Sur une intégrale considérée en calcul des probabilités.

1. *Objet de la présente note.* Nous nous proposons de calculer d'une manière approximative les rapports $[(A+Q):E]$, $[(A-P):E]$, $[(B+P):E]$, $[(B-Q):E]$ considérés autrefois par Poisson (*), A, B, P, Q, E, ayant les valeurs suivantes :

$$A=\int_0^p z^m(1-z)^n dz, \qquad B=\int_p^1 z^m(1-z)^n dz,$$

$$P=\int_{p-l}^p z^m(1-z)^n dz, \qquad Q=\int_p^{p+l} z^m(1-z)^n dz,$$

$$E=\int_0^1 z^m(1-z)^n dz.$$

On suppose m et n entiers; $m+n=\mu$; $m=\mu p$, $n=\mu q$; l est tout au plus égal à la moitié de la plus

(*) Poisson, *Probabilité des jugements*, § 88, pp. 224–228; traduction allemande de Schnuse, pp. 189-193.

petite des fractions p, q. Pour fixer les idées, nous supposerons p égal ou supérieur à q, ou m égal ou supérieur à n. D'après les hypothèses, $p+q=1$.

2. *Valeurs approximatives préliminaires*. Nous avons démontré (*) que

$$\sqrt{1-e^{-\frac{4}{3}T^2}} > \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^T e^{-t^2}\,dt > \sqrt{1-e^{-T^2}},$$

$$T = l\sqrt{\frac{\mu}{2pq}}.$$

Mais pour $\alpha < 1$,

$$1-\tfrac{1}{2}\alpha > \sqrt{1-\alpha} > 1-\alpha.$$

Donc

$$1-\frac{1}{2}e^{-\frac{4}{3}T^2} > \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^T e^{-t^2}\,dt > 1-e^{-T^2},$$

ou encore

$$e^{-T^2} > 1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^T e^{-t^2}\,dt > \frac{1}{2}e^{-\frac{4}{3}T^2}.$$

Pour abréger les écritures, nous poserons, dans la suite,

$$J = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^T e^{-t^2}dt \quad \text{ou} \quad \int_0^T e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,J.$$

(*) *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1888, t. XII, 1re partie, pp. 63-65. Pour la facilité du lecteur, nous reproduisons la partie essentielle de la démonstration au nº 10.

3. *Limites de* E. On a, comme l'on sait,

$$\mathrm{E} = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)} = \frac{m!\,n!}{\mu!} \cdot \frac{1}{\mu+1}.$$

D'après la formule de Stirling,

$$\sqrt{2\pi m}\, m^m e^{-m} < m! < \sqrt{2\pi m}\, m^m e^{-m+\frac{1}{12m}},$$

$$\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} < n! < \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\frac{1}{12n}},$$

$$\sqrt{2\pi \mu}\, \mu^\mu e^{-\mu} < \mu! < \sqrt{2\pi \mu}\, \mu^\mu e^{-\mu+\frac{1}{12\mu}}.$$

On tire aisément de là

$$\frac{\sqrt{2\pi m n}}{\sqrt{\mu}(\mu+1)} \left(\frac{m}{\mu}\right)^m \left(\frac{n}{\mu}\right)^n e^{-\frac{1}{12\mu}} < \mathrm{E},$$

$$\mathrm{E} < \frac{\sqrt{2\pi m n}}{\sqrt{\mu}(\mu+1)} \left(\frac{m}{\mu}\right)^m \left(\frac{n}{\mu}\right)^n e^{\frac{1}{12m}+\frac{1}{12n}},$$

ou encore, en introduisant μp, μq au lieu de m, n,

$$\sqrt{2\pi\mu p q}\; p^{\mu p}\, q^{\mu q}\, \frac{1}{(\mu+1)\, e^{\frac{1}{12\mu}}} < \mathrm{E},$$

$$\mathrm{E} < \sqrt{2\pi\mu p q}\; p^{\mu p}\, q^{\mu q}\, \frac{1}{(\mu+1)\, e^{-\frac{1}{12\mu p q}}}.$$

Or, on a d'abord

$$(\mu+1)e^{\frac{1}{12\mu}} < \mu+2, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{12\,\mu} < \log\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right).$$

