchten Kugel eine Ebene, welche bestimmt ist durch die gerade Linie und den vierten Punkt.

Wie ist es, wenn alle vier Punkte in derselben geraden Linie liegen?

Man kann sich auch die Auflösung dieser Aufgabe noch anders vorstellen. Man suche den geometrischen Ort für die Mittelpunkte der Kugeln, in deren Oberfläche zwei gegebene Punkte A und B liegen. Man findet denselben, indem man die Punkte A und B verbindet, die Linie AB halbirt und im Halbirungspunkte eine Ebene lothrecht darauf errichtet. Jeder Punkt dieser Ebene, welche wir durch $\mathfrak{E}_1$ bezeichnen wollen, kann als Mittelpunkt der gesuchten Kugel angesehen werden. Darauf suche man den geometrischen Ort der Kugeln, auf deren Oberfläche die Punkte B und C liegen. Es sei dies die Ebene $\mathfrak{E}_2$ senkrecht auf BC in der Mitte davon. Der Durchschnitt der Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$, also die gerade Linie $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$, ist also der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kugeln, auf deren Oberfläche die Punkte A, B und C liegen. Darauf suche man den geometrischen Ort der Kugeln, auf deren Oberfläche die Punkte C und D liegen. Es sei dies die Ebene $\mathfrak{E}_3$ senkrecht auf CD in der Mitte davon. Der Durchschnitt der Ebene $\mathfrak{E}_3$, mit der geraden Linie $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$, liefert uns den Mittelpunkt der gesuchten Kugel, auf deren Oberfläche die Punkte A, B, C und D liegen. Wenn diese vier Punkte in derselben Ebene liegen, so wird im Allgemeinen die Linie $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$ parallel werden mit der Ebene $\mathfrak{E}_3$; beide werden senkrecht stehen auf der Ebene ABCD. Wenn ausserdem noch die Punkte A, B, C und D in den Umfang eines Kreises fallen, dessen Mittelpunkt wir O nennen wollen, so werden alle drei Ebenen sich in derselben geraden Linie schneiden, die in O senkrecht steht auf der Ebene ABCD.

Aufgabe 2.

Eine Kugel zu beschreiben, welche durch drei gegebene Punkte geht und eine gegebene Ebene berührt.



Man beschreibe einen Kreis, welcher durch die drei Punkte A, B und C geht, so erhält man damit einen Durchschnitt (einen kleinen Kreis) der gesuchten Kugel. Der Mittelpunkt des gefundenen Kreises heisse F. Errichtet man daher in F ein Loth FO auf die Ebene ABC, so muss dasselbe durch den Mittelpunkt der gesuchten Kugel hindurchgehen. Man fälle ferner von F auf die gegebene Ebene $\mathfrak{E}$ ein Loth FG, FG $\perp$ $\mathfrak{E}$. Auf diese Weise erhält man eine Ebene OFG (in unserer Zeichnung die Ebene des Papiers), welche zugleich senkrecht steht auf Ebene ABC und auf Ebene $\mathfrak{E}$. Der Durchschnitt der Ebenen OFG und ABC heisse HI, so wird HI ein Durchmesser des Kreises ABC. Da FO $\perp$ ABC steht, so ist auch FO $\perp$ HI. Der Durchschnitt der Ebenen OFG und 𝔈 heisse GD, so ist auch FG $\perp$ GD. Wir haben nun eine Ebene HFIOGD. In dieser Ebene beschreiben wir einen Kreis, welcher durch die Punkte H und I geht und die gerade Linie GD berührt nach I. 2, Seite 26. Es giebt zwei Auflösungen, von denen jede auch eine andere Auflösung unserer Aufgabe herbeiführt. Wir wollen diejenige Auflösung wählen, wo der gefundene Kreis durch H und I die Linie GD in D berührt. Der Mittelpunkt O dieses Kreises ist nun auch der Mittelpunkt der gesuchten Kugel, deren Radius OD = OH = OI ist, wo aber auch OH = OA OB = OC ist. Es bleibt noch übrig zu beweisen, dass die gefundene Kugel die gegebene Ebene in D berührt. Nach der Construction ist Ebene OFG senkrecht auf Ebene 𝔈, ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt ist GD, worauf der Radius OD, welcher in der Ebene OFG liegt, senkrecht steht. OD steht also auch senkrecht auf Ebene 𝔈, daher berührt die gefundene Kugel die gegebene Ebene 𝔈 in D.

Man hätte die Erzeugung dieser Kugel sich auch so vorstellen können. Dreht man den Kreis durch H, I und D um seinen Durchmesser FO, so bleibt HI in allen Lagen senkrecht auf FO in F. Es wird also HI eine Ebene beschreiben, welche senkrecht in F auf FO steht; die Endpunkte H und I werden einen Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt F und dessen Radius FH = FI ist. Im Umfange dieses Kreises müssen aber nach den oben aufgestellten Bestimmungen die Punkte A, B und C liegen.

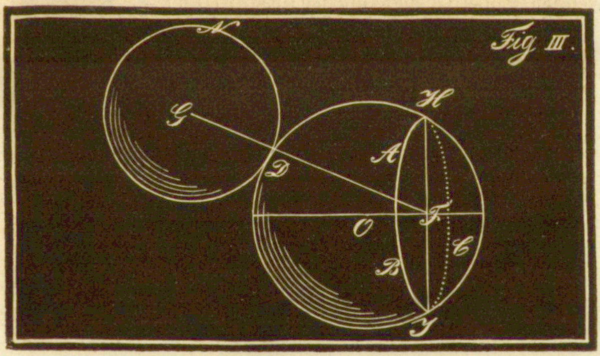
Die Figur zeigt einen horizontalen Durchschnitt HIO und einen verticalen Durchschnitt der gefundenen Kugel.

Nach der obigen Auseinandersetzung sind zwei Auflösungen dieser Aufgabe möglich. Bei der anderen Auflösung würde der Berührungspunkt der Kugel mit der Ebene oberhalb DG und der Mittelpunkt auf der entgegengesetzten Seite der Ebene ABC fallen, wo jetzt O liegt.

Für welche Lage der Punkte A, B, C und der Ebene 𝔈 ist die Auflösung unmöglich?

Aufgabe 3.

Eine Kugel zu beschreiben, welche durch drei gegebene Punkte geht und eine gegebene Kugel berührt.



Die gegebenen Punkte heissen A, B und C. Der Mittelpunkt der gegebenen Kugel heisse G.

Man lege durch die Punkte A, B und C einen Kreis, dessen Mittelpunkt F sei. Man muss nun diesen Kreis ansehen als einen kleinen Kreis der gesuchten Kugel. Man errichte darauf in FO ein Loth auf die Ebene ABC, so muss dieses Loth durch den Mittelpunkt der gesuchten Kugel gehen. Man verbinde ferner F mit G, so erhält man eine Ebene OFG, welche die Ebene ABC schneidet in der geraden Linie HI, einem Durchmesser des Kreises ABC, wo $FO \perp HI$. Die Ebene OFG wird ferner die gegebene Kugel schneiden in einem grössten Kreise. Die Ebene des Papiers stelle uns die Ebene HFIOG vor, auf welcher die Ebene ABC senkrecht steht. Man beschreibe nun einen Kreis, welcher durch die Punkte H und I geht, ausserdem den gefundenen grössten Kreis der Kugel tangirt (in der Ebene HIFOG) nach Aufgabe 3, Seite 27. Es sind zwei Auflösungen möglich: ein Kreis, der den Kreis um G von aussen in D berührt, und ein Kreis, der den Kreis um G von innen in N berührt. Der Mittelpunkt jedes dieser beiden Kreise kann als Mittelpunkt der gesuchten Kugel angesehen werden. Unsere Aufgabe lässt also zwei Auflösungen zu: eine Kugel, welche die gegebene Kugel von aussen in D, und eine Kugel, welche die gegebene Kugel von innen in N berührt.

Beweis: Es kann leicht gezeigt werden, dass $OH = OA = OB = OC$ ist, ebenso ist $OH = OD$. Es liegen daher A, B und C auf der Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunkt O, und deren Radius OD ist. Da ferner der Abstand der Mittelpunkte O und G der gefundenen und der gesuchten Kugel gleich der Summe ihrer Radien ist, so berührt die Kugel um O die Kugel um G in D. Der Mittelpunkt der zweiten Kugel, welche die Kugel um G in N von innen berührt, muss in der Verlängerung von NG liegen, und zwar wird alsdann der Abstand zwischen den Mittelpunkten der gegebenen und der gesuchten Kugel gleich sein der Differenz ihrer Radien.

Nachdem man den Kreis durch H und I gefunden hatte, welcher den Kreis um G berührt, hätte man sich auch die gesuchte Kugel erzeugt denken können durch Rotation um seinen Durchmesser, der in die Richtung von FO fällt, es hätte dann $FH \perp FO$ einen Kreis beschrieben, in dessen Umfange sich die Punkte A, B und C befunden hätten.

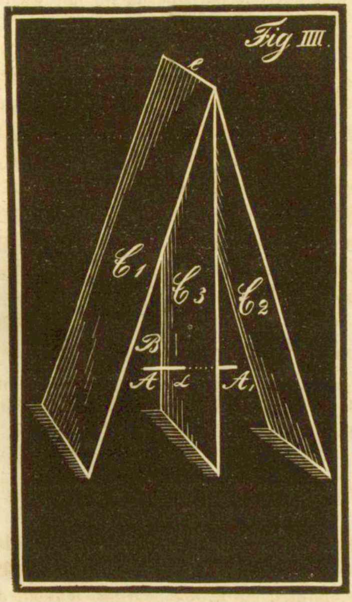
Wie wäre die Auflösung, wenn die drei Punkte A, B und C innerhalb der gegebenen Kugel lägen?

Können die Punkte A, B und C jemals in eine gerade Linie fallen?

In welchen Fällen ist die Aufgabe unmöglich?

Aufgabe 4.

Es sind zwei Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ gegeben, ausserdem zwei Punkte A und B, man soll eine Kugel construiren, welche die beiden Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ berührt, und auf deren Oberfläche die Punkte A und B liegen.



Die beiden Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ schneiden sich in einer geraden Linie e; man lege durch e eine Ebene E_3, welche den Neigungswinkel der Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ halbirt. Jeder Punkt der Ebene $\mathfrak{E}_3$ hat nun die Eigenschaft, dass wenn man von ihm Lothe fällt auf die Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$, diese Lothe gleich sind; dass also eine Kugel beschrieben von diesem Punkte als Mittelpunkt und mit den Lothen als Halbmesser beide Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ berührt. Der Mittelpunkt der gesuchten Kugel muss also in der Ebene $\mathfrak{E}_3$ liegen. Man fälle nun von A ein Loth $A\alpha$ auf die Ebene $\mathfrak{E}_3$, verlängere dasselbe über α hinaus, bis dass $\alpha A^1 = \alpha A$ wird, so wird die Ebene $\mathfrak{E}_3$ senkrecht stehen auf dem Lothe AA_1 und der geometrische Ort sein für alle Kugeln, auf deren Oberfläche die Punkte A und A^1 liegen. Jede Kugel, deren Mittelpunkt in der Ebene $\mathfrak{E}_3$ liegt, wird so beschaffen sein, dass wenn A auf ihrer Oberfläche liegt, auch A^1 auf ihrer Oberfläche liegt, d. h. die gesuchte Kugel, welche die Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ berühren und durch den Punkt A gehen soll, muss in jedem Falle auch durch den Punkt A^1 gehen. Daraus folgt, dass die gesuchte Kugel so beschaffen sein muss, dass auf ihrer Oberfläche der Punkt A^1 liegt. Man kann daher unsere Aufgabe auf die dritte zurückführen: Durch drei gegebene Punkte A, A^1 und B eine Kugel zu beschreiben, welche die eine der Ebenen $\mathfrak{E}_1$ oder $\mathfrak{E}_2$ berührt. Jede Kugel nämlich, deren Mittelpunkt in $\mathfrak{E}_3$ liegt und eine der beiden Ebenen $\mathfrak{E}_1$ oder $\mathfrak{E}_2$ berührt, muss auch zugleich die andere berühren.

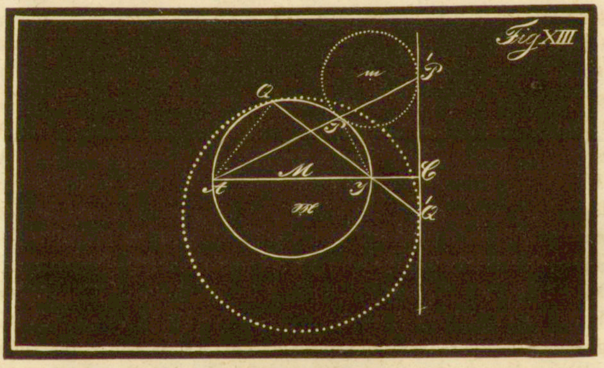
Unsere Aufgabe ist also auf 3 zurückgeführt worden und lässt zwei Auflösungen zu. In dem einen Falle liegt der Mittelpunkt der gesuchten Kugel vor der Ebene ABA^1, in dem anderen Falle hinter der Ebene ABA^1.

Wenn beide Punkte A und B in die Ebene $\mathfrak{E}_3$ fallen, alsdann muss man die Auflösung auf andere Weise bewerkstelligen, oder vielmehr auf andere Weise den dritten Punkt finden, der auf der Oberfläche der gesuchten Kugel liegen soll. Man muss AB ziehen, die Linie AB halbiren in m, und in m eine lothrechte Ebene $\mathfrak{E}_4$ auf AB construiren, so wird dieselbe ebenfalls ein geometrischer Ort sein für die Mittelpunkte aller Kugeln, auf deren Oberfläche sich die Punkte A und B befinden sollen. Der Mittelpunkt der gesuchten Kugel muss also in dem Durchschnitte der Ebenen $\mathfrak{E}_4$ und $\mathfrak{E}_3$ liegen, welchen wir durch CD bezeichnen wollen. Wo auch immer in CD dieser Mittelpunkt liegen mag, es ist ausgemacht, dass, wenn man mit dem Radius mA um m einen Kreis in einer Ebene beschreibt, die in m senkrecht auf CD steht, jeder Punkt des Umfangs dieses Kreises auf der Oberfläche der gesuchten Kugel liegen muss, z. B. der beliebige Punkt E. $mA = mE$, Ebene AmE senkrecht auf CD, wo CD der Durchschnitt ist von $\mathfrak{E}_3$ mit einer auf AB in m senkrechten Ebene, und $mA = mB$. Wir haben jetzt wieder die dritte Aufgabe: Durch die drei Punkte A, B, E eine Kugel zu legen, welche eine der Ebenen $\mathfrak{E}_1$ oder $\mathfrak{E}_2$ berührt u. s. w. Zwei Auflösungen.

Wie wird die Aufgabe gelöst, wenn die Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ parallel laufen? Wenn einer der gegebenen Punkte in die eine der gegebenen Ebenen fällt? Für welche Bedingungen ist die Aufgabe unmöglich?

Vorbereitende Sätze zu Aufgabe 5.

1. Es ist eine Kugel gegeben und eine Ebene. Fällt man vom Mittelpunkte der Kugel ein Loth auf die Ebene, so haben die beiden Durchschnittspunkte dieses Lothes mit der Kugeloberfläche Eigenschaften, welche denen des äusseren und inneren Aehnlichkeitspunktes für Kreis und gerade Linie entsprechen. (Vergl. §. 17, Seite 18.)



Zur Versinnlichung können wir die obige Figur anwenden. M sei der Mittelpunkt der gegebenen Kugel, MC sei das Loth auf die gegebene Ebene, welche wir durch $\mathfrak{E}$ bezeichnen wollen, also $MC \perp \mathfrak{E}$. MC schneidet die Oberfläche der Kugel in den Punkten A und I. Es sollen nun diese Punkte die Eigenschaften des äusseren und inneren Aehnlichkeitspunktes haben.

Zieht man z. B. eine Linie von A, so schneidet dieselbe die Oberfläche der Kugel noch in P und die Ebene $\mathfrak{E}$ in P^1. Es soll alsdann $AP \,.\, AP^1 = AI \,.\, AC$ sein. Offenbar bilden AC und AP^1 eine Ebene P^1AC, welche senkrecht steht auf der Ebene $\mathfrak{E}$ und die Kugel in einem grössten Kreise schneidet. Es folgt daraus die Aehnlichkeit der Dreiecke API und AP^1C, und daraus die obige Gleichung $AP \,.\, AP^1 = AI \,.\, AC$.

Zieht man eben so eine Linie von I, so schneidet dieselbe die Oberfläche der Kugel noch in Q und die Ebene $\mathfrak{E}$ in Q^1. Es folgt alsdann aus der Aehnlichkeit der Dreiecke IAQ und ICQ^1 die Gleichung $IQ \,.\, IQ^1 = IA \,.\, IC$.

Den Punkt A kann man den *äusseren Aehnlichkeitspunkt* nennen, in Bezug darauf sind A und C oder P und P^1 *potenzhaltende* Punkte. Den Punkt I kann man den *inneren Aehnlichkeitspunkt* nennen, in Bezug darauf sind A und C oder Q und Q^1 *potenzhaltende* Punkte.

2. *Berührt* eine Kugel eine gegebene Kugel und eine gegebene Ebene, so sind die Berührungspunkte *potenzhaltende*, und zwar vom *äusseren* Aehnlichkeitspunkte, wenn die Kugel von *aussen* berührt wird, und vom *inneren*, wenn die Kugel von *innen* berührt wird.

Zur Versinnlichung diene die alte Figur XIII. Es sei $\mathfrak{m}$ der Mittelpunkt der Kugel, welche die gegebene Kugel um M von *aussen* in P und die gegebene Ebene $\mathfrak{E}$ in P^1 berührt. Es soll dann bewiesen werden, dass P und P^1 *potenzhaltende* Punkte vom *äusseren* Aehnlichkeitspunkte sind, d. h. dass PP^1 verlängert durch A hindurch geht.

Man verbinde P mit A, ferner $\mathfrak{m}$ mit P und P^1. Da die Kugel um $\mathfrak{m}$ die Kugel um M in P *berührt*, so ist $MP\mathfrak{m}$ eine gerade Linie. Da die Kugel um $\mathfrak{m}$ die Ebene in P^1 berührt, so ist $\mathfrak{m}P^1 \perp \mathfrak{E}$, daher ist $\mathfrak{m}P^1 \parallel MC$. Es bildet daher $\mathfrak{m}P^1CIMAP$ eine Ebene, welche senkrecht auf der Ebene $\mathfrak{E}$ steht, die Kugel um M in dem grössten Kreise $AMPI$, und die Kugel um $\mathfrak{m}$ in dem grössten Kreise $\mathfrak{m}PP^1$ schneidet. Aus der Parallelität von MC und $\mathfrak{m}P^1$ folgt die Gleichheit der Winkel $M\mathfrak{m}P^1$ und $AM\mathfrak{m}$, und daraus wieder die Gleichheit der Winkel $\mathfrak{m}PP^1$ und MPA, woraus sich ergiebt, dass APP^1 eine gerade Linie ist, d. h. dass P und P^1 potenzhaltende Punkte von A sind, d. h. $AP \,.\, AP^1 = AI \,.\, AC$.

Es berühre ferner die Kugel um $\mathfrak{M}$ die gegebene Kugel von *innen* in Q, die gegebene Ebene $\mathfrak{E}$ in Q^1, so ist leicht zu beweisen, dass Q und Q^1 *potenzhaltende* Punkte sind vom *inneren* Aehnlichkeitspunkte I, d. h. dass QQ^1 durch I hindurch geht, oder dass $IQ \,.\, IQ^1 = IA \,.\, IC$. Es folgt dies aus der Parallelität der Linien MC und $\mathfrak{M}Q^1$, welche senkrecht auf der Ebene $\mathfrak{E}$ stehen.

3. Berührt eine Kugel um $\mathfrak{m}$ eine gegebene Ebene $\mathfrak{E}$ in P^1 und hat sie mit einer gegebenen Kugel um M einen Punkt gemein, der potenzhaltend zu P^1 ist, so *muss* sie die gegebene Kugel *ebenfalls berühren*; und zwar von *aussen*, wenn der gemeinsame Punkt potenzhaltend ist vom *äusseren* Aehnlichkeitspunkte, dagegen von *innen*, wenn der gemeinsame Punkt potenzhaltend ist vom *inneren* Aehnlichkeitspunkte.

Die Kugel um $\mathfrak{m}$ hat mit der Kugel um M den Punkt P gemein, welcher potenzhaltend sein soll vom äusseren Aehnlichkeitspunkte, d. h. $AP \,.\, AP^1 = AI \,.\, AC$, man soll beweisen, dass sie die Kugel um M in P von *aussen* berührt. Dazu ist nur nöthig nachzuweisen, dass $MP\mathfrak{m}$ eine gerade Linie ist. $\mathfrak{m}P^1$

und AC bilden eine Ebene, in welcher also auch die gerade Linie APP^1 liegt, eben so mM, welche mit den Parallelen mP^1 und MC gleiche Winkel bildet, AMm und P^1mM; daraus folgt wiederum, wenn man Rücksicht nimmt auf die Gleichschenkligkeit der Dreiecke AMP und mPP^1, die Gleichheit der Winkel APM und P^1Pm, woraus sich ergiebt, dass MPm eine gerade Linie bilden, dass also der Abstand mM beider Kugeln gleich ist der Summe ihrer Radien, daher die Kugel um m die um M in P berührt.

Eben so kann man nachweisen, dass, wenn eine Kugel um $\mathfrak{M}$ eine Ebene $\mathfrak{E}$ in Q^1 berührt und mit einer gegebenen Kugel um M einen Punkt Q gemeinsam hat, der ein potenzhaltender Punkt zum inneren Aehnlichkeitspunkte I ist, d. h. $IQ \,.\, IQ^1 = IA \,.\, IC$, alsdann die Kugel um $\mathfrak{M}$ die um M von innen berühren muss.

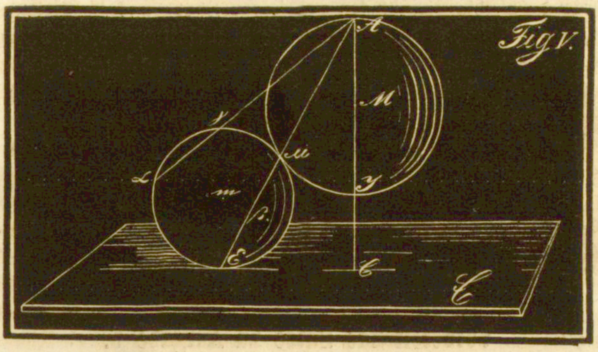
4. Berührt eine Kugel um m eine gegebene Kugel um M in P und hat die Kugel um m ausserdem mit der Ebene $\mathfrak{E}$ einen Punkt gemein, z. B. P^1, der potenzhaltend zu P ist, so muss sie die gegebene Ebene ebenfalls berühren, d. h. sie muss mit ihr ausser P^1 keinen anderen Punkt gemein haben.

Nach der Voraussetzung sollen P, P^1 und A in einer geraden Linie liegen (weil nämlich die Kugeln um M und m sich von aussen in P berühren, so müssen P und P^1 potenzhaltende Punkte vom äusseren Aehnlichkeitspunkte sein), d. h. $AP \,.\, AP^1 = AI \,.\, AC$. Man verbinde m mit P und P^1, desgleichen M mit P. Aus der Berührung der Kugeln um M und m folgt, dass MPm eine gerade Linie ist, eben so ist es APP^1 nach der Voraussetzung. Es folgt daraus mit Benutzung der Gleichschenkligkeit der Dreiecke MAP und mPP^1, dass Winkel $AMm = MmP^1$ ist, also $AC \mathrel{\#} mP^1$. Da nämlich MPm und APP^1 eine Ebene bilden, als zwei sich schneidende Linien, so liegen die Punkte A, M, P, m, I, C und P^1 alle in derselben Ebene (Mm, AP^1), welche senkrecht auf der Ebene $\mathfrak{E}$ steht. Da die Linien AC und mP^1 parallel laufen, ferner $AC \perp \mathfrak{E}$, so ist auch mP^1 senkrecht auf $\mathfrak{E}$, d. h. die Kugel um m berührt die Ebene $\mathfrak{E}$ in P^1.

Berührt daher eine Kugel um $\mathfrak{M}$ eine gegebene Kugel um $\mathfrak{M}$ in Q von innen, hat die Kugel um $\mathfrak{M}$ ferner mit der Ebene $\mathfrak{E}$ einen Punkt Q^1 gemein, sind ausserdem Q und Q^1 potenzhaltende Punkte vom inneren Aehnlichkeitspunkte, so muss die Kugel um $\mathfrak{M}$ ebenfalls die Ebene $\mathfrak{E}$ in Q^1 berühren.

Aufgabe 5.

Eine Kugel zu beschreiben, welche zugleich eine gegebene Kugel und eine gegebene Ebene berührt, ausserdem durch zwei gegebene Punkte geht.



Es ist eine Kugel um M gegeben, ferner eine Ebene $\mathfrak{E}$, ausserdem sind die Punkte α und β gegeben, man soll eine Kugel beschreiben, welche durch die Punkte α und β geht, die Kugel um M und die Ebene $\mathfrak{E}$ berührt.

Analysis. Man denke sich die Aufgabe als gelöst, es erfülle die Kugel um m die vier gegebenen Bedingungen. Die Kugel um m berühre die gegebene Kugel in μ, die gegebene Ebene in ε, so müssen nach dem vorbereitenden Satze Nr. 2 die Punkte μ und ε potenzhaltend sein, und zwar vom äusseren Aehnlichkeitspunkte A, wie in unserer Zeichnung, wenn die Kugeln um M und m sich von aussen berühren, dagegen vom inneren, wenn die Kugeln um M und m sich von innen berühren. Es ist also $A\mu \,.\, A\varepsilon = AI \,.\, AC$. Verbindet man nun A und α, so muss $A\alpha$ die Kugel um m noch in einem zweiten Punkte γ schneiden, und zwar wird $A\gamma \,.\, A\alpha = A\mu \,.\, A\varepsilon = AI \,.\, AC$. Da AI, AC, $A\alpha$ bekannt sind, so ist es leicht $A\gamma$ durch Construction zu finden. Alsdann kommt es nur darauf an, nach Aufgabe 2 durch die drei Punkte α, β und γ eine Kugel zu beschreiben, welche die gegebene Ebene berührt, was z. B. in ε geschehen soll.

Construction. Man fälle von M auf die Ebene $\mathfrak{E}$ ein Loth MC, so erhält man den äusseren Aehnlichkeitspunkt A, den inneren I. Man kann nun den äusseren nehmen, wenn man eine Kugel beschreiben will, welche die gegebene von aussen berührt; oder den inneren, wenn man eine Kugel beschreiben will, welche die gegebene von innen berührt. Jeder der beiden Fälle liefert zwei verschiedene Auflösungen, so dass die Aufgabe deren überhaupt also vier verschiedene Kugeln zulässt.

Wir wollen den äusseren Aehnlichkeitspunkt A nehmen. Man ziehe dann den Strahl $A\alpha$, so muss derselbe die gesuchte Kugel noch in einem zweiten Punkte schneiden, welchen wir γ nennen wollen, so dass also $A\alpha \,.\, A\gamma = AC \,.\, AI$ wird. Wir beschreiben nun nach der zweiten Aufgabe eine Kugel, welche durch die Punkte α, β und γ hindurch geht und die gegebene Ebene $\mathfrak{E}$ berührt. Es giebt zwei Kugeln, welche diese Bedingungen erfüllen; wir wollen diejenige um $\mathfrak{m}$ nehmen, welche die gegebene Ebene in ε berührt. Es bleibt noch übrig zu beweisen, dass die Kugel um $\mathfrak{m}$ auch die gegebene Kugel um M berührt. Zu diesem Zwecke ziehe man die Linie $A\varepsilon$, so wird dieselbe die Kugel um $\mathfrak{m}$ noch in einem zweiten Punkte schneiden, welchen wir μ nennen wollen, eben so die gegebene Kugel noch in x. Da nun $A\mu \,.\, A\varepsilon = A\gamma \,.\, A\alpha = AI \,.\, AC$ ist (nach der Construction); da ferner $Ax \,.\, A\varepsilon = AI \,.\, AC$ ist, weil A ja äusserer Aehnlichkeitspunkt der gegebenen Ebene und Kugel ist, so müssen μ und x zusammenfallen, d. h. die Kugel um $\mathfrak{m}$ und M haben einen Punkt μ gemein, welcher potenzhaltender Punkt zu ε ist, worin die Kugel um $\mathfrak{m}$ die gegebene Ebene berührt. Nach dem vorbereitenden Satze Nr. 3 muss also die Kugel um $\mathfrak{m}$ ebenfalls die Kugel um M berühren und zwar von aussen.

Es giebt vier Kugeln, welche die gegebenen Bedingungen erfüllen, zwei berühren die gegebene Kugel von aussen, zwei von innen.

Wie ist es mit der Auflösung, wenn β in der Linie $A\alpha$ liegt?
Wenn α oder β in der gegebenen Ebene oder auf der Oberfläche der gegebenen Kugel liegt?
In welchen Fällen ist die Auflösung unmöglich?

Vorbereitende Sätze zu Aufgabe 6.

1. Für jede zwei gegebene Kugeln giebt es einen äusseren und einen inneren Aehnlichkeitspunkt. Man findet dieselben auf folgende Weise: Man lege durch die beiden Mittelpunkte eine Ebene, so liefert dieselbe als Durchschnitte mit den beiden gegebenen Kugeln zwei grösste Kreise, deren äusseren und inneren Aehnlichkeitspunkt in der Centrale der beiden Kugeln nach §. 1 und 2, Seite 1 und 2 leicht gefunden werden kann. Für jede beliebige Ebene, welche man auf diese Weise durch die Centrale der beiden Kugeln legen kann, erhält man aber in der Centrale dieselben Punkte A und I.

Aufgabe: Es sind zwei Kugeln gegeben, man soll ihren äusseren und inneren Aehnlichkeitspunkt aufsuchen für alle sechs verschiedenen Lagen, welche in §. 1, Seite 1 angegeben worden sind.

2. Zieht man einen äusseren Aehnlichkeitsstrahl, und schneidet derselbe die eine Kugeloberfläche in zwei Punkten, so muss er dasselbe bei der anderen Kugeloberfläche thun; tangirt er die eine Kugeloberfläche, so tangirt er auch die andere; hat er keinen Punkt mit der einen Kugeloberfläche gemein, so hat er auch keinen Punkt mit der anderen Kugeloberfläche gemein.

