

XX.

Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten komplexen Größen.

[Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen,
Jahrgang 1885, S. 141—159.]

Der unter der gleichen Überschrift in Nr. 10 des Jahrgangs 1884 dieser Nachrichten veröffentlichte Brief des Herrn Weierstrass an Herrn Schwarz behandelt einen Gegenstand, mit welchem ich mich ebenfalls vorübergehend beschäftigt habe. Die Untersuchung derjenigen Zahlgebiete, die ich Körper nenne, gab mir hierzu die unmittelbare Veranlassung, weil die analytische Behandlung, welche die Theorie der endlichen Körper verlangt, sich fast wörtlich auf die Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten überkomplexen Größen anwenden läßt; man braucht nur den Körper der rationalen Zahlen, auf welchen bei jener Untersuchung die Koordinaten beschränkt waren, zu ersetzen durch den Körper aller reellen oder lieber durch den Körper aller komplexen Zahlen, unter welchem Namen ich im Folgenden immer die gewöhnlichen, jetzt allgemein eingeführten komplexen Zahlen verstehe. Die betreffenden analytischen Untersuchungen sind im § 159 der zweiten, im Jahre 1871 erschienenen Auflage der Dirichletschen Vorlesungen über Zahlentheorie veröffentlicht; in die dritte Auflage sind sie nicht wieder aufgenommen, weil sie für die Theorie der algebraischen Zahlen entbehrlich sind, und weil ich diese Theorie mit den geringsten Hilfsmitteln zu begründen wünschte. Bei der genannten Übertragung ergab sich nun, daß wahrhaft neue Zahlindividuen auf diesem Wege nicht zu gewinnen sind; in der That, jedes System von n Haupteinheiten $e_1, e_2 \dots e_n$ kann immer aufgefaßt werden als ein System von n gewöhnlichen komplexen Zahlen oder vielmehr als Kollektivrepräsentant von n solchen Systemen; derartige mehrwertige Größensysteme sind aber in unserer höheren Algebra längst eingebürgert. Mit diesem Resultat begnügte ich mich, weil ich in ihm die Bedeutung und die volle Bestätigung

der bekannten Bemerkung von Gauß gefunden zu haben glaubte. Da nun diese Auffassung der Haupteinheiten in dem Briefe des Herrn Weierstrass*) zwar gestreift, aber doch nicht so, wie sie es mir zu verdienen scheint, als der eigentliche Kern der ganzen Frage deutlich hervorgehoben ist, da ferner z. B. die Erscheinung, daß ein Produkt von zwei nicht verschwindenden überkomplexen Größen verschwinden kann, bei dieser Auffassung wohl ihre natürlichste Erklärung findet, so erlaube ich mir, im folgenden eine Darstellung derselben mitzuteilen, wobei sich zugleich eine kleine Vereinfachung der von Herrn Weierstrass aufgestellten Zulässigkeitsbedingungen ergeben wird.

Ich mache zunächst darauf aufmerksam, daß alle Beziehungen zwischen den überkomplexen Größen, soweit es sich nicht bloß um Addition oder Subtraktion handelt, vollständig bestimmt werden durch die von Herrn Weierstrass mit $\varepsilon_{t,r,s}$, von mir im folgenden mit $\eta_{t,rs}$ bezeichneten Koeffizienten, welche in der Gleichung (5) seiner Abhandlung als Koordinaten des Produktes

$$e_r e_s = \sum e_i \eta_{i,rs}$$

auftreten. (Ich bezeichne in der Folge mit $t, t', t'' \dots$ stets Summationsbuchstaben, welche die n Werte $1, 2 \dots n$ durchlaufen sollen, und ein einfaches Summenzeichen Σ bezieht sich immer auf alle, hinter demselben auftretenden $t, t', t'' \dots$, während $r, s \dots$ konstante Indizes aus derselben Reihe bedeuten.) Da das System der Haupteinheiten von vornherein als irreduktibel vorausgesetzt wird, oder mit anderen Worten, da jede überkomplexe Zahl

$$x = \sum e_i \xi_i$$

nur ein einziges, völlig bestimmtes System von n Koordinaten ξ_i besitzt, so ergibt sich, wie Herr Weierstrass erwähnt, aus den Forderungen

$$e_r e_s = e_s e_r, (e_r e_s) e_t = (e_r e_t) e_s$$

eine Anzahl von Bedingungen, denen die Zahlen $\eta_{t,rs}$ genügen müssen. Dieselben lauten offenbar folgendermaßen

$$(1) \quad \eta_{t,rs} = \eta_{t,sr}$$

$$(2) \quad \sum \eta_{u,ti} \eta_{i,rs} = \sum \eta_{u,si} \eta_{i,rt}$$

*) S. 410—411. Der daselbst ausgesprochenen, auf die Meinung von Gauß bezüglichen Vermutung kann ich mich nicht anschließen.

wo r, s, t, u irgendwelche Indizes aus der Reihe $1, 2 \dots n$ bedeuten. Diese Bedingungen, zu welchen Herr Weierstrass im Verlaufe seiner Untersuchung noch einige, später zu erwähnende hinzufügt, stimmen, wie es in der Natur der Sache liegt, vollständig mit denjenigen überein, welche in der Theorie der endlichen Körper bei der Forderung auftreten, daß die Zahlen sich durch Multiplikation reproduzieren sollen.

Ich will nun im ersten Teil meiner Darstellung einen Weg angeben, auf welchem man nach Belieben unendlich viele solche Systeme von Zahlen $\eta_{t,rs}$ erzeugen kann, und im zweiten Teil beweisen, daß umgekehrt auf diese Weise auch alle solche Systeme erzeugt werden. Hierbei bemerke ich, daß von jetzt ab ausschließlich von den bis jetzt allgemein eingeführten komplexen Zahlen die Rede sein wird.

Es sei ein System E von n^2 Zahlen $e_r^{(s)}$ nach Belieben angenommen, welche nur der einzigen Bedingung unterworfen sind, daß ihre Determinante

$$(3) \quad e = \sum \pm e'_1 e''_2 \dots e_n^{(n)}$$

von Null verschieden ist. Ich betrachte nun ein System von n Größen

$$(4) \quad e_1, e_2 \dots e_n,$$

welches insofern als mehrwertig anzusehen ist, als es fähig sein soll, durch n verschiedene Substitutionen in die n bestimmten Spezialsysteme

$$(5) \quad e_1^{(s)}, e_2^{(s)} \dots e_n^{(s)}$$

überzugehen, welche den n verschiedenen Werten des Index s entsprechen; diese Substitutionen sind natürlich so zu verstehen, daß gleichzeitig jede der n Größen e_r den mit gleichem Index r behafteten Wert $e_r^{(s)}$ annimmt. Andere Spezialisierungen der Größen e_r sollen gänzlich ausgeschlossen sein. Wir stellen uns die Aufgabe, alle rationalen Beziehungen zwischen diesen mehrwertigen Größen e_r und den völlig bestimmten, einwertigen Zahlen aufzufinden, nämlich alle solche Beziehungen, welche für jedes einzelne der n Spezialsysteme (5) gültig sind; nur von diesen Beziehungen wird im folgenden gesprochen werden.