En effet,

$$\log\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right) > \frac{1}{\mu+1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(\mu+1)^2} > \frac{1}{\mu+1}\left(1-\frac{1}{2\mu}\right)$$

et, évidemment,

$$\frac{1}{\mu+1}\left(1-\frac{1}{2\mu}\right) > \frac{1}{12\,\mu}$$

ou

$$6(2\,\mu-1) > \mu+1,$$

c'est-à-dire $11\,\mu > 7$. — Ensuite

$$(\mu+1)e^{-\frac{1}{12\mu pq}} > \mu\left(1-\frac{1}{12\mu pq}\right).$$

Donc enfin

$$\frac{1}{\mu+2}\sqrt{2\pi\mu pq}\,p^m q^n < \mathrm{E} < \frac{1}{\mu-\dfrac{1}{12pq}}\sqrt{2\pi\mu pq}\,p^m q^m.$$

4. *Limites de* A *et* B. 1° $\mathrm{A} > \frac{1}{2}\mathrm{E}$, $\mathrm{B} < \frac{1}{2}\mathrm{E}$. En effet, on a d'abord $\mathrm{A}+\mathrm{B}=\mathrm{E}$, ensuite, comme nous allons le prouver, $\mathrm{A} \geqq \mathrm{B}$.

On trouve, en faisant

$$z = p - x, \quad 1 - z = q + x,$$

$$A = \int_0^p z^m (1-z)^n \, dz \gtreqless \int_{p-q}^p z^m (1-z)^n \, dz = \int_0^q (p-x)^m (q+x)^n \, dx.$$

De même, en faisant

$$z = p + x, \quad 1 - z = q - x,$$

$$B = \int_p^1 z^m (1 - z)^n \, dz = \int_0^q (p + x)^m (q - x)^n \, dx.$$

Or, on a

$$(p - x)^m (q + x)^n \gtreqless (p + x)^m (q - x)^n;$$

car cela revient à

$$\left(\frac{q + x}{q - x}\right)^n \gtreqless \left(\frac{p + x}{p - x}\right)^m,$$

ou à

$$n \log \frac{q + x}{q - x} \gtreqless m \log \frac{p + x}{p - x},$$

ou, en dérivant, à

$$n \left(\frac{1}{q + x} + \frac{1}{q - x}\right) \gtreqless m \left(\frac{1}{p + x} + \frac{1}{p - x}\right),$$

c'est-à-dire, successivement,

$$\frac{2\mu q^2}{q^2 - x^2} \gtreqless \frac{2\mu p^2}{p^2 - x^2}, \quad q^2(p^2 - x^2) \gtreqless p^2({}^2 - x^2), \quad p^2 \gtreqless q^2.$$

De proche en proche, de la dernière relation, on remonte à $A > B$, sauf dans le cas où $p = q$, $m = n$; alors évidemment, $A = B = \frac{1}{2}E$.

2° *Limite inférieure de* B. On peut écrire

$$B = p^m q^m \int_0^q \left(1 + \frac{x}{p}\right)^m \left(1 - \frac{x}{q}\right)^n dx > p^m q^n B_1,$$

si l'on pose

$$B_1 = \int_0^{q-\alpha} \left(1 + \frac{x}{p}\right)^m \left(1 - \frac{x}{q}\right)^n dx,$$

α étant indéterminé. Faisons

$$\left(1 + \frac{x}{p}\right)^m \left(1 - \frac{x}{q}\right)^n = e^u,$$

ou

$$u = m \log\left(1 + \frac{x}{p}\right) + n \log\left(1 - \frac{x}{q}\right).$$

On aura

$$u' = \mu \left[\frac{1}{1 + \frac{x}{p}} - \frac{1}{1 - \frac{x}{q}}\right]$$

$$= \mu \left[1 - \frac{x}{p} + \frac{x^2}{p(p+x)} - 1 - \frac{x}{q} - \frac{x^2}{q(q-x)}\right]$$

$$= -\frac{\mu x}{pq} - \mu x^2 \left[\frac{1}{q(q-x)} - \frac{1}{p(p+x)}\right] > -\frac{\mu x}{pq} - \frac{\mu x^2}{q\alpha}.$$

Donc

$$u > -\frac{\mu x^2}{2pq} - \frac{\mu x^3}{3q\alpha},\quad e^u > e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}} \cdot e^{-\frac{\mu x^3}{3q\alpha}} > e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}}\left(1 - \frac{\mu x^3}{3q\alpha}\right).$$

On déduit de là

$$\left(1+\frac{x}{p}\right)^m\left(1-\frac{x}{q}\right)^n = e^u > e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}}\left(1-\frac{\mu x^3}{3q\alpha}\right),$$

$$B_1 = \int_0^{q-\alpha} e^u dx > \int_0^{q-\alpha} e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}} dx - \frac{\mu}{3q\alpha}\int_0^{q-\alpha} e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}} x^3 dx,$$

et, *a fortiori*,

$$B_1 > \int_0^{q-\alpha} e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}} dx - \frac{\mu}{3q\alpha}\int_0^{\infty} e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}} x^3 dx.$$

