XXIII.

Über Gleichungen mit rationalen Koeffizienten.

[Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Bd. I, S. 33—35 (1892).]

Daß solche Sätze über Gleichungen, die für jeden endlichen Grad gelten, nicht ohne weiteres für Gleichungen von unendlich hohem Grade in Anspruch zu nehmen sind, wird zu unserer Zeit wohl von fast allen Mathematikern anerkannt. Da aber die Entscheidung über eine solche Frage bisweilen nicht leicht zu finden ist, so erlaube ich mir im folgenden einen besonderen, nicht unwichtigen Fall zu behandeln. In der Lehre von denjenigen Gleichungen, welche einen endlichen Grad und lauter rationale Koeffizienten haben, wird der bekannte Satz bewiesen:

1. Hat die irreduzible Gleichung $\varphi(x) = 0$ eine Wurzel gemein mit der Gleichung $\psi(x) = 0$, so ist jede Wurzel der ersteren Gleichung auch eine Wurzel der letzteren.

Dieser Satz verliert aber, wenn die Gleichung $\psi(x) = 0$ von unendlich hohem Grade ist, seine allgemeine Gültigkeit, und zwar selbst für solche Gleichungen, deren linke Seite $\psi(x)$ eine für alle Werte von x konvergierende Potenzenreihe mit rationalen Koeffizienten ist. Dies ergibt sich unmittelbar aus dem Satze:

2. Ist α irgendeine reelle Zahl, so gibt es eine solche Gleichung $\psi(x) = 0$ von unendlich hohem oder auch endlichem Grade, welche α als einzige reelle Wurzel besitzt.

Ist nämlich dies bewiesen, so folgt daraus jedesmal ein offenbarer Widerspruch mit dem Satze 1., wenn man für α eine Wurzel einer irreduziblen Gleichung $\varphi(x) = 0$ (z. B. $x^2 - 2 = 0$) wählt, die mindestens zwei reelle Wurzeln α, β hat. Es kommt also nur noch darauf an, den Satz 2. zu beweisen, und hierbei darf man sich auf den Fall einer positiven Zahl α beschränken, weil auf diesen der entgegengesetzte Fall durch Verwandlung von x in $-x$ zurückgeführt wird; im Falle $\alpha = 0$ kann man natürlich $\psi(x) = x$ nehmen.

Aus jeder positiven Zahl α entsteht — in ähnlicher Weise und mit derselben Bestimmtheit, wie bei der Entwicklung in einen gemeinen Kettenbruch — immer eine Reihe von ganzen Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ und eine Reihe von zugehörigen Resten, d. h. solchen Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$, welche alle der Bedingung

$$0 \leqq \varepsilon < 1$$

genügen, nach folgender Regel: Zunächst setze man

$$\frac{1}{\alpha} = a_1 + \varepsilon_1,$$

wodurch a_1 als die größte in $\frac{1}{\alpha}$ enthaltene ganze Zahl, also auch ε_1 als Rest bestimmt ist; für jeden größeren Index n aber setze man

$$\frac{2\varepsilon_1}{\alpha^2} = a_2 + \varepsilon_2, \quad \frac{3\varepsilon_2}{\alpha^2} = a_3 + \varepsilon_3, \quad \ldots, \quad \frac{n\varepsilon_{n-1}}{\alpha^2} = a_n + \varepsilon_n, \quad \ldots,$$

wodurch auch alle folgenden Zahlen a als größte Ganze und alle Reste ε vollständig bestimmt sind; zugleich leuchtet ein, daß von den Zahlen a keine negativ ist. Dann besitzt die vollkommen definierte Funktion

$$\psi(x) = -1 + a_1 \frac{x}{1} + a_2 \frac{x^3}{1.2} + a_3 \frac{x^5}{1.2.3} + \cdots + a_n \frac{x^{2n-1}}{\Pi(n)} + \cdots$$

alle im Satze 2. angegebenen Eigenschaften. In der Tat:

1. Die Koeffizienten von $\psi(x)$ sind sämtlich rationale Zahlen.

2. Da $\varepsilon_{n-1} < 1$, also $a_n < \frac{n}{\alpha^2}$, so ist das allgemeine Glied der Reihe $\psi(x)$ absolut kleiner als

$$\frac{x}{\alpha^2} \cdot \frac{(x^2)^{n-1}}{\Pi(n-1)},$$

woraus bekanntlich folgt, daß die Reihe $\psi(x)$ (wie die Exponentialreihe) für jeden Wert von x konvergiert.

