XLI.

Gruppencharaktere von Zahlklassen in endlichen Körpern.

Ist $\mathfrak{o}$ das System aller ganzen Zahlen ω des endlichen Körpers Ω, und $\mathfrak{m}$ ein Ideal in $\mathfrak{o}$, so bestehen alle diejenigen Zahlen μ in $\mathfrak{o}$, welche relative Primzahlen zu $\mathfrak{m}$ sind, aus $\varphi(\mathfrak{m})$ Klassen $\mathfrak{m} + \mu$, welche eine Abelsche Gruppe bilden: multipliziert man jede Zahl einer solchen Klasse $\mathfrak{m} + \mu_1$ mit jeder Zahl einer solchen Klasse $\mathfrak{m} + \mu_2$, so gehören alle diese Produkte wieder einer einzigen solchen Klasse $\mathfrak{m} + \mu_1 \mu_2$ an (was man durch $\mathfrak{m} + \mu_1 \mu_2 = (\mathfrak{m} + \mu_1)(\mathfrak{m} + \mu_2)$ bezeichnen könnte). Zunächst einige Hülfssätze*).

Satz 1. Ist ν relative Primzahl zum Ideal $\mathfrak{n}$, so gibt es Zahlen μ, welche relative Primzahlen zum Ideal $\mathfrak{m}$ sind und zugleich die Kongruenz

$$\mu \equiv \nu \pmod{\mathfrak{n}} \tag{1}$$

erfüllen, d. h. in der Klasse $\mathfrak{n} + \nu$ enthalten sind; das System aller dieser Zahlen μ besteht aus $\varphi(\mathfrak{p})$ Klassen $\mathfrak{n}\mathfrak{p} + \mu$, wo $\mathfrak{p}$ das Produkt aller derjenigen in $\mathfrak{m}$ aufgehenden verschiedenen Primideale bedeutet, welche nicht in $\mathfrak{n}$ aufgehen (falls gar kein solches Primideal vorhanden ist, ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ zu setzen).

Beweis. Alle Zahlen π, die relative Primzahlen zu $\mathfrak{p}$ sind, bestehen aus $\varphi(\mathfrak{p})$ Klassen $\mathfrak{p} + \pi$. Soll eine Zahl μ, die der Kongruenz (1) genügt, relative Primzahl zu $\mathfrak{m}$ werden, so ist erforderlich, daß sie auch einer dieser Klassen $\mathfrak{p} + \pi$ angehört, also einer der $\varphi(\mathfrak{p})$ entsprechenden Kongruenzen

$$\mu \equiv \pi \pmod{\mathfrak{p}} \tag{2}$$

genügt; und dies ist auch hinreichend, weil μ zufolge (1) durch kein Primideal teilbar ist, welches sowohl in $\mathfrak{m}$ als in $\mathfrak{n}$ aufgeht. Da

*) Besser gleich von Anfang an: Sind $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ Ideale, ω eine Zahl in $\mathfrak{o}$, so soll mit $(\mathfrak{m}; \mathfrak{n} + \omega)$ das System aller derjenigen in der Klasse $\mathfrak{n} + \omega$ enthaltenen Zahlen bezeichnet werden, welche relative Primzahlen zu $\mathfrak{m}$ sind. — Bedingung der Existenz: $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} + \mathfrak{o}\omega = \mathfrak{o}$, d. h. ω relative Primzahl zu $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$.

ferner $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$ relative Primideale sind, so liefert die Kongruenz (1) in Verbindung mit je einer der $\varphi(\mathfrak{p})$ Kongruenzen (2) je eine Zahlklasse $\mathfrak{n}\mathfrak{p} + \mu$, und diese $\varphi(\mathfrak{p})$ Klassen sind verschieden voneinander; w. z. b. w.

Zusatz 1. Bedeutet $\mathfrak{m}'$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Ideale $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, so ist $\mathfrak{m}'$ auch teilbar durch $\mathfrak{n}\mathfrak{p}$, also auch das kleinste gemeinsame Vielfache von $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}\mathfrak{p}$; jede Klasse $\mathfrak{n}\mathfrak{p} + \mu$ besteht aus $(\mathfrak{n}\mathfrak{p}, \mathfrak{m}')$ Klassen $\mathfrak{m}' + \mu$, und folglich ist

$$(3) \qquad (\mathfrak{n}\mathfrak{p}, \mathfrak{m}')\,\varphi(\mathfrak{p}) = \frac{N(\mathfrak{m}')\,\varphi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{n}\mathfrak{p})} = \frac{N(\mathfrak{m}')}{N(\mathfrak{n})} \cdot \frac{\varphi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})}$$

die Anzahl der sämtlichen verschiedenen Klassen $\mathfrak{m}' + \mu$, aus welchen das System der Zahlen μ besteht.

Zusatz 2. Ist $\mathfrak{n}$ ein Teiler von $\mathfrak{m}$, also $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}$, und bedeutet $\mathfrak{q}$ das Produkt aller verschiedenen in $\mathfrak{n}$ aufgehenden, also $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}$ das Produkt aller verschiedenen in $\mathfrak{m}$ aufgehenden Primideale, so ist

$$\varphi(\mathfrak{m}) = N(\mathfrak{m})\frac{\varphi(\mathfrak{p}\,\mathfrak{q})}{N(\mathfrak{p}\,\mathfrak{q})} = N(\mathfrak{m})\frac{\varphi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})} \cdot \frac{\varphi(\mathfrak{q})}{N(\mathfrak{q})},$$

$$\varphi(\mathfrak{n}) = N(\mathfrak{n})\frac{\varphi(\mathfrak{q})}{N(\mathfrak{q})},$$