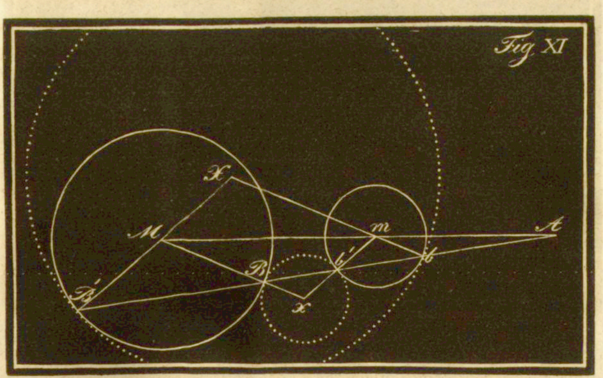
Dieselben Sätze gelten für die inneren Aehnlichkeitsstrahlen.

Aufgabe: Es sind zwei Kugeln gegeben, man soll einen Kegel construiren, der beide Kugeln einhüllt; oder man soll einen doppelten Kegel (Scheitelkegel) construiren, der beide Kugeln einhüllt.

3. Zieht man einen äusseren Aehnlichkeitsstrahl für zwei gegebene Kugeln, so schneidet derselbe die Oberflächen im Allgemeinen in überhaupt vier Punkten, wovon je zwei (auf verschiedenen Kugeln) so beschaffen sind, dass die dazu gehörigen Radien parallel laufen, während die je zwei anderen (auf den verschiedenen Kugeln) potenzhaltende Punkte in dem früher erklärten Sinne sind.

Dasselbe gilt von jedem inneren Aehnlichkeitsstrahl. Bei dem äusseren Aehnlichkeitsstrahle sind die parallelen Radien gleich, bei dem inneren entgegengesetzt gerichtet.

4. **Berührt** eine Kugel zwei andere um M und m **gleichartig**, so sind die Berührungspunkte **potenzhaltend** vom **äusseren** Aehnlichkeitspunkte.

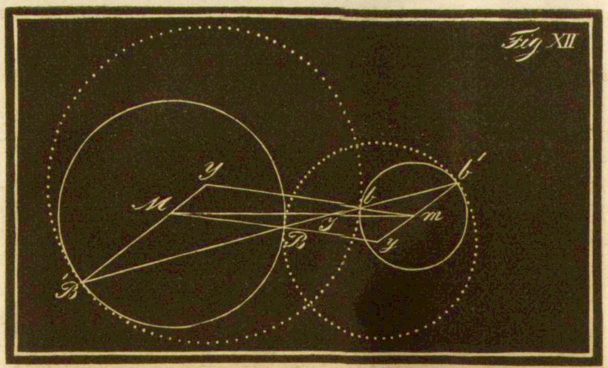


Die Kugel um x berührt die Kugel um M in B von aussen, eben so die Kugel um m in b^1 von aussen, man soll beweisen, dass Bb^1 durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt A geht. Da die Kugeln um M und x sich in B berühren, so ist MBx eine gerade Linie; desgleichen ist mb^1x eine gerade Linie, folglich bildet Mmx eine Ebene, worin B und b^1 liegen. Diese Ebene Mmx schneidet die Kugeln um M, m und x so, dass man drei grösste Kugelkreise erhält, von denen der Kreis um x die beiden Kreise um M und m **gleichartig** berührt, und zwar den Kreis um M in B, den Kreis um m in b^1, Bb^1 geht also durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt A, welches **zugleich** der äussere Aehnlichkeitspunkt für die Kugel ist. B und b^1 sind also potenzhaltende Punkte des äusseren Aehnlichkeitspunktes A der beiden gegebenen Kugeln um M und m.

Eben so berührt die Kugel um X die beiden gegebenen Kugeln um M und m von innen in B^1 und b, folglich sind B^1 und b potenzhaltende Punkte des äusseren Aehnlichkeitspunktes A.

Eben so leicht lässt sich nachweisen, dass wenn eine Kugel um x eine andere um M von **aussen** berührt in B und mit der Kugel um m einen potenzhaltenden Punkt b^1 vom **äusseren** Aehnlichkeitspunkte A gemein hat, diese Kugel um x auch die andere Kugel um m von **aussen berühren** muss. Nach der Voraussetzung liegen die Punkte B, b^1 und A in gerader Linie, man kann also durch die Centrale AmM und Ab^1B eine Ebene legen, so wird diese Ebene, da x in der Verlängerung von MB liegen muss, alle drei gegebenen Kugeln in grössten Kreisen um M, m und x durchschneiden. Man verbinde nun x mit b^1 und b^1 mit m, so lässt sich leicht nachweisen aus der Gleichheit der Winkel an der Grundlinie in den drei gleichschenkligen Dreiecken MBB^1, mbb^1 und xBb^1, dass mb^1x eine gerade Linie ist, d. h. dass die Kugel um x auch die Kugel um m von aussen berührt.

Berührt eine Kugel um X eine Kugel um M von innen in B^1, hat ferner die Kugel um X einen Punkt b mit einer Kugel um m gemein, und sind B^1 und b potenzhaltende Punkte vom äusseren Aehnlichkeitspunkte, so muss die Kugel um X auch die Kugel um m von innen berühren.



5. Berührt eine Kugel zwei andere ungleichartig, so sind die Berührungspunkte potenzhaltend vom inneren Aehnlichkeitspunkte.

Z. B. Die Kugel um Y berührt die Kugel um M von innen in B^1, dagegen die Kugel um m von aussen in b, so sind B^1 und b potenzhaltende Punkte vom inneren Aehnlichkeitspunkte I.

Oder: Die Kugel um y berührt die Kugel um M von aussen in B, die Kugel um m von innen in b^1, so sind B und b^1 potenzhaltende Punkte.

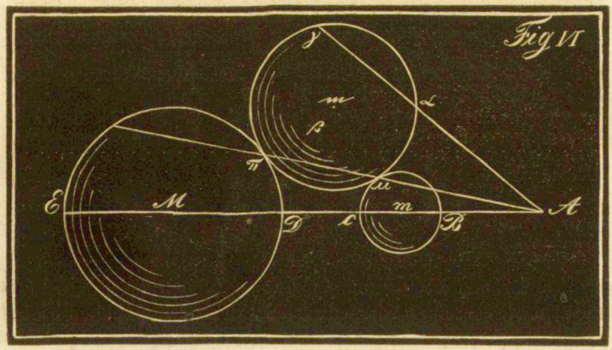
Ferner: Berührt eine Kugel um Y eine Kugel um M von innen in B^1, hat die Kugel um Y mit einer anderen Kugel um m einen Punkt b gemein, sind ausserdem B^1 und b potenzhaltende Punkte vom inneren Aehnlichkeitspunkte I, so muss die Kugel um Y auch die Kugel um m berühren, und zwar von aussen.

Oder: Berührt eine Kugel um y eine Kugel um M in B von aussen, hat die Kugel um y mit einer anderen Kugel nm m einen Punkt b^1 gemein, sind ausserdem B und b^1 potenzhaltende Punkte vom inneren Aehnlichkeitspunkte I, so muss die Kugel um y auch die Kugel um m berühren und zwar von innen.

Aufgaben: Es sind zwei Kugeln gegeben, man soll eine dritte finden, welche beide von aussen berührt, oder beide von innen berührt, oder beide ungleichartig berührt.

Aufgabe 6.

Es sind zwei Kugeln und zwei Punkte gegeben, man soll eine Kugel beschreiben, welche die beiden gegebenen Kugeln berührt, und in deren Oberfläche die beiden gegebenen Punkte liegen.



Die beiden gegebenen Kugeln sind um M und m beschrieben worden, die beiden gegebenen Punkte heissen α und β.

Man kann nun entweder den äusseren oder den inneren Aehnlichkeitspunkt benutzen und erhält danach entweder eine Kugel, welche die beiden gegebenen gleichartig, oder eine Kugel, welche die beiden gegebenen ungleichartig berührt.

Der äussere Aehnlichkeitspunkt heisse A, so erhalten wir auf der Centrale die constanten Producte $AB \,.\, AE = AC \,.\, AD$, welches überhaupt die Producte von zugehörigen potenzhalten Punkten des äusseren Aehnlichkeitspunktes sind. Soll die gesuchte Kugel die beiden gegebenen gleichartig z. B. von aussen berühren, so müssen die Berührungspunkte, welche hier durch μ und π bezeichnet sind, potenzhaltend sein, d. h. es muss $A\mu \,.\, A\pi = AB \,.\, AE$ sein. Man ziehe $A\alpha$, so kann man einen Werth $A\gamma$ auf der geraden Linie $A\alpha$ finden, so beschaffen, dass $A\alpha \,.\, A\gamma = AB \,.\, AE$. Darauf lege ich durch die drei Punkte α, β und γ eine Kugel, welche z. B. die Kugel um m berührt. Diese Construction wird nach Nr. 3, Seite 60 ausgeführt. Man erhält zwei Kugeln, von denen die eine die gegebene um m von aussen, die andere von innen berührt. Wir wollen uns nur mit derjenigen Kugel beschäftigen, welche die gegebene Kugel um m von aussen in μ berührt. Alsdann lässt sich leicht nachweisen, dass die so gefundene Kugel um m mit der Kugel um M einen Punkt gemein hat, den wir mit π bezeichnen wollen, welcher potenzhaltend zu μ ist, so dass $A\mu \,.\, A\pi = AB \,.\, AE$. $A\mu$ muss nämlich die Kugel um m noch in einem Punkte, den wir ε nennen wollen, schneiden, so dass $A\mu \,.\, A\varepsilon = A\alpha \,.\, A\gamma = AB \,.\, AE$ ist, eben so muss $A\mu$ die Kugel um M in einem Punkte schneiden, den wir π nennen wollen, alsdann ist, da A äusserer Aehnlichkeitspunkt ist, $A\mu \,.\, A\pi = AB \,.\, AE$, daher $A\mu \,.\, A\varepsilon = A\mu \,.\, A\pi$. Es müssen folglich ε und π zusammenfallen, d. h. die Kugel um m muss mit der um M einen Punkt π gemein haben, so dass π und μ zu A gehörige potenzhaltende Punkte sind. Daraus folgt nach den vorbereitenden

Sätzen Nr. 4 und 5 zu dieser Aufgabe, dass die Kugel, welche durch α, β und γ geht und die Kugel um m in μ von aussen berührt, auch diejenige um M von aussen berühren muss.

Bei Benutzung des inneren Aehnlichkeitspunktes erhalten wir zwei Kugeln, von denen die eine die Kugel um M von aussen, die um m von innen berührt; die andere dagegen die Kugel um M von innen, die um m von aussen berührt; in beiden Fällen sollen aber α und β auf der Oberfläche der beschriebenen Kugel liegen.

Vier Auflösungen.

Wie müssen die Bedingungen gestellt werden, wenn der Punkt α angenommen wird auf der Oberfläche der einen Kugel?

Was ist über die Aufgabe zu sagen, wenn der Punkt β in die Linie Aα fällt?

Angabe der Bedingungen, unter welchen die Auflösung unmöglich ist.

Aufgabe 7.

Es sind drei Ebenen $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ und $\mathfrak{E}_3$ gegeben, ausserdem ein Punkt α; man soll eine Kugel so beschreiben, dass dieselbe die drei gegebenen Ebenen berührt, und der Punkt α auf ihrer Oberfläche zu liegen kommt.

Auflösung: Man halbire den Winkel von zwei Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ durch die Ebene E_1, so dass also Winkel ($\mathfrak{E}_1$, E_1) $=$ Winkel ($\mathfrak{E}_2$, E_1) wird; man fälle darauf von α auf E_1 ein Loth $\alpha\varepsilon$ und verlängere dasselbe über ε bis β, so dass $\beta\varepsilon = \alpha\varepsilon$. Jede Kugel, deren Mittelpunkt in E_1 liegt und auf deren Oberfläche sich α befindet, muss nun auch durch β gehen. Da aber E_1 der geometrische Ort für alle Kugeln ist, welche die Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ berühren, so muss die gesuchte Kugel so beschaffen sein, dass sich α und β auf ihrer Oberfläche befinden. Wir haben jetzt nur noch die Aufgabe zu lösen, eine Kugel zu beschreiben, welche zwei Ebenen $\mathfrak{E}_3$ und $\mathfrak{E}_1$ oder $\mathfrak{E}_2$ berührt, ausserdem durch die Punkte α und β geht. Die Aufgabe 7 ist damit zurückgeführt worden auf die Aufgabe 4 und lässt daher zwei Auflösungen zu.

Wenn die Ebene E_1, welche den Winkel der Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ halbirt, der geometrische Ort für alle Punkte ist, welche von $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ gleichweit abstehen; wenn ferner die Ebene E_2, welche den Winkel der Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_3$ halbirt, der geometrische Ort für alle Punkte ist, welche von $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_3$ gleichweit abstehen: so ist der Durchschnitt der Ebenen E_1 und E_2, welche gerade Linie wir mit e bezeichnen wollen, der geometrische Ort aller Punkte, welche gleichweit von den Ebenen $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ und $\mathfrak{E}_3$ abstehen; es muss folglich e auch in der Ebene E_3 liegen, welche den Winkel der beiden Ebenen $\mathfrak{E}_2$ und $\mathfrak{E}_3$ halbirt. Daraus folgt, dass die Linie e zugleich in den drei Ebenen E_1, E_2 und E_3 liegt. Diese Linie ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kugeln, welche zugleich die drei gegebenen Ebenen berühren.

Man könnte, wenn die gesuchte Kugel durch den Punkt α gehen sollte, noch leicht mit Hülfe der obigen Linie e einen zweiten Punkt β finden, der ebenfalls auf ihrer Oberfläche liegen müsste. Man braucht dazu nur von α auf e ein Loth $\alpha\varepsilon$ zu fällen und dasselbe über e hinaus zu verlängern bis β, so dass $\varepsilon\alpha = \varepsilon\beta$ wird.

Aus den obigen Betrachtungen ergiebt sich ein stereometrischer Satz:

„Hat man drei beliebige Ebenen $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ und $\mathfrak{E}_3$, und halbirt den Winkel, den je zwei von ihnen bilden, durch die resp. Ebenen E_1, E_2 und E_3, so schneiden sich diese letzteren drei Ebenen in einer und derselben geraden Linie e."

Dieser Satz ist analog mit demjenigen aus der Dreieckslehre, dass sich die drei geraden Linien, welche die Winkel eines Dreiecks halbiren, in demselben Punkte schneiden.

Aufgabe 8.

Es sind ein Punkt gegeben, zwei Ebenen und eine Kugel: man soll eine Kugel construiren, welche die beiden Ebenen und die gegebene Kugel berührt, so dass der gegebene Punkt auf der Oberfläche der gesuchten Kugel zu liegen kommt.

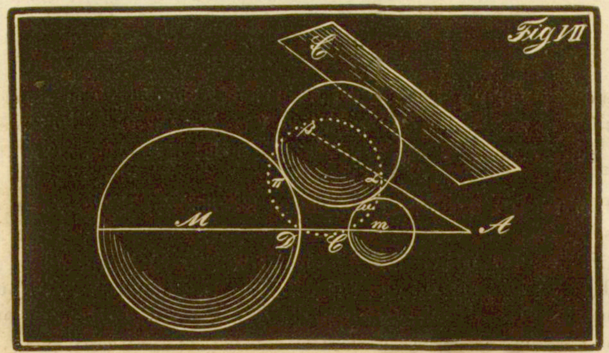
Der Punkt heisse α, die beiden Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$, die gegebene Kugel sei um M beschrieben.

Man halbire den Winkel der Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ durch die Ebene E, so ist dieselbe der geometrische Ort für alle Mittelpunkte der Kugeln, welche die beiden gegebenen Ebenen berühren. Ich fälle darauf von α ein Loth $\alpha\varepsilon$ auf E, und verlängere dasselbe nach der entgegengesetzten Seite, so dass $\varepsilon\alpha = \varepsilon\gamma$ wird. Jede Kugel, deren Mittelpunkt in E liegt und durch den Punkt α geht, muss nun auch durch den Punkt γ gehen. Ich habe nun die Aufgabe zu lösen: Eine Kugel zu beschreiben, welche durch zwei gegebene Punkte α und γ geht und eine gegebene Ebene $\mathfrak{E}_1$ oder $\mathfrak{E}_2$ und die Kugel um M berührt (Nr. 5). Giebt vier Auflösungen.

Oder: Man suche sich den äusseren oder inneren Aehnlichkeitspunkt der Ebene $\mathfrak{E}_1$ oder $\mathfrak{E}_2$ (wir wollen $\mathfrak{E}_1$ wählen) und der Kugel um M. (Vergl. die fünfte Figur.) Je nachdem man den äusseren oder inneren Aehnlichkeitspunkt nimmt, erhält man verschiedene Auflösungen. Wir wollen den äusseren A wählen. Um A zu finden, muss man von M auf $\mathfrak{E}_1$ ein Loth AC fällen und dasselbe rückwärts verlängern, man erhält darauf als constantes Product der potenzhaltenden Punkte für Kugel und Ebene AI . AC. Nennen wir die Berührungspunkte der gesuchten Kugel, welche die Ebene $\mathfrak{E}_1$ und die Kugel (letztere von aussen) berührt, ε und μ, so ist $A\varepsilon \,.\, A\mu = AC \,.\, AI$. Der Punkt α soll aber auf der Oberfläche der gesuchten Kugel liegen, ziehe ich daher $A\alpha$, so muss dieselbe die Oberfläche der gesuchten Kugel noch in einem anderen Punkte schneiden, welchen wir γ nennen wollen, so dass $A\alpha \,.\, A\gamma = A\varepsilon \,.\, A\mu = AC \,.\, AI$ wird. Da wir $A\alpha$, AC und AI kennen, so ist es leicht möglich $A\gamma$ zu construiren, d. h. γ zu finden. Wir haben jetzt die Aufgabe: Eine Kugel zu construiren, welche durch zwei Punkte α und γ geht und eine gegebene Ebene $\mathfrak{E}_2$ berührt, ausserdem noch die Ebene $\mathfrak{E}_1$ oder die Kugel um M berührt. (Entweder nach Aufgabe 4 oder 5.) Vier Auflösungen.

Aufgabe 9.

Gegeben ein Punkt, eine Ebene, zwei Kugeln.



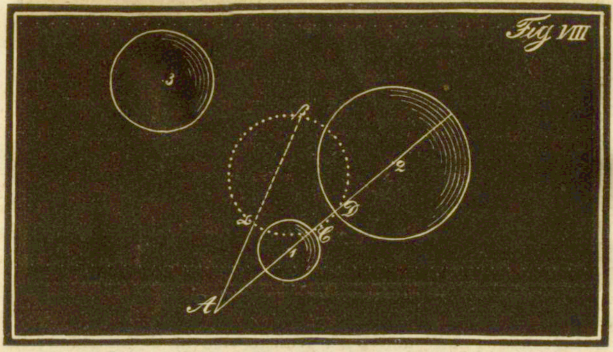
Gegeben sind der Punkt α, die Ebene $\mathfrak{E}$ und die beiden Kugeln um M und m. Man soll eine Kugel beschreiben, welche die beiden gegebenen Kugeln und die gegebene Ebene tangirt, und durch den Punkt α geht.

Analysis. Soll die gesuchte Kugel $\mathfrak{K}$ die beiden Kugeln um M und m berühren, so müssen nach dem vierten vorbereitenden Satze zur Aufgabe 6 die Berührungspunkte potenzhaltend sein und zwar bei gleichartiger Berührung vom äusseren, bei ungleichartiger Berührung vom inneren Aehnlichkeitspunkte. Wir wollen hier eine gleichartige Berührung annehmen und die Berührungspunkte mit μ und π bezeichnen, d. h. A, μ und π liegen in gerader Linie und $A\mu \,.\, A\pi$ ist gleich $AC \,.\, AD$, wo C und D Punkte der Centrale sind, deren Lage die Ansicht der obigen Figur sogleich ergiebt. Die gesuchte Kugel soll nun aber auch auf ihrer Oberfläche den Punkt α haben. Man verbinde A und α, so muss $A\alpha$ die Kugeloberfläche von $\mathfrak{K}$ noch in einem zweiten Punkte schneiden, welchen wir β nennen wollen, so dass $A\alpha \,.\, A\beta = A\mu \,.\, A\pi$ ist oder auch $= AC \,.\, AD$. Da die Lage der Punkte C, D und α bekannt ist, so ist die von β leicht zu bestimmen. Man hat nur nöthig, durch α, C, D einen Kreis zu legen, so wird $A\alpha$ denselben noch in einem zweiten Punkte schneiden, welcher der Punkt β ist. Die Kugel $\mathfrak{K}$ muss also auf ihrer Oberfläche die Punkte α, β haben, die Kugeln um M und m berühren, eben so die Ebene $\mathfrak{E}$. Jede Kugel aber, welche durch α und β geht und eine der Kugeln um M oder m berührt, muss aber nach dem vierten vorbereitenden Satze zur Aufgabe 6 auch die andere Kugel berühren. Es kommt also Alles nur darauf an, eine Kugel zu finden, welche durch die Punkte α und β geht, die Kugel um M oder m berührt und die Ebene $\mathfrak{E}$ berührt. (Aufgabe 5, vier Auflösungen.)

Construction. Man sucht den äusseren oder inneren Aehnlichkeitspunkt der Kugeln um M oder m, jeder Aehnlichkeitspunkt giebt gleich viel Auflösungen, welche auf analoge Weise durchgeführt werden. Wir wollen uns beispielsweise nur mit dem äusseren beschäftigen, den wir A nennen. Man lege nun durch die drei Punkte C, D und α einen Kreis, verlängere $A\alpha$ bis zum zweiten Durchschnittspunkte β mit diesem Kreise, so kommt es allein darauf an: Eine Kugel zu beschreiben, welche durch α und β geht, die Ebene $\mathfrak{E}$ und eine der beiden Kugeln um M oder m berührt. (Aufgabe 5, vier Auflösungen. Zwei Kugeln nämlich, welche von aussen und zwei, welche von innen die beiden gegebenen Kugeln gleichartig berühren.) — Mit Hülfe des inneren Aehnlichkeitspunktes findet man ebenso vier Kugeln, deren jede die beiden gegebenen ungleichartig berührt. — Acht Auflösungen.

Aufgabe 10.

Eine Kugel zu beschreiben, welche durch einen gegebenen Punkt geht und drei gegebene Kugeln berührt.

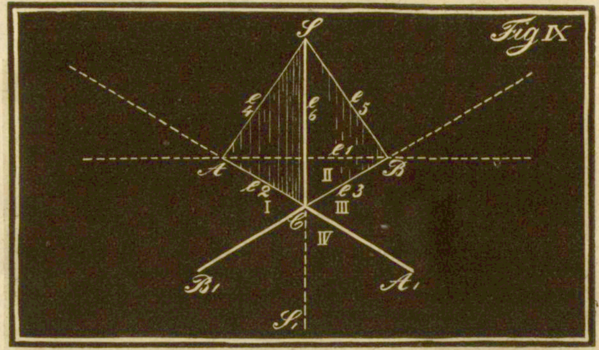


Analysis. Da die gesuchte Kugel die beiden Kugeln (1 und 2) berühren soll, so müssen die Berührungspunkte potenzhaltend sein und zwar bei gleichartiger Berührung vom äusseren, bei ungleichartiger Berührung vom inneren Aehnlichkeitspunkte. Wir wollen hier beispielsweise den äusseren Aehnlichkeitspunkt A betrachten. Da der Punkt α auf der Oberfläche der gesuchten Kugel liegen soll, so muss, wenn man $A\alpha$ zieht, dasselbe die Oberfläche der gesuchten Kugel noch in einem anderen Punkte β treffen, so dass $AC \,.\, AD = A\alpha \,.\, A\beta$, wo C und D in der Centrale liegen und die aus der Figur ersichtliche Lage haben. Eine Kugel aber, auf deren Oberfläche α und β liegen, so dass α und β potenzhaltende Punkte des äusseren Aehnlichkeitspunktes A der Kugeln (1 und 2) sind, hat nach dem vierten vorbereitenden Satze zur Aufgabe 6 die Eigenschaft, dass wenn sie die eine Kugel berührt, sie auch die andere Kugel berühren muss. Es kommt also nur darauf an: Eine Kugel zu beschreiben, welche zwei gegebene Kugeln 3 und 1 oder 2 berührt und durch die beiden Punkte α und β geht. (Aufgabe 6.)

Construction. Man suche den äusseren Aehnlichkeitspunkt A der Kugeln 1 und 2, so findet man in der Centrale die Punkte C und D. Durch die Punkte C, D und α lege man einen Kreis, ziehe die Linie $A\alpha$, so wird dieselbe den obigen Kreis noch in einem anderen Punkte β schneiden müssen. Man lege jetzt durch die Punkte α und β eine Kugel, welche die beiden Kugeln 3 und 1 oder 2 berührt (nach Aufgabe 6). Man erhält vier Auflösungen, zwei Kugeln nämlich, welche die beiden gegebenen Kugeln 1 und 2 von aussen und 3 von aussen oder von innen, ebenso zwei Kugeln, welche 1 und 2 von innen und 3 von aussen oder von innen berühren. Der innere Aehnlichkeitspunkt von (1) und (2) würde auf analoge Weise vier andere Kugeln geben, welche alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen, von denen jede aber die Kugeln 1 und 2 ungleichartig berührt. Acht Auflösungen.

Aufgabe 11.

Eine Kugel zu beschreiben, welche vier gegebene Ebenen berührt.



Zwei gerade Linien AA^1 und BB^1, welche sich in C schneiden, theilen eine Ebene in vier Räume, welche in der obigen Figur durch I, II, III und IV bezeichnet worden sind. Zieht man nun in derselben Ebene eine gerade Linie AB, so kann dieselbe nur durch drei Räume hindurchgehen, nie durch den vierten, hier durch die Räume I, II und III. Legt man nun durch AC und BC Ebenen, so werden dieselben die Ebene ACB in den Linien AC und BC schneiden und den ganzen Raum in acht Abtheilungen theilen, von denen vier oberhalb der Ebene ACB liegen, vier unterhalb. Den Durchschnitt der Ebenen durch AC und BC wollen wir mit SS^1 bezeichnen, wovon CS oberhalb von ACB, CS^1 unterhalb liegt. Legt man nun durch AB eine Ebene parallel mit CS, so wird dieselbe sechs der obigen Abtheilungen schneiden. Legt man aber, wie in der obigen Figur, diese Ebene durch AB so, dass sie SS^1 in einem Punkte S schneidet, so wird sie sieben der gegebenen Abtheilungen schneiden, nie die achte, hier niemals die unterhalb ACB gelegene Abtheilung IV. Betrachten wir nun näher die obige Figur, so finden wir, dass ausser den obigen sieben Abtheilungen noch das Tetraëder da ist, wo alle vier Ebenen vorkommen. Es wird daher im Allgemeinen acht Kugeln geben, welche alle vier Ebenen zugleich berühren, wovon die eine dem Tetraëder eingeschrieben ist, die übrigen sieben in den oben angegebenen sieben Abtheilungen des Raumes liegen.

Bezeichnen wir die Ebene des Papiers mit $\mathfrak{E}_1$, die Ebene SCA mit $\mathfrak{E}_2$, die Ebene SCB mit $\mathfrak{E}_3$, die Ebene SAB mit $\mathfrak{E}_4$; bezeichnen wir ferner die sechs möglichen Durchschnitte mit e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 und e_6, so kann man leicht angeben, auf welche Weise die acht gesuchten Kugeln gefunden werden können.

Man muss bei der Auflösung nur gegenwärtig behalten, dass der geometrische Ort für alle Punkte, welche von zwei gegebenen Ebenen gleichweit abstehen, diejenige Ebene ist, welche den Winkel der beiden gegebenen Ebenen halbirt. Die durch e_1 gelegte Halbirungsebene wollen wir durch E_1 bezeichnen, die durch e_2 gelegte durch E_2 u. s. w. durch E_3, E_4, E_5 und E_6. Alle diese sechs Ebenen werden sich nun, wie leicht darzuthun ist, in demselben Punkte ε_1 schneiden innerhalb des Tetraëders; ausserdem werden sich je fünf in jeder der oben näher bezeichneten sieben Abtheilungen des Raums schneiden in ε_2, ε_3 u. s. w. ε_8. Z. B. wird der obere Raum II eingeschlossen von den Kanten e_1, e_2, e_3, e_4 und e_5.

Bei näherer Erwägung der obigen Betrachtungen kann man sich leicht klar machen, dass bei einem gegebenen Tetraëder die Halbirungsebenen durch je drei Kanten, welche zu einer Ecke zusammenstossen, sich in einer geraden Linie schneiden; dass ferner alle sechs Halbirungsebenen durch einen und denselben Punkt hindurchgehen.

Es ist ferner klar, dass, wenn vier Ebenen sich im Raume in der grössten Anzahl von Linien schneiden, es acht Punkte giebt, deren jeder die Eigenschaft hat, dass seine Entfernungen von allen vier gegebenen Ebenen gleich sind.

Aufgabe 12.

Eine Kugel zu beschreiben, welche drei Ebenen und eine gegebene Kugel berührt.

Die drei Ebenen heissen $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ und $\mathfrak{E}_3$, den Mittelpunkt der gegebenen Kugel wollen wir durch $\mathfrak{f}$ bezeichnen und ihren Halbmesser durch r.

Man construire drei Ebenen E_1, E_2 und E_3, welche parallel mit den gegebenen laufen und in Beziehung auf den angenommenen Punkt $\mathfrak{f}$ nach aussen um r von den drei ursprünglichen Ebenen $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ und $\mathfrak{E}_3$ resp. abstehen. Darauf löse man die Aufgabe: Eine Kugel zu beschreiben, welche die drei gegebenen Ebenen E_1, E_2 und E_3 berührt und durch den Punkt $\mathfrak{f}$ geht nach Aufgabe 7. Man findet zwei Auflösungen. Der Halbmesser der einen gefundenen Kugel heisse R. Verkürzt man denselben um r und beschreibt mit dem Halbmesser $(R - r)$ eine concentrische Kugel, so wird dieselbe die drei Ebenen $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ und $\mathfrak{E}_3$ berühren, eben so die gegebene Kugel und zwar von aussen.