Zu diesem Zweck betrachten wir das Gebiet G aller mit bestimmten Zahlkoeffizienten behafteten ganzen rationalen Funktionen der n Größen e_r . Jede solche Funktion x wird durch die Substitution (5) einen entsprechenden Wert annehmen, den wir mit $x^{(s)}$

bezeichnen wollen. Sind diese n Werte $x', x'' \dots x^{(n)}$ bekannt oder auch willkürlich angenommen, so läßt sich die mehrwertige Größe x immer und nur auf eine einzige Weise als homogene lineare Funktion der Größen e_r , also in der Form

$$(6) \quad x = \sum e_i \xi_i$$

darstellen, wo die n Zahlen ξ_i einwertig bestimmt sind; sie sollen die Koordinaten der Größe x in bezug auf die Basis (4) heißen. In der Tat, die vorstehende Gleichung soll nach dem Obigen nichts anderes bedeuten, als daß die den n verschiedenen Indizes s entsprechenden n Gleichungen

$$(7) \quad x^{(s)} = \sum e_i^{(s)} \xi_i$$

bestehen; da nun die Determinante (3) von Null verschieden ist, so ergeben sich hieraus durch Umkehrung für die n Koordinaten Ausdrücke von der Form

$$(8) \quad \xi_r = \sum f_r^{(i)} x^{(i)}$$

das System F der hier auftretenden n^2 Zahlen $f_r^{(s)}$ ist das Komplement des gegebenen Systems E . Wir setzen im folgenden stets

$$(9) \quad (r, s) = 1 \text{ oder } = 0,$$

je nachdem die Indizes r, s gleich oder ungleich sind; dann bestehen zwischen den beiden komplementären Systemen E, F bekanntlich die Relationen

$$(10) \quad \sum e_r^{(i)} f_s^{(i)} = \sum e_i^{(r)} f_i^{(s)} = (r, s).$$

In der eben bewiesenen völligen Bestimmtheit der zu einer Größe x gehörenden Koordinaten ξ_r liegt auch die Irreduktibilität der Basis (4), insofern die Gleichung

$$\sum e_i \xi_i = 0$$

durch n bestimmte Zahlen ξ_i nicht anders befriedigt werden kann, als wenn diese sämtlich verschwinden. Jedes einzelne Spezialsystem (5), für sich allein betrachtet, besitzt natürlich, sobald $n > 1$ ist, diese Irreduktibilität niemals*).

*) Der Fall $e = 0$, und allgemeiner die Untersuchung solcher mehrwertiger Systeme $e_1, e_2 \dots e_n$, für welche die Anzahl der erlaubten Substitutionen (5) kleiner oder größer als n ist, läßt sich leicht auf den hier behandelten Fall zurückführen.

Nach dem Vorhergehenden ist es nun auch erlaubt, die n Zahlen $f'_r, f''_r \dots f_r^{(n)}$ als die Spezialwerte einer demselben Gebiet G angehörenden Größe f_r anzusehen, und man erhält so eine zu der Basis (4) komplementäre, ebenfalls n -wertige Basis

$$(11) \quad f_1, f_2 \dots f_n.$$

Bezeichnen wir ferner mit dem Symbol $S(x)$ die aus allen Spezialwerten von x gebildete Summe

$$(12) \quad S(x) = \sum x^{(i)},$$

so kann die Beziehung (10) zwischen den beiden Basen auch durch

$$(13) \quad S(e_r f_s) = (r, s)$$

dargestellt werden, und da die Koordinaten ξ_r der Größe x zufolge (8) die Form

$$(14) \quad \xi_r = S(x f_r)$$

besitzen, so ist allgemein

$$(15) \quad x = \sum e_i S(x f_i).$$

Man erhält endlich, wenn man nach den Spezialwerten $x^{(s)}$ ordnet und die n Größen

$$(16) \quad c_r = \sum e_i f_i^{(r)}$$

einführt, die folgende Darstellung

$$(17) \quad x = \sum c_i x^{(i)}.$$

Die demselben Gebiete G angehörenden n Größen c_r bilden gewissermaßen eine Normalbasis desselben und sind durch

$$(18) \quad c_r^{(s)} = (r, s)$$

definiert. Die einzelnen n Bestandteile $c_s x^{(s)}$, welche den einzelnen Substitutionen entsprechen, kann man mit Herrn Weierstrass die Komponenten der Größe x nennen. Versteht man ferner unter einem Teiler der Null jede Größe x , von deren Spezialwerten $x^{(s)}$ mindestens einer verschwindet, so sind, falls $n > 1$ ist, die Größen c_r solche Teiler der Null.

Da nach dem Obigen alle Größen x des Gebietes G , d. h. alle ganzen rationalen Funktionen der n Größen e_r sich als homogene lineare Funktionen derselben darstellen lassen, so kann man jedes Produkt

$$(19) \quad e_r e_s = \sum e_i \eta_{i,rs}$$

setzen, wo die Koordinaten $\eta_{t,rs}$ notwendig den sämtlichen Bedingungen (1) und (2) genügen müssen, welche aus den Gleichungen $e_r e_s = e_s e_r$ und $(e_r e_s) e_t = (e_r e_t) e_s$ entspringen. In der Tat ergibt sich aus dem obigen allgemeinen Ausdruck (14) für die Koordinaten einer Größe x , daß

$$(20) \quad \eta_{t,rs} = S(e_r e_s f_t)$$

ist, und aus dieser Darstellung der Zahlen $\eta_{t,rs}$ durch das gegebene System E der Zahlen $e_r^{(s)}$ folgt sofort, daß alle jene Bedingungen identisch erfüllt sind, weil die Summe

$$(21) \quad \begin{aligned} \sum \eta_{u,t} \eta_{t,rs} &= \sum e_t^{(t')} e_{t'}^{(t'')} f_u^{(t')} e_r^{(t''')} e_s^{(t''')} f_t^{(t''')} \\ &= \sum e_t^{(t')} f_u^{(t')} e_r^{(t''')} e_s^{(t''')} (t', t'') = \sum e_r^{(t')} e_s^{(t')} e_t^{(t')} f_u^{(t')} \\ &= S(e_r e_s e_t f_u), \end{aligned}$$

also symmetrisch in bezug auf die drei Indizes r, s, t ist.