Posons, dans la première intégrale du second membre

$$\frac{\mu x^2}{2pq} = t^2, \qquad T_1 = (q-\alpha)\sqrt{\frac{\mu}{2pq}};$$

il viendra

$$\int_0^{q-\alpha} e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}} dx = \sqrt{\frac{2pq}{\mu}}\int_0^{T_1} e^{-t^2} dt.$$

La substitution

$$\frac{\mu x^2}{2pq} = s \quad \text{ou} \quad x^2 = \frac{2pq}{\mu} s, \qquad x^3 dx = \frac{2p^2q^2}{\mu^2} s ds$$

donne ensuite

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}} x^3 dx = \frac{2p^2q^2}{\mu^2}\int_0^\infty e^{-s} s ds = \frac{2p^2q^2}{\mu^2}\Gamma(2) = \frac{2p^2q^2}{\mu^2}.$$

On a donc

$$B_1 > \sqrt{\frac{2pq}{\mu}}\int_0^{T_1} e^{-t^2}dt - \frac{2p^2q}{3\alpha\mu}.$$

Comme on dispose de α, on peut choisir, dans chaque cas, cette fraction de manière que la limite inférieure de B_1 soit la plus grande possible. Pour simplifier, nous ferons

$$3\alpha = 2p^2q \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{2}{3}p^2q.$$

Dans cette hypothèse, on aura

$$B_1 > \sqrt{\frac{2pq}{\mu}}\int_0^{T_1} e^{-t^2}dt - \frac{1}{\mu},$$

$$T_1 = q\left(1 - \frac{2}{3}p^2\right)\sqrt{\frac{\mu}{2pq}}.$$

On aura donc enfin

$$B > p^m q^n \left\{ \sqrt{\frac{2pq}{\mu}}\int_0^{T_1} e^{-t^2}dt - \frac{1}{\mu} \right\}$$

et, en observant, d'après le n° 2, que

$$\int_0^{T_1} e^{-t^2} dt > \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1 - e^{-T_1^2}\right),$$

$$B > p^m q^n \left\{ \frac{\sqrt{2\pi\mu pq}}{\mu}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-T_1^2}\right) - \frac{1}{\mu}\right\}.$$

3° *Limite supérieure de* B, *limites de* A. On a, comme on l'a vu,

$B < \frac{1}{2} E < \frac{1}{2} \cdot$ (limite supérieure de E),

$A > \frac{1}{2} E > \frac{1}{2} \cdot$ (limite inférieure de E),

$A = E - B <$ lim. sup. de E — lim. inf. de B.

5. *Limites de* (B : E), (A : E). On a d'abord, sauf si $p = q$,

$$B : E < \tfrac{1}{2}, \qquad A : E > \tfrac{1}{2}.$$

Ensuite

$$\frac{B}{E} > \frac{\text{limite inférieure de B}}{\text{limite supérieure de E}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{B}{E} > \frac{p^m q^n \left\{ \frac{\sqrt{2\pi\mu pq}}{\mu}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-T_1^2}\right) - \frac{1}{\mu}\right\}}{\sqrt{2\pi\mu pq}\, p^m q^n \frac{1}{\mu - \frac{1}{12pq}}}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-T_1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{12\mu pq}\right)$$

$$- \left(1 - \frac{1}{12\mu pq}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}.$$

On déduit de là sans peine

$$\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{E}} > \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\mathrm{T}_1^2} - \frac{1}{24\mu pq} - \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}.$$

Enfin

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{E}} = 1 - \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{E}} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-\mathrm{T}_1^2} + \frac{1}{24\mu pq} + \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}.$$

6. *Limites de* Q *et* (Q : E). 1° *Limites de* Q. Posons dans Q, comme dans B,

$$z = p + x, \qquad 1 - z = q - x,$$

de manière que x varie seulement de 0 à l, l étant au plus égal à $\frac{1}{2}q$.

