XXXIX.

Konstruktion von Quaternionkörpern.

Der in dem Quaternionkörper Ω enthaltene biquadratische Körper sei H; man kann dann

$$\Omega = H(\omega), \quad \omega^2 = \mu$$

setzen, wo μ eine ganze Zahl in H bedeutet. Jede Zahl in Ω ist von der Form $x + y\omega$, wo x, y in H enthalten; soll das Quadrat $(x + y\omega)^2 = (x^2 + \mu y^2) + 2xy\omega$ in H enthalten sein, so muß $xy = 0$ sein, also $x = 0$, falls $x + y\omega$ nicht in H enthalten (also nicht $y = 0$) ist.

Bezeichnet man die Quaterniongruppe Q des Körpers Ω mit 1, α, β, γ, ε, $\varepsilon\alpha$, $\varepsilon\beta$, $\varepsilon\gamma$, wo

$$\varepsilon^2 = 1,$$

$$\varepsilon = \alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \alpha^{-2} = \beta^{-2} = \gamma^{-2},$$

$$\beta\gamma = \alpha, \quad \gamma\alpha = \beta, \quad \alpha\beta = \gamma,$$

$$\gamma\beta = \alpha^{-1} = \varepsilon\alpha, \quad \alpha\gamma = \beta^{-1} = \varepsilon\beta, \quad \beta\alpha = \gamma^{-1} = \varepsilon\gamma,$$

so liegt $(\omega\alpha)^2 = \mu\alpha$ in H, und da $\omega\alpha$ in Ω, aber nicht in H enthalten ist, so kann man

$$\omega\alpha = u\omega$$

und entsprechend

$$\omega\beta = v\omega,$$

$$\omega\gamma = w\omega$$

setzen, wo u, v, w Zahlen in H sind. Sodann ist

$$\omega\varepsilon = -\omega, \quad \mu\varepsilon = \mu,$$

also

$$\begin{aligned} \omega\alpha^2 &= \omega\varepsilon &&= -\omega &&= \omega u(u\alpha), \\ \omega\beta\alpha &= \omega\varepsilon\gamma &&= -\omega w &&= \omega u(v\alpha), \\ \omega\gamma\alpha &= \omega\beta &&= \omega v &&= \omega u(w\alpha), \end{aligned}$$

und entsprechend ergibt sich

$$\begin{aligned} \omega w &= \omega v\,(u\beta), & -\omega v &= \omega w\,(u\gamma), \\ -\omega \;&= \omega v\,(v\beta), & \omega u &= \omega w\,(v\gamma), \\ -\omega u &= \omega v\,(w\beta), & -\omega \;&= \omega w\,(w\gamma), \end{aligned}$$

folglich

$$(1)\quad \begin{cases} u\alpha = -u^{-1}, & u\beta = \quad wv^{-1}, \quad u\gamma = -vw^{-1}, \\ v\alpha = -wu^{-1}, & v\beta = -v^{-1}, \quad v\gamma = \quad uw^{-1}, \\ w\alpha = \quad vu^{-1}, & w\beta = -uv^{-1}, \quad w\gamma = -w^{-1}; \end{cases}$$

$$\mu\alpha = \mu u^2, \qquad \mu\beta = \mu v^2, \qquad \mu\gamma = \mu w^2.$$

Ist H insbesondere einklassig, so kann man μ als eine durch kein Primzahlquadrat in H teilbare ganze Zahl in H annehmen. Dann sind auch $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\gamma$ durch kein Primzahlquadrat teilbar, und somit müssen u, v, w Einheiten sein. Ist daher π eine in μ aufgehende Primzahl in H, so müssen auch $\pi\alpha$, $\pi\beta$, $\pi\gamma$ in μ aufgehen; bedeutet p die durch π teilbare natürliche Primzahl, so muß daher, wenn p durch kein Primzahlquadrat in H teilbar ist, also p nicht in der Grundzahl von H aufgeht, die Zahl μ durch das Produkt p aller verschiedenen in p aufgehenden Primzahlen π teilbar sein. Die Zahl μ ist also das Produkt aus einer natürlichen Zahl m, einer Einheit und möglicherweise noch einer oder mehreren voneinander verschiedenen in der Grundzahl aufgehenden Primzahlen in H; dabei ist m ein Produkt von lauter voneinander und von den Primteilern der Grundzahl verschiedenen natürlichen Primzahlen.