Man erhält auf diese Weise zwei Kugeln, welche die drei Ebenen berühren und die gegebene Kugel von aussen. Wenn man die drei parallelen Hülfsebenen in der Entfernung r in Beziehung auf den Punkt $\mathfrak{f}$ nach innen legt, so kann man auf analoge Weise sich zwei Kugeln verschaffen, welche ebenfalls die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, die gegebene Kugel aber einschliessend berühren. In diesem Falle müsste man den Radius der Hülfskugeln um r vergrössern.

Aufgabe 13.

Eine Kugel zu beschreiben, welche zwei gegebene Ebenen und zwei gegebene Kugeln berührt.

Die beiden gegebenen Ebenen heissen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$, die Radien der beiden gegebenen Kugeln seien R und r, und zwar sei $R > r$. Der Mittelpunkt der kleineren Kugel heisse $\mathfrak{f}$.

Ich construire mir eine mit der Kugel um R concentrische Kugel mit dem Radius $R + r$ und zwei mit $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ resp. parallele Ebenen E_1 und E_2, welche von den ursprünglichen um r abstehen und zwar einmal in Beziehung auf den

Punkt f nach innen und einmal nach aussen. Wir wollen zuerst den Fall annehmen, dass die Hülfsebenen E_1 und E_2 nach innen liegen. Alsdann kann man nach Aufgabe 8 zwei Kugeln construiren, welche die Ebenen E_1 und E_2 berühren, durch den Punkt f gehen und die Hülfskugel (R + r) von aussen berühren. Verlängert man nun den Radius der beiden so gefundenen Kugeln um r, so erhält man zwei Kugeln, welche die ursprünglichen Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ berühren, eben so die Kugel r von innen und die Kugel R von aussen berühren. Man hätte auch dieselbe Hülfskugel (R + r) beibehalten können, die Ebenen E'_1 und E'_2 parallel mit den ursprünglichen, aber in Rücksicht auf den Punkt f nach aussen legen können, so hätte man zwei Kugeln nach Aufgabe 8 beschreiben können, welche die Ebenen E'_1 und E'_2 berühren, durch den Punkt f gehen und die Hülfskugel (R + r) von innen berühren. Man kann nun den Radius der beiden so gefundenen Kugeln um r verkürzen, so erhält man zwei Kugeln, welche die beiden gegebenen Ebenen berühren, ferner die Kugel r von aussen und die Kugel R von innen berühren.

Die Hülfskugel R — r, concentrisch mit der Kugel R, würde mit Hülfe der Ebenen E_1 und E_2 durch Verlängerung des Radius der gefundenen Kugeln zwei Kugeln gegeben haben, die Kugel r von innen und eben so R von innen berührt hätten; desgleichen in Verbindung mit den Ebenen E'_1 und E'_2 durch Verkürzung des Radius der gefundenen Kugeln um r zwei Kugeln gegeben haben, die Kugel r von aussen und Kugel R ebenso von aussen berührt hätten.

1) Hülfsebenen E_1 und E_2 nach innen, Hülfskugel (R + r), durch Verlängerung des Radius um r: zwei Kugeln, welche Kugel r von innen und Kugel R von aussen berühren.

2) Hülfsebenen E'_1 und E'_2 nach aussen, Hülfskugel (R + r), durch Verkürzung des Radius um r: zwei Kugeln, welche Kugel r von aussen und Kugel R von innen berühren.

3) Hülfsebenen E_1 und E_2 nach innen, Hülfskugel (R — r), durch Verlängerung des Radius um r: zwei Kugeln, welche die beiden gegebenen Kugeln gleichartig von innen berühren.

4) Hülfsebenen E'_1 und E'_2 nach aussen, Hülfskugel (R — r), durch Verkürzung des Radius um r: zwei Kugeln, welche die beiden gegebenen Kugeln gleichartig von aussen berühren.

Aufgabe 14.

Eine Kugel zu beschreiben, welche drei gegebene Kugeln und eine gegebene Ebene berührt.

Die Radien der drei gegebenen Kugeln seien R, r und ϱ, davon sei ϱ der kleinste, sein Mittelpunkt f, die gegebene Ebene heisse $\mathfrak{E}$.

Man zeichne eine Hülfsebene E, welche parallel mit $\mathfrak{E}$ läuft, in dem Abstande ϱ und zwar in Rücksicht auf den Punkt f nach innen liegt; darauf beschreibe man mit der Kugel R eine concentrische Hülfskugel mit dem Radius $\overline{R + \varrho}$, desgleichen mit der Kugel r eine concentrische Hülfskugel mit dem Radius $\overline{r + \varrho}$: alsdann kann man nach Aufgabe 9 zwei Kugeln beschreiben, welche die Ebene E berühren, eben so die Kugeln $\overline{R + \varrho}$ und $\overline{r + \varrho}$ von aussen und durch den Punkt f gehen. Verlängert man in diesen beiden Kugeln den Radius um ϱ, so erhält man mit ihnen zwei concentrische Kugeln, welche die Ebene $\mathfrak{E}$ berühren, die Kugel ϱ von innen, die Kugeln R und r von aussen.

Auf ganz analoge Weise kann man sich die übrigen Auflösungen in Summa 16 verschaffen.

1) Hülfsebene E nach innen, Hülfskugeln $\overline{R + \varrho}$ und $\overline{r + \varrho}$, Verlängerung des Radius um ϱ: zwei Kugeln, welche die Kugeln R und r von aussen berühren und die Kugel ϱ von innen.

2) Hülfsebene E nach innen, Hülfskugeln $\overline{R + \varrho}$ und $\overline{r - \varrho}$, Verlängerung des Radius um ϱ: zwei Kugeln, welche die Kugel R von aussen und die Kugel r von innen, so wie die Kugel ϱ von innen berühren.

3) Hülfsebene E nach innen, Hülfskugeln $\overline{R - \varrho}$ und $\overline{r + \varrho}$, Verlängerung des Radius um ϱ: zwei Kugeln, welche die Kugel R von innen und die Kugel r von aussen, so wie die Kugel ϱ von innen berühren.

4) Hülfsebene E nach innen; Hülfskugeln $\overline{R - \varrho}$ und $\overline{r - \varrho}$, Verlängerung des Radius um ϱ: zwei Kugeln, welche die Kugeln R und r von innen berühren und die Kugel ϱ von innen.

5) Hülfsebene E^1 nach aussen, Hülfskugeln $\overline{R + \varrho}$ und $\overline{r + \varrho}$, Verkürzung des Radius um ϱ: zwei Kugeln, welche die Kugeln R und r von innen berühren und die Kugel ϱ von aussen.

6) Hülfsebene E^1 nach aussen, Hülfskugeln $\overline{R + \varrho}$ und $\overline{r - \varrho}$, Verkürzung des Radius um ϱ: zwei Kugeln, welche die Kugel R von innen und die Kugel r von aussen, so wie die Kugel ϱ von aussen berühren.

7) Hülfsebene E^1 nach aussen, Hülfskugeln $\overline{R - \varrho}$ und $\overline{r + \varrho}$, Verkürzung des Radius um ϱ: zwei Kugeln, welche die Kugel R von aussen und die Kugel r von innen, so wie die Kugel ϱ von aussen berühren.

8) Hülfsebene E^1 nach aussen, Hülfskugeln $\overline{R - \varrho}$ und $\overline{r - \varrho}$, Verkürzung des Radius um ϱ: zwei Kugeln, welche die Kugeln R und r von aussen berühren und die Kugel ϱ von aussen.

Aufgabe 15.

Eine Kugel zu beschreiben, welche vier gegebene Kugeln berührt.

Die Radien dieser Kugeln seien R, r, P, ϱ; ϱ sei am kleinsten, der Mittelpunkt der dazu gehörigen Kugel sei f.

Man löse die Aufgabe: Eine Kugel zu beschreiben, welche durch den Punkt f geht und die drei Kugeln $\overline{R + \varrho}$, $\overline{r + \varrho}$, $\overline{P + \varrho}$ berührt, welche concentrisch sind resp. mit den Kugeln R, r, P. Von allen hier nach Aufgabe 10 möglichen acht Auflösungen, können wir aber nur zwei gebrauchen; nämlich, wenn wir den Radius der so gefundenen Kugel um ϱ verlängern wollen, nur diejenige Kugel, welche die Kugeln $\overline{R + \varrho}$, $\overline{r + \varrho}$, $\overline{P + \varrho}$ von aussen berührt; wenn wir dagegen den Radius der so gefundenen Kugel um ϱ verkürzen wollen, nur diejenige Kugel, welche die drei Hülfskugeln von innen berührt. Im ersten Falle erhielten wir eine Kugel, welche die drei Kugeln R, r und P von aussen berührt, dagegen die Kugel ϱ von innen; im anderen Falle eine Kugel, welche die drei Kugeln R, r und P von innen berührt, die Kugel um ϱ dagegen von aussen.

Aufzählung der 16 möglichen Fälle.

1) $R + \varrho$, $r + \varrho$, $P + \varrho$; Verlängerung; R, r, P aussen; ϱ innen.
2) $R + \varrho$, $r + \varrho$, $P + \varrho$; Verkürzung; R, r, P innen; ϱ aussen.
3) $R + \varrho$, $r + \varrho$, $P - \varrho$; Verlängerung; R, r aussen, P innen; ϱ innen.
4) $R + \varrho$, $r + \varrho$, $P - \varrho$; Verkürzung; R, r innen, P aussen; ϱ aussen.
5) $R + \varrho$, $r - \varrho$, $P + \varrho$; Verlängerung; R aussen, r innen, P aussen; ϱ innen.
6) $R + \varrho$, $r - \varrho$, $P + \varrho$; Verkürzung; R innen, r aussen, P innen; ϱ aussen.

7) $R - \varrho$, $r + \varrho$, $P + \varrho$; Verlängerung; R innen, r aussen, P aussen ϱ innen.

8) $R - \varrho$, $r + \varrho$, $P + \varrho$; Verkürzung; R aussen, r innen, P innen; ϱ aussen.

9) $R - \varrho$, $r - \varrho$, $P - \varrho$; Verlängerung; R, r, P innen; ϱ innen.

10) $R - \varrho$, $r - \varrho$, $P - \varrho$; Verkürzung; R, r, P aussen; ϱ aussen.

11) $R - \varrho$, $r - \varrho$, $P + \varrho$; Verlängerung; R, r innen, P aussen; ϱ innen.

12) $R - \varrho$, $r - \varrho$, $P + \varrho$; Verkürzung; R, r aussen, P innen; ϱ aussen.

13) $R - \varrho$, $r + \varrho$, $P - \varrho$; Verlängerung; R innen, r aussen, P innen; ϱ innen.

14) $R - \varrho$, $r + \varrho$, $P - \varrho$; Verkürzung; R aussen, r innen, P aussen; ϱ aussen.

15) $R + \varrho$, $r - \varrho$, $P - \varrho$; Verlängerung; R aussen, r und P innen; ϱ innen.

16) $R + \varrho$, $r - \varrho$, $P - \varrho$; Verkürzung; R innen, r und P aussen; ϱ aussen.

Druck von G. Bernstein in Berlin.

Grundlehren der neueren Geometrie

als Vorbereitung

auf drei andere Auflösungen der Berührungsaufgabe.

---

1. Erklärung der harmonischen Theilung.

Fig. 1. Es ist auf einer geraden Linie eine Strecke AC genommen, so kann man zwischen A und C einen Punkt B annehmen und die Strecke AC dadurch in jedem beliebigen Verhältniss BA : BC theilen. Für ein gegebenes Verhältniss giebt es aber immer nur Einen einzigen Punkt B, welcher die gestellte Bedingung erfüllt. Anstatt einen solchen Punkt innerhalb AC zu nehmen, kann man ihn auch ausserhalb AC nehmen und denselben D so wählen, dass irgend ein beliebiges Verhältniss DA : DC dadurch dargestellt wird. Für jedes gegebene Verhältniss giebt es aber immer nur Einen einzigen Punkt D, welcher die gestellte Bedingung erfüllt. Sind nun die beiden Punkte B und D so gewählt, dass die beiden Verhältnisse BA:BC und DA:DC gleich sind, so nennt man diese Theilung eine harmonische. Hier z. B. ist BA : BC = 3 : 1, eben so DA : DC = 3 : 1. Man nennt nun A, B, C und D harmonische Punkte, und zwar A und C zugeordnete Punkte, eben so die Punkte B und D. Die Proportion BA : BC = DA : DC liefert uns die gleichfalls richtige Proportion CB : CD = AB : AD. Daraus folgt, dass man eben so gut AC oder BD als die ursprüngliche Strecke ansehen kann.

Man kann auch so sagen: Bei der harmonischen Theilung verhält sich die erste Strecke zur zweiten, wie die ganze Strecke zur dritten, d. h. AB:BC = AD:CD; natürlich auch, da man eben so gut rückwärts lesen darf DC : CB = DA : BA. Sind also 1, 2, 3 und 4 harmonische Punkte, so sind es auch 4, 3, 2 und 1.

Bei der harmonischen Theilung ist das Rechteck aus den beiden äusseren Abschnitten gleich dem Rechtecke aus der ganzen Strecke und dem mittleren Abschnitt

2. Erklärung des harmonischen Strahlenbüschels.

Fig. 2. Zieht man von einem beliebigen Punkte ausserhalb einer harmonisch getheilten Linie vier Strahlen SA, SB, SC, SD durch die Theilpunkte A, B, C, D, so erhält man einen harmonischen Strahlenbüschel, wo SA und SC zugeordnete Strahlen, eben so SB und SD genannt werden.

Zieht man nun durch den zweiten harmonischen Punkt B eine Parallele zum vierten harmonischen Strahle, so wird das vom ersten und dritten harmonischen Strahle begränzte Stück vom zweiten harmonischen Punkte halbirt.

Voraussetzung: A, B, C und D harmonische Punkte; durch B ist gezogen $ac \# SD$: zu beweisen, dass $Ba = Bc$.

$\triangle ABa \sim ADS$, $\triangle CcB \sim CSD$. Also $AB : aB = AD : SD$, $BC : Bc = DC : DS$. Daraus ergiebt sich $Ba = (AB \,.\, SD) : AD$, $Bc = (BC \,.\, SD) : DC$. Weil aber A, B, C und D harmonische Punkte sind, so ist $AB : BC = AD : CD$, folglich auch $(AB : AD) = (BC : DC)$, daher $Ba = Bc$.

Eben so: zieht man durch C eine Parallele mit SA, so erhält man zwischen SD und SB eine Strecke, welche in C halbirt wird.

3. Das harmonische Strahlenbüschel und die Transversalen.

Fig. 2. Halbirt man in einem Dreiecke Sac die Grundlinie ac in B, so dass also $Ba = Bc$, zieht durch die Spitze S eine Parallele SD mit der Grundlinie ac, $SD \# ac$, so erhält man ein System harmonischer Strahlen Sa, SB, Sc und SD, indem jede beliebige durch B gezogene Transversale durch Sa, SB, Sc und SD harmonisch getheilt wird.

Man hat die ähnlichen Dreiecke $ABa \sim ADS$, eben so $BCc \sim DCS$, woraus sich die Proportionen $AB : AD = aB : SD$, eben so $BC : DC = Bc : DS$ ergeben. Da aber $aB = Bc$, so ist $AB : AD = BC : CD$ oder $AB : BC = AD : CD$, d. h. A, B, C und D sind harmonische Punkte.

Zu bemerken ist, dass die Transversale ABCD ganz beliebig durch B gezogen war. Jede mit dieser Transversalen ABCD parallel gezogene gerade Linie z. B. $\alpha\beta\gamma\delta$ wird nach bekannten Sätzen gerade so wie ABCD getheilt werden, d. h. $\alpha\beta : \beta\gamma = \alpha\delta : \gamma\delta$. Oder: Jede Transversale überhaupt wird durch einen harmonischen Strahlenbüschel harmonisch getheilt.

Hieraus folgt: Jedes System harmonischer Punkte giebt unendlich viel Systeme harmonischer Strahlen: man kann nämlich jeden beliebigen Punkt ausserhalb der harmonisch getheilten Strecke als Scheitelpunkt eines Systems harmonischer Strahlen annehmen.

Jedes System harmonischer Strahlen giebt unzählig viel Systeme harmonischer Punkte, indem jede Transversale von ihnen harmonisch getheilt wird. Jede Transversale, welche parallel mit dem vierten Strahle gezogen wird, wird zwischen dem ersten und dritten von dem zweiten Strahle halbirt.

Wie ist es mit den Transversalen, welche parallel mit dem ersten harmonischen Strahl gezogen werden?

Aus dem Obigen geht ferner hervor, dass wenn vier Strahlen 1, 2, 3 und 4 harmonisch sind, eben so die Strahlen 3, 2, 1 und die Verlängerung von 4 ein System harmonischer Strahlen bilden.

Zwischen den Punkten A und C giebt es nur einen einzigen, der die Strecke AC in einem gegebenen Verhältnisse theilt, z. B. wie B, $BA : BC = 3 : 1$; eben so nur einen einzigen Punkt D ausserhalb AC, welcher $DA : DC = 3 : 1$ liefert. Zu drei gegebenen harmonischen Punkten giebt es daher immer einen vierten, aber nur einen einzigen. Zu drei harmonischen Strahlen giebt es immer einen vierten, aber nur einen einzigen.

Aufgabe: Zu drei gegebenen harmonischen Punkten den vierten zu finden.

Gegeben 1, 2, 3 : zu finden 4. Fig. 3.

Man ziehe durch 1 (A) eine beliebige Linie EF, schneide oben und unten gleiche Strecken ab ($AE = AF$); ziehe durch 3 (C) eine Parallele zu EF, $CG \# EF$;

ziehe durch E und B eine gerade Linie, welche CG in G trifft, so wird die durch F und G gezogene Linie FG die gegebene AC in dem vierten, dem Punkte B zugeordneten, harmonischen Punkt D schneiden. Denn aus $CG \parallel AE$ und $CG \parallel AF$ folgt $BA : BC = AE : CG$, eben so $DA : DC = AF : CG$, aber $AE = AF$, folglich $AB : BC = AD : CD$, d. h. D ist der vierte harmonische Punkt.

Gegeben 2, 3, 4; zu finden 1. Die Construction geschieht anstatt bei A durch D: man kann ja die harmonischen Punkte eben so gut vorwärts als rückwärts lesen.

Gegeben 1, 3, 4; zu finden 2. Man ziehe durch A die Linie EF, mache $AE = AF$, ziehe durch C die Linie $CG \parallel EF$; ziehe darauf FD, welche CG in G schneidet, verbindet alsdann E und G, so liefert der Durchschnittspunkt B von AC und EG den zweiten harmonischen Punkt B. Wäre 1, 2, 4 gegeben — zu finden 3; so müsste man die obige Construction anstatt bei 1 bei Punkt 4 machen.

Sind drei harmonische Strahlen gegeben, so ist es leicht den vierten zu finden. Man ziehe nämlich eine beliebige Transversale durch die drei Strahlen, erhält auf derselben drei Punkte, zu welchen man den vierten harmonischen Punkt sucht.

4. Stehen der zweite und vierte harmonische Strahl auf einander senkrecht, so bildet der zweite mit dem ersten und dritten gleiche Winkel.

Fig. 4. Man ziehe mit dem vierten Strahle eine Parallele $\mathfrak{ac} \parallel SD$, so ist $\mathfrak{a}B = B\mathfrak{c}$. Da $SD \perp SB$ sein soll, so ist, da $\mathfrak{ac} \parallel SD$, $\mathfrak{ac} \perp SB$, also $\triangle \mathfrak{a}BS \cong \mathfrak{c}BS$, folglich $\angle \mathfrak{a}SB = \mathfrak{c}SB$.

Bildet ferner der zweite mit dem ersten und dritten harmonischen Strahle gleiche Winkel, so stehen der zweite und vierte auf einander senkrecht.

Man ziehe wie vorhin $\mathfrak{ac} \parallel SD$, so ist $\mathfrak{a}B = \mathfrak{c}B$, ist nun ferner $\angle \mathfrak{a}SB = \mathfrak{c}SB$, so ist $\triangle \mathfrak{a}BS \cong \mathfrak{c}BS$, also $\mathfrak{ac} \perp SB$, und da $SD \parallel \mathfrak{ac}$, so ist $SD \perp SB$.

Gehen vier Strahlen von einem Punkte aus, und steht der vierte auf dem zweiten senkrecht, während der zweite mit dem ersten und dritten gleiche Winkel bildet: so bilden die vier Strahlen in der gegebenen Aufeinanderfolge einen harmonischen Strahlenbüschel.

Voraussetzung: $SD \perp SB$, $\angle (SB, SA) = (SB, SC)$. Zu beweisen, dass SA, SB, SC, SD ein System harmonischer Strahlen ist. Ich ziehe $\mathfrak{ac} \parallel SD$, also $\mathfrak{ac} \perp SB$, so ist $\triangle \mathfrak{a}BS \cong \mathfrak{c}BS$, also $B\mathfrak{a} = B\mathfrak{c}$, also nach Nr. 3. Seite 74 SA, SB, SC, SD ein System harmonischer Strahlen.

5. Annahme eines fünften Punktes in der Mitte zwischen dem ersten und dritten harmonischen Punkte.

Fig. 5. Wir haben ein System von 4 harmonischen Punkten A, B, C, D; haben AC in M halbirt, so soll bewiesen werden, dass MC oder MA die mittlere Proportionale ist zwischen MB und MD.

Nach der Voraussetzung ist $AB : BC = AD : CD$, also $AB - BC : AD - CD = AB + BC : AD + CD$; es ist aber $AB = AM + MB = MC + MB = MB + BC + MB = 2\,MB + BC$, ferner $AD = 2\,MC + CD$, $AB + BC = 2\,MC$, $AD + CD = AM + MC + 2\,CD = 2\,(MC + CD) = 2\,MD$. Daraus folgt $2\,MB : 2\,MC = 2\,MC : 2\,MD$ oder $MB : MC = MC : MD$.

Umkehrung des vorigen Satzes.

Ist MC die mittlere Proportionale zwischen MB und MD, ist ferner MA = MC, so sind A, B, C, D vier harmonische Punkte.

Aus MB : MC = MC : MD folgt MC + MB : MD + MC = MC − MB : MD − MC oder AB : AD = BC : CD, d. h. AB : BC = AD : CD.

6. Die Diagonalen eines vollständigen Vierseits werden harmonisch getheilt, so dass die Durchschnittspunkte der Diagonalen und die Ecken zugeordnete Punkte sind.

Fig. 6. Das vollständige Vierseit wird gebildet durch die Seiten AC und AE, welche von A ausgehen, und durch BE und BD, welche von B ausgehen. Die gegenüberstehenden Ecken heissen E und F, C und D, A und B. Bewiesen soll werden, dass die Diagonalen EF, CD und AB harmonisch getheilt werden.

Betrachten wir AC als den ersten, AE als den dritten und AB als den vierten harmonischen Strahl eines Systems aus A, so wird der zweite zwischen AC und AE fallen; es werden F, E und G der erste, dritte und vierte harmonische Punkt sein, der zweite wird zwischen F und E liegen in der Strecke EF. Eben so können wir BD als den ersten, BE als den dritten, BG als den vierten harmonischen Strahl eines Systems aus B ansehen, alsdann liegt der zweite harmonische Strahl zwischen BD und BE; es werden F der erste, E der dritte und G der vierte harmonische Punkt sein, der zweite wird zwischen F und E liegen in der Strecke EF. Die zweiten harmonischen Strahlen aus A und B werden sich also in demselben Punkt der harmonisch getheilten Strecke FEG schneiden. — Dieselbe Betrachtung kann man für die Strecke DCH anstellen, wo D der erste, C der dritte, H der vierte harmonische Punkt für das System der Strahlen BD, BC, BH ist, wo der zweite harmonische Strahl wie vorher zwischen BD und BC liegt; eben so für das System der harmonischen Strahlen AD (dritter), AC (erster), AH (Verlängerung des vierten), indem ja von einem gegebenen System nach Nr. 3. Seite 74 der dritte, zweite, erste harmonische Strahl und die Verlängerung des vierten wieder ein System harmonischer Strahlen bilden, wo der zweite harmonische Strahl, derselbe wie vorher, zwischen AD und AC fällt. Der zweite harmonische Punkt des Systems aus B liegt also in der harmonisch getheilten Strecke DCH zwischen C und D, eben so der zweite harmonische Punkt des Systems aus A. Die zweiten harmonischen Strahlen aus A und B werden sich also in demselben Punkte der harmonisch getheilten Strecke DCH schneiden; zugleich aber auch in demselben Punkte der harmonisch getheilten Strecke FEG. Die zweiten harmonischen Strahlen der Büschel aus A und B haben nur Einen einzigen Durchschnittspunkt, welcher wie wir gesehen haben, zu gleicher Zeit in EF und in DC fällt, d. h. der Durchschnittspunkt von EF und DC ist. Bezeichnen wir den Durchschnittspunkt von FE und DC mit O, so sind also F, O, E und G vier harmonische Punkte, eben so D, O, C und H, d. h. die Diagonalen FE und DC sind harmonisch getheilt. Ein Strahlenbüschel aus F durch die Punkte D, O, C und H wird also jede Transversale harmonisch theilen, z. B. AB: es ist daher B, G, A und H ein System harmonischer Punkte, d. h. die Diagonale BA wird harmonisch getheilt.

7. Das vollständige Vierseit der vier Symmetralen.

Die vier Symmetralen (vgl. Vorbereitende Betrachtungen §. 8. pag. 6) von drei Kreisen um M_1, M_2 und M_3 bilden ein vollständiges Vierseit, dessen Ecken die sechs Ähnlichkeitspunkte und dessen Diagonalen die drei Centralen sind.

Fig. 7. Von A_1 gehen die beiden Strahlen $A_1 I_3 I_2$ und $A_1 A_2 A_3$, von I_1 gehen die beiden Strahlen $I_1 I_3 A_2$ und $I_1 I_2 A_3$; die gegenüberstehenden Ecken sind A_1 und I_1, durch welche die Diagonale $M_1 M_2$ geht; ferner A_2 und I_2, durch welche die Diagonale $M_1 M_3$ geht; ferner A_3 und I_3, durch welche die Diagonale $M_2 M_3$ geht.

Es sind A_1 M_2 I_1 M_1 harmonische Punkte, eben so A_2 M_3 I_2 M_1, eben so A_3 M_3 I_3 M_2; davon sind A_1 und I_1 zugeordnete Punkte, desgl. M_2 und M_1; eben so A_2 und I_2, dgl. M_3 und M_1; eben so A_3 und I_3, dgl. M_3 und M_2.

8. Definition des Pols und der Polare am Kreise.

Liegen zwei Punkte M und N mit dem Mittelpunkte eines Kreises in gerader Linie und auf derselben Seite desselben, und ist der Radius die mittlere geometrische Proportionale zwischen ihren Abständen vom Mittelpunkte des Kreises, so heissen diese beiden Punkte M und N die Pole, der eine von dem anderen. Fig. 8.

Voraussetzung: $CM : CB = CB : CN$ oder $CM \cdot CN =$ dem Quadrate des Radius; Folgerung: M und N sind Pole von einander in Beziehung auf den Kreis um C.

Wo liegt der Pol zum Mittelpunkte? Wo liegt der Pol vom Endpunkte eines Halbmessers? Was thut der andere Pol, wenn der eine sich vom Mittelpunkte nach der Peripherie bewegt?

Zieht man durch einen der Pole M ein Loth OP auf diejenige gerade Linie, welche durch den Mittelpunkt und die beiden Pole geht, $OP \perp CN$, so heisst OP die **Polare** von N in Beziehung auf den Kreis um C, N heisst der **Pol** jener Polaren OP. Eben so ist QR, senkrecht in N auf CMN, die Polare von M, und M der Pol der Polaren QR.

Aus $CM : CB = CB : CN$ ergiebt sich nach Nr. 5. Seite 76 $AM : MB = AN : BN$, d. h. die durch zwei Pole eines Kreises gelegte Grade wird **harmonisch** getheilt. Zugeordnete Punkte sind die Durchschnittspunkte der Geraden mit dem Kreise und die beiden Pole.

9. Pole bei orthogonalen Kreisen.

Schneiden zwei Kreise sich rechtwinklig (vgl. Vorb. Betracht. §. 13. p. 12 u. f.), so wird jede durch den Mittelpunkt des einen der Kreise gehende gerade Linie von dem anderen Kreise so geschnitten, dass die Durchschnittspunkte zugeordnete Pole des ersteren Kreises sind, dass also die vier Durchschnittspunkte der beiden Kreise mit der geraden Linie harmonische Punkte sind.

Fig. 9. Die beiden Kreise um M und O schneiden sich rechtwinklig in T, also OT (Radius des Kreises um O) ist Tangente des Kreises um M und vice versa. Ich habe nun durch O (Mittelpunkt des einen Kreises) eine gerade Linie gezogen, welche den anderen Kreis in A und B schneidet, so sollen A und B die Pole des Kreises um O sein.

In der That ist $OT^2 = OA \,.\, OB$, wo OT Tangente des Kreises um M und Radius des Kreises um O ist; also $OA : \text{Radius} = \text{Radius} : OB$. — A und B sind daher (vgl. Nr. 8 Seite 77) die Pole des Kreises um O; B, C^1, A, C sind vier harmonische Punkte; B und A sind zugeordnet, eben so C und C^1.

Zieht man durch O eine andere Linie, welche den Kreis um M in a und b schneidet, so ist $OT^2 = Oa \,.\, Ob$, d. h. a und b sind Pole des Kreises um O; b, c^1, a, c sind vier harmonische Punkte, b und a sind zugeordnet, eben so c^1 und c.

Umgekehrt: Wenn ein Kreis durch irgend zwei Punkte (A und B) geht, die in Bezug auf einen anderen Kreis um O Pole sind, so schneiden sich die Kreise orthogonal. Aus $OA \,.\, OB$ = Quadrat des Radius $= OT^2$, wo T ein Durchschnittspunkt der Kreise um M und O ist, folgt OT Tangente an den Kreis um M u. s. w.

Durch je zwei Paare in Beziehung auf einen gegebenen Kreis zugehöriger Pole lässt sich ein neuer Kreis beschreiben, d. h. diese 4 Punkte liegen im Umfang eines Kreises, welcher orthogonal zum gegebenen Kreise ist. Es ist $OA \,.\, OB = OT^2$, eben so $Oa \,.\, Ob = OT^2$, daher liegen A, B, a, b im Umfange desselben Kreises.

10. Tangenten am Kreise und Pole desselben.

Die innere Polare schneidet den Umfang des Kreises in zwei Punkten. Verbindet man einen dieser Punkte mit dem äusseren Pole, so erhält man eine Tangente an den Kreis.

