LXIII.

Zweite Definition (1889. 3. 9) des Endlichen und Unendlichen.

Zuerst veröffentlicht in der zweiten Auflage (1893) der Schrift „Was sind und was sollen die Zahlen?“ Seite XVII, in der Form:

Ein System S heißt endlich, wenn es sich so in sich selbst abbilden läßt, daß kein echter Teil von S in sich selbst abgebildet wird; im entgegengesetzten Fall heißt S ein unendliches System.

Verfolgung dieser Definition eines endlichen Systems S *ohne Benutzung der natürlichen Zahlen*. Es sei φ eine Abbildung von S in sich selbst, durch welche kein echter Teil von S in sich selbst abgebildet wird. — Kleine lateinische Buchstaben $a, b \ldots z$ bedeuten immer Elemente von S, große lateinische Buchstaben A, $B \ldots Z$ bedeuten Teile von S; die durch φ erzeugten Bilder von a, A werden resp. mit a', A' bezeichnet. Daß A Teil von B ist, wird durch $A \mathfrak{3} B$ ausgedrückt. Das aus den Elementen $a, b, c \ldots$ bestehende System wird mit $[a, b, c \ldots]$ bezeichnet. Es ist also

(1) $$S' \mathfrak{3} S$$

und

(2) $$\text{aus } A' \mathfrak{3} A \text{ folgt } A = S.$$

1. *Satz*: $S' = S$. — Jedes Element von S ist Bild von (mindestens) einem Element r von S. Denn aus (1) folgt $(S')' \mathfrak{3} S'$, also nach (2) unser Satz.

Jedes aus einem einzigen Element s bestehende System $[s]$ ist endlich, weil es keinen echten Teil besitzt und durch die identische Abbildung in sich selbst abgebildet wird. Dieser Fall wird im folgenden *ausgeschlossen*, S bedeutet ein endliches System, das *nicht* aus einem einzigen Element besteht.

2. *Satz*: Jedes Element s ist verschieden von seinem Bilde s', in Zeichen: $s \neq s'$. — Denn wäre $s = s'$, so wäre $[s]' = [s'] = [s] \mathfrak{3} [s]$, also nach (2) auch $[s] = S$ im Widerspruch zu unserer Annahme über S.

3. Definition. Ist s ein bestimmtes Element von S, so soll mit H_s jeder solche Teil von S bezeichnet werden, der den beiden folgenden Bedingungen genügt:

I. s ist Element von H_s, also $[s] \mathrel{3} H_s$, also auch
$$[s] + H_s = H_s.$$

II. Ist h ein von s verschiedenes Element von H_s, so ist auch h' Element von H_s; ist also $H \mathrel{3} H_s$, aber s nicht in H enthalten, so ist $H' \mathrel{3} H_s$.

4. Satz. S und $[s]$ sind spezielle Systeme H_s, und $[s]$ ist der Durchschnitt (die Gemeinheit) aller dem Elemente s entsprechenden Systeme H_s. — Offenbar.

5. Satz. H_s ist $= S$ oder echter Teil von S, je nachdem s' in H_s liegt oder nicht. — Denn wenn s' in H_s liegt, so folgt aus II in 3., daß $H'_s \mathrel{3} H_s$, also nach (2), daß $H_s = S$ ist; und umgekehrt, wenn $H_s = S$, so liegt auch s' in H_s.

6. Satz. Ist H_s echter Teil von S, so ist s' das einzige Element von H'_s, das außerhalb H_s liegt. — Denn jedes Element k von H'_s ist Bild h' von mindestens einem Element h in H_s; ist nun $k = h'$ verschieden von s', so ist auch h verschieden von s, und folglich (nach II in 3.) liegt $k = h'$ in H_s, während das Element s' von H'_s (nach 5.) außerhalb H_s liegt.

7. Satz. Jedes System H'_s ist ein System $H_{s'}$, d. h. (Definition 3.):

I'. s' ist Element von H'_s.

II'. Ist k ein von s' verschiedenes Element von H'_s, so liegt auch k' in H'_s.

Das Erste folgt daraus, daß s in H_s liegt, das Zweite daraus (Satz 6), daß k in H_s liegt.

8. Satz. Sind A, B, C ... spezielle, demselben s entsprechende Systeme H_s, so ist auch ihr Durchschnitt H ein System H_s.