Beispielsweise sei H der einklassige Körper $R\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\right)$, wo R den Körper der rationalen Zahlen bedeutet; μ sei wiederum eine durch kein Primzahlquadrat in H teilbare ganze Zahl in H. Die Grundzahl (48^2) von H setzt sich aus den Primfaktoren 2 und 3 zusammen. Dabei ist 3 das Quadrat der Primzahl $\sqrt{3}$ in H, und 2 ist bis auf eine Einheit als Faktor die vierte Potenz der Primzahl

$$1 + \eta = 1 + \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

in H. Die Fundamentaleinheiten in H sind ferner

$$a = 1 + \sqrt{2}, \quad \eta = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{b} = \sqrt{2 + \sqrt{3}},$$

$$\tau = \sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{c} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}.$$

Also kann man setzen

$$\mu = \pm m a^{e_1} \eta^{e_2} \tau^{e_3} (1+\eta)^{e_4} (\sqrt{3})^{e_5},$$

wo m eine durch kein Primzahlquadrat teilbare natürliche Zahl und relative Primzahl zu 6 ist und jede der Zahlen e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 gleich 0 oder 1 ist.

Man kann jetzt setzen

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}, \omega)\,\alpha &= (\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\sqrt{6}, u\omega),\\ (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}, \omega)\,\beta &= (-\sqrt{2}, \sqrt{3}\, -\sqrt{6}, v\omega), \quad \omega\varepsilon = -\omega, \mu\varepsilon = \mu.\\ (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}, \omega)\,\gamma &= (-\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{6}, w\omega),\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} a\alpha &= a, & a\beta &= -a^{-1}, & a\gamma &= -a^{-1},\\ \eta\alpha &= -\eta^{-1}, & \eta\beta &= -\eta, & \eta\gamma &= \eta^{-1},\\ \tau\alpha &= -\tau^{-1}, & \tau\beta &= \tau^{-1}, & \tau\gamma &= -\tau,\end{aligned}$$

$$(1+\eta)\alpha = -\eta^{-1}(1-\eta),\ (1+\eta)\beta = 1-\eta,\ (1+\eta)\gamma = \eta^{-1}(1+\eta),$$

also, da man leicht

$$\frac{1-\eta}{1+\eta} = -\tau^{-1}$$

bestätigt,

$$(1+\eta)\alpha = (1+\eta)\eta^{-1}\tau^{-1}, \quad (1+\eta)\beta = -(1+\eta)\tau^{-1},$$
$$(1+\eta)\gamma = (1+\eta)\eta^{-1},$$

endlich

$$(\sqrt{3})\alpha = -\sqrt{3}, \quad (\sqrt{3})\beta = \sqrt{3}, \quad (\sqrt{3})\gamma = -\sqrt{3}.$$

Also ist

$$\begin{aligned}\mu\alpha &= \pm m a^{e_1} (-\eta^{-1})^{e_2} (-\tau^{-1})^{e_3} (1+\eta)^{e_4} \eta^{-e_4} \tau^{-e_4} (-\sqrt{3})^{e_5}\\ &= \pm m a^{e_1} (-1)^{e_2+e_3+e_5} \eta^{-e_2-e_4} \tau^{-e_3-e_4} (1+\eta)^{e_4} (\sqrt{3})^{e_5},\end{aligned}$$

$$\frac{\mu\alpha}{\mu} = (-1)^{e_2+e_3+e_5} \eta^{-2e_2-e_4} \tau^{-2e_3-e_4} = u^2,$$

also

$$e_4 = 0, \quad e_2+e_3+e_5 \equiv 0 \pmod{2}, \quad u = (\pm)'\, \eta^{-e_2} \tau^{-e_3},$$
$$\mu = \pm m a^{e_1} \eta^{e_2} \tau^{e_3} (\sqrt{3})^{e_5}.$$