In Fig. 10 heisst der innere Pol M, der äussere N, die innere Polare schneidet den Umfang in den Punkten O und P. Es ist z. B. O mit dem Punkte N verbunden, so soll ON eine Tangente an den Kreis sein.

Aus $CM : CO = CO : CN$ ergiebt sich $\triangle OCM \sim NCO$, also sind auch die Winkel CMO und CON gleich, d. h. CON ist ein rechter Winkel, oder ON ist eine Tangente an den Kreis um C.

Eben so lässt sich zeigen, dass PN eine Tangente an den Kreis um C ist.

Da in M nur ein einziges Loth OP auf CN errichtet werden kann, da es von N nur zwei Tangenten NO und NP giebt, so folgt daraus:

Zieht man von dem äusseren Pole N zwei Tangenten NO und NP an den Kreis, verbindet die Berührungspunkte O und P, so steht die gerade Linie OP senkrecht auf der Linie NC, wo C der Mittelpunkt des Kreises ist; es ist ferner der Durchschnittspunkt M von OP und CN der innere Pol, und die Verbindungslinie OP der Berührungspunkte die innere Polare des Kreises.

Aufgaben: 1. Es ist der äussere Pol eines Kreises gegeben, man soll den inneren finden.

2. Es ist der innere Pol eines Kreises gegeben, man soll den äusseren finden.

11. Sekanten von den Polen an den Kreis.

Zieht man von dem einen Pole eines Kreises eine gerade Linie, welche den Kreis und die Polare schneidet, so wird dieselbe harmonisch getheilt, so dass die Durchschnittspunkte des Kreises zugeordnete Punkte sind.

Fig. 11. Die Pole heissen M und N, es ist die innere Polare MO konstruirt

worden; von dem äusseren Pole N ist eine gerade Linie gezogen worden, welche den Kreis in P und Q, die Polare in O schneidet: man soll beweisen, dass N, P, O und Q harmonische Punkte sind.

Zum Beweise verbinde ich M mit Q und P, ferner Q mit A und R, so sind nach Nr. 8. Seite 77 A, M, R und N harmonische Punkte, es bilden also QA, QM, QR, QN einen harmonischen Strahlenbüschel. Da QR $\perp$ QA, so bildet nach Nr. 4. Seite 75 QR mit QM und QN gleiche Winkel, d. h. $\angle$ SQR = PQR, also Bogen SR = PR. Daraus kann man die Congruenz der Dreiecke AMS und AMP erweisen, woraus die Gleichheit der Winkel SMR und PMR folgt. Wir haben also von M vier Strahlen MS, MR, MP, MO gezogen, wovon der zweite mit dem ersten und dritten gleiche Winkel bildet und auf dem vierten senkrecht steht: es sind folglich von M aus nach Nr. 4. Seite 75 vier harmonische Strahlen gezogen, MS ist der erste, MR der zweite, MP der dritte, MO der vierte harmonische Strahl: also giebt auch der zweite Strahl MR, der dritte MP, der vierte MO und die Verlängerung MQ des ersten ein System harmonischer Strahlen MR, MP, MO, MQ; folglich sind N, P, O und Q harmonische Punkte.

Fig. 12. Es ist die äussere Polare NT konstruirt worden; von dem inneren Pole M ist eine gerade Linie gezogen worden, welche den Kreis in P und Q, die Polare in T schneidet: man soll beweisen, dass Q, M, P und T harmonische Punkte sind.

Zum Beweise verbinde ich N mit Q und P, ferner Q mit A und R, so sind nach Nr. 8. Seite 77 A, M, R und N harmonische Punkte, es bilden also QA, QM, QR, QN einen harmonischen Strahlenbüschel. Da QR $\perp$ QA, so bildet nach Nr. 4. Seite 75 QR mit QM und QN gleiche Winkel, d. h. $\angle$ SQR = PQR, also Bogen SR = PR. Daraus kann man die Congruenz der Dreiecke ANS und ANP erweisen, daraus die Gleichheit der Winkel ANS und ANP, oder SNR und PNR. Wir haben also von N vier Strahlen NS, NR, NP und NT gezogen, von denen der zweite mit dem ersten und dritten gleiche Winkel bildet und auf dem vierten senkrecht steht: es sind folglich nach Nr. 4. Seite 75 harmonische Strahlen. NQ ist der erste, NM der zweite, NP der dritte, NT der vierte: folglich sind Q, M, P und T harmonische Punkte.

12. Das vollständige Kreisviereck.

Unter einem vollständigen Kreisvierecke versteht man ein solches, von welchem vier Ecken in dem Umfange eines Kreises liegen. Es werden alsdann zwei Diagonalen Sehnen dieses Kreises sein und sich innerhalb desselben schneiden, die dritte Diagonale wird dagegen ausserhalb fallen. Diese dritte Diagonale ist, wie wir sogleich beweisen werden, die Polare von dem Durchschnittspunkte der beiden inneren Diagonalen.

Fig. 13. In einem vollständigen Vierecke ABCD, (das man auch so betrachten kann, als ob von E und von F je zwei Strahlen ausgehen) werden nämlich nach Nr. 6. Seite 76 die Diagonalen harmonisch getheilt. Die beiden inneren Diagonalen heissen BD und AC, die äussere EF, indem A, B, C, D, E und F die sechs Ecken des vollständigen Vierseits sind, von denen A, B, C und D im Umfange des Kreises liegen. Die vier harmonischen Punkte von AC heissen C, O, A, H; von BD heissen B, O, D und G; von FE heissen F, H, E und G. Da alle Linien, welche durch den Pol eines Kreises und die Polare gehen, nach

Nr. 11. Seite 78 harmonisch getheilt werden, so geht die Polare von O durch H, indem C, O, A und H harmonische Punkte sind; die Polare von O geht ferner durch G, indem B, O, D und G harmonische Punkte sind. Die Polare von O geht also durch H und G, fällt also mit der äusseren Diagonale EF zusammen.

Verbindet man nun die äusseren Ecken des vollständigen Kreisvierecks mit dem Durchschnittspunkte der inneren Diagonalen, so ist jede dieser Verbindungslinien die Polare des anderen Punktes, d. h. OF ist die Polare von E, und OE ist die Polare von F.

Die Polare von E muss durch O gehen, da E, L, O und M vier harmonische Punkte sind; eben so muss sie durch I gehen, da E, A, I und B vier harmonische Punkte sind: es ist nämlich FC, FO, FA, FH ein System harmonischer Strahlen; folglich muss die Polare von E durch OI gehen, d. h. mit OF zusammenfallen. In Anwendung kommen die Sätze Nr. 11. und 6.

Eben so kann man beweisen, dass die Polare von F durch O und K gehen, d. h. mit OK oder OE zusammenfallen muss; denn F, P, O und N sind vier harmonische Punkte; dgl. D, K, A und F.

Betrachtung der Fig. 13.

ABCD ist ein in einen Kreis eingeschriebenes Viereck: Es sind die gegenüberliegenden Seiten desselben verlängert worden, bis dass sie sich schneiden in E und F. Man hat also ein vollständiges Vierseit mit den Ecken A, B, C, D, E und F erhalten mit zwei inneren Diagonalen AC und BD, welche sich innerhalb des Kreises in O schneiden und einer äusseren EF. Wir haben nun folgende Behauptungen bewiesen:

1. Der Durchschnittspunkt O der inneren Diagonalen ist der Pol der äusseren Diagonale EF, oder EF ist die Polare von O;

2. Der Durchschnittspunkt E der verlängerten Seiten ist der Pol von OF, oder OF ist die Polare von E; desgleichen ist F der Pol von OE und OE die Polare von F.

Es ergeben sich daraus die Folgerungen:

1. Man kann unzählig viele Kreisvierecke in den gegebenen Kreis eintragen, deren innere Diagonalen sich sämmtlich in demselben Punkte O schneiden: von allen diesen Kreisvierecken fallen die Durchschnittspunkte der gegenüberstehenden Seiten in eine und dieselbe gerade Linie, die Polare von O, welche mit unserer EF zusammenfällt. Zu einem gegebenen Punkte O giebt es nämlich nur eine einzige Polare, hier EF.

2. In allen Kreisvierecken, in welchen zwei gegenüberstehende Seiten AB und CD sich in demselben Punkte E schneiden (von denen es unzählig viel giebt, denn man kann von E unendlich viel Sekanten nach dem Kreise ziehen) liegen der Durchschnittspunkt der beiden anderen gegenüber liegenden Seiten, hier F, und der Durchschnittspunkt der inneren Diagonalen, hier O, in einer und derselben geraden Linie, hier OF, der Polaren von E. Zu einem gegebenen Punkte E giebt es nämlich nur eine einzige Polare, hier OF.

13. Konstruktion der Polare mit alleiniger Hülfe des Lineals.

Mit Hülfe des obigen Satzes kann man zu einem gegebenen Punkte die Polare konstruiren.

1. Wenn der Punkt O innerhalb des Kreises liegt.

Man ziehe durch O zwei Sehnen, die Endpunkte derselben geben ein in den Kreis eingeschriebenes Viereck ABCD; die beiden Durchschnittspunkte E und F von den beiden Paaren gegenüber liegender Seiten bestimmen eine gerade Linie EF, welche die gesuchte Polare des Punktes O ist.

2. Wenn der Punkt E ausserhalb des Kreises liegt.

Man ziehe durch E zwei Sekanten an den Kreis: EB und EC, erhält dadurch die Endpunkte eines in den Kreis eingeschriebenen Vierecks ABCD. Der Durchschnittspunkt O der inneren Diagonalen dieses Vierecks und der Durchschnittspunkt F der beiden anderen gegenüber liegenden Seiten CB und DA bestimmen eine gerade Linie OF, welche die gesuchte Polare des Punktes E ist.

Man kann ferner mit Hülfe des obigen Satzes von einem Punkte ausserhalb eines Kreises an denselben die beiden Tangenten ziehen; z. B. von F aus.

Zu diesem Zwecke suche man die Polare von F, wie oben gelehrt worden ist: es ist OE; die Durchschnittspunkte L und M geben uns nach Nr. 10. Seite 78 die Endpunkte der von F an den Kreis gezogenen beiden Tangenten.

14. Sämmtliche Polaren der Punkte einer Linie schneiden sich in einem und demselben Punkte, nämlich im Pole jener Linie.

In Fig. 14 ist die beliebige Linie MO gezogen innerhalb des Kreises, CM heisst das vom Mittelpunkt des Kreises darauf gefällte Loth: es ist alsdann leicht den Pol N von der Linie MO zu finden, man hat nämlich nur nöthig den vierten harmonischen Punkt zu A, M und E zu finden. Es sei dies N. Man kann nun beweisen, dass die Polaren aller Punkte von OM durch N gehen.

Man nehme in der Linie OM den beliebigen Punkt O, ziehe durch CO eine gerade Linie, fälle von N ein Loth ND $\perp$ CO, so kann man beweisen, dass ND die Polare von O ist, d. h. durch den Punkt N geht. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CMO und CDN geht nämlich hervor CM : CO = CD : CN. Da N der Pol von MO ist, so ist CM . CN = dem Quadrate des Radius, also auch CO . CD = dem Quadrate des Radius: folglich D der Pol von O, also DN die Polare von O geht durch N.

Denselben Beweis kann man für die ausserhalb des Kreises fallende gerade Linie NT wiederholen und zeigen, dass die Polare eines beliebigen ihrer Punkte, z. B. des Punktes T, durch M geht, wo M der leicht aufzufindende Pol von NT ist, indem man CN lothrecht auf NT gefällt hat u. s. w. Man muss nun von M ein Loth auf CT fällen, MB $\perp$ CT, und erhält $\triangle$ CBM $\sim$ CNT, CB : CM = CN : CT, folglich da M der Pol von NT ist, CM . CN = dem Quadrat des Radius, also CB . CT = Quadrat des Radius, d. h. B der Pol von T, also BM die Polare von T, und diese geht durch M.

Es ist danach leicht, die Polaren zu allen Punkten einer gegebenen geraden Linie zu finden.

Ist der Mittelpunkt des Kreises bekannt, so kann man sofort zu jeder beliebigen Linie den Pol finden.

Soll man z. B. die Polare vom Punkte O einer beliebigen Linie MO finden, deren Pol N man kennt, so ziehe man von C eine Linie durch den gegebenen Punkt O und fälle von N aus ein Loth ND auf die Linie CO, so ist ND die Polare des Punktes O der gegebenen Linie MO.

Gerade so würde man verfahren, wenn der Punkt T, dessen Polare man suchen sollte, in einer ausserhalb des Kreises befindlichen geraden Linie NT läge, deren Pol M man kennt.

ANMERKUNG. Man hätte den Beweis, dass die Polaren von allen Punkten derselben geraden Linie sich immer in demselben Punkte, nämlich in ihrem Pole schneiden, auch aus der Betrachtung der Fig. 13 ableiten können.

In einem Kreise kann ich durch einen gegebenen Punkt O unzählig viel Paare sich kreuzender Sehnen ziehen, deren Endpunkte mir immer ein in den Kreis eingeschriebenes Viereck geben; verlängere ich in demselben die gegenüberliegenden Seiten CB und AD, dgl. BA und CD, so liegen die erhaltenen Durchschnittspunkte F und E immer in einer und derselben geraden Linie, nämlich in der Polaren von O. Denke ich mir nun umgekehrt die Linie EF als gegeben, so hat dieselbe den bestimmten Pol O; wo aber auch immer in der Linie EF die Punkte E oder F liegen mögen, immer geht die Polare des Punktes E, d. i. FO, durch den Punkt O, den Pol der Linie EF. Dies gilt für jeden beliebigen Punkt E der Linie EF, wo die Punkte E und F auf der Linie EF herum wandern, FO aber immer durch O geht.

Bei dieser Art des Beweises wurde eine Linie EF ausserhalb des Kreises genommen. Man kann denselben Satz auch für jede Linie, z. B. OF, innerhalb des Kreises beweisen. Eine solche Linie wird ihren Pol ausserhalb des Kreises haben. Man hat hierbei folgende Betrachtung anzustellen. Von einem festen Punkte E ausserhalb eines Kreises kann man unzählig viel Sekanten ziehen und erhält durch jede zwei Sekanten ein Kreisviereck. Nach Nr. 12. Seite 80 liegen aber der Durchschnittspunkt der beiden anderen Vierecksseiten CB und DA, d. h. der Punkt F, so wie der Durchschnittspunkt O der inneren Diagonalen BD und CA in einer und derselben geraden Linie, nämlich in der durch E festbestimmten Polare von E, der Linie OF. Wie nun auch immer die Punkte O und F auf der gegebenen geraden Linie OF herumwandern mögen, immer bleibt OE die Polare von F und geht durch den festen Punkt E, dem Pole der Linie OF. F liegt hier ausserhalb des Kreises. Derselbe Beweis bleibt aber auch anwendbar, wenn wir den wandelbaren Punkt O der Linie OF betrachten, alsdann ist FE die Polare vom Punkte O, und FE geht immer durch den als fest angenommenen Punkt E, den Pol der Linie OF.

Umkehrung des vorigen Satzes.

15. Die Pole von zwei oder mehr Linien, welche sich in Einem Punkt schneiden, liegen in der Polare dieses Punktes; oder: Eine Linie durch den Pol hat ihren Pol in der Polare.

1. Der Durchschnittspunkt N liegt ausserhalb des Kreises.

Habe ich einen Punkt N, durch welchen eine beliebige Linie ND geht, so kann ich zu derselben leicht den Pol finden und zeigen, dass derselbe in einer bestimmten geraden Linie liegt, die einzig und allein durch den Ort des Punktes N bestimmt wird, unabhängig von der Richtung von ND. Ich habe nämlich nur nöthig, N mit dem Mittelpunkte des Kreises C zu verbinden (ist nur Eine Linie möglich), durch die Linie NC, welche den Kreis in E und A schneidet; zu N, E, A den dritten harmonischen Punkt zu suchen (ist nur Ein Punkt möglich), nämlich M; in M ein Loth errichten auf CN (ist nur Ein Loth möglich) und erhalte OM die Polare des Punktes N. Fälle ich nun von C auf ND ein

Loth CD, so liefert mir der Durchschnittspunkt von OM und CD, d. h. Punkt O, den Pol von ND. Dazu habe ich nur nöthig zu beweisen, dass CO . CD = dem Quadrate des Radius ist. Dies folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CMO und CDN, wo CM : CO = CD : CN, während CM . CN nach der Konstruktion gleich dem Quadrate des Radius ist.

2. Der Durchschnittspunkt liegt innerhalb des Kreises.

Z. B. M liegt innerhalb des Kreises. Zieht man in beliebiger Richtung eine gerade Linie durch M, z. B. MB, so kann man zeigen, wie oben, dass der Pol dieser Linie MB in einer ganz bestimmten geraden Linie liegt, deren Bestimmung ganz allein von dem Orte M und nicht von der Richtung der MB abhängig ist. Man ziehe nämlich die gerade Linie CM, welche den Kreis in E und A schneidet, suche zu A, M, E den vierten harmonischen Punkt, d. i. N. Errichte in N ein Loth NT, so liegt der Pol von MB in dieser Linie NT. Will ich den Pol selbst finden, so muss ich von C auf BM ein Loth CB fällen, welches NT in T schneidet: alsdann ist T der gesuchte Pol von MB.

Beispiel. Fig. 13. Die Pole sämmtlicher Linien, welche sich in F schneiden, FB, FN, FA, FG, liegen in EO; die der Linien, welche sich in E schneiden, in FO; die der Linien, welche sich in O schneiden, in EF, u. s. w.; die der Linien, welche sich in A schneiden, in dem Lothe, welches man in A auf den Radius des Punktes A errichten kann. Die Pole der Linien, welche sich im Mittelpunkte des Kreises schneiden, liegen im Unendlichen.

Dritte Auflösung der Berührungsaufgabe.

Mit Hülfe der Lehre von der Polare.

Es sind die Kreise I, II, III gegeben: man soll die Berührungskreise dafür konstruiren.

Analysis. Fig. 15. Tafel I. Angenommen Kreis 1 berühre die Kreise I, II, III ausschliessend in a, b und c; desgleichen Kreis 2 dieselben Kreise einschliessend in a^1, b^1 und c^1: so kann man folgende Behauptungen aufstellen:

a ist der innere Ähnlichkeitspunkt von I und 1 (vgl. Seite 2).
a^1 „ „ äussere „ „ I „ 2.

Folglich geht nach §. 8. Seite 7 und 8 die Linie aa^1 durch den inneren Ähnlichkeitspunkt von (1) und (2); es ist aa^1 eine der inneren Symmetralen der Kreise I, 1 und 2.

b ist der innere Ähnlichkeitspunkt von II und 1,
b^1 „ „ äussere „ „ II „ 2,

folglich geht bb^1 durch den inneren Ähnlichkeitspunkt von (1) und (2).

c ist der innere Ähnlichkeitspunkt von III und 1,
c^1 „ „ äussere „ „ III „ 2,

folglich geht cc^1 durch den inneren Ähnlichkeitspunkt von (1) und (2).

Es gehen also aa^1, bb^1 und cc^1 durch den inneren Ähnlichkeitspunkt der Kreise (1) und (2), welchen wir durch 0 bezeichnen wollen.

Kreis I berührt den Kreis (1) ausschliessend, den Kreis (2) einschliessend; Kreis II berührt den Kreis (1) ausschliessend, den Kreis (2) einschliessend. Nach §. 19. Seite 22 geht die Chordale der thätigen (berührenden) Kreise, hier I und II, durch den Ähnlichkeitspunkt der leidenden (berührten) Kreise, hier (1) und (2), und zwar haben wir hier den fünften Fall des §. 22., eine ungleichartige Berührung, woraus folgt: die Chordale der Kreise I und II geht durch den inneren Ähnlichkeitspunkt der Kreise (1) und (2).

Auf dieselbe Weise wird dargethan, dass die Chordale von I und III durch den inneren Ähnlichkeitspunkt der Kreise (1) und (2) hindurchgeht; ferner dass die Chordale von II und III durch den inneren Ähnlichkeitspunkt der Kreise (1) und (2) hindurchgeht. Es gehen also die drei Chordalen von I und II, von I und III, von II und III durch den inneren Ähnlichkeitspunkt der Kreise (1) und (2), d. h. durch den Punkt o, welcher nach §. 11. Seite 11 der Chordalpunkt der drei Kreise I, II und III ist.

Die drei Berührungssehnen aa^1, bb^1 und cc^1 gehen also durch den Chordalpunkt der Kreise I, II und III, welcher sich leicht durch Konstruktion finden lässt.

Kreis (1) berührt die Kreise I und II ausschliessend, Kreis (2) berührt die Kreise I und II einschliessend, also geht die Chordale der thätigen Kreise (1) und (2) durch den Ähnlichkeitspunkt der leidenden Kreise I und II; und zwar, da hier eine gleichartige Berührung stattfindet, durch den äusseren Ähnlichkeitspunkt der Kreise I und II. Vgl. zweiter Fall §. 19. Seite 22. Nennen wir den äusseren Ähnlichkeitspunkt der Kreise I und II A_1, so haben wir erwiesen, dass die Chordale von (1) und (2) durch A_1 geht.

Bezeichnen wir den äusseren Ähnlichkeitspunkt der Kreise I und III durch A_2, der Kreise II und III durch A_3, so können wir ebenso beweisen, dass die Chordale von (1) und (2) durch A_2 und A_3 geht. Die äussere Symmetrale der Kreise I, II und III ist also die Chordale der gesuchten Kreise (1) und (2): $A_1 A_2 A_3$ ist die Chordale der gesuchten Berührungskreise (1) und (2).

Ziehe ich in a eine Tangente an Kreis I, eben so in a^1, so werden die beiden Tangenten sich schneiden in einem Punkte x_1, es werden die Abschnitte dieser Tangenten von dem Punkte x_1 bis zu den Berührungspunkten a und a^1 gleich sein: $x_1 a = x_1 a^1$. Es wird aber $x_1 a$ zugleich eine Tangente sein an den Kreis (1), und $x_1 a^1$ an den Kreis (2): folglich wird x_1 liegen in der Chordale der Kreise (1) und (2), d. h. in der Linie $A_1 A_2 A_3$. Es wird ferner nach Nr. 10. Seite 78 aa^1 die Polare des Punktes x_1 sein für den Kreis I.

Ziehe ich in b eine Tangente an Kreis II, eben so in b^1, so werden die beiden Tangenten sich schneiden in einem Punkte x_2, es werden diese Tangenten bx_2 und $b^1 x_2$ zugleich Tangenten an den Kreis (1) und (2) sein, und zwar bx_2 an (1), $b^1 x_2$ an (2): folglich wird x_2 liegen in der Chordale der Kreise (1) und (2), d. h. in der Linie $A_1 A_2 A_3$. Es wird ferner nach Nr. 10. Seite 78 bb^1 die Polare des Punktes x_2 sein für den Kreis II.

Ziehe ich in c eine Tangente an den Kreis III, eben so in c^1, so werden diese beiden Tangenten sich in x_3 schneiden, $x_3 c = x_3 c^1$, $x_3 c$ wird ausserdem eine Tangente an (1) sein, $x_3 c^1$ an (2) sein, x_3 wird also in der Chordale der Kreise (1) und (2), d. h. in der geraden Linie $A_1 A_2 A_3$, liegen. Es wird ferner cc^1 die Polare von x_3 sein.

NB. x_3 hat wegen der Enge des Raumes in der Figur keinen Platz finden können.

aa^1 ist die Polare von x_1 für Kreis I,
bb^1 . . . . x_2 . . II,
cc^1 . . . . x_3 . . III.

x_1, x_2 und x_3 liegen in $A_1 A_2 A_3$, der äusseren Symmetralen der gegebenen Kreise I, II, III.

Alle geraden Linien, welche durch x_1 gehen, also auch $A_1 A_2 A_3$, haben nach Nr. 15. Seite 82 für den Kreis I ihren Pol in der Linie aa^1, welchen Pol von $A_1 A_2 A_3$ wir mit p_1 bezeichnen wollen. Die Berührungssehne aa' geht also erstens durch 0, Chordalpunkt der Kreise I, II und III; zweitens durch p_1 den Pol der Linie $A_1 A_2 A_3$ für den Kreis I: es ist also aa' vollständig bestimmt.

Alle geraden Linien, welche durch x_2 gehen, also auch $A_1 A_2 A_3$, haben nach Nr. 15. Seite 82 für den Kreis II ihren Pol in der Linie bb^1, welchen Pol für $A_1 A_2 A_3$ wir mit p_2 bezeichnen wollen. Die Berührungssehne bb^1 geht also erstens durch 0, zweitens durch den Pol der Linie $A_1 A_2 A_3$ für den Kreis II: es ist also bb^1 vollständig bestimmt.

Alle geraden Linien, welche durch x_3 gehen, also auch $A_1 A_2 A_3$, haben nach Nr. 15. Seite 82 für den Kreis III ihren Pol in der Linie cc^1, welchen Pol wir mit p_3 bezeichnen wollen. Die Berührungssehne cc^1 geht also erstens durch 0, zweitens durch den Pol der Linie $A_1 A_2 A_3$ für den Kreis III: es ist also cc^1 vollständig bestimmt.

Konstruktion: Fig. 16, Tafel II.

Erstens: Man suche den Chordalpunkt der drei gegebenen Kreise.

Zweitens: Man suche in jedem der drei Kreise den Pol der Symmetrale. Will man den Kreis finden, welcher die drei gegebenen Kreise ausschliessend berührt, und denjenigen, welcher die drei gegebenen Kreise einschliessend berührt, so muss man die äussere Symmetrale konstruiren.

Drittens: Man erhält so drei Strahlen, welche von dem Chordalpunkt ausgehen. Jeder Strahl schneidet einen der beiden Kreise in zwei Punkten (a, a^1) oder (b, b^1) oder (c, c^1). Ein durch die drei Punkte a, b, c beschriebener Kreis berührt die drei gegebenen Kreise ausschliessend: ein durch die drei Punkte a^1, b^1, c^1 beschriebener Kreis berührt die drei gegebenen Kreise einschliessend.

Man erhält auf dieselbe Weise die sechs noch übrigen Kreise, von welchen die drei gegebenen Kreise berührt werden können, und zwer so, dass, wie hier die Kreise (1) und (2), immer zwei Kreise zusammen gehören, welche wir konjugirte Berührungskreise nennen wollen. In Fig. 33. Seite 43 sind

(1) und (2) konjugirte Berührungskreise, $A_1 A_2 A_3$ ihre Chordale,
(3) und (7) . . $I_1 A_2 I_3$ . .
(4) und (8) . . $A_1 I_2 I_3$ . .
(5) und (6) . . $I_1 I_2 A_3$ . .

Für das bessere Verständniss der folgenden Auseinandersetzungen erscheint es zweckmässig, sich eine Tabelle über die Berührungskreise in Fig. 33. Seite 43 zu entwerfen, wo unter $\mathfrak{e}$ eine einschliessende, unter $\mathfrak{a}$ eine ausschliessende Berührung verstanden werden soll.

	I	II	III
3)	e	a	e
7)	a	e	a
4)	e	e	a
8)	a	a	e
5)	a	e	e
6)	e	a	a

Z. B. Kreis (5) berührt I ausschliessend, II einschliessend, III einschliessend; Kreis (6) berührt I einschliessend, II ausschliessend, III ausschliessend.

Wir können zeigen, dass die Berührungssehnen in I, II und III durch den inneren Ähnlichkeitspunkt von (5) und (6) gehen, und dass derselbe zugleich der Chordalpunkt von I, II und III ist.

Wir wollen die Berührungspunkte des Kreises (5) mit I, II und III bezeichnen durch a, b, c. Die des Kreises (6) mit a^1, b^1, c^1. Die Berührungssehnen heissen alsdann aa^1, bb^1, cc^1. Alsdann können wir folgende Behauptungen aufstellen:

a ist der innere Ähnlichkeitspunkt von I und 5,
a^1 " " äussere " " I und 6,

folglich geht die Linie aa^1 durch den inneren Ähnlichkeitspunkt von (5) und (6).

Eben so ist b der äussere Ähnlichkeitspunkt von II und 5,
b^1 " innere " " II und 6,

folglich geht die Linie bb^1 durch den inneren Ähnlichkeitspunkt von (5) und (6).

Gerade so lässt sich zeigen, dass die Berührungssehne cc^1 durch den inneren Ähnlichkeitspunkt von (5) und (6) geht, also dass alle drei Berührungssehnen durch denselben Punkt, den inneren Ähnlichkeitspunkt von (5) und (6), gehen.

Wir können nun wie vorhin zeigen, dass der innere Ähnlichkeitspunkt von (5) und (6) zugleich der Chordalpunkt der drei Kreise I, II und III ist. Wir müssen dazu die Sätze §. 19. Seite 22 in Anwendung bringen.

Z. B. Kreis I berührt den Kreis (5) ausschliessend und den Kreis (6) einschliessend; dagegen Kreis II berührt den Kreis (5) einschliessend und den Kreis (6) ausschliessend. Wir haben also den 6. Fall von §. 19. Seite 22, wonach die Chordale der thätigen Kreise I und II durch den inneren Ähnlichkeitspunkt der leidenden Kreise (5) und (6) geht. Dasselbe lässt sich von der Chordale von I und III, dgl. von II und III beweisen. Es ist also der innere Ähnlichkeitspunkt der Kreise (5) und (6) zugleich der Chordalpunkt der Kreise I, II, III. Die drei Berührungssehnen gehen also durch den Chordalpunkt der Kreise I, II und III.

Für jede der 8 Auflösungen muss also immer der Chordalpunkt der drei gegebenen Kreise gesucht werden, von welchem die Berührungssehnen als Strahlen ausgehen, in Summa 4 . 3 Berührungssehnen. Was dagegen die Symmetralen betrifft, so gehört jede der vier Symmetralen immer zu zwei Auflösungen und liefert zwei konjugirte Berührungskreise.

Z. B. kann man leicht die Symmetrale finden, welche in Anwendung gebracht werden muss, um die Berührungskreise (5) und (6) in Fig. 33. Seite 43 zu konstruiren.

Kreis (5) berührt I und II ungleichartig, eben so Kreis (6): die Chordale von (5) und (6) geht also durch den inneren Ähnlichkeitspunkt I_1 von I und II. Eben so lässt sich zeigen, dass die Chordale von (5) und (6) durch den inneren

Aehnlichkeitspunkt I_2 von I und III geht; dagegen durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt A_3 von II und III. Die Chordale von (5) und (6) fällt also zusammen mit der Symmetrale $I_1 I_2 A_3$. Wir haben nun, um die Berührungssehnen für (5) und (6) zu finden, nur nöthig, die Pole von $I_1 I_2 A_3$ für jeden der Kreise I, II und III zu suchen.