Am einfachsten gestaltet sich natürlich die Multiplikation, wenn man alle Größen x des Gebietes G in der Form (17) durch die Normalbasis darstellt. Die Größen c_r haben nämlich, wie aus ihrer Definition (16) oder auch unmittelbar aus (18) hervorgeht, die Eigenschaften

$$(22) \quad c_r c_s = (r, s) c_r,$$

und hieraus folgt, wenn y ebenfalls eine beliebige Größe des Gebietes G bedeutet,

$$(23) \quad xy = \sum c_i x^{(i)} y^{(i)},$$

was ohnehin wegen

$$(24) \quad (xy)^{(s)} = x^{(s)} y^{(s)}$$

selbstverständlich ist. Ebenso leuchtet ein, daß, falls $n > 1$, ein Produkt xy von zwei von Null verschiedenen Größen x, y sehr wohl verschwinden kann; in der Tat bedeutet die Gleichung $xy = 0$ nichts anderes, als das gleichzeitige Bestehen der den n Substitutionen entsprechenden Gleichungen $x^{(s)} y^{(s)} = 0$, und diesen kann immer so genügt werden, daß einige Spezialwerte von jeder der Größen x, y verschwinden, aber mindestens einer derselben von Null verschieden ist. Ist x eine gegebene Größe, so ist die Mannigfaltigkeit der Wurzeln y der Gleichung $xy = 0$ hiernach sofort zu überblicken. Auf die Folgerungen, welche sich hieraus für die Division der Größen des Gebietes G und hinsichtlich der Mannigfaltigkeit der Wurzeln

von Gleichungen höheren Grades ergeben, will ich hier nicht mehr eingehen, weil sie von Herrn Weierstrass ausführlich besprochen sind. —

Ich gehe nun im zweiten Teil zu meiner Hauptaufgabe über, welche darin besteht, zu zeigen, daß umgekehrt jedes gegebene System von Zahlen $\eta_{t,rs}$, welches die Bedingungen (1) und (2) und eine sogleich aufzustellende Zusatzbedingung erfüllt, immer auf die im vorhergehenden beschriebene Weise (20) aus einem und nur einem System E von n^2 Zahlen $e_r^{(s)}$ mit nicht verschwindender Determinante e entspringt. Die erwähnte Zusatzbedingung besteht darin, daß, wenn man zur Abkürzung

$$(25) \quad \sigma_r = \sum \eta_{t,rt}$$

und

$$(26) \quad \tau_{rs} = \tau_{sr} = \sum \sigma_i \eta_{i,rs}$$

setzt, die Determinante

$$(27) \quad \Delta = \sum \pm \tau_{11} \tau_{22} \dots \tau_{nn}$$

einen von Null verschiedenen Wert besitzt; es wird sich später, ohne daß ich besonders darauf zurückzukommen brauche, von selbst ergeben, daß diese einzige Bedingung vollständig äquivalent mit den drei Forderungen ist, auf welche Herr Weierstrass durch seine Untersuchung über die Zulässigkeit der überkomplexen Größen geführt wird (S. 403). Ihre Bedeutung für unsere Aufgabe ist leicht zu erkennen; ist nämlich das System der Zahlen $\eta_{t,rs}$ in der oben angegebenen Weise (20) wirklich aus einem System E entsprungen, so ist

$$(28) \quad \sigma_r = \sum S(e_r e_i f_i) = \sum e_r^{(i)} e_i^{(i)} f_i^{(i)} = S(e_r)$$

und

$$(29) \quad \tau_{rs} = \sum S(e_i) S(e_r e_s f_i) = \sum e_i^{(i)} e_r^{(i)} e_s^{(i)} f_i^{(i)} = S(e_r e_s)$$

und folglich

$$(30) \quad \Delta = e^2,$$

woraus die Notwendigkeit unserer Bedingung unmittelbar einleuchtet. Des leichteren Verständnisses wegen empfehle ich dem Leser, auch im folgenden immer die Bedeutung anzumerken, welche die einzuführenden Größen besitzen würden, falls die Abstammung der Zahlen $\eta_{t,rs}$ aus einem System E schon bewiesen wäre.

Die Bedingungen (1) und (2) lassen sich am einfachsten und mit dem besten Erfolge zusammenfassen, wenn man n unabhängige

Variable $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$ und n homogene ganze Funktionen zweiten Grades $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n$ durch die Definition

$$(31) \quad 2 \eta_i = \sum \eta_{i, i'} \xi_i \xi_{i'}$$

eingeführt. Die Bedingungen (1) sind dann durch

$$(32) \quad \eta_{i, r s} = \frac{\partial^2 \eta_i}{\partial \xi_r \partial \xi_s}$$

ausgedrückt. Setzt man ferner

$$(33) \quad \eta_{r, s} = \frac{\partial \eta_r}{\partial \xi_s} = \sum \eta_{r, s i} \xi_i,$$

so ist

$$(34) \quad 2 \eta_r = \sum \eta_{r, i} \xi_i$$

und, wenn d das Zeichen für eine Variation (d. h. eine totale Differentiation) bedeutet,

$$(35) \quad d \eta_r = \sum \eta_{r, i} d \xi_i = \sum \xi_i d \eta_{r, i}$$

Die Bedingungen (2) werden ferner, wenn d' ebenfalls eine willkürliche Variation ist, zusammengefaßt in

$$(36) \quad \sum d \eta_{r, i} d' \eta_{i, s} = \sum d' \eta_{r, i} d \eta_{i, s}$$

Alles Folgende beruht auf diesen Bedingungen und der freiesten Ausnutzung des Begriffes einer Variation. Man kann diesen Bedingungen noch verschiedene andere Formen geben, in denen sie ebenfalls zur Anwendung kommen werden. Multipliziert man mit ξ_s und summiert nach s , so folgt nach (35)

$$(37) \quad \sum d \eta_{r, i} d' \eta_i = \sum d' \eta_{r, i} d \eta_i$$

Setzt man ferner $d' \xi_i = \xi_i$, so folgt aus (36)

$$(38) \quad \sum \eta_{i, s} d \eta_{r, i} = \sum \eta_{r, i} d \eta_{i, s}$$

Wir führen noch folgende Funktionen ein, die lineare

$$(39) \quad \sigma = \sum \eta_{i, i} = \sum \sigma_i \xi_i,$$

die quadratische

$$(40) \quad 2 \tau = 2 \sum \sigma_i \eta_i = \sum \tau_{i, i'} \xi_i \xi_{i'},$$

die linearen

$$(41) \quad \tau_r = \frac{\partial \tau}{\partial \xi_r} = \sum \sigma_i \eta_{i, r} = \sum \tau_{r, i} \xi_i$$

und beginnen nun unsere Untersuchung.