Hieraus ergibt sich weiter

$$\mu\beta = \pm m\, (-a^{-1})^{e_1}\, (-\eta)^{e_2}\, \tau^{-e_3}\, (\sqrt{3})^{e_5},$$

$$\frac{\mu\beta}{\mu} = (-1)^{e_1+e_2} a^{-2e_1} \tau^{-2e_3} = v^2,$$

also

$$e_1 + e_2 \equiv 0 \pmod{2}, \quad e_1 = e_2, \quad v = (\pm)''\, a^{-e_1} \tau^{-e_3},$$
$$\mu = \pm m a^{e_1} \eta^{e_1} \tau^{e_3} (\sqrt{3})^{e_5}$$

und mit Rücksicht auf das Obige auch

$$u = (\pm)' \eta^{-e_1} \tau^{-e_3},$$
$$e_1 + e_3 + e_5 \equiv 0 \pmod{2}.$$

Unter Benutzung von (1) erhält man weiter

$$u\alpha = (\pm)'(-\eta^{-1})^{-e_1}(-\tau^{-1})^{-e_3} = (\pm)'(-1)^{e_1+e_3}\eta^{e_1}\tau^{e_3}$$
$$= -u^{-1} = -(\pm)'\eta^{e_1}\tau^{e_3},$$

also

$$(-1)^{e_1+e_3} = -1, \quad e_1 + e_3 \equiv 1 \pmod{2};$$

also ist

$$e_5 = 1,$$
$$\mu = \pm m a^{e_1} \eta^{e_1} \tau^{e_3} \sqrt{3}$$

und entweder $e_1 = 0$, $e_3 = 1$ oder $e_1 = 1$, $e_3 = 0$. In ähnlicher Weise ergibt sich

$$v\beta = (\pm)''(-a^{-1})^{-e_1}\tau^{e_3} = (\pm)''(-1)^{e_1} a^{e_1}\tau^{e_3}$$
$$= -v^{-1} = -(\pm)'' a^{e_1}\tau^{e_3},$$

also

$$(-1)^{e_1} = -1, \quad e_1 = 1, \quad e_3 = 0,$$

(2) $$\mu = \pm m a \eta \sqrt{3}.$$

Mein erstes Beispiel (1886) war

$$\mu = (1+\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{2}\sqrt{3} = a\tau\sqrt{2}\sqrt{3}.$$

Diese Zahl hat nicht die Gestalt (2); das erklärt sich daraus, daß μ oben als durch kein Primzahlquadrat teilbar vorausgesetzt wurde. In der Tat unterscheidet sich μ von der unter (2) fallenden Zahl $a\eta\sqrt{3}$ nur durch den Faktor

$$\frac{\tau\sqrt{2}}{\eta} = \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}},$$

der das Quadrat der Zahl $1 - \dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ in H ist.

Ist umgekehrt μ von der Gestalt (2), wo m eine beliebige durch kein Primzahlquadrat teilbare und zu 6 teilerfremde natürliche Zahl ist, und ist $\omega^2 = \mu$, so erzeugt ω über dem Körper H einen Quaternionkörper. Das erkennt man folgendermaßen:

Man bezeichne mit α, β, γ drei Permutationen des Körpers $\Omega = H(\omega)$, welche die auf den biquadratischen Körper $R\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ bezüglichen Eigenschaften

$$
(3) \qquad \begin{cases} (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})\,\alpha = (\ \ \sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\sqrt{6}), \\ (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})\,\beta = (-\sqrt{2}, \ \ \sqrt{3}, -\sqrt{6}), \\ (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})\,\gamma = (-\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \ \ \sqrt{6}) \end{cases}
$$

besitzen [solcher Permutationen α, β, γ gibt es je eine oder je zwei, je nachdem der noch unbekannte Grad von Ω gleich 4 oder 8 ist, da zu jeder Permutation des biquadratischen Körpers $R\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ genau eine bzw. zwei Permutationen von Ω als Multipla gehören]; die identische Permutation von Ω sei 1. Nun ist

$$
\omega^2\alpha = \pm m\left(1+\sqrt{2}\right)\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left(-\sqrt{3}\right) = \omega^2\left(\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2,
$$

$$
\omega^2\beta = \pm m\left(1-\sqrt{2}\right)\frac{1+\sqrt{3}}{-\sqrt{2}}\quad\sqrt{3}\quad = \omega^2\left(1-\sqrt{2}\right)^2,
$$

$$
\omega^2\gamma = \pm m\left(1-\sqrt{2}\right)\frac{1-\sqrt{3}}{-\sqrt{2}}\left(-\sqrt{3}\right) = \omega^2\left(1-\sqrt{2}\right)^2\left(\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2,
$$

mithin

$$
(4) \qquad \begin{cases} \omega\alpha = \omega\,\dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,.\,e_1, \\ \omega\beta = \omega\left(1-\sqrt{2}\right).\,e_2, \\ \omega\gamma = \omega\left(1-\sqrt{2}\right)\dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,.\,e_3 \end{cases} \qquad (e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1).
$$