On aura

$$\mathrm{Q} = p^m q^n \int_0^l \left(1 + \frac{x}{p}\right)^m \left(1 - \frac{x}{q}\right)^n dx = p^m q^n \int_0^l e^u dx.$$

La quantité

$$u' = -\frac{\mu x}{pq} - \mu x^2 \left[\frac{1}{q\,(q - x)} - \frac{1}{p\,(p + x)}\right],$$

où

$$q - x \overline{\overline{>}} \tfrac{1}{2} q,$$

est évidemment telle que

$$-\frac{\mu x}{pq} > u' > -\frac{\mu x}{pq} - \frac{2\mu x^2}{q^2}.$$

Par suite,

$$-\frac{\mu x^2}{2pq} > u > -\frac{\mu x^2}{2pq} - \frac{2\mu x^3}{3q^2}$$

$$e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}} > e^u > e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}} e^{-\frac{2\mu x^3}{3q^2}} > e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}}\left(1 - \frac{2\mu x^3}{3q^2}\right).$$

Il en résulte d'abord l'inégalité

$$Q = p^m q^n \int_0^l e^u du < p^m q^n \int_0^l e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}} dx$$

$$= p^m q^n \sqrt{\frac{2pq}{\mu}} \int_0^T e^{-t^2} dt,$$

ou

$$Q < \frac{1}{2\mu} p^m q^n \sqrt{2\pi\mu pq}\ \mathrm{J}$$

On a ensuite

$$\int_0^l e^u du > \int_0^l e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}} dx - \int_0^l e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}} \frac{2\mu}{3q^2} x^3 dx$$

$$> \int_0^l e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}} dx - \frac{2\mu}{3q^2} \int_0^\infty e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}} x^3 dx,$$

ou encore,

$$\int_0^l e^u du > \sqrt{\frac{2pq}{\mu}} \int_0^T e^{-t^2} dt - \frac{2\mu}{3q^2} \cdot \frac{2p^2q^2}{\mu^2}$$

$$= \frac{1}{2\mu} \sqrt{2\pi\mu pq}\ \mathrm{J} - \frac{4p^2}{3\mu}.$$

Donc enfin

$$Q > p^m q^n \left[\frac{1}{2\mu}\sqrt{2\pi\mu pq}\, J - \frac{4p^2}{3\mu}\right].$$

2° *Limite supérieure de* (Q : E). On a

$$\frac{Q}{E} < \frac{\text{limite supérieure de Q}}{\text{limite inférieure de E}},$$

ou

$$\frac{Q}{E} < \frac{\frac{1}{2\mu} p^m q^n \sqrt{2\pi\mu pq}\, J}{\frac{1}{\mu+2} p^m q^n \sqrt{2\pi\mu pq}} = \frac{1}{2} J \left(1 + \frac{2}{\mu}\right).$$

Mais on sait que $\frac{1}{2} J < \frac{1}{2}$. Par suite,

$$\frac{Q}{E} < \frac{1}{2} J + \frac{1}{\mu}.$$

3° *Limite inférieure de* (Q : E). On a

$$\frac{Q}{E} > \frac{\text{limite inférieure de Q}}{\text{limite supérieure de E}} = \frac{p^m q^n \left[\frac{1}{2\mu}\sqrt{2\pi\mu pq}\, J - \frac{4p^2}{3\mu}\right]}{\frac{1}{\mu - \frac{1}{12pq}}\sqrt{2\pi\mu pq}\, p^m q^m}$$

$$= \frac{1}{2} J \left(1 - \frac{1}{12\mu pq}\right) - \frac{4}{3}\frac{p^2}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\left(1 - \frac{1}{12\mu pq}\right)$$

et, *a fortiori*,

$$\frac{Q}{E} > \frac{1}{2} J - \frac{1}{24\mu pq} - \frac{4}{3}\frac{p^2}{\sqrt{2\pi\mu pq}}.$$

7. *Limites de* P *et de* (P : E). On prouve d'abord que P surpasse Q comme on a prouvé que A surpasse B, sauf, bien entendu, si $m = n$, $p = q$, ce qui entraîne $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$. On a donc

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{E}} > \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{E}} > \frac{1}{2}\mathrm{J} - \frac{1}{24\mu pq} - \frac{4}{3}\frac{p^2}{\sqrt{2\pi\mu pq}}.$$

Ensuite, évidemment, $\mathrm{P} + \mathrm{Q} < \mathrm{E}$, et, par suite,

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{E}} < 1 - \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{E}} < 1 - \text{limite inférieure de } \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{E}}.$$

Donc

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{E}} < 1 - \frac{1}{2}\mathrm{J} + \frac{1}{24\mu pq} + \frac{4}{3}\frac{p^2}{\sqrt{2\pi\mu pq}}.$$

Mais, d'après une inégalité du n° 2, on a

$$1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{J} = 1 - \mathrm{J} + \tfrac{1}{2}\mathrm{J} < \tfrac{1}{2}\mathrm{J} + e^{-\mathrm{T}^2}.$$

Par conséquent,

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{E}} < \frac{1}{2}\mathrm{J} + e^{-\mathrm{T}^2} + \frac{1}{24\mu pq} + \frac{4}{3}\frac{p^2}{\sqrt{2\pi\mu pq}}.$$