und folglich ist

$$(4) \qquad \frac{N(\mathfrak{m})}{N(\mathfrak{n})} \cdot \frac{\varphi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})} = \frac{\varphi(\mathfrak{m})}{\varphi(\mathfrak{n})}$$

die Anzahl aller Klassen $\mathfrak{m} + \mu$, aus denen das System der Zahlen μ besteht. [Läßt man ν in (1) die $\varphi(\mathfrak{n})$ verschiedenen Zahlklassen $\mathfrak{n} + \nu$ durchlaufen, welche aus relativen Primzahlen zu $\mathfrak{n}$ bestehen, so erhält man die sämtlichen $\varphi(\mathfrak{m}) = \frac{\varphi(\mathfrak{m})}{\varphi(\mathfrak{n})}\varphi(\mathfrak{n})$ Zahlklassen $\mathfrak{m} + \mu$, welche aus relativen Primzahlen zu $\mathfrak{m}$ bestehen.]

Definition 1. Ist das Ideal $\mathfrak{n}$ ein Divisor des Ideals $\mathfrak{m}$, so soll mit $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{n}}$ das System aller derjenigen Zahlen ν bezeichnet werden, welche der Kongruenz

$$(5) \qquad \nu \equiv 1 \pmod{\mathfrak{n}}$$

genügen und zugleich relative Primzahlen zu $\mathfrak{m}$ sind; dasselbe besteht aus $\frac{\varphi(\mathfrak{m})}{\varphi(\mathfrak{n})}$ Klassen $\mathfrak{m} + \nu$, die mit

$$(6) \qquad \mathfrak{m} + \nu_1, \mathfrak{m} + \nu_2 \ldots \mathfrak{m} + \nu_n$$

bezeichnet werden mögen, wenn zur Abkürzung

$$\frac{\varphi(\mathfrak{m})}{\varphi(\mathfrak{n})} = n \tag{7}$$

gesetzt wird. — Das System $\binom{\mathfrak{m}}{0}$ besteht aus allen relativen Primzahlen μ zu $\mathfrak{m}$, nämlich aus $\varphi(\mathfrak{m})$ Klassen $\mathfrak{m} + \mu$; das System $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}}$ besteht aus der einzigen Klasse $\mathfrak{m} + 1$.

Satz 2. Die n Klassen $\mathfrak{m} + \nu$ des Systems $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{n}}$ bilden eine Abelsche Gruppe; sind μ, μ' zwei nach $\mathfrak{n}$ kongruente relative Primzahlen zu $\mathfrak{m}$, d. h. also Zahlen in $\binom{\mathfrak{m}}{0}$, so ist

$$\mu' \equiv \mu\nu \pmod{\mathfrak{m}} \tag{8}$$

und umgekehrt.

Beweis. Denn sind ν, ν' Zahlen in $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{n}}$, also $\nu \equiv \nu' \equiv 1 \pmod{\mathfrak{n}}$, so ist auch $\nu\nu' \equiv 1 \pmod{\mathfrak{n}}$, und da ν, ν' relative Primzahlen zu $\mathfrak{m}$, d. h. in $\binom{\mathfrak{m}}{0}$ enthalten sind, so ist auch $\nu\nu'$ in $\binom{\mathfrak{m}}{0}$, also auch in $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{n}}$ enthalten. Sind ferner μ, μ' Zahlen in $\binom{\mathfrak{m}}{0}$, so gibt es stets eine und nur eine Klasse $\mathfrak{m} + \nu$ in $\binom{\mathfrak{m}}{0}$, welche der Kongruenz (8) und folglich auch der Kongruenz $\mu' \equiv \mu\nu \pmod{\mathfrak{n}}$ genügt; ist nun $\mu' \equiv \mu \pmod{\mathfrak{n}}$, so folgt, weil μ', μ auch in $\binom{\mathfrak{n}}{0}$ enthalten sind, $1 \equiv \nu \pmod{\mathfrak{n}}$, d. h. ν ist in $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{n}}$ enthalten. Umgekehrt: genügen drei Zahlen ν, μ, μ' in $\binom{\mathfrak{m}}{0}$ der Kongruenz (8), und ist ν in $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{n}}$ enthalten, genügt also der Kongruenz (5), so folgt $\mu' \equiv \mu \pmod{\mathfrak{n}}$. W. z. b. w.

Satz 3. Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ Faktoren des Ideals $\mathfrak{m}$, so ist die Gruppe

$\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}$ der größte gem. Divisor

$\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$ das kleinste gem. Multiplum

} der Gruppen $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}}$, $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{b}}$.