Hieraus folgt weiter

$$
(5) \qquad \begin{cases} \omega\alpha^2 = \omega\,\dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,e_1\cdot\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,e_1 = -\,\omega, \\ \omega\beta^2 = \omega\left(1-\sqrt{2}\right)e_2\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)e_2 = -\,\omega, \\ \omega\gamma^2 = \omega\left(1-\sqrt{2}\right)\dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,e_3\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)\dfrac{1+\sqrt{3}}{-\sqrt{2}}\,e_3 = -\,\omega, \end{cases}
$$

also

$$
(6) \qquad (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \omega)\,\alpha^2 = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \omega)\,\beta^2 = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \omega)\,\gamma^2 = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\omega).
$$

Man kann also setzen

(7) $$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \varepsilon.$$

Aus (5) oder (6) geht hervor, daß ω nicht in $R\,(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ enthalten ist, weil sonst zufolge $(\sqrt{2}, \sqrt{3})\,\alpha^2 = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$ auch $\omega\,\alpha^2$ gleich ω sein müßte; mithin ist $R\,(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \omega)$ vom Grade 8, und da derselbe durch fünf verschiedene Permutationen 1, α, β, γ, ε in sich selbst übergeht, so muß dasselbe auch für seine übrigen drei Permutationen gelten; mithin ist er ein Normalkörper. Aus (5) und (4) folgt weiter

$$\omega\,\alpha^3 = -\,\omega\,\alpha = -\,\omega\,\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,e_1,$$
$$\omega\,\beta^3 = -\,\omega\,\beta = -\,\omega\,(1-\sqrt{2})\,e_2,$$
$$\omega\,\gamma^3 = -\,\omega\,\gamma = -\,\omega\,(1-\sqrt{2})\,\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,e_3;$$

vergleicht man mit (4) und bedenkt, daß α^3, β^3, γ^3 auf den Körper $R\,(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ genau so wirken wie α, β, γ in (3), so dürfen wir offenbar $e_1 = e_2 = e_3 = -1$ annehmen, wodurch

$$\omega\,\alpha = -\,\omega\,\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\quad \omega\,\beta = -\,\omega\,(1-\sqrt{2}),\quad \omega\,\gamma = -\,\omega\,(1-\sqrt{2})\,\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$
$$\omega\,\alpha^3 = \omega\,\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\quad \omega\,\beta^3 = \omega\,(1-\sqrt{2}),\quad \omega\,\gamma^3 = \omega\,(1-\sqrt{2})\,\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

wird. Zufolge (7) ist ferner

$$\alpha^3 = \varepsilon\,\alpha = \alpha\,\varepsilon = \alpha_1,\quad \beta^3 = \varepsilon\,\beta = \beta\,\varepsilon = \beta_1,\quad \gamma^3 = \varepsilon\,\gamma = \gamma\,\varepsilon = \gamma_1,$$

$$(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \omega)\,\alpha_1 = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \omega)\,\varepsilon\,\alpha = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\omega)\,\alpha = (\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\omega\,\alpha),$$
$$(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \omega)\,\beta_1 = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \omega)\,\varepsilon\,\beta = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\omega)\,\beta = (-\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\omega\,\beta),$$
$$(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \omega)\,\gamma_1 = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \omega)\,\varepsilon\,\gamma = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\omega)\,\gamma = (-\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\omega\,\gamma),$$

und da

$$(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \omega)\,\varepsilon^2 = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\,\omega)\,\varepsilon = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \omega),$$

so ist

$$\varepsilon^2 = 1 = \alpha^4 = \beta^4 = \gamma^4 = \alpha_1^4 = \beta_1^4 = \gamma_1^4;$$
$$\alpha_1^2 = \beta_1^2 = \gamma_1^2 = \varepsilon;$$
$$\alpha_1^3 = \alpha,\ \beta_1^3 = \beta,\ \gamma_1^3 = \gamma.$$