Vierte Auflösung der Berührungsaufgabe.*)

1. Figur 17. Hat man ein System paralleler Linien, welche denselben Abstand unter sich haben $a_1 d_1 \mp a_2 d_2 \mp a_3 d_3 \mp a_4 d_4$ u. s. w., deren Abstand wir durch $\mathfrak{d}$ bezeichnen wollen, also auch $a_1 a_2 = a_2 a_3 = a_3 a_4$ u. s. w.; hat man ferner ein zweites System paralleler Linien, welche denselben Abstand unter sich haben, aber einen von dem vorigen Abstande unabhängigen, welchen zweiten Abstand wir durch δ bezeichnen wollen, also auch $a_1 b_1 = b_1 c_1 = c_1 d_1$ u. s. w., so erhalten wir Systeme von Durchschneidungspunkten, welche in gerader Linie liegen, z. B. $c_1 b_2 a_3$, $d_1 c_2 b_3 a_4$, $a_1 b_2 c_3 d_4$ u. s. w. sind gerade Linien.

Die Richtigkeit dieses Satzes lässt sich auch dann noch erweisen, wenn die Abstände aufhören gleich zu sein, nur in beiden Systemen proportional bleiben, d. h. wenn in dem einen Systeme die Abstände $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{d}_3$ u. s. w., in dem anderen Systeme δ_1, δ_2, δ_3, u. s. w. sind, $\mathfrak{d}_1 : \mathfrak{d}_2 : \mathfrak{d}_3 \ldots = \delta_1 : \delta_2 : \delta_3 \ldots$

2. Fig. 18. Hat man sich nach §. 12. Seite 12 die Chordale von zwei gegebenen Kreisen um M und m konstruirt, so kann man leicht ihren Abstand von den Mittelpunkten M und m der beiden gegebenen Kreise bestimmen. Es ist

$$OM = \frac{R^2 - r^2 + c^2}{2c}, \quad Om = \frac{r^2 - R^2 + c^2}{2c},$$

wo unter c die Centrale, d. h. der Abstand der Punkte M und m, verstanden wird, unter R der Radius des Kreises um M, unter r derjenige des Kreises um m.

Wächst nun R um d und zugleich r auch um d, so entfernt sich die Chordale um die Grösse $\frac{R - r}{c} \times d$ von dem Mittelpunkte M, bleibt aber senkrecht auf der Centrale Mm, also parallel mit ihrer ursprünglichen Lage.

3. Fig. 19. Es sind drei Kreise I, II und III gegeben, man soll einen Kreis beschreiben, welcher alle drei zu gleicher Zeit berührt. Wie wir wissen und die Anschauung von Fig. 33. Seite 43 lehrt, sind acht Kreise möglich. Wir wollen hier die Konstruktion von Kreis 1 nachweisen.

Bezeichnen wir den Radius des Kreises I mit r_1, den von II mit r_2, den von III mit r_3; ferner den Abstand der Mittelpunkte von I und II mit c_1, den von I und III mit c_2, den von II und III mit c_3; ferner die Chordale von I und II mit $\mathfrak{C}_1$, von I und III mit $\mathfrak{C}_2$, von II und III mit $\mathfrak{C}_3$: so kennen wir nach Nr. 2. den Abstand der $\mathfrak{C}_1$ vom Mittelpunkte von I und II, eben so der $\mathfrak{C}_2$ vom Mittelpunkte von I und III, eben so der $\mathfrak{C}_3$ vom Mittelpunkte von II und III. Wir wollen $r_1 > r_2 > r_3$ annehmen, alsdann ist der Abstand der $\mathfrak{C}_1$ von dem Mittelpunkte von I gleich $\frac{r_1^2 - r_2^2 + c_1^2}{2 c_1}$ u. s. w.

*) von Pfaff.

Die drei Chordalen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$ schneiden sich in einem Punkte, dem Chordalpunkte (vgl. §. 11. Seite 11). Lassen wir nun alle drei Radien um ein bestimmtes Stück $\mathfrak{d}$ wachsen, so würden, wie beschaffen auch $\mathfrak{d}$ sein mag, die Abstände der Chordalen $\mathfrak{C}_1$ von dem Mittelpunkte von I, $\mathfrak{C}_2$ von dem Mittelpunkte I, $\mathfrak{C}_3$ von dem Mittelpunkte II proportional wachsen mit $\mathfrak{d}$, nämlich um $\frac{r_1 - r_2}{c_1} . \mathfrak{d}$, $\frac{r_1 - r_3}{c_2} . \mathfrak{d}$, $\frac{r_2 - r_3}{c_3} . \mathfrak{d}$. Hierbei wird immer ausgegangen von den Abständen der Chordalen der drei ursprünglich gegebenen Kreise von den Mittelpunkten der grösseren Kreise, d. h. wir legen zum Grunde den Abstand von $\mathfrak{C}_1$ vom Mittelpunkte I, von $\mathfrak{C}_2$ vom Mittelpunkte I, von $\mathfrak{C}_3$ vom Mittelpunkte II. Die Chordalen für die konzentrischen Kreise, die entstehen, wenn man den Radius von I und II um ein beliebiges Stück $\mathfrak{d}$ wachsen oder abnehmen lässt, werden also ein System paralleler Linien bilden, welche senkrecht stehen auf der Centrale von I und II, und deren Abstände von dem Mittelpunkte I um $\frac{r_1 - r_2}{c_1} . \mathfrak{d}$ wachsen oder abnehmen. Ein ähnliches System paralleler Linien werden die Chordalen von I und III bilden für die konzentrischen Kreise, die entstehen, wenn man den Radius von I und III um ein beliebiges Stück $\mathfrak{d}$ wachsen oder abnehmen lässt. Dieses System von Chordalen wird senkrecht stehen auf der Centrale von I und III. Dasselbe gilt von den Chordalen für die mit II und III konzentrischen Kreise. Dieses System von Chordalen wird senkrecht stehen auf der Centrale von II und III. Die entsprechenden Chordalen der drei Kreise I, II, III mit den Radien r_1, r_2, r_3 werden einen Durchschnittspunkt geben, den wir mit O bezeichnen wollen; eben so die drei Chordalen der mit den obigen resp. konzentrischen Kreise mit den Radien $r_1 + \mathfrak{d}$, $r_2 + \mathfrak{d}$, $r_3 + \mathfrak{d}$, welchen Durchschnittspunkt wir mit O_1 bezeichnen wollen; eben so die drei Chordalen der mit den obigen resp. konzentrischen Kreise mit den Radien $r_1 + 2\mathfrak{d}$, $r_2 + 2\mathfrak{d}$, $r_3 + 2\mathfrak{d}$, welchen Durchschnittspunkt wir mit O_2 bezeichnen wollen. Es liegen nun nach Nr. 1. die Punkte O, O_1, O_2 in gerader Linie. Hätten wir die Radien um das Stück x wachsen lassen, also die mit den obigen resp. konzentrischen Kreise mit den Radien $r_1 + x$, $r_2 + x$, $r_3 + x$ beschrieben, die drei Chordalen dazu gezogen, so hätten wir ihren Durchschnittspunkt O_x in derselben Linie $O\,O_1$ gefunden. Die entsprechenden Chordalen in dem Systeme I wären nämlich in den Abständen vom Mittelpunkte I $\mathfrak{d}$, $2\,\mathfrak{d}$, u. s. w., x, jedesmal multiplicirt mit $\frac{r_1 - r_2}{c_1}$ gewesen; in dem Systeme II vom Mittelpunkte II $\mathfrak{d}$, $2\,\mathfrak{d}$ u. s. w. x, jedesmal multiplicirt mit $\frac{r_1 - r_3}{c_2}$ u. s. w.; ihre Abstände sind also proportional $\mathfrak{d}$, $2\mathfrak{d}$, x: daher hätte auch O_x in der Linie $O\,O_1$ gelegen.

Die gerade Linie $O\,O_1 O_2 \ldots O_x$, worin sich die Durchschnittspunkte der entsprechenden drei Chordalen von den drei Systemen konzentrischer Kreise befinden, wollen wir C h o r d a l p u n k t s l i n i e n nennen, sie ist in Fig. 19. ausgezeichnet worden.

4. Aus §. 11. Seite 11 geht hervor, dass, wenn sich drei Kreise in einem Punkte schneiden, dieser Durchschnittspunkt ihr Chordalpunkt ist. Bezeichnen wir den Radius des Kreises 1, welcher die Kreise I, II und III von aussen berühren soll, mit ρ, so ist klar, dass der Mittelpunkt von Kreis (1) von dem des Kreises I absteht um $r_1 + \rho$, von dem des Kreises II absteht um $r_2 + \rho$, von dem des

Kreises III um $r_3 + \rho$, es ist also der Mittelpunkt vom Kreise (1) ein Punkt in der Chordalpunktslinie $O\,O_1 O_2$. Wir haben also eine gerade Linie erhalten, in welcher der Mittelpunkt des gesuchten Berührungskreises (1) liegen muss. Wir finden diese gerade Linie dadurch, dass wir zwei beliebige ihrer Punkte bestimmen. Zunächst suchen wir den Chordalpunkt der Kreise I, II und III, d. i. o_1; dann den der Kreise VI, VII und VIII, wo VI konzentrisch ist mit I, VII mit II, VIII mit III; der Radius von VI ist $r_1 + x$, der von VII $r_2 + x$, der von VIII ist $r_3 + x$. Wir haben also die drei Radien r_1, r_2 und r_3 um dasselbe Stück x wachsen lassen.

5. Wir haben daher den Radius des zu suchenden Berührungskreises (1) in der geraden Linie $o_1 o_2$ aufzufinden. Wir zeichnen uns nun zu einem der drei gegebenen Kreise I, II und III in Beziehung auf die gerade Linie $O\,O_1$ den symmetrischen Kreis oder das Spiegelbild: wir wählen am besten dazu den kleinsten Kreis, in unserer Figur den Kreis III, dessen Spiegelbild IV heissen mag. Die beiden Kreise III und IV haben dieselbe Lage gegen die Chordalpunktslinie $O\,O_1$ und unter sich gleiche Halbmesser, nämlich r_3. Ein Kreis, welcher nun drei von den vier Kreisen I, II, III, IV berührt, wird auch immer den vierten berühren; z. B. ein Kreis, der I, III, IV berührt, muss auch II berühren. Wir konstruiren nun einen Kreis, welcher durch die beiden Mittelpunkte von III und IV geht und den Kreis IX berührt, welcher konzentrisch mit I ist und (IX) zum Radius $r_1 - r_3$ hat. Wir finden diesen Kreis X nach Aufgabe 3. Seite 27. Behalten wir nun den Mittelpunkt von X bei, und verkürzen den Radius von X um r_3, so erhalten wir einen Kreis, welcher Kreis I, III und IV berührt, folglich auch den Kreis II: damit ist die Aufgabe gelöset.

Dasselbe Verfahren, das wir befolgt haben, um Kreis (1) zu finden, findet auch seine Anwendung, um irgend einen der acht möglichen in Fig. 33. Seite 43 gezeichneten Berührungskreise zu konstruiren. Für jeden anderen Berührungskreis wird eine andere Chordalpunktslinie gefunden, nachher ist die Methode genau dieselbe.

Um die Chordalpunktslinie zu finden, welche nöthig ist zur Konstruktion von Kreis (2), müssen wir die in Nr. 2. Seite 87 angestellte Betrachtung erweitern. Sind drei Kreise I, II und III mit den Radien r_1, r_2 und r_3 gegeben, $r_1 > r_2 > r_3$, so wird die Chordale z. B. von I und II einen bestimmten Abstand haben von dem Mittelpunkte des grösseren Kreises I, nämlich $\frac{r_1^2 - r_2^2 + c_1^2}{2\,c_1}$; eben so die Chordale der Kreise I und III, nämlich $\frac{r_1^2 - r_3^2 + c_2^2}{2\,c_2}$. Beschreibt man aber einen konzentrischen Kreis mit I mit dem Radius $k - r_1$, eben so mit II mit dem Radius $k - r_2$, eben so mit III mit dem Radius $k - r_3$, konstruirt sich hierauf die Chordalen dieser drei neuen Kreise, so erhält man durch eine leichte Rechnung die Abstände der neuen Chordalen von den Mittelpunkten der grösseren Kreise, diese Abstände nehmen ab um $\frac{r_1 - r_2}{c_1}\,.\,k$ im ersten Systeme senkrecht auf der Centrale von I und II, um $\frac{r_1 - r_3}{c_2}\,.\,k$ im zweiten Systeme senkrecht auf der Centrale von I und III, um $\frac{r_2 - r_3}{c_3}\,.\,k$ im dritten Systeme senkrecht auf der Centrale von II und III. Die drei zusammengehörigen Chordalen für die drei Kreise, wo wir dasselbe k aber von beliebiger Länge in den Radien $k - r_1$, $k - r_2$ und $k - r_3$ haben, werden Durchschnittspunkte (Chordalpunkte) liefern, die alle in derselben geraden Linie (Chordalpunktslinie) liegen, in welcher auch der Mittelpunkt des Berührungskreises (2) liegen muss, in welchem sich die drei Kreise mit den Radien $\rho_2 - r_1$, $\rho_2 - r_2$, $\rho_2 - r_3$ schneiden, indem unter ρ_2 der Radius des alle drei Kreise I, II, III einschliessenden Berührungskreises verstanden wird.

Um also die Chordalpunktslinie zu finden, in welcher der Mittelpunkt des Berührungskreises (2) liegt, muss man den Chordalpunkt von I, II, III auffinden, den Punkt o_1 in Fig. 19; dies ist ein Punkt der gesuchten Chordalpunktslinie. Ein anderer Punkt dieser Chordalpunktslinie wird gefunden, wenn man sich mit I den konzentrischen Kreis mit dem Radius $k - r_1$, mit II den konzentrischen Kreis mit dem Radius $k - r_2$, mit III den konzentrischen Kreis mit dem Radius $k - r_3$ konstruirt, wo k eine beliebige Länge grösser als r_1 ist. Auf diese Weise hat man eine gerade Linie gefunden, in welcher der Mittelpunkt von (2) liegen muss, und verfährt dann wie oben.

Nachdem nun die Konstruktion der Berührungskreise (1) und (2) in Fig. 33. Seite 43 näher erörtert worden ist, wird man sich leicht für die Konstruktion irgend eines anderen der acht Berührungskreise zurecht finden.

Als Beispiel wählen wir Berührungskreis (4), welcher I einschliessend, II einschliessend und III ausschliessend berührt.

Wir beschreiben um den Mittelpunkt von I konzentrische Kreise mit dem Radius $k - r_1$, um den Mittelpunkt von II konzentrische Kreise mit dem Radius $k - r_2$, um den Mittelpunkt von III konzentrische Kreise mit dem Radius $r_3 + k$, wo k eine beliebige Länge bedeutet. Wir suchen nun für diese drei Kreise $k - r_1$, $k - r_2$, $k - r_3$ den Chordalpunkt, legen durch diesen so gefundenen Chordalpunkt und den der ursprünglich gegebenen drei Kreise eine gerade Linie, so ist dies die für die Konstruktion des Berührungskreises (4) erforderliche Chordalpunktslinie. Bezeichnen wir den Radius von (4) durch ρ_4, so werden die drei mit I, II und III konzentrischen Kreise mit den Radien $\rho_4 - r_1$, $\rho_4 - r_2$, $r_3 + \rho_4$ sich in dem Mittelpunkte des Berührungskreises (4) schneiden, es wird derselbe also ebenfalls in der zu suchenden Chordalpunktslinie liegen.

Interessant ist es hier wahrzunehmen, wie die beiden Systeme paralleler Chordalen für I und II, I und III, eben so II und III, in diesem Beispiele entstehen aus konzentrischen Kreisen mit I, II und III, die in den beiden letzten Fällen auf verschiedene Weise beschrieben werden, z. B. für I und III. Die konzentrischen Kreise um I werden hier beschrieben mit dem Radius $k - r_1$, wo k nach und nach verschiedene Längen darstellt; die konzentrischen Kreise um III werden beschrieben mit dem Radius $r_3 + k$, indem k nach und nach verschiedene Längen vorstellt. Während bei den ursprünglichen beiden Kreisen I und III die Entfernung der Chordale vom Mittelpunkte I beträgt $\frac{r_1^2 - r_3^2 + c_2^2}{2 c_2}$, nimmt sie bei den konzentrischen Kreisen mit den Radien $k - r_1$ und $r_3 + k$ ab um $\frac{r_1 + r_3}{c_2} . k$, aber, wie wir sehen, immer proportional mit k, so dass die Durchschnittspunkte von je zwei entsprechenden Chordalen der drei verschiedenen parallelen Systeme immer in einer und derselben geraden Linie, der Chordalpunktslinie, zu liegen kommen.

Fünfte Auflösung der Berührungsaufgabe.

1. Fig. 20. Tafel II. Es sind zwei Kreise gegeben I und II. Man hat zwei andere Kreise beschrieben, welche die beiden gegebenen Kreise zugleich gleichartig berühren, Kreis (1) ausschliessend, Kreis (2) einschliessend: so geht nach §. 19. Seite 22 die Chordale der thätigen Kreise, hier von (1) und (2), durch den äusseren Ähnlichkeitspunkt der leidenden Kreise. Wir haben hier den zweiten Fall. Hätten wir noch mehr Berührungskreise zu I und II, welche dieselben gleichartig berührten, z. B. Kreis (3), welcher beide ausschliessend berührt, so ginge auch die Chordale von (1) und (3), eben so die von (2) und (3) durch den äusseren Ähnlichkeitspunkt von I und II. Alle Tangenten von A_1 an die Kreise (1), (2), (3) u. s. w. sind daher gleich. Alle Chordalen für jede beliebige zwei Kreise, welche die beiden Kreise I und II gleichartig berühren, schneiden sich nämlich in A_1, dem äusseren Ähnlichkeitspunkte von I und II. Eben so lässt sich nachweisen, dass die Chordalen für jede beliebige zwei Kreise, welche die beiden Kreise I und II ungleichartig berühren, sich in I_1, dem inneren Ähnlichkeitspunkte von I und II, schneiden. Beschreibt man also aus A_1 einen Kreis mit der Länge der Tangente an die Kreise (1), (2), (3) u. s. w. oder mit dem Radius $A_1T_1 = A_1T_2 = A_1T_3$ u. s. w., so erhält man einen Orthogonalkreis für die Kreise (1), (2), (3) u. s. w., welchen wir den Potenzkreis für die Kreise I und II nennen wollen. Das Quadrat des Radius des Potenzkreises ist gleich $A_1D \, . \, A_1E$. Sind die beiden Kreise I und II gegeben, so ist auch ihr äusserer Ähnlichkeitspunkt A_1 gegeben, eben so das Produkt $A_1D \, . \, A_1E$, daher auch ihr Potenzkreis (9). Jeder Kreis, welcher nun die beiden gegebenen Kreise berührt, muss daher den Potenzkreis (9) orthogonal schneiden. Eben so: Berührt ein Kreis (1) den einen der beiden Kreise I oder II, während er den Potenzkreis (9) derselben orthogonal schneidet, so muss er auch den anderen Kreis berühren, und zwar ist die Berührung gleichartig, wenn wir denjenigen Potenzkreis (9) gewählt haben, der aus dem äusseren Ähnlichkeitspunkte A_1 beschrieben worden ist.*)

2. Fig. 21. Tafel II. Dasselbe Raisonnement kann man auf die Kreise I und III, deren äusserer Ähnlichkeitspunkt A_2 ist, anwenden und sagen:

Berührt ein Kreis einen der Kreise I, II oder III, während er den Potenzkreis (9) um A_1 für I und II und den Potenzkreis (10) um A_2 für I und III orthogonal schneidet, so muss er auch die beiden übrigen berühren und zwar gleichartig.

Ferner: Ein Kreis, der die drei Kreise I, II und III zugleich gleichartig berührt, muss die Potenzkreise (9) und (10) orthogonal schneiden, d. h. sein Mittelpunkt muss in der Chordale von den Potenzkreisen (9) und (10) liegen, vgl. §. 14. Seite 14. Die Chordale von (9) und (10) steht aber lothrecht auf der

*) Der innere Aehnlichkeitspunkt I_1 giebt ebenfalls einen Potenzkreis, welcher sämmtliche Kreise orthogonal schneidet, von denen die beiden gegebenen Kreise I und II ungleichartig berührt werden. Von diesem Kreise ist nicht blos der Mittelpunkt bekannt, sondern auch der Radius. Wären z. B. die Kreise um M und m in Fig. III. Seite 4 die beiden gegebenen Kreise, I ihr innerer Aehnlichkeitspunkt, so wäre die mittlere geometrische Proportionale zu ID und ID^1 oder zu Id und Id^1 der Radius des Potenzkreises, welcher alle Kreise orthogonal schneidet, von denen die Kreise um M und m ungleichartig berührt werden.

Centrale $A_1 A_2$. Wir haben also eine gerade Linie Cl) gefunden, in welcher wir den Mittelpunkt der Kreise zu suchen haben, welche I, II und III gleichartig berühren, es ist die Chordale der beiden Potenzkreise (9) und (10), welche lothrecht auf $A_1 A_2$ steht.

Wir könnten auf diese Weise noch zwei andere gerade Linien finden, in welcher die Mittelpunkte der Kreise liegen müssen, welche I, II und III zugleich gleichartig berühren; wir müssten dazu noch den dritten Potenzkreis für II und III aus A_3 konstruiren, welchen wir mit (11) bezeichnen wollen. Alsdann würde die Chordale der Potenzkreise (9) und (11) senkrecht stehen auf $A_1 A_3$, diejenige von (10) und (11) auf $A_2 A_3$: es liegen aber A_1, A_2, A_3 in gerader Linie. Vgl. §. 8. Seite 7. Also müssten alle drei Chordalen der drei Potenzkreise um A_1, A_2 und A_3 parallel sein. Jede dieser drei Chordalen enthält aber die beiden Mittelpunkte der Kreise (1) und (2), welche die drei gegebenen Kreise I, II und III gleichartig berühren: folglich muss jede der drei Chordalen durch dieselben zwei Punkte hindurch gehen, d. h. alle drei Chordalen müssen zusammen fallen: was sich auch aus dem Anblick der Figur 21 ergiebt, wo alle drei Potenzkreise 9, 10 und 11 eine gemeinschaftliche Sehne haben.

3. Es kommt daher nur darauf an, einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei von den gegebenen Kreisen, z. B. I und III, berührt und seinen Mittelpunkt in der Chordale Cl) hat, alsdann muss er von selbst den noch übrigen Kreis II berühren. Zu diesem Zwecke zeichnen wir uns zu einem der beiden Kreise I oder III, hier zu III, das Spiegelbild in Beziehung auf die gefundene Chordale Cl), dies sei der Kreis IV. Hierauf suchen wir einen Kreis, welcher die Kreise I, III und IV berührt, was leicht ist, da III und IV denselben Radius haben und in Beziehung auf die gerade Linie Cl) symmetrisch gelegen sind. Wir wissen ausserdem, dass sein Mittelpunkt in Cl) liegt. Um nun zuerst den Kreis zu finden, welcher die drei gegebenen Kreise ausschliessend berührt, so beschreiben wir einen Kreis, welcher durch die Mittelpunkte von III und IV geht und einen Kreis VI ausschliessend berührt, welcher mit I konzentrisch ist, dessen Radius aber gleich der Differenz der Radien von I und III ist. Vgl. Aufgabe 3. Seite 27. Den Berührungskreis an VI, der durch die Mittelpunkte von III und IV geht, haben wir durch V bezeichnet. Verkürzen wir nun den Radius von V um die Länge des Radius von III und beschreiben mit dem so verkürzten Radius aus 0_1 einen konzentrischen Kreis (1) mit V, so erhalten wir einen Kreis (1), welcher die beiden Kreise I und III*) berührt, dessen Mittelpunkt in der geraden Linie Cl) liegt, welcher Kreis (1) daher auch den Kreis II berühren muss.

Kreis (1) berührt die drei gegebenen Kreise I, II und III ausschliessend. Um Kreis (2) zu finden, welcher dieselben einschliessend berührt, müssen wir uns einen Hülfskreis VII zeichnen, welcher durch die Mittelpunkte von III und IV geht und den Kreis VI einschliessend berührt. Diesen Kreis haben wir mit VII bezeichnet. Wir verlängern hierauf den Radius von VII um die Länge des Radius von III und beschreiben mit dem so verlängerten Radius einen konzentrischen Kreis zu VII, den Kreis (2), welcher dann alle drei gegebenen Kreise I, II und III einschliessend berühren muss.*)

Mit Hülfe der Punkte A_1, A_2 und A_3 haben wir die beiden konjugirten Kreise (1) und (2) gefunden. Eben so hätten wir mit Hülfe der Punkte I_1, I_2

*) Also auch Kreis IV.

und A_3 die konjugirten Berührungskreise (5) und (6) in Fig. 33. Seite 43 finden können. Kreis (5) und (6) berühren nämlich die Kreise I und II ungleichartig, die Chordale von (5) und (6) geht also durch den inneren Ähnlichkeitspunkt von I und II, d. h. durch I_1. Ziehe ich von I_1 Tangenten an (5) und (6), so werden dieselben gleich sein. Beschreibe ich mit der Länge dieser Tangente einen Kreis, so wird derselbe die Kreise, welche I und II ungleichartig berühren, orthogonal schneiden, z. B. 5 und 6. Wir wollen ihn den inneren Potenzkreis von I und II nennen. Eben so beschreibe ich aus I_2 den inneren Potenzkreis zu I und III, welcher alle Kreise orthogonal schneidet, welche die Kreise I und III ungleichartig berühren, z. B. (5) und (6). Kreis (5) z. B. schneidet also die beiden Potenzkreise aus I_1 und I_2 orthogonal, sein Mittelpunkt liegt also in der Chordale dieser Kreise um I_1 und I_2. Kreis (5) und (6) berühren nun II und III gleichartig. Die Chordale von (5) und (6) geht also durch A_3; mit der Länge der Tangente von A_3 an die Kreise (5) und (6) kann ich also einen Kreis beschreiben aus A_3, welcher die gleichartigen Berührungskreise für II und III orthogonal schneidet. Dieser Potenzkreis aus A_3 hat mit den Potenzkreisen aus I_1 und I_2 Chordalen. Die drei Chordalen dieser drei Potenzkreise aus I_1, I_2 und A_3, welche auf derselben geraden Linie $I_1 I_2 A_3$ senkrecht stehen, und in welchen sich die Mittelpunkte der Kreise (5) und (6) befinden, fallen also zusammen. Nachdem man so eine gerade Linie als einen Ort für die Mittelpunkte von (5) und (6) gefunden hat, verfährt man wie vorhin.

Bei dieser fünften Auflösung der Berührungsaufgabe kommt es also vorzugsweise darauf an, die Potenzkreise aus A_1, A_2, A_3, I_1, I_2 und I_3 zu finden. Bei jeder Auflösung braucht man eigentlich immer deren nur zwei, deren Chordale uns den gesuchten Ort für den Mittelpunkt liefert; indem die drei zusammengehörigen Potenzkreise der Systeme $A_1 A_2 A_3$, $A_1 I_2 I_3$, $I_1 A_2 I_3$, $I_1 I_2 A_3$ in jedem Systeme nur eine einzige gerade Linie als geometrischen Ort für die Mittelpunkte der gesuchten Berührungskreise liefern, weil die drei Chordalen jedesmal zusammenfallen.

Man kennt also die Mittelpunkte dieser Potenzkreise, es handelt sich daher nur darum, ihre Radien zu bestimmen. Den Radius des Potenzkreises um A_1 findet man, indem man in Fig. 20. die mittlere geometrische Proportionale von $A_1 D$ und $A_1 E$ sucht; analog für die Potenzkreise um A_2, A_3. Den Radius des Potenzkreises um I_1 findet man, indem man die mittlere geometrische Proportionale von $I_1 D$ und ID_1 oder von Id und Id_1 (vgl. Fig. III. Seite 4) sucht.

Man kann daher sehr leicht die fünfte Auflösung ausführen. Man muss dazu die Ähnlichkeitspunkte A_1, A_2, A_3, I_1, I_2, I_3 der drei gegebenen Kreise I, II und III aufsuchen und sich aus diesen Ähnlichkeitspunkten die sechs Potenzkreise, deren Radien man auf die oben angegebene Weise findet, konstruiren. Für jede zwei konjugirte Berührungskreise gebraucht man nur zwei Potenzkreise, in deren Chordale die beiden Mittelpunkte der gesuchten konjugirten Berührungskreise liegen. Alsdann bleibt die Aufgabe übrig: Einen Kreis zu beschreiben, welcher drei Kreise berührt, von denen zwei gleich sind (der eine ist das Spiegelbild des anderen in Beziehung auf die gefundene Chordale, in welcher sich die Mittelpunkte der gesuchten Kreise befinden). Vgl. Aufgabe 3. Seite 27.

Behandlung
der
Berührungsaufgabe
mit Hülfe
der Kegelschnitte.

Den vorangeschickten fünf Auflösungen der Berührungsaufgabe fügen wir noch eine sechste Behandlung mit Hülfe der Kegelschnitte hinzu. Diese Behandlung empfiehlt sich als eine Einführung der Lernenden in das Studium der Kegelschnitte. Die geometrische Auffassung wird durch diese Behandlung ausserordentlich geübt, indem die Uebergänge der verschiedenen Kegelschnitte in einander, in einen Kreis und eine gerade Linie, so wie die Theorie ihrer Durchschnitte zur deutlichen Anschauung gebracht werden.

Präliminarien.

Nr. 1. Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche durch zwei gegebene Punkte gehen?

Nr. 2. Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und eine gegebene gerade Linie berühren?