Beweis. Das Erstere leicht; denn wenn $\mathfrak{m} + \mu$ eine beiden Gruppen $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}}$, $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{b}}$ gemeinsame Klasse ist, so ist $\mu \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}$ und $\mu \equiv 1 \pmod{\mathfrak{b}}$, also auch $\mu \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a} - \mathfrak{b}}$, d. h. die Klasse $\mathfrak{m} + \mu$ ist in $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a} - \mathfrak{b}}$ enthalten; und umgekehrt, wenn letzteres der Fall, so ist $\mu \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a} - \mathfrak{b}}$, also auch $\mu \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}$ und $\mu \equiv 1 \pmod{\mathfrak{b}}$, d. h. die Klasse $\mathfrak{m} + \mu$ ist beiden Gruppen $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}}$, $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{b}}$ gemeinsam, w. z. b. w. — Das Letztere liegt etwas tiefer. Ist M das kl. gem. Multiplum von $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}}$, $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{b}}$, so sind alle Klassen $\mathfrak{m} + \alpha$ von $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}}$ und alle Klassen $\mathfrak{m} + \beta$ von $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{b}}$, also auch alle Klassen $\mathfrak{m} + \alpha\beta$ in M enthalten, und das System dieser Klassen $\mathfrak{m} + \alpha\beta$, welches eine Gruppe bildet $(\alpha_1\beta_1 \cdot \alpha_2\beta_2 \equiv (\alpha_1\alpha_2)(\beta_1\beta_2))$, ist identisch mit M. Da nun $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}$ und $\beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{b}}$, so ist auch $\alpha \equiv \beta \equiv \alpha\beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}$, und folglich sind alle Klassen $\mathfrak{m} + \alpha\beta$ von M in $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}$ enthalten. Umgekehrt, wenn $\mathfrak{m} + \mu$ eine Klasse in $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}$, also $\mu \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}$ und relative Primzahl zu $\mathfrak{m}$ ist, so kann man zunächst eine Zahl α_0 bestimmen, welche gleichzeitig den Kongruenzen $\alpha_0 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}$, $\alpha_0 \equiv \mu \pmod{\mathfrak{b}}$ genügt [D. § 171, III, alle diese Zahlen α_0 bilden eine Klasse $(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) + \alpha_0$], und zwar wird α_0 relative Primzahl zu $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, also auch zu $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$; nach Satz 1 gibt es daher auch Zahlen α, welche relative Primzahlen zu $\mathfrak{m}$ sind und der Kongruenz $\alpha \equiv \alpha_0 \pmod{\mathfrak{a} - \mathfrak{b}}$, also auch den Kongruenzen $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}$, $\alpha \equiv \mu \pmod{\mathfrak{b}}$ genügen (nach Zusatz 2 gibt es $\frac{\varphi(\mathfrak{m})}{\varphi(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})}$ verschiedene solche Klassen $\mathfrak{m} + \alpha$). Da α relative Primzahl zu $\mathfrak{m}$ (α enthalten in $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}}$), so kann man β so bestimmen, daß $\alpha\beta \equiv \mu \pmod{\mathfrak{m}}$ wird; weil μ relative Primzahl zu $\mathfrak{m}$, so gilt dasselbe auch von β; da ferner $\alpha \equiv \mu \pmod{\mathfrak{b}}$, so ist $\mu\beta \equiv \mu \pmod{\mathfrak{b}}$, und da μ relative Primzahl zu $\mathfrak{m}$, also auch zu $\mathfrak{b}$, so folgt $\beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{b}}$, d. h. β ist enthalten in $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{b}}$. Also ist jede in $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}$ enthaltene Klasse

$\mathfrak{m} + \mu$ von der Form $\mathfrak{m} + \alpha\beta$, wo $\mathfrak{m} + \alpha$ in $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{m} + \beta$ in $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{b}}$ enthalten, d. h. jede Klasse $\mathfrak{m} + \mu$ von $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$ ist in M enthalten. Also $M = \binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$, w. z. b. w.

Bemerkung. Der zweite Teil des zweiten Satzes kann auch so bewiesen werden. Nach einem allgemeinen Satze über Abelsche Gruppen A, B, deren gr. gem. Div. D, kl. gem. Multiplum M, ist $ab = \partial m$, wo a, b, ∂, m die Grade (Anzahlen der Elemente) von A, B, D, M bedeuten (D. § 149, S. 396 — 397). Setzt man $A = \binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}}$, $B = \binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{b}}$, so ist nach dem ersten Teile

$$D = \binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}, \text{ also } a = \frac{\varphi(\mathfrak{m})}{\varphi(\mathfrak{a})}, \quad b = \frac{\varphi(\mathfrak{m})}{\varphi(\mathfrak{b})}, \quad \partial = \frac{\varphi(\mathfrak{m})}{\varphi(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})},$$

also

$$m = \frac{\varphi(\mathfrak{m})\,\varphi(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})}{\varphi(\mathfrak{a})\,\varphi(\mathfrak{b})} = \frac{\varphi(\mathfrak{m})}{\varphi(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})}$$

[weil allgemein $\varphi(\mathfrak{a})\,\varphi(\mathfrak{b}) = \varphi(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})\,\varphi(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$ ist, leicht zu zeigen*)]. Da nun im ersten Teile des Beweises des zweiten Satzes schon gezeigt ist, daß M in $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$ enthalten, so muß, weil M denselben Grad $m = \frac{\varphi(\mathfrak{m})}{\varphi(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})}$ besitzt wie $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$, notwendig $M = \binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$ sein, w. z. b. w.

Definition 2. Ist die Klassengruppe H ein Divisor von $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{o}}$, so betrachte man alle diejenigen Faktoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ... von $\mathfrak{m}$, deren zugehörige Klassengruppen $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}}$, $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{b}}$, $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{c}}$ ... Divisoren von H sind