Da die aus den Zahlen $\tau_{r, s}$ gebildete Determinante (27) nach unserer Annahme nicht verschwindet, so kann man eine spezielle

Variation δ vollständig definieren durch die für alle n Indizes r geltende Forderung

$$(42) \quad \delta \tau_r = \sigma_r,$$

und zwar sind die hieraus folgenden Werte der Differentiale $\delta \xi_1, \delta \xi_2 \dots \delta \xi_n$ bestimmte konstante Zahlen. Multipliziert man nun (36) mit σ_r und summiert nach r , so folgt mit Rücksicht auf (41)

$$(43) \quad \sum d\tau_i d'\eta_{i,s} = \sum d'\tau_i d\eta_{i,s},$$

und wenn man hierin $d' = \delta$ setzt und (42) beachtet,

$$\sum d\tau_i \delta \eta_{i,s} = \sum \sigma_i d\eta_{i,s} = d\tau_s;$$

da nun, weil \mathcal{A} nicht verschwindet, die n Differentiale $d\tau_1, d\tau_2 \dots d\tau_n$ gänzlich unabhängig voneinander sind, so folgt hieraus offenbar

$$(44) \quad \delta \eta_{r,s} = (r, s), \quad \delta \eta_r = \xi_r, \quad \delta \tau = \sigma.$$

Hieraus ergibt sich die wichtige Folgerung, daß die Funktionaldeterminante

$$(45) \quad \varphi = \frac{d(\eta_1 \dots \eta_n)}{d(\xi_1 \dots \xi_n)} = \sum \pm \eta_{1,1} \eta_{2,2} \dots \eta_{n,n}$$

nicht identisch verschwinden kann; legt man nämlich jeder Variablen ξ_r den entsprechenden Wert $\delta \xi_r$ bei, so geht $\eta_{r,s}$ in $\delta \eta_{r,s} = (r, s)$ über, und folglich nimmt die homogene ganze Funktion n -ten Grades φ den Wert

$$(46) \quad \frac{\delta^n \varphi}{\Pi(n)} = 1$$

an (diese Determinante φ geht in die von Herrn Weierstrass auf S. 397 mit ε bezeichnete Größe über, wenn die $\xi_r = \beta_r$ gesetzt werden).

Hieraus folgt wieder, daß nicht bloß für jede positive, sondern auch für jede negative ganze Zahl p eine entsprechende Variation δ_p vollständig definiert werden kann durch die für alle n Indizes r geltende Rekursion

$$(47) \quad \delta_{p+1} \xi_r = \delta_p \eta_r,$$

mit der Anfangsbedingung $\delta_0 = \delta$. Die merkwürdigen Eigenschaften der hierdurch definierten Funktionen $\delta_p \xi_r$ (welche von Herrn Weierstrass mit $\xi_r^{(p)}$ bezeichnet sind) ergeben sich leicht aus unseren Grundbedingungen (37); setzt man $d' = \delta_p$, so erhält man zufolge (47)

$$\sum \delta_p \eta_{r,i} d\eta_i = \sum d\eta_{r,i} \delta_{p+1} \xi_i = \sum \delta_{p+1} \eta_{r,i} d\xi_i$$

und hieraus wegen der Willkürlichkeit von d ,

$$(48) \quad \delta_{p+1} \eta_{r,s} = \sum \eta_{i,s} \delta_p \eta_{r,i} = \sum \eta_{r,i} \delta_p \eta_{i,s}.$$

Setzt man hierin $p = -1$, so folgt nach (44), daß

$$(49) \quad \sum \eta_{i,s} \delta_{-1} \eta_{r,i} = \sum \eta_{r,i} \delta_{-1} \eta_{i,s} = (r,s),$$

mithin das Produkt

$$(50) \quad \varphi \delta_{-1} \eta_{r,s}$$

der Koeffizient des Elementes $\eta_{s,r}$ in der Determinante φ ist.

Allgemeiner folgt aus (48) leicht durch den Schluß von q auf $q+1$, daß für je zwei ganze Zahlen p, q der Satz

$$(51) \quad \delta_{p+q} \eta_{r,s} = \sum \delta_p \eta_{r,i} \delta_q \eta_{i,s}$$

gilt, woraus man beiläufig schließt, daß

$$(52) \quad \begin{vmatrix} \delta_p \eta_{1,1} & \dots & \delta_p \eta_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_p \eta_{n,1} & \dots & \delta_p \eta_{n,n} \end{vmatrix} = \varphi^p$$

ist, was aber auch schon aus (48) folgt.

Multipliziert man (51) mit ξ_s und summiert nach s , so folgt nach (35)

$$(53) \quad \delta_{p+q} \eta_r = \sum \delta_p \eta_{r,i} \delta_q \eta_i,$$

also zufolge (47) auch

$$(54) \quad \delta_{p+q} \xi_r = \sum \delta_p \eta_{r,i} \delta_q \xi_i.$$

Ebenso findet man aus (47) und (48) durch den Schluß von p auf $p \pm 1$ die Allgemeingültigkeit des für $p = 0$ evidenten Satzes

$$(55) \quad d \delta_p \xi_r = p \sum \delta_{p-1} \eta_{r,i} d \xi_i = p \sum d \eta_{r,i} \delta_{p-1} \xi_i$$

und hieraus die Funktionaldeterminante

$$(56) \quad \frac{d(\delta_p \xi_1 \dots \delta_p \xi_n)}{d(\xi_1 \dots \xi_n)} = p^n \varphi^{p-1}.$$

Setzt man $d = \delta_q$, so folgt aus (55), (54)

$$(57) \quad \delta_q \delta_p \xi_r = p \delta_{p+q-1} \xi_r,$$

also auch

$$(58) \quad \delta_q \delta_p \lambda = p \delta_{p+q-1} \lambda,$$

wenn λ eine willkürliche homogene lineare Funktion bedeutet. Setzt man $q = 0$, so folgt

$$(59) \quad \delta \delta_p \lambda = p \delta_{p-1} \lambda$$

und durch Wiederholung der Variation δ

$$(60) \quad \delta^m \delta_p \lambda = p(p-1) \dots (p-m+1) \delta_{p-m} \lambda,$$

speziell

$$(61) \quad \delta^m \delta_{-1} \lambda = (-1)^m \Pi(m) \delta_{-1-m} \lambda!$$