Ist in Fig. 22. n der gegebene Punkt und 𝔏𝔏 die gegebene gerade Linie, so handelt es sich darum, diejenige Kurve zu finden, deren Punkte von n und der gegebenen geraden Linie gleich weit entfernt sind. Es ist dies eine P a r a b e l, der Brennpunkt der Parabel ist der gegebene Punkt A, 𝔏𝔏 ist ihre Directrix. Um die Parabel zu konstruiren, muss man von n auf 𝔏𝔏 ein Loth fällen, und erhält so ihre Hauptachse. Halbirt man den Theil nS der Hauptachse, so findet man den Scheitelpunkt der Parabel, zugleich den Mittelpunkt des k l e i n s t e n Kreises, welcher durch n geht und die Linie 𝔏𝔏 berührt, sein Radius ist An = AS = dem vierten Theil des Parameters der Parabel. Alle übrigen Punkte der Parabel, z. B. A, c, d, e, M, c^1, d^1, e^1, M^1 u. s. w. können als Mittelpunkte von Kreisen angenommen werden, welche die beiden Bedingungen erfüllen. M und M^1 sind zwei symmetrisch gelegene Punkte in Beziehung auf die Hauptachse der Parabel, die Radien der um sie beschriebenen Kreise sind gleich $Mn = M^1n$ Die beiden Kreise um M und M^1 gehen ausserdem durch die gegebenen Punkte m und n, weil ihre Mittelpunkte in der Linie $MM^1 \perp mn$ liegen, wo MM^1 der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise ist, welche durch m und n gehen. Um den Mittelpunkt eines Kreises zu finden, welcher durch die gegebenen Punkte m und m^1 geht und Linie 𝔏𝔏 berührt, muss man mm^1 halbiren, in der Mitte ein Loth errichten und seine Durchschnittspunkte mit der Parabel nehmen.

Nr. 3. Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und einen gegebenen Kreis berühren?

α) Der gegebene Punkt liegt ausserhalb des Kreises.

In Fig. 23. ist der Kreis um K gegeben, ausserhalb desselben der Punkt m, man soll einen Kreis beschreiben, welcher durch m geht und den Kreis um K berührt. Der Mittelpunkt M dieses Kreises muss von m und dem Kreise K gleich weit abstehen, d. h. sein geometrischer Ort ist eine Hyperbel. Um diese Hyperbel zu konstruiren, muss man die Punkte K und m, welches die Brennpunkte der Hyperbel sind, verbinden, erhält so die Hauptachse derselben. Verbindet man irgend einen Punkt der Hyperbel, z. B. M mit m und K, so muss die Differenz $MK - Mm$ konstant sein, nämlich gleich dem Radius des Kreises um K, welchen wir durch R bezeichnen wollen. Halbirt man die Excentricität Km in C, so ist C der Mittelpunkt der Hyperbel. Trägt man zu beiden Seiten von C auf der Hauptachse den halben Radius R, also $CA = CB = \frac{1}{2} R$, so erhält man die beiden Scheitelpunkte A und B der Hyperbel. Jeder Punkt der Hyperbel erfüllt nun die beiden verlangten Bedingungen. Der Scheitelpunkt A liefert den kleinsten Kreis, welcher durch m geht und den gegebenen Kreis von aussen berührt, sein Radius ist Am. Der Scheitelpunkt B liefert den kleinsten Kreis, welcher durch m geht und den gegebenen Kreis von innen berührt, sein Radius ist Bm. Der Punkt M^1 symmetrisch von M gelegen in Beziehung auf die Hauptachse der Hyperbel, liefert einen Kreis, welcher durch m geht, den gegebenen Kreis von aussen berührt und mit dem Kreise um M gleichen Radius hat. Auf dem Zweige der Hyperbel bei A hat man die Mittelpunkte von den Kreisen zu suchen, welche den gegebenen Kreis ausschliessend berühren; auf dem Zweige bei B die Mittelpunkte von den Kreisen, welche den gegebenen Kreis einschliessend berühren. Z. B. ist M der Mittelpunkt eines Kreises, welcher durch die beiden gegebenen Punkte m und n geht und den Kreis K ausschliessend berührt, während $\mathfrak{m}$ der Mittelpunkt eines Kreises ist, welcher durch m und n geht und den Kreis K einschliessend berührt. Die Punkte M und $\mathfrak{m}$ liegen in der geraden Linie $\mathfrak{m}M \perp mn$, $\mathfrak{m}M$ ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche durch die Punkte m und n gehen. mn ist in o halbirt worden, $oM\mathfrak{m} \perp mn$.

β) Der gegebene Punkt liegt im Umfange des Kreises.

Alsdann ist der geometrische Ort eine gerade Linie, welche durch den gegebenen Punkt und den Mittelpunkt des gegebenen Kreises geht. Eigentlich ist es eine Hyperbel, bei welcher die Excentricität gleich der grossen Hauptachse ist. Die Scheitelpunkte der beiden Hyperbelzweige sind der Punkt im Umfange und der Mittelpunkt des Kreises, die Excentricität und grosse Hauptachse sind identisch.

γ) Der gegebene Punkt liegt innerhalb des Kreises.

Fig. 24. Liegt der gegebene Punkt m innerhalb des Kreises um K, so findet man den geometrischen Ort für die Mittelpunkte derjenigen Kreise, welche durch m gehen und den Kreis K berühren durch folgende Analysis. Angenommen der Kreis um M gehe durch m und berühre den gegebenen Kreis in x, so ist KMx eine gerade Linie, $Mx = Mm$ und $MK + Mm = R$, wo wir unter R den Radius des gegebenen Kreises um K verstehen. Da die Summe $MK + Mm$ eine konstante Grösse ist, so ist der geometrische Ort für die Punkte M eine Ellipse,

deren Excentricität Km ist, die beiden gegebenen Punkte m und Mittelpunkt K sind die Brennpunkte der Ellipse. Die grosse Hauptachse der Ellipse ist gleich $R = Kx$. Nehme ich die Differenz von R und Km, halbire dieselbe, so erhalte ich $\frac{1}{2}(R - Km)$, trage ich diese Länge rechts und links von K und m auf der geraden Linie Km ab, $mA = KB = \frac{1}{2}(R - Km)$, so erhalte ich die Scheitelpunkte A und B der Ellipse. Jeder dieser Scheitelpunkte liefert einen Berührungskreis besonderer Art, A nämlich den Mittelpunkt für den kleinsten, B den für den grössten Berührungskreis, welcher durch m geht und den Kreis um K einschliessend berührt. Der Radius des kleinsten Berührungskreises ist $Am = \frac{1}{2}(R - Km)$, der des grössten $Bm = \frac{1}{2}(R + Km)$. Halbirt man Km, so erhält man in C den Mittelpunkt der Ellipse. Errichtet man in C ein Loth bis zu beiden Seiten der Ellipse, so erhält man die Querachse ee^1. Ein aus e mit dem Halbmesser em beschriebener Kreis berührt den gegebenen Kreis in der Verlängerung von Ke. Errichtet man in m und K Lothe bis zu beiden Seiten der Ellipse, so erhält man in m die Strecke hmh^1, in K die Strecke dkd^1, welche beide die Parameter der Ellipse heissen. Suchen wir das Spiegelbild des Punktes M in Rücksicht auf die gegebene Linie Km, so erhalten wir den Punkt M^1, welcher uns den symmetrischen Berührungskreis zu dem um M liefert.

δ) Der gegebene Punkt fällt mit dem Mittelpunkte des Kreises zusammen.

Alsdann fällt in Fig. 24. der Mittelpunkt K mit dem gegebenen Punkte m zusammen, d. h. die Excentricität der Ellipse wird Null, anstatt zweier Brennpunkte erhalten wir den Einen, welches der Mittelpunkt des gegebenen Kreises ist. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der gesuchten Berührungskreise ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem des gegebenen Kreises zusammenfällt, und dessen Radius die Hälfte von dem Radius des gegebenen Kreises beträgt. Alle gesuchten Berührungskreise haben gleiche Radien, nämlich den halben Radius des gegebenen Kreises.

In der Fig. 25. ist Kx der gegebene Kreis, M der Mittelpunkt eines Kreises, dessen Umfang durch K geht und den gegebenen Kreis in x berührt.

Die Aufgabe den geometrischen Ort zu finden für die Mittelpunkte der Kreise, welche einen gegebenen Kreis berühren und durch einen gegebenen Punkt gehen, liefert uns also als Ergebniss:

1) eine Hyperbel, wenn der ggb Punkt ausserhalb des ggb. Kreises liegt,
2) „ gerade Linie „ „ „ „ im Umfange „ „ „ „
3) „ Ellipse „ „ „ „ innerhalb „ „ „ „
4) einen Kreis „ „ „ „ im Mittelpunkte „ „ „

Nr. 4. Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene gerade Linien berühren?

Diejenige gerade Linie, welche den Winkel der beiden gegebenen geraden Linien halbirt.

Nr. 5. Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche eine gegebene gerade Linie und einen gegebenen Kreis berühren?

Fig. 26. Die gegebene gerade Linie heisse $\mathfrak{L}\mathfrak{L}$, der Kreis um K sei gegeben.

I. Die gegebene gerade Linie liegt ausserhalb des Kreises.

Analysis 1. Ein Kreis um M, welcher die gegebene gerade Linie $\mathfrak{L}\mathfrak{L}$ und den gegebenen Kreis um K ausschliessend berührt, hat seinen Mittelpunkt M in gleicher Entfernung vom Mittelpunkt K und von einer geraden Linie $\mathfrak{L}^1\mathfrak{L}^1$, welche parallel ist mit der gegebenen geraden Linie $\mathfrak{L}\mathfrak{L}$ und davon jenseits von K um die Länge des Radius von K absteht, d. h. $MK = MQ$. Der Punkt M gehört also einer Parabel an, deren Brennpunkt K, und deren Directrix $\mathfrak{L}^1\mathfrak{L}^1$ ist. Um den Scheitelpunkt A dieser Parabel zu finden, muss man von K ein Loth auf $\mathfrak{L}^1\mathfrak{L}^1$ fällen und dasselbe halbiren. Auf diese Weise findet man den Punkt A, $AK = AB$. Ein aus M mit dem Radius $MK = MQ$ beschriebener Kreis wird durch den Punkt K gehen und die gerade Linie $\mathfrak{L}^1\mathfrak{L}^1$ in Q berühren. Verkürze ich $MK = MQ$ um die Länge des Radius des gegebenen Kreises K und beschreibe aus M einen Kreis mit dem Radius $MT = (MQ - \text{Radius } K)$, so wird derselbe die gegebene gerade Linie $\mathfrak{L}\mathfrak{L}$ und den gegebenen Kreis K ausschliessend berühren.

Konstruktion 1. Man beschreibe eine Parabel, deren Brennpunkt K ist, und deren Directrix parallel der gegebenen Linie $\mathfrak{L}\mathfrak{L}$ ist und davon jenseits um den Radius des gegebenen Kreises K absteht, diese Directrix heisse $\mathfrak{L}^1\mathfrak{L}^1$. Jeder Punkt dieser Parabel liefert den Mittelpunkt eines Berührungskreises, dessen Radius gleich ist der Differenz von der Entfernung dieses Punktes vom Mittelpunkt K minus den Radius des gegebenen Kreises K. Der Scheitelpunkt A der Parabel liefert den kleinsten Kreis mit dem Radius $AP = AE$. Jede zwei symmetrische Punkte der Parabel, z. B. die Punkte M und M^1, liefern zwei zu beiden Seiten von der Hauptachse der Parabel liegende symmetrische Berührungskreise. Der Parameter der Parabel ist CC^1, C und C^1 würden also ebenfalls zwei symmetrische Berührungskreise liefern. Die Umfänge der gesuchten ausschliessenden Berührungskreise sind in der Figur 26 mit $\mathfrak{a}$, der mit ihnen konzentrischen Hülfskreise mit $\mathfrak{a}^1$ bezeichnet worden. Die Parabel für die Mittelpunkte der ausschliessend berührenden Kreise ist mit 1 bezeichnet worden.

Analysis 2. Ein Kreis um O^1, welcher die gegebene gerade Linie $\mathfrak{L}\mathfrak{L}$ und den gegebenen Kreis um K einschliessend berührt, hat seinen Mittelpunkt in gleicher Entfernung vom Mittelpunkt K und von einer geraden Linie $\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_1$, welche parallel ist mit der gegebenen geraden Linie $\mathfrak{L}\mathfrak{L}$ und davon diesseits von K um die Länge des Radius von K absteht, d. h. $O^1K = O^1S$. Der Punkt O^1 gehört also einer Parabel an, deren Brennpunkt K und deren Directrix $\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_1$ ist. Um den Scheitelpunkt D dieser Parabel zu finden, muss man von K ein Loth auf $\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_1$ fällen und dasselbe halbiren. Auf diese Weise findet man den Punkt D, $DK = DG$. Ein aus O^1 mit dem Radius $O^1K = O^1S$ beschriebener Kreis wird durch den Punkt K gehen und die gerade Linie $\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_1$ in S berühren. Verlängere ich $O^1K = O^1S$ um die Länge des Radius des gegebenen Kreises K und beschreibe aus O^1 einen Kreis mit dem Radius $O^1o^1 = (O^1S + \text{Radius } K)$, so wird derselbe die gegebene gerade Linie $\mathfrak{L}\mathfrak{L}$ und den gegebenen Kreis K einschliessend berühren.

Konstruktion 2. Man beschreibe eine Parabel, deren Brennpunkt K ist, und deren Directrix parallel der gegebenen Linie 𝔏𝔏 ist und davon diesseits um den Radius des gegebenen Kreises K absteht, diese Directrix heisse $𝔏_1 𝔏_1$. Jeder Punkt dieser Parabel liefert den Mittelpunkt eines Berührungskreises, dessen Radius gleich ist der Summe von der Entfernung dieses Punktes vom Mittelpunkte K plus den Radius des gegebenen Kreises K. Der Scheitelpunkt D der Parabel liefert den kleinsten Kreis mit dem Radius DE = DH. Jede zwei symmetrische Punkte der Parabel, z. B. die Punkte O^1 und O liefern zwei zu beiden Seiten von der Hauptachse der Parabel liegende Berührungskreise. Der Parameter der Parabel ist JJ^1, J und J^1 würden also ebenfalls zwei symmetrische Berührungskreise liefern, eben so die Punkte N und N^1. Die Umfänge der gesuchten einschliessenden Berührungskreise sind in der Fig. 26. mit i, der mit ihnen konzentrischen Hülfskreise mit i^1 bezeichnet worden. Die Parabel für die Mittelpunkte der einschliessenden Berührungskreise ist mit 2 bezeichnet worden. In Fig. 26. sind aus den Mittelpunkten N und O^1 einschliessende Berührungskreise beschrieben worden.

Summa. Geometrischer Ort: Zwei Parabeln, ihr gemeinschaftlicher Brennpunkt im Mittelpunkt des gegebenen Kreises.

Bezeichnen wir den Abstand des Mittelpunktes K von der gegebenen geraden Linie 𝔏𝔏 mit d, und den Radius von K mit r, so ist der Parameter für die erste Parabel $2 . (d + r)$, für die zweite Parabel $2 . (d - r)$.

II. Die gegebene gerade Linie ist Tangente an den Kreis.

Für $d = r$, d. h. wenn die gegebene gerade Linie Tangente an den gegebenen Kreis K ist, wird also der Parameter der zweiten Parabel Null, d. h. die Parabel wird eine gerade Linie und fällt mitihrer Hauptachse zusammen. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der einschliessend berührenden Kreise ist also eine gerade Linie, die man erhält, wenn man vom Mittelpunkte des gegebenen Kreises auf die gegebene gerade Linie, welche Tangente daran ist, ein Loth fällt. Man muss dazu denjenigen Theil dieses Lothes nehmen, welcher diesseits der gegebenen geraden Linie liegt, vom Mittelpunkt des gegebenen Kreises aus gerechnet. Derjenige Theil dieses Lothes, welcher jenseits der gegebenen geraden Linie liegt, liefert einen geometrischen Ort für die Kreise, welche die gegebene gerade Linie berühren und den gegebenen Kreis ausschliessend.

Erklärung der Figur 27. Der gegebene Kreis ist um K beschrieben worden, die gegebene gerade Linie 𝔏𝔏 ist Tangente an den Kreis, von K ist ein Loth auf die gegebene gerade Linie gefällt worden, $KA \perp 𝔏𝔏$. Es ist alsdann die gerade Linie KA der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche die gegebene gerade Linie und den gegebenen Kreis berühren. Die Punkte diesseits 𝔏𝔏 (auf Kreis K bezogen) liefern die Mittelpunkte der einschliessend berührenden Kreise, die Punkte jenseits 𝔏𝔏 dagegen die Mittelpunkte der ausschliessend berührenden Kreise. Die Berührung findet allemal in A statt. Ausserdem giebt es noch einen geometrischen Ort für Kreise, welche die gegebene gerade Linie 𝔏𝔏 und den gegebenen Kreis ausschliessend berühren. Es ist dies die erste Parabel, deren Brennpunkt in K liegt, und von welcher $𝔏^1 𝔏^1$ die Directrix ist, wo $𝔏^1 𝔏^1 \nparallel 𝔏𝔏$ in dem Abstande r, wo r der Radius des gegebenen Kreises ist. Der Scheitelpunkt dieser Parabel ist A, ihr Parameter $CC^1 = 4r$, M und M^1 sind zwei symmetrische Punkte derselben. $CC^1 = 2 KB$.

III. Die gegebene gerade Linie schneidet den Kreis. (Fig. 28.)

1. Als Hülfslinie zeichne man jenseits von K eine Parallele $\mathfrak{L}^1\mathfrak{L}^1$ mit $\mathfrak{L}\mathfrak{L}$ im Abstande r (dem Radius des gegebenen Kreises).

Ist nun M der Mittelpunkt eines einschliessenden Berührungskreises, dessen Radius ρ sei, so ist $MK + \rho = r$, ($\rho = MT$), vorausgesetzt, dass der Kreis um M auch die gerade Linie $\mathfrak{L}\mathfrak{L}$ berührt. Der Abstand des Punktes M von $\mathfrak{L}^1\mathfrak{L}^1$ plus ρ ist aber ebenfalls $= r$, also steht der Punkt M eben so weit vom Mittelpunkt K ab wie von der geraden Linie $\mathfrak{L}^1\mathfrak{L}^1$, d. h. M gehört einer Parabel an, deren Brennpunkt der Mittelpunkt K ist und deren Directrix $\mathfrak{L}^1\mathfrak{L}^1$ ist. Dasselbe gilt von dem Mittelpunkt C eines Kreises, der Kreis K ausschliessend berührt und eben so die gerade Linie $\mathfrak{L}\mathfrak{L}$. M und M^1, eben so D und D^1, C und C^1 u. s. w. sind symmetrische Punkte der Parabel (1) in Rücksicht auf die Hauptachse AK und geben symmetrische Kreise. Die Strecke CKC^1 ist der Parameter der Parabel. Der Theil der Parabel $DMAM^1D^1$ liefert die Mittelpunkte aller einschliessenden Berührungskreise. Der Berührungskreis aus dem Scheitelpunkte A mit dem Radius $AE = AP$ ist ein Maximum für die inneren Berührungskreise jenseits von $\mathfrak{L}\mathfrak{L}$ und K. Die unendlich langen Stücke der Parabel DCG und $D^1C^1G^1$ liefern den Mittelpunkt der Kreise, welche $\mathfrak{L}\mathfrak{L}$ und den gegebenen Kreis ausschliessend berühren.

2. Als Hülfslinie zeichne man diesseits von K eine Parallelle $\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_1$ mit $\mathfrak{L}\mathfrak{L}$ im Abstande r. Ist nun $\mathfrak{M}$ der Mittelpunkt eines einschliessenden Berührungskreises, dessen Radius $\mathfrak{r}$ sei, so ist $\mathfrak{M}K + \mathfrak{r} = r$, ($\mathfrak{r} = \mathfrak{M}\mathfrak{T}$). Der Abstand des Punktes $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_1$ plus $\mathfrak{r}$ ist aber ebenfalls $= r$, also steht der Punkt $\mathfrak{M}$ eben so weit vom Punkte K ab wie von der geraden Linie $\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_1$, d. h. $\mathfrak{M}$ gehört einer Parabel an, deren Brennpunkt der Mittelpunkt K ist und deren Directrix $\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_1$ ist. Dasselbe gilt von dem Mittelpunkt $\mathfrak{G}$ eines Kreises, der Kreis K ausschliessend berührt und eben so die gerade Linie $\mathfrak{L}\mathfrak{L}$. $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^1$, eben so $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}^1$, D und D^1, $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^1$ u. s. w. sind symmetrische Punkte der Parabel (2) in Rücksicht auf die Hauptachse AK und geben symmetrische Kreise. Die Strecke $\mathfrak{C}K\mathfrak{C}^1$ ist der Parameter der Parabel (2). Der Theil der Parabel $D\mathfrak{C}\mathfrak{M}\mathfrak{A}\mathfrak{M}^1\mathfrak{C}^1D^1$ liefert die Mittelpunkte aller einschliessenden Berührungskreise. Der Berührungskreis aus dem Mittelpunkt $\mathfrak{A}$ mit dem Halbmesser $\mathfrak{A}E$ ist ein Maximum für die inneren Berührungskreise diesseits von $\mathfrak{L}\mathfrak{L}$ und K. Die unendlich langen Stücke der Parabel $D\mathfrak{G}$ und $D^1\mathfrak{G}^1$ liefern die Mittelpunkte der Kreise, welche $\mathfrak{L}\mathfrak{L}$ und den gegebenen Kreis ausschliessend berühren.

IV. Die gegebene gerade Linie geht durch den Mittelpunkt.

Alsdann erhält man als geometrische Örter zwei kongruente Parabeln. Die Directrix einer jeden ist eine Tangente an den gegebenen Kreis, dessen Mittelpunkt der Brennpunkt für beide Parabeln ist. Beide Parabeln haben denselben Parameter, nämlich den Durchmesser des Kreises. Es giebt zwei innere Berührungskreise Maxima, der Halbmesser eines jeden ist die Hälfte von dem des gegebenen Kreises.

Nr. 6. Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene Kreise berühren?

I. Die beiden gegebenen Kreise liegen ausser einander.

Fig. 29. 1. Man hat zwei gegebene Kreise um K und $\mathfrak{K}$ und soll den geometrischen Ort finden für die Mittelpunkte derjenigen Kreise, welche die beiden gegebenen Kreise berühren. Den Radius von K wollen wir durch R, den von $\mathfrak{K}$ durch r bezeichnen. Ist nun um M ein solcher Kreis beschrieben worden, welcher die beiden gegebenen Kreise ausschliessend berührt, so hat man, wenn man durch $\mathfrak{R}$ seinen Radius bezeichnet:

$$R + \mathfrak{R} = MK, \quad r + \mathfrak{R} = M\mathfrak{K}, \quad \text{daher } MK - M\mathfrak{K} = R - r.$$

Der Mittelpunkt M gehört also zu einer Kurve, welche den geometrischen Ort bildet für die Spitzen der Dreiecke, die zur Grundlinie $K\mathfrak{K}$ haben und zur Differenz der beiden anderen Seiten $MK - M\mathfrak{K}$ eine konstante Grösse $R - r$. Diese Kurve ist daher eine Hyperbel. Die beiden Brennpunkte dieser Hyperbel sind die Mittelpunkte K und $\mathfrak{K}$ der beiden gegebenen Kreise, ihre Excentricität ist also $K\mathfrak{K}$; ihre grosse Hauptachse AB ist gleich der Differenz $R - r$. G, die Mitte von $K\mathfrak{K}$, ist der Mittelpunkt der Hyperbel, A und B sind ihre Scheitelpunkte. Den Hyperbelzweig AM wollen wir mit 1 bezeichnen, er liefert uns die Mittelpunkte für alle Kreise, von welchen die beiden gegebenen Kreise ausschliessend berührt werden. Der Scheitelpunkt A liefert uns den Mittelpunkt für den kleinsten Kreis, sein Radius ist AE. Für den Fall der Gleichheit der Radien wird die grosse Hauptachse $AB = o$, d. h. die Punkte A, B, G fallen zusammen, aus der Hyperbel wird eine gerade Linie, nämlich ein Loth errichtet in der Mitte von $K\mathfrak{K}$ auf dieselbe. Für $R = \infty$, d. h. wenn wir den Fall eines Kreises und einer geraden Linie haben, wird die grosse Hauptachse unendlich, und wir erhalten eine Parabel.

2. Ist ferner um M^1 ein Kreis beschrieben worden, welcher die beiden gegebenen Kreise um K und $\mathfrak{K}$ einschliessend berührt, so hat man, wenn man seinen Radius durch $\mathfrak{R}^1$ bezeichnet:

$$\mathfrak{R}^1 - R = M^1K, \quad \mathfrak{R}^1 - r = M^1\mathfrak{K}, \quad \text{also } M^1\mathfrak{K} - M^1K = R - r.$$

Der Mittelpunkt M^1 gehört also zu einer Kurve, welche den geometrischen Ort bildet für die Spitzen der Dreiecke, die zur Grundlinie $K\mathfrak{K}$ haben und zur Differenz der beiden anderen Seiten $M^1\mathfrak{K} - M^1K$ eine konstante Grösse $R - r$. Diese Kurve ist daher eine Hyperbel und zwar ist es der andere Zweig der schon vorhin näher definirten Hyperbel. Den Hyperbelzweig BM^1 wollen wir mit 2 bezeichnen, er liefert uns die Mittelpunkte für alle Kreise, von welchen die beiden gegebenen Kreise einschliessend berührt werden. Der Scheitelpunkt B liefert uns den Mittelpunkt für den kleinsten Kreis, sein Radius ist BF.

3. Ist ferner um $\mathfrak{M}$ ein Kreis beschrieben worden, welcher die beiden gegebenen Kreise um K und $\mathfrak{K}$ berührt, nämlich den um $\mathfrak{K}$ einschliessend und den um K ausschliessend, so hat man, wenn man seinen Radius durch ρ bezeichnet:

$$\mathfrak{M}K = \rho + R, \quad \mathfrak{M}\mathfrak{K} = \rho - r, \quad \text{also } \mathfrak{M}K - \mathfrak{M}\mathfrak{K} = R + r.$$

Der Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ gehört also zu einer Kurve, welche den geometrischen Ort bildet für die Spitzen der Dreiecke, die zur Grundlinie $K\mathfrak{K}$ haben und zur Differenz der beiden anderen Seiten $\mathfrak{M}K - \mathfrak{M}\mathfrak{K}$ eine konstante Grösse $R + r$. Diese Kurve ist daher eine Hyperbel. Die beiden Brennpunkte dieser Hyperbel sind die Mittelpunkte K und $\mathfrak{K}$ der beiden gegebenen Kreise; ihre grosse Hauptachse CD ist gleich der Summe $R + r$. G, die Mitte von $K\mathfrak{K}$, ist der Mittelpunkt der Hyperbel. C und D sind ihre Scheitelpunkte. Den Hyperbelzweig $C\mathfrak{M}$ wollen wir mit 3 bezeichnen, er liefert uns die Mittelpunkte für alle Kreise, von welchen der Kreis um K ausschliessend und der von $\mathfrak{K}$ einschliessend berührt wird. Der Scheitelpunkt C liefert uns den Mittelpunkt für den kleinsten Kreis, sein Radius ist CE.

4. Ist ferner um $\mathfrak{M}^1$ ein Kreis beschrieben worden, welcher die beiden gegebenen Kreise um K und $\mathfrak{K}$ berührt, nämlich den um $\mathfrak{K}$ ausschliessend und den um K einschliessend, so hat man, wenn man seinen Radius durch ρ^1 bezeichnet:

$$\mathfrak{M}^1\mathfrak{K} = \rho^1 + r,\ \mathfrak{M}^1K = \rho^1 - R, \text{ also } \mathfrak{M}^1\mathfrak{K} - \mathfrak{M}^1K = R + r.$$

Der Mittelpunkt $\mathfrak{M}^1$ gehört also zu einer Kurve, welche den geometrischen Ort bildet für die Spitzen der Dreiecke, die zur Grundlinie $K\mathfrak{K}$ haben und zur Differenz der beiden anderen Seiten $\mathfrak{M}^1\mathfrak{K} - \mathfrak{M}^1K$ eine konstante Grösse $R + r$. Diese Kurve ist daher eine Hyperbel. Den Hyperbelzweig $D\mathfrak{M}^1$ wollen wir mit 4 bezeichnen, er liefert uns die Mittelpunkte für alle Kreise, von welchen der Kreis um K einschliessend und der von $\mathfrak{K}$ ausschliessend berührt wird. Der Scheitelpunkt D liefert uns den Mittelpunkt für den kleinsten Kreis, sein Radius ist DF.

Summa: Wir erhalten zwei Hyperbeln mit gemeinschaftlichem Mittelpunkt in der Mitte von $K\mathfrak{K}$, diese zwei Hyperbeln haben 4 Zweige. Jeder dieser 4 Zweige enthält eine besondere Art von Mittelpunkten:

(1) enthält die Mittelpunkte der Kreise, welche die beiden gegebenen Kreise ausschliessend berühren;
(2) enthält die Mittelpunkte der Kreise, welche die beiden gegebenen Kreise einschliessend berühren;
(3) enthält die Mittelpunkte der Kreise, welche den Kreis um K ausschliessend, den um $\mathfrak{K}$ einschliessend berühren;
(4) enthält die Mittelpunkte der Kreise, welche den Kreis um K einschliessend, den um $\mathfrak{K}$ ausschliessend berühren.

II. Die beiden gegebenen Kreise berühren sich von aussen.

Fig. 30. Wir erhalten wie in I eine Hyperbel als geometrischen Ort für die Mittelpunkte der Kreise, von welchen die beiden gegebenen Kreise um K und $\mathfrak{K}$ gleichartig berührt werden. Die Mittelpunkte K und $\mathfrak{K}$ sind die Brennpunkte dieser Hyperbel, ihre grosse Hauptachse AB ist gleich der Differenz der Radien R und r. Der eine Zweig der Hyperbel geht durch den Berührungspunkt A der beiden gegebenen Kreise, es ist der Zweig AM, worauf sich die Mittelpunkte der Kreise befinden, von welchen die beiden gegebenen Kreise ausschliessend berührt werden, es ist nämlich $MK = R + \mathfrak{R}$, $M\mathfrak{K} = r + \mathfrak{R}$, also $MK - M\mathfrak{K} = R - r$. Wir haben diesen Zweig mit 1 bezeichnet.

Der Zweig BM^1 enthält die Mittelpunkte der Kreise, von welchen die beiden gegebenen Kreise einschliessend berührt werden, es ist nämlich $M^1K = \mathfrak{R}^1 - R$, $M^1\mathfrak{K} = \mathfrak{R}^1 - r$, also $M^1\mathfrak{K} - M^1K = R - r$. Wir haben diesen Zweig mit 2 bezeichnet. Der Scheitelpunkt B davon ist der Mittelpunkt des kleinsten Kreises, welcher die beiden gegebenen Kreise einschliessend berührt. Für den Fall, dass die beiden gegebenen Kreise gleiche Halbmesser haben, wird $R - r = o$, A und B fallen zusammen, oder die grosse Hauptachse wird Null, und die Hyperbel wird zur geraden Linie, welche im Berührungspunkte A senkrecht steht auf Kฅ.