*) $\mathfrak{p}$ das Produkt aller verschiedenen Primideale, die in $\mathfrak{a}$, nicht in $\mathfrak{b}$,
$\mathfrak{q}$ „ „ „ „ „ „ nicht in $\mathfrak{a}$, aber in $\mathfrak{b}$,
$\mathfrak{r}$ „ „ „ „ „ „ in $\mathfrak{a}$ und in $\mathfrak{b}$

aufgehen; so ist $\varphi(\mathfrak{a}) = N(\mathfrak{a})\frac{\varphi(\mathfrak{p}\mathfrak{r})}{N(\mathfrak{p}\mathfrak{r})} = N(\mathfrak{a})\frac{\varphi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})}\cdot\frac{\varphi(\mathfrak{r})}{N(\mathfrak{r})}$,

$$\varphi(\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{b})\frac{\varphi(\mathfrak{q}\mathfrak{r})}{N(\mathfrak{q}\mathfrak{r})} = N(\mathfrak{b})\frac{\varphi(\mathfrak{q})}{N(\mathfrak{q})}\cdot\frac{\varphi(\mathfrak{r})}{N(\mathfrak{r})},$$

$$\varphi(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})\frac{\varphi(\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r})}{N(\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r})} = N(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})\frac{\varphi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})}\cdot\frac{\varphi(\mathfrak{q})}{N(\mathfrak{q})}\cdot\frac{\varphi(\mathfrak{r})}{N(\mathfrak{r})},$$

$$\varphi(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\frac{\varphi(\mathfrak{r})}{N(\mathfrak{r})},$$

und da $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = (\mathfrak{a}-\mathfrak{b})(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$, also auch $N(\mathfrak{a})\,N(\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})\,N(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$, so folgt auch $\varphi(\mathfrak{a})\,\varphi(\mathfrak{b}) = \varphi(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})\,\varphi(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$, w. z. b. w.

(jedenfalls ist $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} + 1$ in der Gruppe H enthalten). Nach dem eben bewiesenen Satze befindet sich unter diesen Idealen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \ldots$ auch deren größter gemeinsamer Divisor $\mathfrak{n} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} \ldots$, und offenbar sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \ldots$ die sämtlichen Ideale, welche Multipla von $\mathfrak{n}$ und zugleich Divisoren von $\mathfrak{m}$ sind. Dieses Ideal $\mathfrak{n}$ soll der Exponent der Gruppe H heißen. Die charakteristische Eigenschaft desselben besteht hierin:

1. Ist ν relative Primzahl zu $\mathfrak{m}$ und $\equiv 1 \pmod{\mathfrak{n}}$, so ist die Klasse $\mathfrak{m} + \nu$ in H enthalten (d. h. $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{n}}$ Divisor von H).

2. Ist $\mathfrak{n}'$ Faktor von $\mathfrak{m}$, aber nicht teilbar durch $\mathfrak{n}$, so gibt es eine Zahl ν', welche der Kongruenz $\nu' \equiv 1 \pmod{\mathfrak{n}'}$ genügt und relative Primzahl zu $\mathfrak{m}$ ist und der Art, daß die Klasse $\mathfrak{m} + \nu'$ nicht in H enthalten ist (d. h. $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{n}'}$ nicht Divisor von H).

Oder: $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{n}'}$ ist Divisor von H oder nicht, je nachdem $\mathfrak{n}'$ teilbar ist durch $\mathfrak{n}$ oder nicht.

Definition 3. Eine Funktion ψ, welche für jede in $\mathfrak{o}$ enthaltene Zahl ω einen bestimmten endlichen Wert $\psi(\omega)$ besitzt, soll eine Klassenfunktion für das Ideal $\mathfrak{m}$ oder auch periodisch nach $\mathfrak{m}$ heißen, wenn je zwei nach $\mathfrak{m}$ kongruente Zahlen α, β einen und denselben Wert $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$ erzeugen, d. h. wenn für jede in $\mathfrak{o}$ enthaltene Zahl ω und jede in $\mathfrak{m}$ enthaltene Zahl μ stets

$$\psi(\omega) = \psi(\omega + \mu) \qquad [\text{Bezeichnung: } \psi(\mathfrak{m} + \omega) = \psi(\omega)]$$

ist; das Ideal $\mathfrak{m}$ heißt eine Periode von ψ.

Offenbar ist jedes Vielfache einer Periode von ψ ebenfalls eine Periode von ψ.

Bemerkung. Man könnte bei dem Begriffe einer Periode $\mathfrak{m}$ von ψ größerer Allgemeinheit wegen davon absehen, daß $\mathfrak{m}$ ein Ideal in $\mathfrak{o}$ sein soll, und lediglich annehmen, daß $\mathfrak{m}$ irgend ein Modul sein soll, mit der einzigen Beschränkung, daß $(\mathfrak{o}, \mathfrak{m}) > 0$, also ψ nur eine endliche Anzahl verschiedener Werte haben soll. Dies würde aber keine wirkliche Erweiterung des obigen Begriffs geben; denn zufolge der letzten Bemerkung würde auch der Modul $\mathfrak{o} - \mathfrak{m}$ als Multiplum von $\mathfrak{m}$, und ebenso das kleinste durch den Modul $\mathfrak{m}$ oder $\mathfrak{o} - \mathfrak{m}$

teilbare Ideal, welches immer $= \frac{\mathfrak{o} - \mathfrak{m}}{\mathfrak{o}}$ ist, ebenfalls eine Periode von ψ sein. Dagegen würde eine Erweiterung des Begriffs dadurch eintreten (?) *), daß die Funktion ψ nicht auf alle Zahlen von $\mathfrak{o}$, sondern nur auf alle Zahlen irgend einer Ordnung wirkt. —

Satz 4. Sind die Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ Perioden der Funktion ψ, so ist auch ihr größter gemeinsamer Teiler $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ eine Periode von ψ.