Ich wende mich jetzt zur näheren Betrachtung der Determinante φ .
Zufolge der oben gefundenen Bedeutung des Produktes (50) ist nach
einem bekannten Satz

$$d\varphi = \varphi \sum \delta_{-1} \eta_{i,i'} d\eta_{i',i} = \varphi \sum \delta_{-1} \eta_{i,i'} \eta_{i',i''} d\xi_{i''};$$

aus den Grundbedingungen (36) folgt aber

$$\sum \delta_{-1} \eta_{r,i'} \eta_{i',rs} = \sum \eta_{r,\tau'} \delta_{-1} \eta_{i',s},$$

und hierdurch vereinfacht sich mit Rücksicht auf (39), (41) das vor-
stehende Differential in folgender Weise

$$d\varphi = \varphi \sum \eta_{i,i'} \delta_{-1} \eta_{i',i''} d\xi_{i''} = \varphi \sum \sigma_{i'} \delta_{-1} \eta_{i',i''} d\xi_{i''} = \varphi \sum \delta_{-1} \tau_{i''} d\xi_{i''}$$

oder also

$$(62) \quad d\varphi = \varphi \sum \delta_{-1} \tau_i d\xi_i = \varphi \sum d\tau_i \delta_{-1} \xi_i,$$

oder, wenn die n Differentiale $d\xi_r$ konstant sind, noch kürzer

$$(63) \quad d\varphi = \varphi \delta_{-1} d\tau,$$

wo nun $d\tau$ jede beliebige homogene lineare Funktion bedeutet, weil
 Δ von Null verschieden ist. Hieraus geht hervor, daß die n Funk-
tionen $\delta_{-1} \xi_r$ sich durch die Derivierten von $\log \varphi$ ausdrücken lassen,
und umgekehrt diese durch jene. Ferner ergibt sich, wenn man zur
Abkürzung

$$(64) \quad \varphi_\mu = \frac{(-1)^\mu}{\Pi(\mu)} \delta^\mu \varphi$$

setzt, durch wiederholte Anwendung der Operation δ , unter Berücksichtigung von (61), der Satz

$$(65) \quad d\varphi_m = \sum_{\mu=0}^{\mu=m} \varphi_\mu \delta_{\mu-m-1} d\tau.$$

Bedenkt man, daß zufolge (46)

$$(66) \quad \varphi_n = (-1)^n,$$

und daß alle folgenden $\varphi_{n+1}, \varphi_{n+2} \dots$ verschwinden, so ergibt sich

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n} \varphi_\mu \delta_{\mu-m-1} d\tau = 0, \text{ wenn } m \geq n,$$

und da $d\tau$, wie schon bemerkt, jede der n Variablen ξ_r bedeuten kann, so ergibt sich, wenn ψ eine willkürliche Funktion ist, immer

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n} \varphi_{\mu} \delta_{\mu-m-1} \psi = 0, \text{ wenn } m \geq n;$$

nimmt man hierin, wenn p eine willkürliche ganze Zahl ist,

$$\psi = \delta_{p+m+2} \xi_r,$$

so folgt mit Rücksicht auf (57)

$$(p+m+2) \sum_{\mu=0}^{\mu=n} \varphi_{\mu} \delta_{\mu+p} \xi_r = 0, \text{ wenn } m \geq n;$$

da nun für jede gegebene ganze Zahl p eine ganze Zahl $m \geq n$ stets so gewählt werden kann, daß $(p+m+2)$ nicht verschwindet, so folgt, daß immer

$$(67) \quad \sum_{\mu=0}^{\mu=n} \varphi_{\mu} \delta_{\mu+p} \xi_r = 0,$$

also auch immer die Rekursion

$$(68) \quad \sum_{\mu=0}^{\mu=n} \varphi_{\mu} \delta_{\mu+p} \psi = 0$$

gilt, wo ψ eine willkürliche Funktion.

Nehmen wir jetzt in (65) an, es sei $m < n$, so folgt mit Rücksicht auf (68)

$$d\varphi_m = - \sum_{\mu=m+1}^{\mu=n} \varphi_{\mu} \delta_{\mu-m-1} d\tau$$

oder auch

$$d\varphi_m = - \sum_{\mu=0}^{\mu=n-m-1} \varphi_{\mu+m+1} \delta_{\mu} d\tau.$$

Setzt man hierin $d = \delta$, und bedenkt, daß $\delta\tau = \sigma$ und $\delta\varphi_m = -(m+1)\varphi_{m+1}$ ist, so erhält man, wenn man noch m durch $m-1$ ersetzt,

$$(69) \quad m\varphi_m = \sum_{\mu=0}^{\mu=n-m} \varphi_{\mu+m} \delta_{\mu} \sigma.$$

Dieser Satz gilt für die Zahlen $m = 1, 2 \dots n$ und offenbar auch für $m = 0$ zufolge (68); seine Bedeutung wird sich sogleich ergeben.

Wir führen jetzt eine Charakteristik ε ein, welche folgenden Sinn hat. Ist ψ eine beliebige Funktion der n Variablen ξ_r , so soll $\varepsilon(\psi)$ diejenige Funktion von den ξ_r und von einer neuen Variablen ξ bedeuten, welche aus ψ dadurch hervorgeht, daß jede Variable ξ_r durch die entsprechende Größe $(\xi_r - \xi \delta \xi_r)$ ersetzt wird. Da die $\delta \xi_r$ konstant

sind, so ist nach dem Taylorsche Satz, wenigstens für ganze Funktionen ψ ,

$$(70) \quad \varepsilon(\psi) = \psi - \xi \frac{\delta \psi}{1} + \xi^2 \frac{\delta^2 \psi}{1.2} - \xi^3 \frac{\delta^3 \psi}{1.2.3} + \dots$$

und allgemein, wenn die Differentiale $d\xi_r$ konstant sind,

$$(71) \quad d\varepsilon(\psi) = \varepsilon(d\psi) - \varepsilon(\delta\psi) d\xi.$$

Da φ eine ganze Funktion n -ten Grades ist, so ist mit Rücksicht auf (64)

$$(72) \quad \varepsilon(\varphi) = \varphi + \varphi_1 \xi + \varphi_2 \xi^2 + \dots + \varphi_n \xi^n;$$

da ferner φ die Determinante der linearen Funktionen $\eta_{r,s}$, und zufolge (44)

$$(73) \quad \varepsilon(\eta_{r,s}) = \eta_{r,s} - (r,s) \xi$$

ist, so ergibt sich auch

$$(74) \quad \varepsilon(\varphi) = \begin{vmatrix} \eta_{1,1} - (1,1) \xi & \dots & \eta_{1,n} - (1,n) \xi \\ \dots & \dots & \dots \\ \eta_{n,1} - (n,1) \xi & \dots & \eta_{n,n} - (n,n) \xi \end{vmatrix}.$$