Ferner ist

$$\omega\beta\gamma = [-\omega(1-\sqrt{2})]\gamma = \omega(1-\sqrt{2})\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot(1+\sqrt{2})$$

$$= -\omega\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \omega\alpha, (\sqrt{2},\sqrt{3})\beta\gamma = (-\sqrt{2},\sqrt{3})\gamma = (\sqrt{2},-\sqrt{3})$$

$$= (\sqrt{2},\sqrt{3})\alpha;$$

$$\omega\gamma\alpha = \left[-\omega(1-\sqrt{2})\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right]\alpha = \omega\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot(1-\sqrt{2})\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$= -\omega(1-\sqrt{2}) = \omega\beta, (\sqrt{2},\sqrt{3})\gamma\alpha = (-\sqrt{2},-\sqrt{3})\alpha$$

$$= (-\sqrt{2},\sqrt{3}) = (\sqrt{2},\sqrt{3})\beta;$$

$$\omega\alpha\beta = \left(-\omega\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)\beta = \omega(1-\sqrt{2})\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{-\sqrt{2}} = \omega\gamma,$$

$$(\sqrt{2},\sqrt{3})\alpha\beta = (\sqrt{2},-\sqrt{3})\beta = (-\sqrt{2},-\sqrt{3}) = (\sqrt{2},\sqrt{3})\gamma.$$

Daraus ergeben sich die drei ersten der sechs folgenden Gleichungen:

$$\beta\gamma = \alpha\,,\quad \gamma\alpha = \beta\,,\quad \alpha\beta = \gamma\,,$$
$$\gamma\beta = \alpha_1,\quad \alpha\gamma = \beta_1,\quad \beta\alpha = \gamma_1,$$

aus denen die übrigen und das Schema der Komposition folgen.

Notwendige und hinreichende Bedingung bei allgemeinem biquadratischem Unterkörper.

Über dem Körper $H = R(\sqrt{a},\sqrt{b})$, wo a und b relative Primzahlen, voneinander und von 1 verschieden und durch kein Primzahlquadrat teilbar sind, sei ein Quaternionkörper $\Omega = H(\omega)$ errichtet. Sind α, β, γ, ε Permutationen dieses Körpers mit den Eigenschaften

$$\varepsilon^2 = 1,$$
$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \varepsilon,$$
$$\beta\gamma = \alpha,\quad \gamma\alpha = \beta,\quad \alpha\beta = \gamma,$$

so liegen die Zahlen

$$\omega(\omega\alpha) = u,\quad \omega(\omega\beta) = v,\quad \omega(\omega\gamma) = w$$

in H *), und es ist

$$\omega\varepsilon = -\omega,$$
$$\omega(\omega\alpha) = u = -u\alpha,\quad (\omega\beta)(\omega\gamma) = u\beta = -u\gamma;$$
$$\omega(\omega\beta) = v = -v\beta,\quad (\omega\gamma)(\omega\alpha) = v\gamma = -v\alpha;$$
$$\omega(\omega\gamma) = w = -w\gamma,\quad (\omega\alpha)(\omega\beta) = w\alpha = -w\beta.$$

*) [Vgl. den Anfang.]

Bezeichnet man $\omega(\omega\alpha)(\omega\beta)(\omega\gamma)$ mit h, so ist

$$\omega(\omega\alpha)(\omega\beta)(\omega\gamma) = u(u\beta) = v(v\gamma) = w(w\alpha) = h,$$

$$\omega^2 = \frac{u\,v\,w}{h}.$$

Man kann annehmen, es sei

$$\begin{aligned}(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{a}\sqrt{b})\,\alpha &= (\ \ \sqrt{a}, -\sqrt{b}, -\sqrt{a}\sqrt{b}),\\ (\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{a}\sqrt{b})\,\beta &= (-\sqrt{a},\ \ \sqrt{b}, -\sqrt{a}\sqrt{b}),\\ (\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{a}\sqrt{b})\,\gamma &= (-\sqrt{a}, -\sqrt{b},\ \ \sqrt{a}\sqrt{b}).\end{aligned}$$