Beweis. Denn wenn ω, α, β beliebige Zahlen in $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ bedeuten, so ist nach der Annahme $\psi(\omega) = \psi(\omega + \alpha)$ und $\psi(\omega) = \psi(\omega + \beta)$; ersetzt man in der letzten Gleichung ω durch $\omega + \alpha$, so folgt $\psi(\omega) = \psi(\omega + \alpha) = \psi(\omega + \alpha + \beta)$, also $\psi(\omega) = \psi(\omega + \delta)$, wo $\delta = \alpha + \beta$ jede Zahl des Ideals $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ bedeutet, w. z. b. w. —

Hieraus geht hervor, daß der gr. gem. Teiler $\mathfrak{m}$ aller Perioden von ψ ebenfalls eine Periode von ψ ist, und daß folglich alle Perioden von ψ die sämtlichen Vielfachen von $\mathfrak{m}$ sind, welches Ideal die kleinste Periode von ψ heißen soll, weil sie von allen Perioden die kleinste Norm besitzt. (Besser Hauptperiode!)

Definition 4. Eine (nach $\mathfrak{m}$ periodische) Funktion ψ aller in $\mathfrak{o}$ enthaltenen Zahlen soll ein Charakter heißen, wenn für je zwei solche Zahlen ω, ω' das Gesetz

$$\psi(\omega\,\omega') = \psi(\omega)\,\psi(\omega')$$

gilt, und ψ nicht für alle ω verschwindet. —

Satz 5. Ist der Charakter ψ periodisch, und ist $\mathfrak{m}$ seine kleinste Periode, so ist $\psi(\omega)$ dann und nur dann von Null verschieden, und zwar

$$\psi(\omega)^{\varphi(\mathfrak{m})} = 1,$$

wenn ω relative Primzahl zu $\mathfrak{m}$ ist.

Beweis. Da $\omega \cdot 1 = \omega$, also $\psi(\omega)\,\psi(1) = \psi(\omega)$ ist und $\psi(\omega)$ nicht für alle ω verschwindet, so ist

$$\psi(1) = 1.$$

Ist ω relative Primzahl zu $\mathfrak{m}$, also $\omega^{\varphi(\mathfrak{m})} \equiv 1 \,(\mathrm{mod.}\,\mathfrak{m})$, so folgt

$$\psi\{\omega^{\varphi(\mathfrak{m})}\} = \psi(\omega)^{\varphi(\mathfrak{m})} = \psi(1) = 1.$$

Ist aber ω nicht relative Primzahl zu $\mathfrak{m}$, so ist das kleinste gemeinsame Vielfache $\mathfrak{o}\,\omega - \mathfrak{m}$ von $\mathfrak{o}\,\omega$ und $\mathfrak{m}$ von der Form $\omega\,\mathfrak{m}'$, wo das Ideal $\mathfrak{m}'$ ein echter Teiler von $\mathfrak{m}$ ($\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'(\mathfrak{o}\,\omega + \mathfrak{m})$) und folglich keine Periode von ψ ist; es gibt daher zwei nach $\mathfrak{m}'$ kon-

*) [Das Fragezeichen ist später zugefügt.]

gruente Zahlen α, β, welche verschiedene Werte $\psi(\alpha)$, $\psi(\beta)$ erzeugen; da nun $\omega(\alpha - \beta)$ teilbar durch $\omega\mathfrak{m}'$, also auch durch $\mathfrak{m}$ ist, so folgt

$$\omega\alpha \equiv \omega\beta \pmod{\mathfrak{m}}; \quad \psi(\omega\alpha) = \psi(\omega\beta), \quad \psi(\omega)\psi(\alpha) = \psi(\omega)\psi(\beta),$$

mithin

$$\psi(\omega) = 0,$$

w. z. b. w.

Definition 5. Die Anzahl der verschiedenen Charaktere ψ von kleinster Periode $\mathfrak{m}$ soll mit $\varphi'(\mathfrak{m})$ bezeichnet werden. [Besser $\varphi_1(\mathfrak{m})$!]

Zu ihrer Bestimmung dient folgende Betrachtung. Ist ψ ein solcher Charakter, so kann er zugleich aufgefaßt werden als einer der $\varphi(\mathfrak{m})$ Charaktere der Abelschen Gruppe, welche von den $\varphi(\mathfrak{m})$ Klassen $\mathfrak{m} + \varrho$ gebildet wird, die den sämtlichen nach $\mathfrak{m}$ inkongruenten relativen Primzahlen ϱ zu $\mathfrak{m}$ entsprechen; in dem Sinne $\psi(\mathfrak{m} + \varrho) = \psi(\mu + \varrho) = \psi(\varrho)$, $\psi(\mathfrak{m} + \varrho)\psi(\mathfrak{m} + \varrho') = \psi(\mathfrak{m} + \varrho\varrho')$. Umgekehrt, ist ψ ein Charakter dieser Abelschen Gruppe von Klassen $\mathfrak{m} + \varrho$, und setzt man $\psi(\omega) = \psi(\mathfrak{m} + \omega)$ oder $= 0$, je nachdem ω relative Primzahl zu $\mathfrak{m}$ ist oder nicht, so ist $\psi(\omega)$ offenbar eine Funktion von der Periode $\mathfrak{m}$, weil immer $\psi(\omega) = \psi(\omega + \mu)$, und zwar ein Charakter, weil offenbar $\psi(\omega\omega') = \psi(\omega)\psi(\omega')$. Die kleinste Periode $\mathfrak{n}$ dieses Charakters ψ ist notwendig ein Divisor von $\mathfrak{m}$; da nun ein Charakter $\psi(\omega)$ von der kleinsten Periode $\mathfrak{n}$ stets und nur dann verschwindet (nach Satz 5), wenn ω relative Primzahl zu $\mathfrak{n}$ ist, und da andererseits $\psi(\omega)$ nach Definition stets und nur dann verschwindet, wenn ω relative Primzahl zu $\mathfrak{m}$ ist, so deckt sich das System $\binom{\mathfrak{n}}{0}$ aller relativen Primzahlen zu $\mathfrak{n}$ mit dem System $\binom{\mathfrak{m}}{0}$ aller relativen Primzahlen zu $\mathfrak{m}$; setzt man daher $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}\mathfrak{m}'$, wo $\mathfrak{p}$ das Produkt aller verschiedenen in $\mathfrak{m}$ aufgehenden Primideale bedeutet (oder $\mathfrak{o}$, falls $\mathfrak{m} = \mathfrak{o}$ ist), so muß $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}\mathfrak{n}'$ sein, wo $\mathfrak{n}'$ ein Divisor von $\mathfrak{m}'$. Umgekehrt: ist ψ ein Charakter von kleinster Periode $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}\mathfrak{n}'$, wo $\mathfrak{n}'$ irgend ein Divisor von $\mathfrak{m}'$, so ist $\psi(\omega)$ auch ein Charakter von der Periode $\mathfrak{m}$, welcher stets und nur dann von Null verschieden ist, wenn ω relative Primzahl zu $\mathfrak{m}$ ist, und ihm entspricht ein vollständig bestimmter Abelscher Klassencharakter $\psi(\mathfrak{m} + \varrho)$. Mithin verteilen sich die sämtlichen $\varphi(\mathfrak{m})$ Charaktere $\psi(\mathfrak{m} + \varrho)$ in ebenso viele Systeme, als es Divisoren $\mathfrak{n}'$ von $\mathfrak{m}'$ gibt, und da dasjenige System, welches zu $\mathfrak{n}'$ gehört, aus $\varphi'(\mathfrak{p}\mathfrak{n}')$