Ausserdem giebt es aber noch Kreise, von welchen die beiden gegebenen Kreise ungleichartig berührt werden. Wir haben zwei Systeme solcher Kreise zu unterscheiden.

Das erste System gehört einer Hyperbel an, deren Brennpunkte K und 𝔎 sind, und deren grosse Hauptachse gleich ihrer Excentricität ist, nämlich gleich $R + r = K\mathfrak{K}$, es ist also diese Hyperbel zu einer geraden Linie geworden, nämlich K𝔎. Die Punkte rechts von K𝔎 liefern uns die Mittelpunkte der Kreise, von welchen Kreis 𝔎 einschliessend, Kreis K ausschliessend berührt wird. Die Punkte links von 𝔎K liefern uns die Mittelpunkte der Kreise, von welchen Kreis 𝔎 ausschliessend und Kreis K einschliessend berührt wird. Der Berührungspunkt ist immer A.

Das zweite System gehört einer Ellipse an, deren Brennpunkte K und 𝔎 sind, und deren grosse Hauptachse gleich ihrer Excentricität ist, nämlich gleich $R + r = K\mathfrak{K}$. Es ist also diese Ellipse zu einer geraden Linie geworden, deren Punkte zwischen K und 𝔎 liegen. Die Punkte zwischen A und 𝔎 liefern uns die Mittelpunkte der Kreise, von welchen Kreis 𝔎 einschliessend, Kreis K ausschliessend berührt wird. Die Punkte zwischen A und K liefern uns die Mittelpunkte der Kreise, von welchen Kreis 𝔎 ausschliessend und Kreis K einschliessend berührt wird.

Der geometrische Ort ist also für die Mittelpunkte der ungleichartigen Berührungskreise eine gerade Linie, welche durch die Mittelpunkte der gegebenen Kreise geht. Das Stück zwischen den Mittelpunkten gehört einer geraden Linie an, welche aus einer Ellipse hervorgegangen ist. Das Stück diesseits und jenseits der eigentlichen Centrale gehört zwei geraden Strahlen an, welche aus zwei Hyperbelzweigen hervorgegangen sind.

III. Die beiden gegebenen Kreise schneiden sich.

Fig. 31. 1. Wir erhalten wie in I eine Hyperbel als geometrischen Ort für die Mittelpunkte der Kreise, von welchen die beiden gegebenen Kreise um K und 𝔎 gleichartig berührt werden. Die Mittelpunkte K und 𝔎 sind die Brennpunkte dieser Hyperbel, ihre grosse Hauptachse AB ist gleich der Differenz der Radien R und r, (d. h. $R - r$). Die Hyperbel hat zwei Zweige MAM^1 und $\mu B \mu^1$ mit den Scheitelpunkten A und B. Der Zweig $\mu B \mu^1$ enthält die Mittelpunkte der Kreise, von welchen die beiden gegebenen Kreise um K und 𝔎 einschliessend berührt werden. Z. B. der Kreis um μ^1 mit dem Radius $\mu^1 Q$, dessen Umfang wir mit 1 bezeichnet haben. Von allen diesen Kreisen ist der aus dem Scheitelpunkte B mit dem Radius $BF = BN$ beschriebene der kleinste. Der Zweig MAM^1, welcher dem Mittelpunkte des kleinen Kreises näher liegt, besteht aus zwei Theilen, nämlich dem begränzten Bogen CAD innerhalb des beiden Kreisen gemeinschaftlichen Stückes und den unendlichen Bogen CM und DM^1. Der begränzte Bogen CAD enthält die Mittelpunkte der Kreise, von welchen die beiden gegebenen Kreise einschliessend berührt werden. Der Scheitelpunkt A liefert uns den grössten dieser Kreise. In unserer Figur ist aus dem Mittelpunkte m ein solcher innerlich berührender Kreis beschrieben worden, dessen Umfang wir mit 2 bezeichnet haben. Die unendlichen Bogen CM und DM enthalten die Mittelpunkte

derjenigen Kreise, von welchen die beiden gegebenen Kreise ausschliessend berührt werden. Z. B. ist M^1 ein solcher Punkt; den Umfang des damit beschriebenen ausschliessenden Berührungskreises haben wir mit 3 bezeichnet.

Sind die Radien der beiden gegebenen Kreise gleich, so wird ihre Differenz Null, d. h. die grosse Hauptachse der Hyperbel wird Null, oder es entsteht eine gerade Linie, nämlich die gemeinschaftliche Sehne oder Chordale der beiden gegebenen sich schneidenden Kreise. Diese gerade Linie hat in Beziehung auf die beiden gegebenen Kreise alle die Eigenschaften, welche wir oben bei den beiden Hyperbelzweigen MAM^1 und $\mu A \mu^1$ aufgeführt haben, beide Hyperbelzweige fallen nämlich in einen einzigen zusammen, der eine gerade Linie bildet.

2. Es giebt aber auch noch Kreise, von welchen die beiden gegebenen Kreise ungleichartig berührt werden. Die Mittelpunkte dieser Kreise bilden als geometrischer Ort eine Ellipse. Die Excentricität derselben ist $K\mathfrak{K}$, ihre grosse Hauptachse $PE = R + r$. Z. B. um $\mathfrak{M}$ ist ein Kreis beschrieben worden, der Kreis I einschliessend in S und Kr. II ausschliessend in T berührt. Wir haben $\mathfrak{M}K = R - \mathfrak{R}$, $\mathfrak{M}\mathfrak{K} = r + \mathfrak{R}$, wo unter $\mathfrak{R}$ der Radius des um $\mathfrak{M}$ beschriebenen Kreises verstanden wird, also $\mathfrak{M}K + \mathfrak{M}\mathfrak{K} = R + r$. Den Umfang des um $\mathfrak{M}$ beschriebenen Kreises haben wir mit 5 bezeichnet. Eben so ist um m ein Kreis beschrieben worden, welcher I ausschliessend und II einschliessend berührt. Der Umfang dieses Kreises ist mit 4 bezeichnet worden. Die Scheitelpunkte der Ellipse heissen P und E. Die Ellipse besteht aus zwei Bogen CED und CPD. Bogen CED enthält die Mittelpunkte aller Kreise, von welchen I ausschliessend und II einschliessend berührt wird; Bogen CPD derjenigen, von welchen I einschliessend und II ausschliessend berührt wird. Die Scheitelpunkte der Ellipse sind E und P. E liefert den grössten Kreis, von welchem I ausschliessend und II einschliessend berührt wird, sein Radius ist EN; P liefert den grössten Kreis, von welchem I einschliessend und II ausschliessend berührt wird, sein Radius ist PF. G in der Mitte von $K\mathfrak{K}$ ist der Mittelpunkt der Ellipse, das darin auf die grosse Hauptachse bis zur Ellipse zu beiden Seiten verlängerte Loth IH die Querachse.

Die Ellipse und die Hyperbel durchschneiden sich in 4 Punkten C, D, x und y. C und D sind Mittelpunkte von Kreisen, welche zum Radius Null haben; dagegen können die beiden symmetrischen Punkte x und y betrachtet werden, einerseits als Mittelpunkte von einschliessend berührenden Kreisen (x als Punkt der Hyperbel, xv der Radius), anderseits als Mittelpunkte von ungleichartig berührenden Kreisen (x als Punkt der Ellipse, xw als Radius, I wird einschliessend, II ausschliessend berührt).

IV. Die beiden gegebenen Kreise berühren sich von innen.

Fig. 32. 1. Wir erhalten als geometrischen Ort für die Mittelpunkte der Kreise, von welchen die beiden gegebenen Kreise um K und $\mathfrak{K}$ gleichartig berührt werden, eine Hyperbel, deren Brennpunkte K und $\mathfrak{K}$ sind, während ihre grosse Hauptachse $(R - r)$ ist, also gleich ihrer Excentricität: es wird folglich aus der Hyperbel eine gerade Linie. Die gerade Linie $K\mathfrak{K}$ besteht gewissermassen für uns aus zwei Strahlen, welche von E aus, dem Berührungspunkte der beiden gegebenen Kreise, gerechnet werden. Der Strahl EM enthält die Mittelpunkte von den Kreisen, von welchen die beiden gegebenen Kreise ausschliessend berührt werden. Ein solcher Punkt ist M, der dazu gehörige Kreis hat den Radius ME.

Der Strahl EM^1 enthält die Mittelpunkte von den Kreisen, von welchen die beiden gegebenen Kreise einschliessend berührt werden. Ein solcher Punkt ist M^1, der dazu gehörige Kreis hat den Radius $M^1 E$.

2. Es giebt aber auch noch Kreise, von welchen die beiden gegebenen Kreise ungleichartig berührt werden. Die Mittelpunkte dieser Kreise bilden als geometrischen Ort eine Ellipse. Die Excentricität derselben ist $K\mathfrak{K}$, ihre grosse Hauptachse $PE = R + r$. Z. B. um $\mathfrak{M}$ ist ein Kreis beschrieben worden, der Kreis I einschliessend und Kreis II ausschliessend berührt. Wir haben $\mathfrak{M}K = R - \mathfrak{R}$, $\mathfrak{M}\mathfrak{K} = r + \mathfrak{R}$, wo unter $\mathfrak{R}$ der Radius des um $\mathfrak{M}$ beschriebenen Kreises verstanden wird, also $\mathfrak{M}K + \mathfrak{M}\mathfrak{K} = R + r$. Den Umfang des um $\mathfrak{M}$ beschriebenen Kreises haben wir mit 1 bezeichnet, er berührt I in S und II in T. Die Scheitelpunkte der Ellipse sind E und P. P liefert den grössten Kreis, sein Radius ist PF.

V. Die beiden gegebenen Kreise liegen in einander.

Fig. 34. 1. Für die gleichartige Berührung ist nur der Fall möglich, dass beide Kreise einschliessend berührt werden. Wir erhalten als geometrischen Ort für die Mittelpunkte der Kreise, von welchen die beiden gegebenen Kreise einschliessend berührt werden, eine Ellipse, deren Brennpunkte K und $\mathfrak{K}$ sind, und deren grosse Hauptachse $AB = R - r$ ist. Es ist z. B. M der Mittelpunkt eines solchen berührenden Kreises, $MS = MT$ sind seine Radien, und zwar $MK = R - \mathfrak{R}$, wo R der Radius des Kreises I und $\mathfrak{R}$ der des Kreises um M ist; ferner ist $M\mathfrak{K} = \mathfrak{R} - r$, wo r der Radius des Kreises II ist: folglich $MK + M\mathfrak{K} = R - r$. Der Umfang des Kreises um M ist mit 1 bezeichnet worden. Die Scheitelpunkte dieser Ellipse sind A und B. A ist der Mittelpunkt des kleinsten einschliessenden Kreises, sein Radius ist AN; B ist der Mittelpunkt des grössten einschliessenden Kreises, sein Radius ist BF.

2. Für die ungleichartige Berührung ist nur der Fall möglich, dass der Kreis I einschliessend berührt und der Kreis II ausschliessend berührt wird. Wir erhalten als geometrischen Ort für die Mittelpunkte der Kreise, von welchen Kreis I einschliessend und Kreis II ausschliessend berührt wird, eine Ellipse, deren Brennpunkte K und $\mathfrak{K}$ sind, und deren grosse Hauptachse $PE = R + r$ ist. Es ist z. B. $\mathfrak{M}$ der Mittelpunkt eines solchen berührenden Kreises, $\mathfrak{M}\mathfrak{S} = \mathfrak{M}\mathfrak{T}$ sind seine Radien, und zwar $\mathfrak{M}K = R - \mathfrak{r}$, wo $\mathfrak{r}$ der Radius des Kreises um $\mathfrak{M}$ ist; ferner ist $\mathfrak{M}\mathfrak{K} = r + \mathfrak{r}$: folglich ist $\mathfrak{M}K + \mathfrak{M}\mathfrak{K} = R + r$. Der Umfang des Kreises um $\mathfrak{M}$ ist mit 2 bezeichnet worden. Die Scheitelpunkte dieser Ellipse sind E und P. E ist der Mittelpunkt des kleinsten Kreises, sein Radius ist EN; P ist der Mittelpunkt des grössten Kreises, sein Radius ist PF; beide berühren ungleichartig.

VI. Die beiden gegebenen Kreise sind konzentrisch.

Fig. 35. Aus den Ellipsen in V werden solche Ellipsen, deren Excentricität Null ist, d. h. Kreise. Der eine Kreis, dessen Durchmesser $AB = R - r$ ist, liefert den geometrischen Ort für die Mittelpunkte der Kreise, von welchen die beiden gegebenen Kreise einschliessend berührt werden. Es ist z. B. M der Mittelpunkt eines solchen berührenden Kreises, $MS = MT$ sind seine Radien.

Alle diese Berührungskreise haben gleich lange Radien $\frac{1}{2}(R + r)$. Der andere Kreis, dessen Durchmesser $PE = R + r$ ist, liefert den geometrischen Ort für die

Mittelpunkte der Kreise, von welchen der Kreis I einschliessend, Kreis II ausschliessend berührt wird. Es ist z. B. $\mathfrak{M}$ der Mittelpunkt eines solchen berührenden Kreises, $\mathfrak{MS} = \mathfrak{MT}$ sind seine Radien. Alle diese Berührungskreise haben gleich lange Radien $= \frac{1}{2}(R - r)$.

Schlussbetrachtung für Nr. 6.

Der geometrische Ort kann sein:

1. eine Hyperbel,
   a) zwei Hyperbeln, wenn die beiden gegebenen Kreise aus einander liegen (Vgl. I. Seite 101); Fig. 29.
   b) eine Hyperbel für die gleichartige Berührung, wenn die beiden gegebenen Kreise sich ausschliessend berühren (Vgl. Seite 101); Fig. 30.
   c) eine Hyperbel für die gleichartige Berührung, wenn die beiden gegebenen Kreise sich schneiden (Vgl. III. Seite 102); Fig. 31.
2. eine gerade Linie,
   a) für die ungleichartige Berührung, wenn die beiden gegebenen Kreise sich von aussen berühren (Vgl. II. Seite 102); Fig. 30.
   b) für die gleichartige Berührung, wenn die beiden gegebenen Kreise sich von innen berühren (Vgl. III. Seite 103);
3. eine Ellipse,
   a) für die ungleichartige Berührung, wenn die beiden gegebenen Kreise sich schneiden (Vgl. III. Seite 103); Fig. 31.
   b) für die ungleichartige Berührung, wenn die beiden gegebenen Kreise sich von innen berühren (Vgl. IV. Seite 104); Fig. 32.
   c) zwei Ellipsen, wenn die beiden gegebenen Kreise in einander liegen (Vgl. V. Seite 104); Fig. 34.
4. zwei Kreise, wenn die beiden gegebenen Kreise konzentrisch sind (Vgl. VI. Seite 104). Fig. 35.

Aufzählung der geometrischen Örter für die Mittelpunkte der Berührungskreise für die zehn möglichen Fälle des Berührungsproblems.

1. 3 Punkte:

Der Ort der gleichen Entfernung von zwei Punkten ist eine gerade Linie. Also bei 3 Punkten der Durchschnittspunkt von zwei geraden Linien: Ein Punkt.

2. 2 Punkte und 1 Linie:

Der Ort der gleichen Entfernung von einem Punkte und einer geraden Linie ist eine Parabel. Also: Durchschnittspunkt einer geraden Linie und einer Parabel, folglich zwei Punkte. Vgl. Seite 94.

3. 2 Punkte und 1 Kreis:

Der Ort der gleichen Entfernung von einem Punkte und einem Kreise ist eine Hyperbel. Also: Durchschnittspunkt einer geraden Linie und einer Hyperbel, folglich zwei Punkte. Vgl. Seite 95, 96.

4. 1 Punkt und 2 Linien.

Zwei Parabeln. Also: Durchschnittspunkt von zwei Parabeln, folglich zwei Punkte. Vgl. Seite 94.

5. 1 Punkt, 1 Linie, 1 Kreis:

Für 1 Punkt und 1 Linie ist der Ort eine Parabel, für 1 Punkt und 1 Kreis eine Hyperbel. Also: Durchschnittspunkte einer Parabel mit den beiden Hyperbelzweigen, folglich vier Punkte. Oder für 1 Linie und 1 Kreis: zwei Parabeln (Vgl. Nr. 5. Seite 96). Also: Durchschnittspunkte von einer Parabel mit zwei anderen Parabeln, folglich vier Punkte.

6. 1 Punkt und 2 Kreise.

Ort für 1 Punkt und 1 Kreis eine Hyperbel; eben so Ort für denselben Punkt und den anderen Kreis eine Hyperbel. Also: Durchschnittspunkte von zwei Hyperbeln, folglich vier Punkte.

Oder Ort für 1 Punkt und 1 Kreis ist eine Hyperbel, ausserdem Ort für zwei Kreise: 2 Hyperbeln, von denen aber jeder Zweig eine besondere Bedeutung, so dass jeder Zweig der ersten Hyperbel nur mit zwei Zweigen der zweiten Hyperbel verbunden werden darf, folglich vier Durchschnittspunkte.

Anstatt der Hyperbel können nach den Betrachtungen auf Seite 95, 96... auch gerade Linien und Ellipsen eintreten.

7. 3 Linien:

Zweimal zwei Winkel halbirende Transversalen geben vier Durchschnittspunkte.

8. 2 Linien und 1 Kreis:

Indem man den Kreis mit jeder der geraden Linien zusammenpaart: Ort für 1 Linie und 1 Kreis sind nach Seite 96 zwei Parabeln, also zweimal zwei Parabeln giebt acht Durchschnittspunkte. Indem man die 2 Linien zusammenpaart und dann eine derselben mit dem Kreise, giebt 2 gerade Linien und 2 Parabeln, also acht Durchschnittspunkte.

9. 1 Linie und 2 Kreise.

Indem man die Linie mit jedem der beiden Kreise zusammenpaart, giebt zwei mal zwei Parabeln, also acht Durchschnittspunkte. Oder indem man die beiden Kreise zusammenpaart und die Linie mit einem der beiden Kreise, giebt 2 Parabeln und zwei Hyperbeln. Nach den Betrachtungen auf Seite 101 passt aber nur immer eine Parabel zu zwei bestimmten Hyperbelzweigen, je nachdem die Berührung gleichartig, ungleichartig, äusserlich oder innerlich ist, giebt 2 . 4 Durchschnittspunkte.

10. 3 Kreise:

Ort zwei mal zwei Hyperbeln, wo aber jede Hyperbel des einen Systems nur zu einem Zweige des anderen Systems passt, liefert acht Durchschnittspunkte.

Fig. 33. weiset nach die sämmtlichen acht Berührungskreise für die drei gegebenen Kreise I, II und III.

Kreis 1 berührt alle drei gegebenen Kreise von aussen,
" 2 " " " " " " innen,
" 3 " I und III von innen, II von aussen,
" 4 " I " II " " III " "
" 5 " II " III " " I " "
" 6 " II " III " aussen, I " innen,
" 7 " I " III " " II " "
" 8 " I " II " " III " "

BESTIMMUNG
geometrischer Örter bei orthogonalen Kreisen.

---

1. Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und einen gegebenen Kreis orthogonal schneiden?

Fig. 36. Analysis. Der gegebene Kreis sei um K beschrieben worden, seinen Radius wollen wir mit R bezeichnen, der gegebene Punkt sei N; M sei der Mittelpunkt eines Kreises, dessen Umfang durch N geht und welcher den Kreis um K orthogonal schneidet in den Punkten T und T^1. Es ist alsdann $KM^2 = MT^2 + R^2$, oder $KM^2 = MN^2 + R^2$, d. h. $MK^2 - MN^2 = R^2$. Der Punkt M ist also der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Differenz von den Quadraten der Abstände MK^2 und MN^2 konstant ist, nämlich gleich R^2. Der geometrische Ort für M ist also eine gerade Linie, nämlich die Chordale für den Kreis K und den Punkt N. Vgl. Seite 112.

Konstruktion. Man verbinde K und N, theile KN durch O in zwei Theile, so dass $OK^2 - ON^2 = R^2$, errichte in O auf KN ein Loth OM, so ist dieses Loth der gesuchte geometrische Ort.*) Will man den Radius des zu K gehörigen orthogonalen Kreises finden, hat man nur nöthig M mit N zu verbinden, die Strecke MN ist der gesuchte Radius. Der aus O mit dem Radius ON beschriebene Kreis ist der kleinste aller gesuchten orthogonalen Kreise.

2. Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche eine gegebene gerade Linie berühren und einen gegebenen Kreis orthogonal schneiden?

Analysis. Fig. 37. Der gegebene Kreis habe zum Mittelpunkte K, sein Radius werde durch R bezeichnet; der Abstand von K bis zur gegebenen geraden Linie sei d,**) $KA = d$. Es sei nun M der Mittelpunkt eines Kreises, welcher $\mathfrak{L}\mathfrak{L}$ berührt und den gegebenen Kreis K orthogonal schneidet: es handelt sich daher darum, zu bestimmen, welchen Bedingungen M genügen muss. Fällt man von M ein Loth auf die gegebene gerade Linie $\mathfrak{L}\mathfrak{L}$, $MB \perp \mathfrak{L}\mathfrak{L}$, so muss dieses Loth gleich sein der von M an den gegebenen Kreis gezogenen Tangente MT, $MT = MB$. Es ist aber $MT^2 = MK^2 - KT^2$, also auch $MK^2 - MB^2 = R^2$. Der Mittelpunkt der gesuchten Kreise muss also in Rücksicht auf den Mittelpunkt des gegebenen Kreises und auf die gegebene gerade Linie folgender Bedingung genügen:

Das Quadrat seines (des Punktes M) Abstandes von dem Mittelpunkte des gegebenen Kreises K muss grösser sein als das Quadrat seines (des Punktes M) Abstandes von der gegebenen geraden Linie $\mathfrak{L}\mathfrak{L}$ um eine konstante Grösse, nämlich das Quadrat des Radius R (des gegebenen Kreises). Der Punkt M gehört

---

*) Es ist dies eigentlich die Aufgabe: Zu einem Kreise und einem Punkte die Chordale zu suchen. Vgl. Seite 112.

**) Wir haben hier die gegebene gerade Linie $\mathfrak{L}\mathfrak{L}$ ausserhalb des gegebenen Kreises angenommen.

also einer **Parabel** an, deren Gleichung und Beschaffenheit wir sogleich näher erörtern wollen.

Nimmt man ein System rechtwinkliger Koordinaten an, wählt zum Anfangspunkte K, zur Achse der Abscissen das von K auf die gegebene gerade Linie gefällte Loth KA, so wird ME die Ordinate, KE die Abscisse des Punktes M sein, also $y^2 = MK^2 - x^2$. Es handelt sich darum MK zu bestimmen. $MK^2 =$ (MT^2 oder MB^2) $+ R^2$, $MB = d + x$, also $MK^2 = R^2 + d^2 + 2dx + x^2$, daher $y^2 = R^2 + d^2 + 2dx$. Dies ist die Gleichung der Kurve, in welcher sich M befindet für das angenommene Koordinatensystem mit dem Anfangspunkte K. Es ist also, wie aus der Gleichung hervorgeht, eine **Parabel**. Wir können nun durch zweckmässige Verlegung des Anfangspunktes der Koordinaten die Gleichung dieser Parabel noch vereinfachen. Verlegen wir denselben nämlich auf derselben Abscissenachse von M nach einem um $\frac{R^2 + d^2}{2d}$ entfernten Punkt von M aus nach der gegebenen geraden Linie zu, welchen neuen Anfangspunkt wir mit S bezeichnen wollen, $SK = \frac{d^2 + R^2}{2d}$, $SA = \frac{d^2 - R^2}{2d}$, so erhalten wir als Gleichung der Parabel $y^2 = 2dx$, d. h. eine **Parabel** mit dem Parameter 2d. Der Brennpunkt der Parabel liegt in F, $SF = \frac{1}{2}d$, S ist der Scheitelpunkt, die Directrix ist von S um $\frac{1}{2}d$ entfernt, $SG = \frac{1}{2}d$; wir haben die Directrix mit $\mathfrak{L}^1\mathfrak{L}^1$ bezeichnet, sie liegt jenseits $\mathfrak{L}\mathfrak{L}$ um die Entfernung AG oder $FK = \frac{R^2}{2d}$, aber parallel damit; $FG = d$, dem halben Parameter.

Ein aus S mit dem Radius SA beschriebener Kreis ist der **kleinste** Kreis, welcher die beiden gegebenen Bedingungen erfüllt.

3. Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, von welchen zwei gegebene Kreise orthogonal geschnitten werden?

Antwort: Ihre Chordale. Vgl. §. 14. Seite 13, 14.

Wir sind nun im Stande, folgende Aufgaben zu lösen:

Die Kreise zu finden:

1. Welche durch einen gegebenen Punkt gehen, eine gegebene gerade Linie berühren und einen gegebenen Kreis orthogonal schneiden.

Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und eine gegebene gerade Linie berühren, ist eine Parabel. Vgl. Nr. 2. Seite 94. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und einen gegebenen Kreis orthogonal schneiden, ist eine gerade Linie. Vgl. Nr. 1. Seite 107. Wir erhalten also im Allgemeinen **zwei** Kreise, deren Mittelpunkte die Durchschnittspunkte von einer Parabel und einer geraden Linie sind.

2. Welche durch einen gegebenen Punkt gehen und zwei gegebene Kreise orthogonal schneiden.

Wir erhalten einen Kreis, dessen Mittelpunkt der Durchschnittspunkt von zwei geraden Linien ist, nämlich von der Chordale der beiden gegebenen Kreise und der Chordale des gegebenen Punktes und eines der beiden gegebenen Kreise.

3. Welche zwei gegebene gerade Linien berühren und einen gegebenen Kreis orthogonal schneiden.

Wir erhalten im Allgemeinen zwei Kreise, deren Mittelpunkte in dem Durchschnitte von einer geraden Linie (Vgl. Seite 30) und einer Parabel liegen.

4. Welche eine gegebene gerade Linie berühren und zwei gegebene Kreise orthogonal schneiden.

Wir erhalten im Allgemeinen zwei Kreise, deren Mittelpunkte in dem Durchschnitte von einer geraden Linie (der Chordale der beiden gegebenen Kreise) und einer Parabel (Vgl. Nr. 2. Seite 107) liegen.

5. Welche drei gegebene Kreise orthogonal schneiden. (Vgl. §. 15. Seite 14.)

SAMMLUNG
leichter Übungsaufgaben über die Berührung und den orthogonalen Schnitt.

1. Durch zwei Punkte einen Kreis zu beschreiben mit gegebenem Radius.

2. Einen Kreis mit gegebenem Radius zu beschreiben, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene gerade Linie berührt.

Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises ist der Durchschnittspunkt von zwei geometrischen Örtern. (Gerade Linie, Kreis.)

3. Einen Kreis mit gegebenem Radius zu beschreiben, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Kreis berührt.

Drei verschiedene Lagen des Punktes. 1. Im Umfange des gegebenen Kreises: Durchschnitt von zwei geometrischen Örtern für den Mittelpunkt, nämlich a) ein Kreis beschrieben mit dem gegebenen Radius R des gesuchten Kreises aus dem gegebenen Punkte, b) eine gerade Linie durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises und den gegebenen Punkt. 2. Ausserhalb des gegebenen Kreises: Durchschnitt von zwei geometrischen Orten für den Mittelpunkt, nämlich a, und b ein Kreis beschrieben mit $R+r$ aus dem Mittelpunkt des gegebenen Kreises, wo r der Radius des gegebenen Kreises ist (für die äussere Berührung); oder ein Kreis beschrieben aus dem Mittelpunkt des gegebenen Kreises mit dem Radius $R-r$ (für die innere Berührung), also 4 Auflösungen. 3. Innerhalb des gegebenen Kreises.

4......, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet.

Z. B. Der gegebene Punkt ausserhalb des gegebenen Kreises, dessen Radius r ist, während der des gesuchten Kreises R sein soll. Für die Mittelpunkte die Durchschnitte von zwei geometrischen Örtern a und b; a wie vorher; b ein mit dem gegebenem Kreise konzentrischer Kreis, dessen Radius man findet, wenn man die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks konstruirt, dessen Katheten R und r sind.

5......, welcher zwei gegebene gerade Linien berührt.

6......, welcher eine gegebene gerade Linie und einen gegebenen Kreis berührt.

Z. B. die gegebene gerade Linie ausserhalb des gegebenen Kreises. Für die Mittelpunkte die Durchschnitte von 2 geometrischen Örtern; a) eine gerade Linie parallel mit der gegebenen im Abstande R auf der Seite, auf welcher der gegebene Kreis liegt; b) für die äussere Berührung ein konzentrischer Kreis mii dem gegebenen, beschrieben mit dem Radius $R+r$; für die innere Berührung, beschrieben mit dem Radius $R-r$. 4 Auflösungen.

7......, welcher eine gegebene gerade Linie berührt und einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet.

8......, welcher zwei gegebene Kreise berührt.

Es bezeichne R den Radius des gesuchten Kreises, r_1 und r_2 die der beiden gegebenen Kreise, c den Abstand ihrer Mittelpunkte, so lässt die Aufgabe, wenn die beiden Kreise aus einander liegen, im Allgemeinen $4 \cdot 2$ Auflösungen zu. Man muss 1. über c ein Dreieck konstruiren mit den Seiten $R+r_1$ und $R+r_2$, 2. mit $R-r_1$ und $R-r_2$, 3. mit $R+r_1$ und $R-r_2$, 4 mit $R-r_1$ und $R+r_2$. Die Spitzen der gefundenen Dreiecke liefern die gesuchten Mittelpunkte.

9......, welcher zwei gegebene Kreise rechtwinklig schneidet.

Die beiden Mittelpunkte der gesuchten Kreise befinden sich im Durchschnittspunkte von 2 geometrischen Örtern a und b. a ist die Chordale, b ist der in Nr. 4. näher bezeichnete Ort.

10......, welcher von zwei gegebenen Kreisen den einen berührt, den andern rechtwinklig schneidet.

Corrigenda et Addenda.

Seite 1, Zeile 10 lies $c : R - r = AM : R$.

" 2, " 20 und 21 lies $JM : c - JM = R : r$, $c : R + r = JM : R$, $JM = ..$.