3. Aus den Definitionen der Zahlen a und ε folgt, daß die aus $(n+1)$ Gliedern bestehende Summe

$$-1 + a_1 \frac{\alpha}{1} + a_2 \frac{\alpha^3}{1.2} + a_3 \frac{\alpha^5}{1.2.3} + \cdots + a_n \frac{\alpha^{2n-1}}{\Pi(n)} = -\varepsilon_n \frac{\alpha^{2n-1}}{\Pi(n)}$$

ist, und da die rechte Seite mit unendlich wachsendem n unendlich klein wird, so folgt $\psi(\alpha) = 0$, d. h. α ist eine Wurzel der Gleichung $\psi(x) = 0$.

4. Da von den Zahlen a keine negativ, wohl aber mindestens eine positiv ist (wie aus $\psi(\alpha) = 0$ hervorgeht), da ferner, abgesehen von dem konstanten Gliede -1, die Variable x in der Reihe $\psi(x)$ nur in Potenzen mit ungeraden Exponenten auftritt, so wird gleichzeitig mit x auch $\psi(x)$ das ganze reelle Gebiet von $-\infty$ bis $+\infty$ stets wachsend durchlaufen und folglich auch nur für den einzigen Wert $x = \alpha$ den Wert Null erhalten; d. h. die Gleichung $\psi(x) = 0$ hat außer α keine reelle Wurzel, w. z. b. w.

Hiermit ist die Unzuverlässigkeit des Satzes 1. für Gleichungen $\psi(x) = 0$ von unendlich hohem Grade erwiesen. Dieser Nachweis ist wohl nicht ganz wertlos, weil verschiedene Mathematiker auf den Gedanken gekommen sind, durch Anwendung dieses unzuverlässigen Satzes auf das Beispiel $\psi(x) = \sin x$ einen Beweis für die Transzendenz der Zahl π zu gewinnen, der offenbar nur wenige Zeilen erfordern würde.

Der Beweis des Satzes 2. läßt sich, wie man leicht sieht, in der mannigfaltigsten Weise abändern; zugleich leuchtet ein, daß dieser Satz auch für jede endliche Anzahl von vorgeschriebenen reellen Wurzeln α gilt.

Erläuterungen zur vorstehenden Abhandlung.

Eine französische Übersetzung dieser Abhandlung erschien unter dem Titel „Sur les équations à coefficients rationels“ in den Nouvelles Annales de mathématiques, 3. Ser., Bd. 17, S. 201—204 (1898). (Übersetzung von L. Laugel.) Der Übersetzer fügt am Ende der Abhandlung die folgende Note hinzu: M. Dedekind me prie de mentionner ici un mémoire de M. A. Hurwitz (Acta Math., t. 14, 1889) où la même question a été traitée d'une manière beaucoup plus générale.

In der erwähnten Abhandlung von Hurwitz „Über beständig konvergierende Potenzreihen mit rationalen Zahlenkoeffizienten und vorgeschriebenen Nullstellen“ wird das Dedekindsche Resultat aus dem folgenden allgemeineren Satz abgeleitet: Zu einer beliebig gegebenen Potenzreihe $A(x)$ kann man eine ganze transzendente Funktion $B(x)$ so bestimmen, daß die Koeffizienten in der Reihenentwicklung von $A(x)\, e^{B(x)}$ sämtlich rational sind.

Mit derselben Frage beschäftigte sich schon E. Strauss, Acta Mathematica **11** (1887), S. 13—18; vgl. auch O. Perron, Math. Ann. **104** (1930), S. 139—142.

Ore.