Individuen besteht, so ergibt sich, daß die über alle $\mathfrak{n}'$ ausgedehnte Summe

$$\sum \varphi'(\mathfrak{p}\mathfrak{n}') = \varphi(\mathfrak{m}) = N(\mathfrak{m})\frac{\varphi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})} = N(\mathfrak{m}')\varphi(\mathfrak{p}),$$

also

$$\sum \frac{\varphi'(\mathfrak{p}\mathfrak{n}')}{\varphi(\mathfrak{p})} = N(\mathfrak{m}')$$

ist. Da dieser Satz für jedes Ideal $\mathfrak{m}'$ gilt, welches nur durch solche Primideale teilbar ist, die in $\mathfrak{p}$ aufgehen, so folgt, wenn man $\mathfrak{m}'$ durch jeden Divisor von $\mathfrak{m}'$ ersetzt, nach bekannten Sätzen

$$\varphi'(\mathfrak{m}) = \varphi(\mathfrak{p})\varphi(\mathfrak{m}') = \varphi(\mathfrak{p})\varphi\left(\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{p}}\right). \quad \text{Satz 6.}$$

Satz 7. Sind $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ relative Primideale, so ist

$$\varphi'(\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2) = \varphi'(\mathfrak{m}_1)\varphi'(\mathfrak{m}_2).$$

Beweis. Denn bedeuten $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ die Produkte aller verschiedenen, bzw. in $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ aufgehenden Primideale, so ist $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ das Produkt aller verschiedenen in $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$ aufgehenden Primideale, also

$$\varphi'(\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2) = \varphi(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2)\varphi\left(\frac{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2}{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}\right) = \varphi(\mathfrak{p}_1)\varphi\left(\frac{\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{p}_1}\right)\cdot\varphi(\mathfrak{p}_2)\varphi\left(\frac{\mathfrak{m}_2}{\mathfrak{p}_2}\right) = \varphi'(\mathfrak{m}_1)\varphi'(\mathfrak{m}_2),$$

w. z. b. w.

Definition 6. Es bedeute $\Phi'(\mathfrak{m})$ die Anzahl aller verschiedenen Charaktere von der Periode $\mathfrak{m}$, also

$$\Phi'(\mathfrak{m}) = \sum \varphi'(\mathfrak{n}),$$

wo $\mathfrak{n}$ alle Faktoren von $\mathfrak{m}$ durchläuft (weil jeder Charakter von der Periode $\mathfrak{m}$ einen der Faktoren $\mathfrak{n}$ zur kleinsten Periode hat, und umgekehrt).

Satz 8. Sind $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ relative Primideale, so ist

$$\Phi'(\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2) = \Phi'(\mathfrak{m}_1)\Phi'(\mathfrak{m}_2).$$

Beweis. Denn jeder Divisor von $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$ läßt sich stets und nur auf eine Weise in die Form $\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2$ setzen, wo $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$ Faktoren von $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, und umgekehrt, also

$$\begin{aligned}\Phi'(\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2) &= \sum \varphi'(\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2) = \sum \varphi'(\mathfrak{n}_1)\varphi'(\mathfrak{n}_2)\\ &= \sum \varphi'(\mathfrak{n}_1)\sum \varphi'(\mathfrak{n}_2) = \Phi'(\mathfrak{m}_1)\Phi'(\mathfrak{m}_2),\end{aligned}$$

w. z. b. w.