" 6 oben lies anstatt der drei obersten Zeilen $AB : Ab = R : r$, ferner $AB^1 : Ab^1 = R : r$, also $AB : Ab = AB^1 : Ab^1$, oder $Ab . AB^1 = AB . Ab^1$.

" 6 hinzuzufügen am Ende von §. 7. Jede zwei Ähnlichkeitsstrahlen (entweder äussere oder innere) liefern vier Systeme von je vier Punkten (die Durchschnittspunkte mit den Kreisen), durch welche sich ein Kreis legen lässt.

" 9. Am Schluss von §. 10. hinzufügen: Die Chordale ist zugleich für zwei Kreise, welche sich schneiden, der geometrische Ort für die Mittelpunkte der gleichen kleinsten Sehnen für beide Kreise.

" 12, Zeile 20 lese man: Centrale $M_1 M_2$.

" 13. Am Schlusse von §. 13.

1. Zwei Kreise, welche sich berühren, sind im Berührungspunkte parallel.

2. Zwei Kreise, welche sich orthogonal schneiden, stehen in den Durchschnittspunkten auf einander senkrecht.

3. Zwei Kreise, welche sich schneiden, thun dies immer unter einem bestimmten Winkel; als solchen versteht man den Linienwinkel, welchen die beiderseitigen Tangenten im Durchschnittspunkte bilden.

Aufgabe: Es ist ein Kreis M und in der Peripherie desselben der Punkt T gegeben, man soll durch denselben einen Kreis legen, welcher den gegebenen Kreis unter einem Winkel von 50^0 schneidet.

" 17, Zeile 5 von oben, lies b^1 anstatt b.

" 19, Zeile 7 von oben, lies AM.

" 22. Die Summa des §. 19. ist so auszusprechen:

Die Chordale der thätigen (berührenden) Kreise geht durch den Ähnlichkeitspunkt der leidenden (berührten) Kreise. Ist die Berührung gleichartig, durch den äusseren Ähnlichkeitspunkt; ist die Berührung ungleichartig, durch den inneren Ähnlichkeitspunkt.

" 23. Die Summa des §. 20. ist so auszusprechen:

Die Chordale der thätigen (orthogonal schneidenden) Kreise fällt zusammen mit der Centrale der leidenden (orthogonal geschnittenen) Kreise.

" 26, Zeile 7 von unten, lies: zwei Punkte t in $\mathfrak{L}$.

" 27, Zeile 17 von unten, lies: die des Hülfskreises H und des gegebenen Kreises ist pq.

Zu Aufgabe 7. Seite 37.

Aus der Konstruktion ergiebt sich, dass die Punkte

B 13, C 14, D 12, 2 B 4, 2 C 3, 3 D 4

eine gerade Linie bilden; ferner dass die Strahlen B4, BD, B1, BC einen harmonischen Strahlenbüschel bilden, eben so C2, CB, C1, CD; eben so D3, DC, D1, DB. Vgl. Seite 75. Nr. 4. Folglich werden die Linien B13, C14, D12, 2B4, 2C3, 3D4 harmonisch getheilt. D. h. die Linien, welche den Mittelpunkt 1 des in einem Dreieck beschriebenen Kreises mit den Mittelpunkten 2, 3, 4 der äusseren Berührungskreise und diese unter einander verbinden, werden harmonisch getheilt. Z. B. B13 wird so getheilt, dass 1 und 3 zugeordnete Punkte sind, eben so B und der Durchschnittspunkt von (1,3) mit CD; 2B4 wird so getheilt, dass 4 und 2 zugeordnete Punkte sind, eben so B und der Durchschnittspunkt von (4,2) mit DC. Eben so werden die Seiten des Dreieckes harmonisch getheilt, z. B. BD, wo D und B zugeordnete Punkte sind, eben so die Durchschnittspunkte von C1 und C2 mit BD.

Seite 38. Zusätze zu Aufgabe 7. Aufgaben: 1. Es ist ein gleichseitiges Dreieck gegeben, man soll in dasselbe drei gleiche Kreise so eintragen, dass jeder zwei Seiten des Dreiecks und die beiden anderen Kreise ausschliessend berührt. 2. Um die drei Winkelspitzen eines beliebigen Dreiecks drei sich ausschliessend berührende Kreise zu beschreiben. 3. Ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben sind ihrer Lage und Grösse nach a) der innere Berührungskreis und der eine der drei äusseren Berührungskreise; oder b) zwei von den drei äusseren Berührungskreisen.

· 38, Fig. XXVII. Die beiden unteren parallelen Linien bezeichne mit $\mathfrak{L}^1$ und $\mathfrak{l}^1$ anstatt mit $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{l}$.

· 39, Zeile 6 von oben, lies BC = $\mathfrak{K}$C.

· 40. Am Ende der 8. Aufgabe. Die Aufgabe: „Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene gerade Linien und einen gegebenen Kreis berührt,“ kann ganz elementar gelöset werden, wie folgt:

Fig. 38. Die beiden gegebenen Linien seien A$\mathfrak{L}$ und A$\mathfrak{L}^1$, der gegebene Kreis sei um A beschrieben worden mit dem Halbmesser AB. Die beiden gegebenen Linien theilen die Ebene in 4 Felder, wir wollen eins davon betrachten, welches den Bogen CD des gegebenen Kreises zwischen den Strecken AC und AD der gegebenen geraden Linien enthält. Wir haben nun einen geometrischen Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche die gegebenen geraden Linien A$\mathfrak{L}$ und A$\mathfrak{L}^1$ berühren: es ist die gerade Linie AB, welche den Winkel CAD halbirt. Die Berührung muss in B, dem Durchschnitte von AB mit Bogen CD, stattfinden. Wir können nun leicht durch die folgende Analysis die beiden Mittelpunkte M und M^1 der gesuchten Kreise auf der geraden Linie AB auffinden. Berührt der um M beschriebene Kreis den gegebenen Kreis B und die gerade Linie A$\mathfrak{L}$ in E, so ist MB = ME, also MBE ein gleichschenkliges Dreieck. AME ist aber das Komplement von der Hälfte des Winkels $\mathfrak{L}$A$\mathfrak{L}^1$ der beiden gegebenen geraden Linien, folglich ABE = der Hälfte dieses Komplementes. AME $+ \frac{1}{2}\,\mathfrak{L}A\mathfrak{L}^1 = 90^0$, ABE $= \frac{1}{2}$ AME, ABE $= 45^0 - \frac{1}{4}\,\mathfrak{L}A\mathfrak{L}^1$, welchen Winkel ABE man in B an BA antragen muss, um den Punkt E zu finden. Errichtet man in E ein Loth auf A$\mathfrak{L}$, so findet man den Punkt M und den Radius des gesuchten Kreises ME = MB, welcher

den gegebenen Kreis um A von innen berührt. Um den ausschliessend berührenden Kreis zu finden, dessen Mittelpunkt M^1 sei, bemerke man, dass $AM^1F = 90^0 - \frac{1}{2} \mathfrak{L}A\mathfrak{L}^1$, $M^1BF = 90^0 - \frac{1}{2} AM^1F$, $M^1BF = 45^0 + \frac{1}{4} \mathfrak{L}A\mathfrak{L}^1$, wodurch man F findet, also auch M^1, indem man in F ein Loth errichtet auf $A\mathfrak{L}$ und dasselbe bis zur Linie AB verlängert.

Seite 45, Zeile 20 von unten, lies: die Kreise (1) und (2) orthogonal schneidet.
" 46. In Fig. 34. setze anstatt K und $\mathfrak{L}$ die Buchstaben k und $\mathfrak{L}$.
" 47, Zeile 24 von oben, lies: sein Radius ist Mt.
" 47 sind in der Fig. 35. die Buchstaben A_2 und A_3 weiter nach unten zu rücken.
" 48, Zeile 15 von oben, muss anstatt und (1) heissen: und (3).
" 50 und 52, in den Fig. I. und II. schreibe F anstatt T.
" 57, Zeile 14 von oben muss es heissen: sind J und C oder...
" 61, " 22 " unten muss es anstatt Kugel heissen Kugeln.
" 63, " 7 " " lies anstatt lateinisch m deutsch $\mathfrak{m}$.
" 63, " 13 " " muss es heissen: Nr. 3, Seite 53.
" 63, " 20 " " lies potenzhaltenden.
" 89, " 9 " oben füge hinzu: Den Chordalpunkt von VI, VII, VIII nennen wir O_2.
" 94, Zeile 4 der Beantwortung von Nr. 2. lies: der Brennpunkt d. P. ist d. g. P. n·
" 99, " 18 lies: die Mittelpunkte.
" 103, " 9 von oben lies $\mu B \mu^1$.

Zusatz zu §. 12. Seite 12. Die Chordale zu einem gegebenen Kreise und einem gegebenen Punkte zu konstruiren. Fig. 39. Der Kreis ist um K beschrieben worden, der gegebene Punkt heisst P. Man beschreibe einen Hülfskreis um H, welcher durch den gegebenen Punkt P geht und den gegebenen Kreis in A und B schneidet. Man ziehe in P eine Tangente an den Hülfs-Kreis und verlängere dieselbe, bis sie die gemeinschaftliche Sehne AB der Kreise K und H schneidet, was im Punkte C geschehen soll. Alsdann ist C ein Punkt der gesuchten Chordale. Um sie selbst zu finden, hat man nur nöthig, von C ein Loth auf KP zu fällen. Man könnte auch einen zweiten Hülfskreis beschreiben und mit Hülfe desselben einen zweiten Punkt der gesuchten Chordale auffinden.

Man kann die Berührungsaufgabe auch analytisch behandeln, z. B. für ein gegebenes Koordinatensystem die Gleichung ausrechnen für einen Kreis, welcher durch drei der Lage nach gegebene Punkte geht; oder für einen Kreis, welcher drei durch ihre Gleichungen gegebene Kreise berührt u. s. w. Bei diesen im Allgemeinen sehr weitläuftigen Berechnungen hat man die Koordinaten des Mittelpunktes und den Radius des gesuchten Kreises in bekannten Grössen auszudrücken, im Allgemeinen also drei Werthe auszurechnen.

Die Berührungsaufgabe findet auch eine praktische Anwendung in der Mechanik. Man kann sich nämlich unter den Punkten Triebe, unter den geraden Linien gezähnte Stangen, und unter den Kreisen gezähnte Räder denken, welche in Bewegung gesetzt werden sollen. Es würde sich dann darum handeln, wenn von diesen Bestimmungsstücken drei der Grösse und der Lage nach gegeben sind, die Grösse und den Befestigungspunkt eines Rades zu finden, welches die gegebenen Triebe, Stangen und Räder in Bewegung setzt.

Harmonische Theilung, Pole und Polare am Kreise.

Taf. I.

Fig. 1.

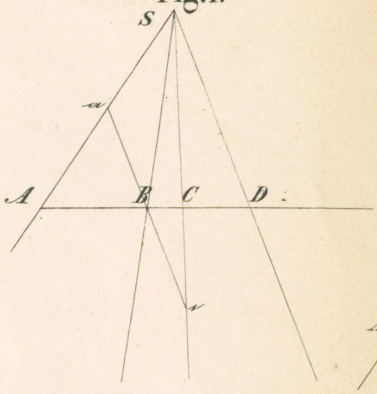


Fig. 2.

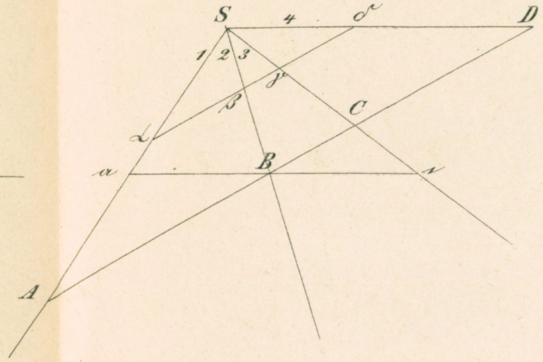


Fig. 3.

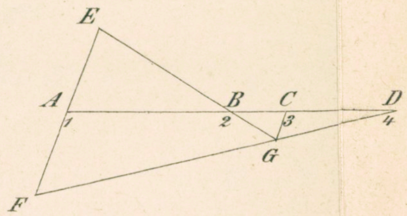


Fig. 4.

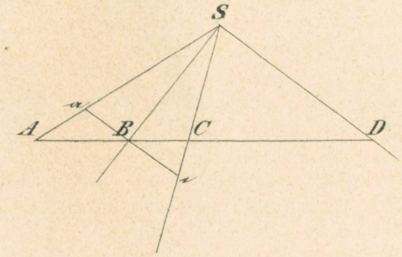


Fig. 5.

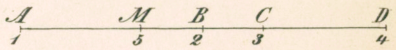


Fig. 6.

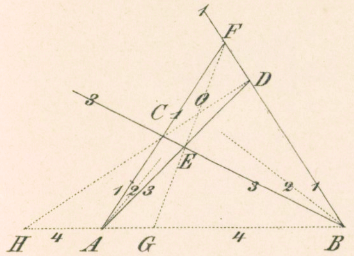


Fig. 7.

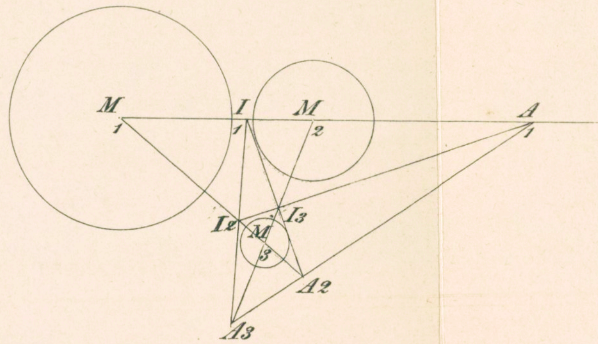


Fig. 8.

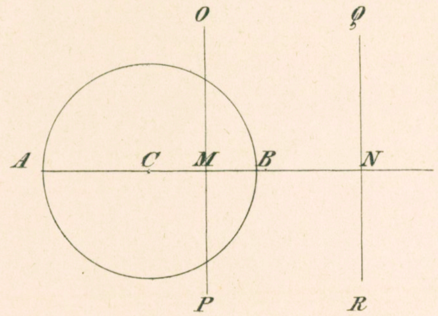


Fig. 9.

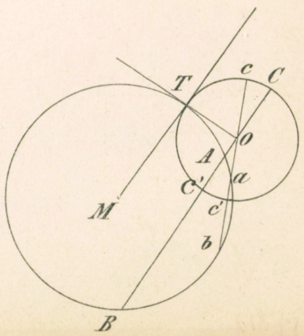


Fig. 10.

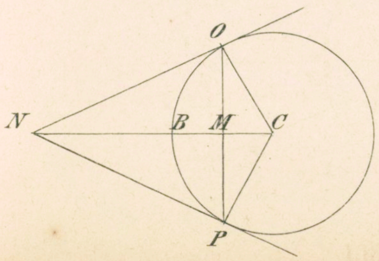


Fig. 11.

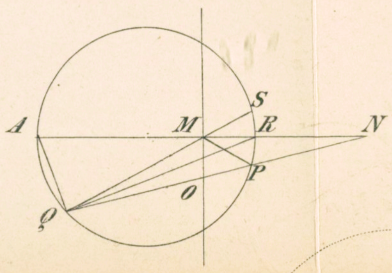


Fig. 12.

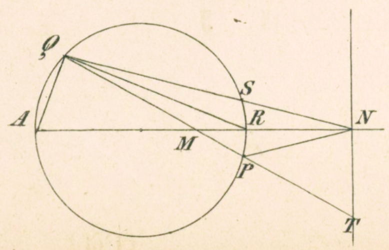


Fig. 13.

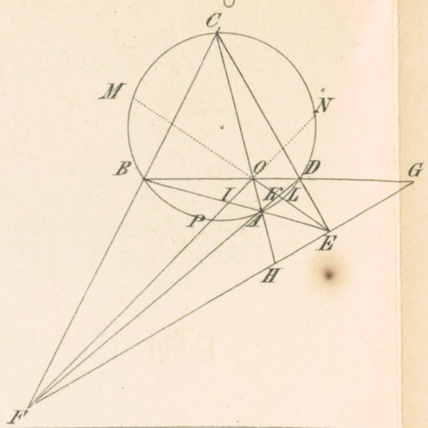


Fig. 14.

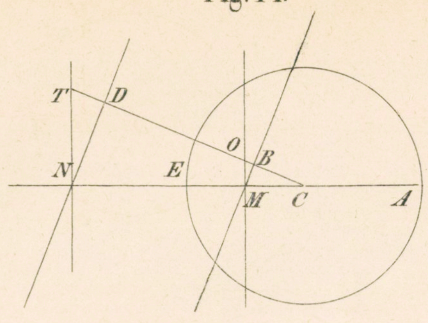


Fig. 15.

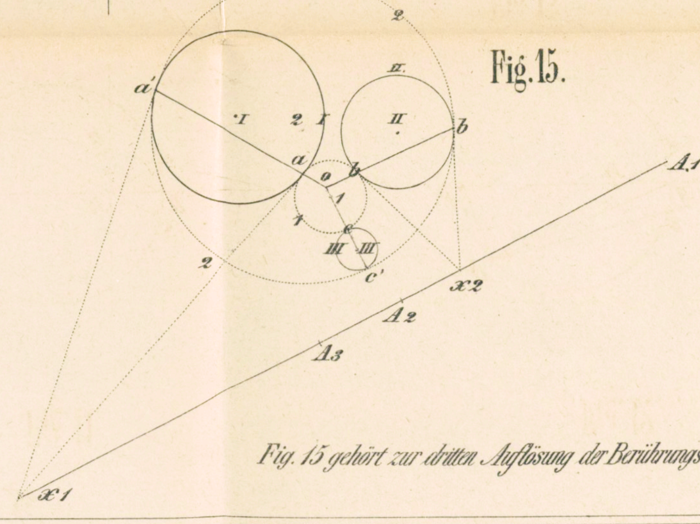


Fig. 15 gehört zur dritten Auflösung der Berührungsaufgabe.

Lith u. Druck v. M v. Jaroczyński in Posen.

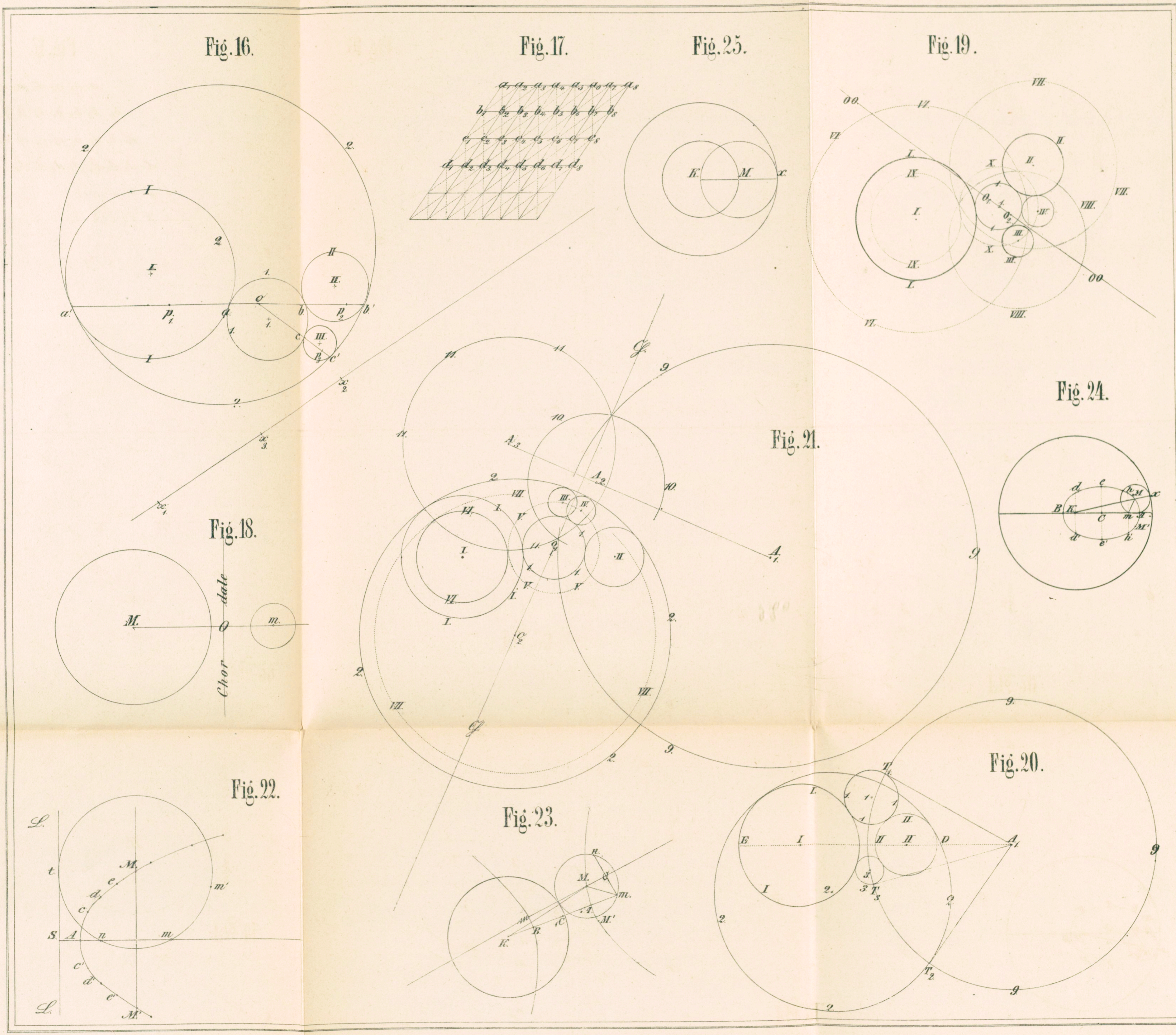


Fig. 16. Fig. 17. Fig. 18. Fig. 19. Fig. 20. Fig. 21. Fig. 22. Fig. 23. Fig. 24. Fig. 25.

Lith. u. Druck v. M. v. Jaroczyński in Posen.

Fig. 26.

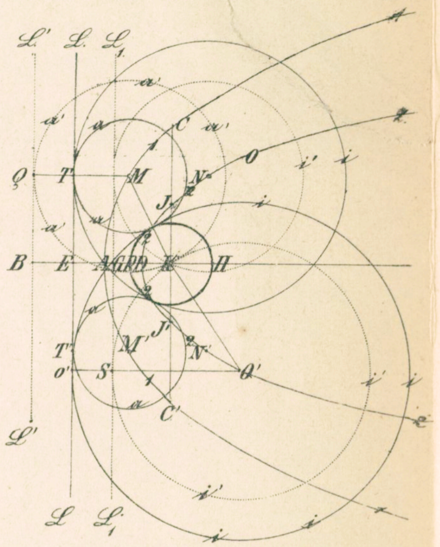


Fig. 27.

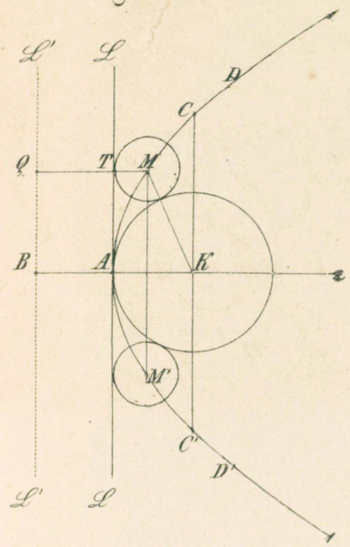


Fig. 28.

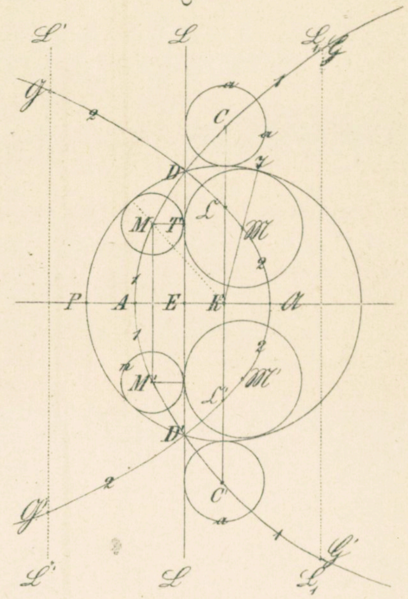


Fig. 29.

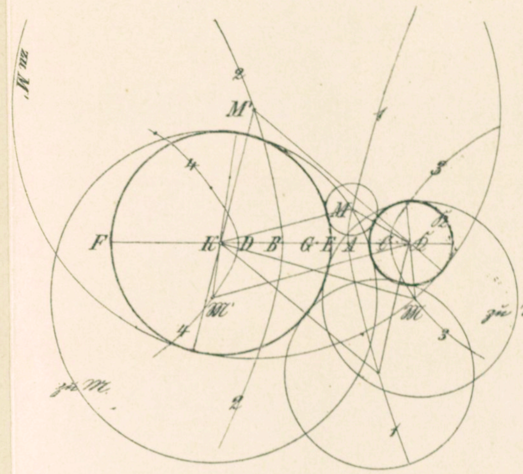


Fig. 30.

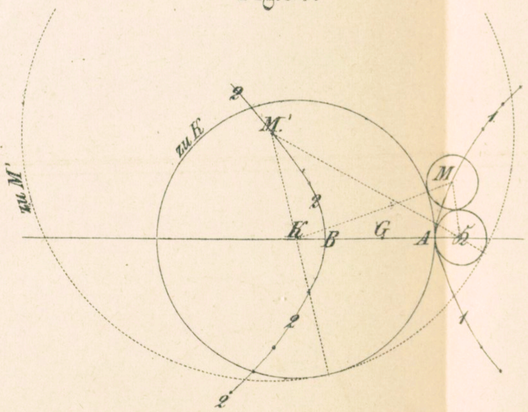


Fig. 31.

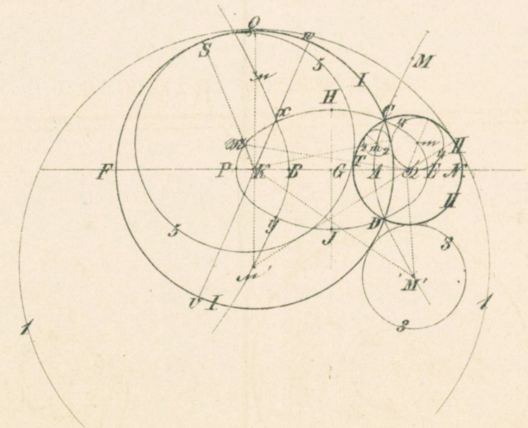


Fig. 33.

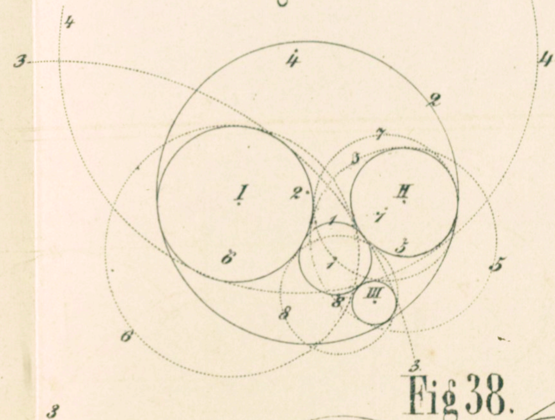


Fig. 38.

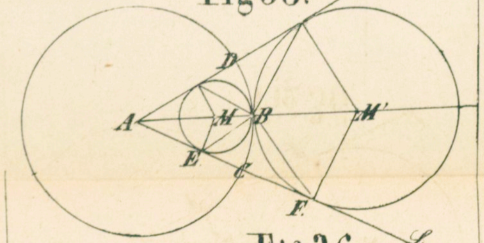


Fig. 39.

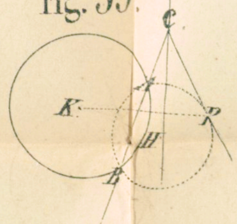


Fig. 32.

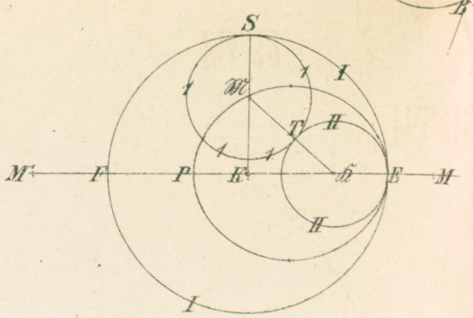


Fig. 34.

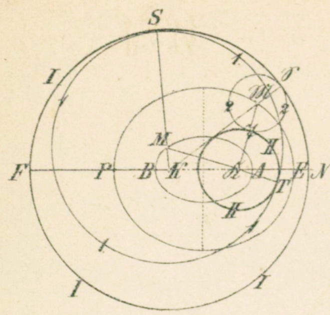


Fig. 35.

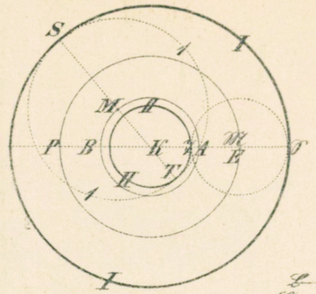


Fig. 37.

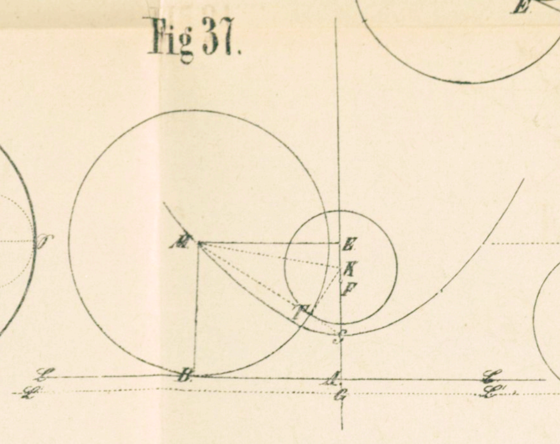
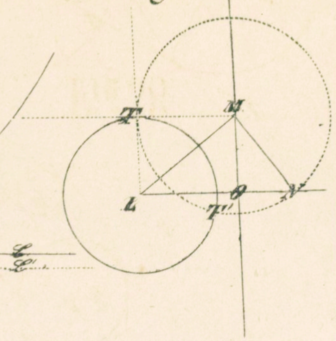


Fig. 36.



Lith u Druck v M v. Jaroczyński in Posen.