8. *Limites de* [(P + Q) : E]. En rapprochant les résultats obtenus dans les deux derniers numéros, on trouve

$$\frac{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}{\mathrm{E}} < \mathrm{J} + \frac{1}{\mu} + e^{-\mathrm{T}^2} + \frac{1}{24\mu pq} + \frac{4}{3}\frac{p^2}{\sqrt{2\pi\mu pq}},$$

$$\frac{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}{\mathrm{E}} > \mathrm{J} - \frac{1}{12\mu pq} - \frac{8}{3}\frac{p^2}{\sqrt{2\pi\mu pq}}.$$

Nous avons trouvé antérieurement, par une autre méthode (*),

$$1 > \frac{P+Q}{E} > J - \frac{7}{\mu pq}.$$

9. *Limites de l'intégrale de Poisson.* Posons, pour simplifier les écritures,

$$\varepsilon = \frac{1}{2} e^{-T_1^2} + \frac{1}{24\mu pq} + \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}, \quad \eta = \frac{1}{24\mu pq} + \frac{4}{3}\frac{p^2}{\sqrt{2\pi\mu pq}}.$$

On aura

$$\frac{1}{2} < \frac{A}{E} < \frac{1}{2} + \varepsilon, \qquad \frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{B}{E} < \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}J - \eta < \frac{P}{E} < \frac{1}{2}J + \eta + e^{-T^2}, \quad \frac{1}{2}J - \eta < \frac{Q}{E} < \frac{1}{2}J + \frac{1}{\mu}.$$

On déduit de là

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}J - \eta < \frac{A+Q}{E} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}J + \varepsilon + \frac{1}{\mu}, \quad . \quad . \quad . (1)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}J - \eta - e^{-T^2} < \frac{A-P}{E} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}J + \varepsilon + \eta, \quad . (2)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}J - \varepsilon - \eta < \frac{B+P}{E} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}J + \eta + e^{-T^2}, \quad . (3)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}J - \varepsilon - \frac{1}{\mu} < \frac{B-Q}{E} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}J + \eta \quad . \quad . \quad . (4)$$

(*) *Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* 1902, t. XXVI, 2e partie, pp. 211-214.

Observons que

$$A + Q = \int_0^{p+l} z^m (1 - z)^n dz,$$

$$A - P = \int_0^{p-l} z^m (1 - z)^n dz,$$

$$B + P = \int_{p-l}^{1} z^m (1 - z)^n dz,$$

$$B - Q = \int_{p+l}^{1} z^m (1 - z)^n dz.$$

Les relations (1), (2), (3), (4) donnent sous une forme précise, dans tous les cas, la limite supérieure et la limite inférieure du rapport d'une intégrale eulérienne de première espèce *incomplète* à l'intégrale *complète* correspondante. Poisson, à l'endroit cité, donne simplement la formule approximative, sans aucune indication de limites,

$$\int_0^{\theta} z^m (1 - z)^n dz = (\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2} \mathrm{J})\mathrm{E},$$

le signe + correspondant au cas où $\theta(m + n)$ surpasse m, le signe — à celui où $\theta(m + n)$ est inférieur à m.

10. *Démonstration des inégalités du n° 2.* Considérons les volumes V_1, V_2, V_3, situés entre trois plans rectangulaires OXY, OYZ, OZX, sous la surface ayant pour équation $\pi z = 4 e^{-x^2 - y^2}$, et projetés, V_1 suivant le carré OXPY de côté $OX = OY = T$, V_2 suivant le quart de cercle OXY de centre O et de rayon

$OX = OY = T$, V_3 suivant le quart de cercle Oxy de rayon $Ox = Oy = (2T : \sqrt{\pi})$, et équivalent au carré OXPY.

Le volume V_1 est évidemment supérieur à V_2 qui en est une partie. Les volumes V_1 et V_3 ont une partie commune; les parties non communes ont des bases équivalentes, mais dans ces parties non communes, les z de V_3 sont plus grands que ceux de V_1, parce que z est d'autant plus grand que $x^2 + y^2$ est plus petit. On a donc $V_1 < V_3$.

On trouve aisément, d'après les formules générales de cubature,

$$V_1 = J^2, \quad V_2 = 1 - e^{-T^2}, \quad V_3 = 1 - e^{-\frac{4T^2}{\pi}} < 1 - e^{-\frac{4}{3}T^2}$$

et, par suite,

$$1 - e^{-T^2} < J^2 < 1 - e^{-\frac{4}{3}T^2}.$$

comme nous l'avons dit au n° 2 (*).

(*) Extrait des *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), n° 3, pp. 239-254, 1904.