Wir denken uns nun $\varepsilon(\varphi)$ als ganze Funktion n -ten Grades der Variablen ξ in n Faktoren ersten Grades zerlegt und setzen demgemäß, weil $\varphi_n = (-1)^n$ ist,

$$(75) \quad \varepsilon(\varphi) = \prod (x - \xi),$$

wo das Produktzeichen sich auf die n Wurzeln

$$(76) \quad x = x', x'' \dots x^{(n)}$$

bezieht, welche Funktionen von den n Variablen ξ_r sind und nach dem Fundamentalsatze von Gauß im Körper der komplexen Zahlen stets existieren. Dann ergibt sich durch Vergleich von (68), (69),

(72) mit den Newtonschen Formeln der Algebra, daß für jede ganze Zahl p

$$(77) \quad \delta_p \sigma = \delta_{p-1} \tau = S(x^p)$$

ist, wo die Summation S sich auf alle n Werte von x bezieht. Bezeichnet man ferner mit D die Diskriminante von $\varepsilon(\varphi)$, d. h. das Quadrat des Produktes aus allen Differenzen der n Größen x , so ist nach einem ebenfalls bekannten Satze

$$(78) \quad D = \begin{vmatrix} \delta \sigma, & \delta_1 \sigma \dots \delta_{n-1} \sigma \\ \delta_1 \sigma, & \delta_2 \sigma \dots \delta_n \sigma \\ \dots & \dots \\ \delta_{n-1} \sigma, & \delta_n \sigma \dots \delta_{2n-2} \sigma \end{vmatrix},$$

welcher Ausdruck sich noch umformen läßt. Multipliziert man die Determinante

$$(79) \quad \varrho = \begin{vmatrix} \delta \xi_1 & \dots & \delta \xi_n \\ \delta_1 \xi_1 & \dots & \delta_1 \xi_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n-1} \xi_1 & \dots & \delta_{n-1} \xi_n \end{vmatrix}$$

mit der aus den Zahlen τ_{rs} gebildeten Determinante Δ , und bedenkt, daß

$$\sum \tau_{ri} \delta_p \xi_i = \delta_p \tau_r$$

ist, so erhält man das Produkt

$$\Delta \varrho = \begin{vmatrix} \delta \tau_1 & \dots & \delta \tau_n \\ \delta_1 \tau_1 & \dots & \delta_1 \tau_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n-1} \tau_1 & \dots & \delta_{n-1} \tau_n \end{vmatrix};$$

multipliziert man abermals mit ϱ , und bedenkt, daß mit Rücksicht auf (41) und (54)

$$\sum \delta_p \xi_i \delta_q \tau_i = \sum \delta_p \xi_i \sigma_i' \delta_q \eta_{i,i} = \sum \sigma_i' \delta_{p+q} \xi_i = \delta_{p+q} \sigma$$

ist, so ergibt sich offenbar der Satz

$$(80) \quad D = \Delta \varrho^2.$$

Auf ähnliche Weise findet man leicht aus (74)

$$(81) \quad \varrho \varepsilon(\varphi) = \begin{vmatrix} 1, & \delta \xi_1 & \dots & \delta \xi_n \\ \xi, & \delta_1 \xi_1 & \dots & \delta_1 \xi_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi^n, & \delta_n \xi_1 & \dots & \delta_n \xi_n \end{vmatrix}.$$

Aus unserer Annahme, daß die Determinante Δ von Null verschieden ist, läßt sich nun — worauf ich unten zurückkommen werde — in aller Strenge beweisen, daß die Determinante ϱ und folglich auch die Diskriminante D nicht identisch verschwindet. Man kann daher den n Variablen ξ_r solche bestimmte Zahlwerte beilegen, daß die n Wurzeln x sämtlich voneinander verschieden ausfallen. Nachdem dies geschehen, definieren wir für jede dieser n Wurzeln x ein entsprechendes System von n Zahlen $e_1, e_2 \dots e_n$ durch diejenigen n Gleichungen

$$(82) \quad x^p = \sum e_i \delta_p \xi_i,$$

welche den n Werten $p = 0, 1, 2 \dots (n-1)$ entsprechen; die n Größen e_r sind hierdurch in ihrer Abhängigkeit von der Wurzel x

vollständig bestimmt, weil die Determinante ϱ einen von Null verschiedenen Wert hat. Es ergibt sich zunächst, daß die Gleichung (82) nun für jede positive ganze Zahl p besteht (auch für jede negative, wenn φ von Null verschieden ist); in der Tat, da $\varepsilon(\varphi)$ für $\xi = x$ verschwindet, so genügt x^p zufolge (72) derselben Rekursion

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n} \varphi_{\mu} x^{\mu+p} = 0,$$

welche zufolge (67) für die Größen $\delta_p \xi_r$ gilt; nimmt man daher an, unser Satz (82) sei für n aufeinanderfolgende Werte

$$p = m, m + 1 \dots m + n - 1$$

bewiesen, so ergibt sich aus dieser Übereinstimmung, und weil φ_n von Null verschieden ist, daß er auch für $p = m + n$ gilt, wodurch er offenbar allgemein bewiesen ist.

Hierauf führen wir für je zwei Indizes r, s aus der Reihe $1, 2 \dots n$ eine entsprechende, ebenfalls von der Wahl der Wurzel x abhängende Zahl

$$(83) \quad e_{rs} = e_{sr} = \sum e_i \eta_{i,rs}$$

ein; multipliziert man mit $\delta_p \xi_r \delta_q \xi_s$ und summiert über alle Werte r, s , so folgt mit Rücksicht auf (54) und (82)

$$\begin{aligned} \sum e_{i,i'} \delta_p \xi_i \delta_q \xi_{i'} &= \sum e_i \eta_{i,i',i''} \delta_p \xi_{i'} \delta_q \xi_{i''} = \sum e_i \delta_p \xi_{i'} \delta_q \eta_{i,i'} \\ &= \sum e_i \delta_{p+q} \xi_i = x^{p+q} = x^p x^q = \sum e_i \delta_p \xi_i e_{i'} \delta_q \xi_{i'}, \end{aligned}$$

also

$$\sum (e_{i,i'} - e_i e_{i'}) \delta_p \xi_i \delta_q \xi_{i'} = 0;$$

setzt man hierin für p und q alle Werte aus der Reihe

$$0, 1, 2 \dots (n-1),$$

und bedenkt, daß die Determinante ϱ von Null verschieden ist, so folgt leicht, daß immer $e_{rs} = e_r e_s$, also zufolge (83)

$$(84) \quad e_r e_s = \sum e_i \eta_{i,rs}$$

ist, wodurch wir zu der Gleichung (19) unseres ersten Teiles zurückgekehrt sind.