Satz 9. Ist $\mathfrak{m}$ teilbar durch das Primideal $\mathfrak{p}$ und kein anderes, also $= \mathfrak{p}^n$, wo $n \geqq 1$, so ist

$$\Phi'(\mathfrak{m}) = 1 + \varphi(\mathfrak{p}^n) = 1 + \varphi(\mathfrak{m}).$$

Beweis. Denn es ist (nach Satz 6)

$$\begin{aligned}\Phi'(\mathfrak{m}) &= \varphi'(\mathfrak{o}) + \varphi'(\mathfrak{p}) + \varphi'(\mathfrak{p}^2) + \cdots + \varphi'(\mathfrak{p}^n)\\ &= 1 + \varphi(\mathfrak{p}) + \varphi(\mathfrak{p})\varphi(\mathfrak{p}) + \varphi(\mathfrak{p})\varphi(\mathfrak{p}^2) + \cdots + \varphi(\mathfrak{p})\varphi(\mathfrak{p}^{n-1})\\ &= 1 + \varphi(\mathfrak{p})\{\varphi(\mathfrak{o}) + \varphi(\mathfrak{p}) + \cdots + \varphi(\mathfrak{p}^{n-1})\} = 1 + \varphi(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p}^{n-1})\\ &= 1 + \varphi(\mathfrak{p}^n).\end{aligned}$$

Satz 10. Ist $\mathfrak{m} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\ldots$, wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}\ldots$ (wirkliche) Potenzen von lauter verschiedenen Primidealen (nicht $= \mathfrak{o}$), so ist

$$\Phi'(\mathfrak{m}) = (1 + \varphi(\mathfrak{a}))(1 + \varphi(\mathfrak{b}))(1 + \varphi(\mathfrak{c}))\ldots$$

Beweis unmittelbar aus (8) und (9).

Gehen wir näher ein auf die Verteilung der $\varphi(\mathfrak{m})$ Charaktere ψ der aus den Klassen $\mathfrak{m} + \varrho$ bestehenden Abelschen Gruppe auf die Faktoren $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}\mathfrak{n}'$ von $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}\mathfrak{m}'$, wo $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}'$ die obige Bedeutung haben. Es sei ψ ein solcher Charakter, und (ψ) die Gruppe aller derjenigen Klassen $\mathfrak{m} + \varrho$, welche der Bedingung

$$\psi(\mathfrak{m} + \varrho) = \psi(\varrho) = 1$$

genügen (aus $\psi(\varrho) = 1$, $\psi(\varrho') = 1$ folgt auch $\psi(\varrho\,\varrho') = 1$). Sind nun $\mathfrak{m} + \alpha$, $\mathfrak{m} + \beta$ irgend zwei Klassen der Gruppe $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{o}}$, welche denselben Charakter $\psi(\mathfrak{m} + \alpha) = \psi(\mathfrak{m} + \beta)$ besitzen, so kann man stets eine und nur eine Klasse $\mathfrak{m} + \varrho$ so bestimmen, daß $\alpha\varrho \equiv \beta \pmod{\mathfrak{m}}$, also $(\mathfrak{m} + \alpha)(\mathfrak{m} + \varrho) = \mathfrak{m} + \beta$, also $\psi(\mathfrak{m} + \alpha)\psi(\mathfrak{m} + \varrho) = \psi(\mathfrak{m} + \beta) = \psi(\mathfrak{m} + \alpha)$, also $\psi(\mathfrak{m} + \varrho) = 1$ wird; mithin ist $\beta \equiv \alpha\varrho$, wo $\mathfrak{m} + \varrho$ der Gruppe (ψ) angehört; und umgekehrt, durchläuft $\mathfrak{m} + \varrho$ alle Klassen der Gruppe (ψ), während α eine feste Klasse, so ist $\psi(\mathfrak{m} + \alpha\varrho) = \psi(\mathfrak{m} + \alpha)$. Die Gruppe $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{o}}$ besteht aus einer Anzahl von Komplexen von der Form $(\psi)(\mathfrak{m} + \alpha)$; alle und nur die Klassen, welche einem und demselben solchen Komplex angehören, erzeugen einen und denselben Wert des Charakters ψ; die Anzahl der verschiedenen Komplexe $(\psi)(\mathfrak{m} + \alpha)$, aus denen $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{o}}$ besteht, ist auch die Anzahl der verschiedenen Werte des Charakters ψ. (Dies ist eine allgemeine Eigenschaft der Charaktere Abelscher Gruppen.) (ψ) heiße die Gruppe des Charakters ψ.

Nun sei $\mathfrak{a}$ der Exponent der Gruppe (ψ) (Definition 2), so soll $\mathfrak{a}$ auch der Exponent des Charakters ψ heißen. Wir betrachten