Man setze nun

$$u = q + x\sqrt{a} + y\sqrt{b} + z\sqrt{a}\sqrt{b}$$

mit rationalen q, x, y, z. Dann ist

$$u\alpha = q + x\sqrt{a} - y\sqrt{b} - z\sqrt{a}\sqrt{b},$$

und wegen $u = -u\alpha$ muß

$$u = (y + z\sqrt{a})\sqrt{b}, \quad u\beta = (y - z\sqrt{a})\sqrt{b}$$

sein. In entsprechender Weise ergibt sich

$$\begin{aligned} v &= (y_1 + z_1\sqrt{b})\sqrt{a}, & v\gamma &= -(y_1 - z_1\sqrt{b})\sqrt{a},\\ w &= y_2\sqrt{a} + z_2\sqrt{b}, & w\alpha &= y_2\sqrt{a} - z_2\sqrt{b}\end{aligned}$$

mit rationalen y_1, z_1, y_2, z_2, also

$$h = b(y^2 - az^2) = -a(y_1^2 - bz_1^2) = a\,y_2^2 - b\,z_2^2.$$

Man kann voraussetzen, daß y, z, y_1, z_1, y_2, z_2 ganze rationale Zahlen sind, da man sonst ω nur mit einer passenden natürlichen Zahl zu multiplizieren braucht. Wegen der über a und b getroffenen Voraussetzungen kann man also setzen

$$y = ar, \quad y_1 = bs, \quad y_2 = bt, \quad z_2 = ap$$

mit ganzen rationalen r, s, t, p. Es folgt

$$\frac{h}{ab} = ar^2 - z^2 = z_1^2 - bs^2 = bt^2 - ap^2\ ^{*)}.$$

*) [Die Bedingung ist auch hinreichend; vgl. die Erläuterung.]

Erläuterungen zur vorstehenden Abhandlung.

Die Arbeit findet sich im Nachlaß in nicht ganz druckfertiger Gestalt. In der wohl ziemlich gleichzeitigen Arbeit „Über Gruppen, deren sämtliche Teiler Normalteiler sind“ (XXVII) ist das Hauptergebnis vorweggenommen, da der dortige Ausdruck

$$\omega^2 = r(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{6}) \qquad (r \neq 0 \text{ beliebig rational})$$

sich nur durch einen in $R(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ quadratischen Faktor von der Normalform (2) unterscheidet. (Vgl. die Rechnung auf S. 379. Durch einen solchen Faktor unterscheidet sich auch das obige r von dem dortigen m.)

Das Ergebnis, daß jeder Quaternionkörper über $R(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ durch die Quadratwurzel eines Ausdrucks (2) erzeugt wird, scheint erst aus späterer Zeit zu stammen. Aber daß die Quadratwurzeln aus den Zahlen (2) Beispiele von Quaternionkörpern ergeben, findet sich schon auf einem von Dedekind mit dem Datum des 15. Februar 1886 versehenen Blatt bewiesen *) (vgl. XXVII, S. 91). Jene Tatsache ergibt sich als Sonderfall einer von Dedekind am vorhergehenden Tage gefundenen, zunächst als notwendig erkannten Bedingung, die sich auf die Unterkörper vierten Grades beliebiger Quaternionkörper bezieht und in einigen diophantischen Gleichungen besteht. Diese Bemerkungen tragen das Datum des 14. Februar 1886 und sind hier am Schluß unter Hinzufügung überleitender Worte wiedergegeben. Die diophantischen Gleichungen sind übrigens auch hinreichend; das ergibt sich unschwer, indem man in den Bezeichnungen von S. 383

$$\omega^2 = \frac{uvw}{h}$$

setzt und die Isomorphismen des durch ω erzeugten Oberkörpers untersucht.

Die in der Erläuterung zu XXVII erwähnte Arbeit von Mertens über denselben Gegenstand geht von der Gleichung und nicht vom Körper aus und beschränkt sich auf die Aufstellung einer notwendigen Bedingung.

W. Weber.

---

*) Die dortige Herleitung ist fast wörtlich, nur mit den erforderlichen Verallgemeinerungen, in diese Arbeit aufgenommen worden, da der betreffende Teil im späteren Manuskript nur angedeutet war.