Substituiert man endlich für x alle n verschiedenen Wurzeln und bezeichnet mit $e_r^{(s)}$ denjenigen Wert von e_r , welcher durch die Wurzel $x = x^{(s)}$ erzeugt wird, so erhält man, wenn man die Determinante der n^2 Zahlen (82) bildet, die den Werten

$$p = 0, 1, 2 \dots (n-1)$$

entsprechen, das Resultat

$$\sqrt{D} = \varrho \sum \pm e_1' e_2'' \dots e_n^{(n)} = \varrho e$$

und hieraus mit Rücksicht auf (80)

$$(85) \quad \Delta = e^2;$$

das auf diese Weise aus dem System der Zahlen $\eta_{t,rs}$ berechnete System E der Zahlen $e_r^{(s)}$ besitzt daher eine von Null verschiedene Determinante e .

Da die Gleichungen (84) für jede der n Substitutionen $x = x^{(s)}$ gelten, so ist hiermit aus den gegebenen Zahlen $\eta_{t,rs}$ ein n -wertiges System von n Größen $e_1, e_2 \dots e_n$ konstruiert, aus welchem umgekehrt auf die im ersten Teil angegebene Art unser jetzt gegebenes System von Zahlen $\eta_{t,rs}$ erzeugt wird. Hiermit ist der Beweis geliefert, daß jedes System von n Haupteinheiten, wie es in der Untersuchung des Herrn Weierstrass auftritt, stets aufgefaßt werden darf als ein n -wertiges System von n gewöhnlichen Zahlen, in der Weise, daß jede rationale Gleichung zwischen den n Haupteinheiten dann und nur dann wahr ist, wenn sie für jedes der von uns hergeleiteten Spezialsysteme $e_1^{(s)}, e_2^{(s)} \dots e_n^{(s)}$ gilt. Will man daher überhaupt noch von solchen überkomplexen Größen als von neuen Zahlen sprechen (was ich für unzweckmäßig halte, weil in unserer höheren Algebra beständig mehrwertige Größensysteme genau in der hier beschriebenen Weise auftreten), so kann dies doch nur in einem ganz anderen, und zwar unendlich viel schwächeren Sinne geschehen, als bei der gewaltigen Bereicherung des Körpers der reellen Zahlen durch die Hinzufügung der imaginären Zahlen, oder auch bei der Einführung der Hamiltonschen Quaternionen, die, wenn ihr Nutzen auch auf ein sehr kleines Feld beschränkt zu sein scheint, doch auf den Charakter der Neuheit gegenüber den anderen Zahlen unbedingten Anspruch erheben dürfen.

Es ist nun auch leicht zu zeigen, daß das gefundene System E der Zahlen $e_r^{(s)}$ — abgesehen von der Freiheit, die den einzelnen Substitutionen entsprechenden oberen Indizes nach Belieben mit einander zu vertauschen — ein einziges, vollständig bestimmtes, d. h. immer dasselbe ist, wie auch die numerischen Werte der Variablen ξ_r , denen ein von Null verschiedener Wert ϱ entspricht, sonst gewählt sein mögen. Denn wenn wir, nachdem wir ein bestimmtes solches System gefunden und uns dadurch auf die im ersten Teil unserer

Untersuchung angenommene Grundlage gestellt haben, den Größen ξ_r ihre volle Variabilität wiedergeben und, ohne Rücksicht auf die bisherige Bedeutung von x , diese Größe jetzt, wie im ersten Teil (6), als n -wertige lineare Funktion

$$(86) \quad x = \sum e_i \xi_i$$

definieren, so folgt aus (19) oder (84)

$$(87) \quad x e_r = \sum e_{\iota} \eta_{\iota, r} \xi_i = \sum e_i \eta_{i, r},$$

und wenn ξ eine willkürliche einwertige Größe bedeutet,

$$(88) \quad (x - \xi) e_r = \sum e_i (\eta_{i, r} - (\iota, r) \xi);$$

wendet man hierauf alle n Substitutionen an, setzt für r alle n Indizes und bildet die Determinante, so erhält man nach Division durch die von Null verschiedene Determinante e und mit Rücksicht auf (74) das Resultat

$$(89) \quad \prod (x - \xi) = \varepsilon(\varphi);$$

da nun die Funktion $\varepsilon(\varphi)$ schon durch das System der Zahlen $\eta_{\iota, r, s}$ vollständig bestimmt ist, so gilt dasselbe von der Gesamtheit der n linearen Funktionen x in (86), also auch von dem System E ihrer Koeffizienten $e_r^{(s)}$. Zugleich ergibt sich hierbei das Resultat, in welchem rückwärts alles übrige enthalten ist, daß $\varepsilon(\varphi)$ und also auch

$$(90) \quad \varphi = \prod x$$

ein Produkt von n linearen Faktoren ist. —

Bei dem vorstehenden Beweise der Existenz des erzeugenden Systems E und der Zerlegbarkeit der Funktion φ in lineare Faktoren habe ich denjenigen Weg gewählt, welcher die meisten Berührungspunkte mit den Entwicklungen des Herrn Weierstrass darbietet. Hierbei habe ich die besondere Voraussetzung machen müssen, daß die in (79) definierte Determinante ϱ nicht identisch verschwindet; in Wahrheit ist dies, wie ich schon oben bemerkt habe, eine notwendige Folge unserer Grundannahme, daß die Determinante Δ einen von Null verschiedenen Wert besitzt, aber es hat mir trotz mancher zeitraubenden Versuche nicht gelingen wollen, diesen nicht unwichtigen Satz kurz, und zwar lediglich mit denjenigen Hilfsmitteln zu beweisen, welche in der obigen Darstellung vor seiner Benutzung, also bis (81), entwickelt sind. Da die analoge Frage für die Funktion φ

oben in (46) auf die leichteste Weise erledigt ist, nämlich durch die wirkliche Angabe eines aus den Zahlen $\eta_{t,rs}$ rational abgeleiteten Wertsystems $\xi_r = \delta \xi_r$, für welches φ nicht verschwindet, so befremdet mich diese Schwierigkeit, und ich würde mich sehr freuen, wenn es einem anderen Mathematiker gelänge, sie zu überwinden.