das System $\binom{a}{0}$ aller relativen Primzahlen σ zu a, welches aus $\varphi(a)$ Klassen $a + \sigma$ besteht. Das System aller der Zahlen, welche eine bestimmte solche Klasse $a + \sigma$ mit dem System $\binom{m}{0}$ gemein hat, besteht [nach (4) in Zusatz 2] aus $\frac{\varphi(m)}{\varphi(a)}$ Klassen $m + \mu$. Ein solches System, welches der Klasse $a + 1$ entspricht, ist die Gruppe $\binom{m}{a}$, welche ein Divisor der Gruppe (ψ) ist. Und wenn $m + \mu$ eine der $\frac{\varphi(m)}{\varphi(a)}$ Klassen von $\binom{m}{0}$ ist, welche in $a + \sigma$ enthalten sind, so ist der Komplex $\binom{m}{a}(m + \mu)$ das System aller dieser Klassen, welche folglich auch in dem Komplex $(\psi)(m + \mu)$ enthalten sind; mithin hat der Charakter ψ für alle diese, der Klasse $a + \sigma$ entsprechenden Klassen $m + \mu$ einen und denselben Wert. Definiert man nun eine Klassenfunktion $\psi'(a + \sigma)$ so, daß $\psi'(a + \sigma) = \psi(m + \mu)$ wird, so ist ψ' für jede Klasse $a + \sigma$ eindeutig bestimmt, und zwar ist ψ' ein Charakter der Abelschen Gruppe $\binom{a}{0}$, welche aus diesen $\varphi(a)$ Klassen $a + \sigma$ besteht. Denn wenn $a + \sigma_1$, $a + \sigma_2$ irgend zwei Klassen in $\binom{a}{0}$ bedeuten, und wenn $m + \mu_1$, $m + \mu_2$ irgend zwei bzw. in ihnen enthaltene Klassen von $\binom{m}{0}$ bedeuten, so ist das Produkt der letzteren $(m + \mu_1)(m + \mu_2) = m + \mu_1 \mu_2$ in dem Produkte $(a + \sigma_1)(a + \sigma_2) = a + \sigma_1 \sigma_2$ enthalten; da nun $\psi'(a + \sigma_1) = \psi(m + \mu_1)$, und $\psi'(a + \sigma_2) = \psi(m + \mu_2)$ ist, so folgt $\psi'(a + \sigma_1)\psi'(a + \sigma_2) = \psi(m + \mu_1)\psi(m + \mu_2) = \psi(m + \mu_1 \mu_2) = \psi'(a + \sigma_1 \sigma_2)$, w. z. b. w. Und zwar ist a selbst der Exponent dieses Charakters ψ' oder der Gruppe (ψ'). Denn wenn b ein echter Faktor von a ist, so ist $\binom{m}{b}$ nicht in der Gruppe (ψ) enthalten (Definition 2), es gibt folglich eine in $b + 1$ enthaltene Klasse $m + \lambda$, welche nicht in (ψ) enthalten ist, woraus folgt, daß $\psi'(a + \lambda) = \psi(m + \lambda)$ nicht $= 1$ ist; mithin ist die in $b + 1 = b + \lambda$, also auch in $\binom{a}{b}$ enthaltene Klasse $a + \lambda$ nicht in der Gruppe (ψ') enthalten, w. z. b. w. [während $\binom{a}{a} = a + 1$ in (ψ') enthalten ist].

Also: jeder Charakter ψ der Abelschen Gruppe $\binom{\mathfrak{m}}{0}$, dessen Exponent der Faktor $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{m}$ ist, erzeugt in der angegebenen Weise $(\psi(\mathfrak{m}+\mu) = \psi'(\mathfrak{a}+\mu))$ einen bestimmten Charakter ψ' der Abelschen Gruppe $\binom{\mathfrak{a}}{0}$, dessen Exponent $\mathfrak{a}$ ist.

Umgekehrt: Ist $\mathfrak{a}$ Faktor des Ideals $\mathfrak{m}$ und ψ' ein Charakter der Abelschen Gruppe $\binom{\mathfrak{a}}{0}$, dessen Exponent $\mathfrak{a}$, so wird ψ' in der angegebenen Weise $(\psi(\mathfrak{m}+\mu) = \psi'(\mathfrak{a}+\mu))$ durch einen und nur einen Charakter ψ der Abelschen Gruppe $\binom{\mathfrak{m}}{0}$ erzeugt; und dann ist gewiß $\mathfrak{a}$ auch der Exponent von ψ (allgemeiner: ψ und ψ' haben einen und denselben Exponenten).

Erläuterungen zur vorstehenden Abhandlung.

Es handelt sich um die „Sparsamkeit", von der Dedekind in dem im Nachlaß publizierten Brief an Frobenius vom 8. Juli 1896 spricht. Und zwar werden die „natürlichen" Charaktere — jetzt gewöhnlich als eigentliche bezeichnet — allgemeiner als im Brief für einen (endlichen) algebraischen Zahlkörper erklärt. Zugleich gelangt Dedekind zum Begriff des Führers, insbesondere des Führers eines Charakters — in Anlehnung an den Fall des Kreiskörpers als Exponent bezeichnet —; zwar bei Zugrundelegung einer Zahlklasseneinteilung, aber mit Überlegungen, die genau so im allgemeinen Fall der Klassenkörpertheorie gelten.

Die Anwendung dieser Begriffe auf die Zerlegung der Zetafunktion eines beliebigen Kreiskörpers in eigentliche L-Reihen — unter Benutzung der bekannten Primidealzerlegung — ist in dem erwähnten Brief auseinandergesetzt; der Führer-Diskriminantensatz für den Kreiskörper wird in XLII gebracht.

Über seine Publikationsabsichten, anläßlich eines Beitrags für die Festschrift zur Braunschweiger Naturforscherversammlung, schreibt Dedekind an Frobenius (13. April 1897): . . . ich beschloß, meine langjährigen Arbeiten über die allgemeinsten Kreiskörper (lediglich auf Grund des „Skelettes" vom 8. Juni 1882 behandelt, dazu gehören die „natürlichen" Charaktere und die „Sparsamkeit", wovon ich Ihnen im vorigen Jahre geschrieben habe) zum Gegenstande zu wählen; allein diese Sache ist so umfassend, und meine Krankheit machte mir einen solchen Querstrich, daß ich daran verzweifle, es rechtzeitig fertig zu machen. . . . (18. April 1897): ... Ihren Rat, für meinen Beitrag zur Festschrift doch mein zweites Thema (allgemeinste Kreiskörper-Ideale) zu wählen, werde ich schwerlich befolgen können; eine Trennung in zwei Teile, deren zweiter dann an einem ganz andern Orte (etwa in Crelle?) erscheinen müßte, wäre doch sehr unangenehm. . . .

Inwieweit diese nicht publizierten Arbeiten — zu denen auch XL, XLII und die Ausarbeitung von XVI aus Bd. I gehören — auf die Entwicklung der Klassenkörpertheorie von Einfluß gewesen sind, läßt sich nicht mehr feststellen, da der Briefwechsel Dedekind-Weber aus diesen Jahren anscheinend nicht mehr existiert. **Noether.**