Daß wirklich φ nicht identisch verschwindet, wenn \mathcal{A} von Null verschieden ist, kann man nun — freilich post festum — auf einem ganz anderen Wege beweisen, nämlich so, daß man vorher die Zerlegbarkeit der Funktion φ in lineare Faktoren dartut. Der Kürze halber will ich mich aber hier darauf beschränken, nur die Hauptpunkte dieses Beweises anzugeben (vgl. den oben zitierten § 159 der zweiten Auflage von Dirichlets Zahlentheorie). Unter der im folgenden immer geltenden Annahme konstanter Differentiale $d\xi_r$, $d'\xi_r$ findet man aus (62) durch abermalige Differentiation unter Berücksichtigung von (55) und der aus (36) oder (43) leicht abzuleitenden Gleichung

$$\sum d\tau_i d'\eta_i = \sum \tau_i d d'\eta_i$$

das Resultat

$$(91) \quad d d' \log \varphi = -\delta_{-2} \sum \tau_i d d'\eta_i;$$

definiert man die von d und d' abhängige Variation d'' durch die ebenfalls konstanten Differentiale

$$(92) \quad d'' \xi_r = d d' \eta_r,$$

so nimmt dasselbe die einfachere Form

$$(93) \quad d d' \log \varphi = -\delta_{-2} d'' \tau$$

an, woraus leicht der Satz

$$(94) \quad d d' \log \varphi = d'' \delta \log \varphi$$

folgt, welcher die Grundlage des Beweises bildet (beiläufig bemerkt, folgt hieraus schon, daß aus der Funktion φ und der Variation δ sich das ganze System der Zahlen $\eta_{t,rs}$ rückwärts ableiten läßt). Man zeigt zunächst leicht, daß jeder ganze rationale Faktor ψ der Funktion φ dieselbe Eigenschaft

$$(95) \quad d d' \log \psi = d'' \delta \log \psi$$

besitzt. Da ferner

$$(96) \quad \delta \left(\frac{\psi^2 d'' \delta \log \psi}{\delta \psi} \right) = \psi \delta \left(\frac{d'' \delta \psi}{\delta \psi} \right)$$

ist, so ergibt sich, daß die ganze Funktion

$$(97) \quad \delta \psi^3 d^2 \psi - 2 \delta \psi d \psi \delta d \psi + d \psi^3 \delta^2 \psi$$

durch ψ teilbar ist, und hieraus läßt sich, wenn man für ψ ein Produkt von lauter voneinander verschiedenen irreduktiblen oder Primfunktionen nimmt, auf verschiedene Art beweisen, daß $\varepsilon(\psi)$ und also auch ψ ein Produkt von lauter linearen Faktoren ist. Dasselbe gilt daher auch von $\varepsilon(\varphi)$ und φ . Ist endlich

$$(98) \quad x = \sum e_i \xi_i$$

irgendeiner dieser linearen Faktoren von φ , so kann man ihn immer so wählen, daß $\delta x = 1$ wird, und dann gibt der auch für ihn gültige obige Satz

$$(99) \quad d d' \log x = d'' \delta \log x$$

unmittelbar das Resultat $d x d' x = d'' x$, d. h.

$$(100) \quad e_r e_s = \sum e_i \eta_{i,rs},$$

womit das erstrebte Ziel erreicht ist. Daß aber die Funktion ϱ nicht identisch verschwindet, daß also die n linearen Funktionen x voneinander verschieden sind, ergibt sich jetzt sofort daraus, daß, wie aus (77) oder auch auf andere Weise leicht folgt, $2\tau = S(x^2)$ ist, und daß die Diskriminante Δ dieser Funktion einen von Null verschiedenen Wert hat. —

Zum Schluß noch folgende Bemerkung. Ich habe der Untersuchung von vornherein den Körper der komplexen Zahlen zugrunde gelegt, weil hierdurch die Darstellung sehr erleichtert wird. Will man, wie es in der Abhandlung des Herrn Weierstrass geschieht, nur reelle Zahlen $\eta_{i,rs}$ und ξ_r zulassen, so hat dies auf das mehrwertige System $e_1, e_2 \dots e_n$ lediglich den Einfluß, daß, wenn ein Spezialsystem (5) imaginäre Zahlen enthält, immer ein zweites Spezialsystem vorhanden ist, welches aus den mit ihnen konjugierten imaginären Zahlen besteht.

Braunschweig, 13. Februar 1885.

Erläuterungen zur vorstehenden Abhandlung. (Zugleich zu XXI.)

Diese Abhandlung bringt die Theorie der kommutativen hyperkomplexen Systeme ohne Radikal — hyperkomplex in bezug auf den Körper der komplexen Zahlen — auf der Grundlage der Zerlegung der Systemdeterminante (Gruppen-determinante) in Linearfaktoren (90), womit auch die Zerlegung der charakteristischen Gleichung des allgemeinen Elements gegeben ist (89). Daraus wird der Hauptsatz gefolgert, die Allgemeingültigkeit der im ersten Teil (bis 24) angegebenen Struktur: Die Darstellung als direkte Summe von n dem Körper der komplexen Zahlen isomorphen Körpern, wodurch die n verschiedenen Homomorphismen des Systems in den Körper der komplexen Zahlen vermittelt werden; die Komponenten der Einheit ergeben dabei in ihren Koeffizienten die n Homomorphismen der komplementären Basis.

Entsprechende Entwicklungen hatte Dedekind ursprünglich zur Begründung der Körpertheorie verwandt (§ 159 der 2. Auflage von Dirichlet-Dedekind; Bd. III dieser Werke), indem er einen Körper n -ten Grades als hyperkomplexes System über dem Körper der rationalen Zahlen auffaßte, aus dem Nichtauftreten von Nullteilern die Irreduzibilität der Systemdeterminante erschloß und deren Zerlegung in Linearfaktoren bei Erweiterung des Koeffizientenbereichs gab. Auf diese Begriffe geht er in XXI zurück; Restklassenringe nach zerlegbaren ganzzahligen Polynomen und Erweiterung des Koeffizientenbereichs bei einem als hyperkomplex aufgefaßten Kreiskörper geben Beispiele für das Auftreten von Nullteilern und sollen den Zusammenhang mit der üblichen Algebra illustrieren. Bemerkenswert ist auch die geometrische Deutung des dritten Beispiels, die darauf hinauskommt, das System als Restklassenring nach einem Polynomideal in mehreren Unbestimmten aufzufassen.

Wie aus dieser letzteren Auffassung das Dedekindsche Hauptresultat sich herleiten läßt, hat Hilbert (Gött. Nachr. 1896) vermöge seines Nullstellensatzes gezeigt. In der Sprache der Matrizen hat Frobenius eine neue Herleitung und Verallgemeinerung gegeben (Über vertauschbare Matrizen, Berl. Ber. 1896); der Zusammenhang besteht in der Tatsache, daß die irreduziblen Homomorphismen einer Matrix durch Zuordnung der Matrix zu ihren charakteristischen Wurzeln gegeben sind. Auch in den späteren hyperkomplexen Arbeiten von Frobenius — vor allem in seiner Theorie der nichtkommutativen „Dedekind-schen Systeme“ — zeigt sich Dedekindscher Einfluß; die hyperkomplexe Auffassung von Algebra und Galoisscher Theorie wirkt sich aber erst in den neuesten hyperkomplexen Arbeiten aus [vgl. etwa E. Noether, „Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie“, Math. Zeitschr. 30 (1929), § 21 oder eine demnächst in der Math. Zeitschr. erscheinende Arbeit über hyperkomplexe Galoissche Theorie].

Noether.