Denn zufolge 3. I. ist s gemeinsames Element von A, von B, von C, ..., also auch Element von H. Ist ferner h ein von s verschiedenes Element von H, so ist (zufolge 3. II.) das Bild h' Element von A, von B, von C, ..., also auch von H. Mithin erfüllt H die beiden für jedes H_s charakteristischen Bedingungen I, II in 3.

9. Definition. Sind a, b bestimmte Elemente von S, so soll das Symbol ab den Durchschnitt aller derjenigen Systeme H_b bedeuten (Strecke ab), welche (wie z. B. S) das Element a enthalten.

10. Satz. a ist Element von ab, d. h. $[a] \mathfrak{z}\, ab$. — Denn ab ist der Durchschnitt von lauter solchen Systemen H_b, in denen a liegt. — (a Anfang von ab.)

11. Satz. ab ist ein System H_b, d. h. $[b] \mathfrak{z}\, ab$, und wenn s ein von b verschiedenes Element von ab, so ist $[s'] \mathfrak{z}\, ab$. — Dies folgt aus 8. — Also b Element (Ende) von ab. Ist $H \mathfrak{z}\, ab$, aber b nicht in H enthalten, so ist $H' \mathfrak{z}\, ab$.

12. Satz. Aus $[a] \mathfrak{z}\, H_b$ folgt $ab \mathfrak{z}\, H_b$. — Unmittelbare Folge von 9.

13. Satz. $aa = [a]$. — Dies folgt aus 4., weil aa der Durchschnitt aller H_a ist, die ja alle das Element a enthalten (nach 3. I.).

14. Satz. Ist b' Element von ab, so ist $ab = S$. — Dies folgt aus 11 und 5.

15. Satz. $b'b = S$. — Dies folgt aus 14 und 10.

16. Satz. Ist c Element von ab, so ist $cb \mathfrak{z}\, ab$. — Dies folgt aus 12, denn ab ist ein H_b (nach 11), welches das Element c enthält.

17. Satz. Bedeutet $A + B$ das aus A, B zusammengesetzte System, so ist

$$a'b + b'a = S.$$

Denn wenn s Element von $a'b$, so ist s' in $b'a$ oder $a'b$ enthalten, je nachdem $s = b$ oder verschieden von b (zufolge 10 oder 11 und 3. II), und ebenso, wenn s Element von $b'a$, so ist s' in $a'b$ oder $b'a$ enthalten; also ist $(a'b + b'a)' \mathfrak{z}\, a'b + b'a$; hieraus folgt der Satz nach (2).

18. Satz. Ist a verschieden von b, so ist $ab = [a] + a'b$. — Denn da a ein von b verschiedenes Element von ab ist, so ist a' Element von ab (10, 11), und folglich (16) ist $a'b \mathfrak{z}\, ab$; da ferner (10) auch $[a] \mathfrak{z}\, ab$, mithin

$$[a] + a'b \mathfrak{z}\, ab.$$

Ferner: jedes von b verschiedene Element s von $[a] + a'b$ ist entweder $= a$ oder ein von b verschiedenes Element von $a'b$, in beiden Fällen ist s' (nach 10, 11) Element von $a'b$, also auch von $[a] + a'b$, und da (11) auch $[b] \mathfrak{z}\, [a] + a'b$, so ist $[a] + a'b$ ein System H_b; da endlich auch $[a] \mathfrak{z}\, [a] + a'b$, so ist (12) auch

$$ab \mathfrak{z}\, [a] + a'b.$$

Aus der Vergleichung beider Resultate folgt der Satz.

19. Satz. Sind a, b verschiedene Elemente von S, so liegt a außerhalb $a'b$, und b liegt außerhalb $b'a$.

Beweis. Nimmt man nämlich das Gegenteil an, es gebe ein von b verschiedenes Element a, das in $a'b$ liegt, und bezeichnet mit A das System aller solcher Elemente a, so ergibt sich folgendes. Setzt man $a' = s$, so liegt a in sb, und da a verschieden von b ist, also (nach 13) nicht in bb liegt, so ist s verschieden von b, und hieraus folgt (nach 18), daß $sb = [s] + s'b$ ist. Da ferner a (nach 2) verschieden von s ist und in sb liegt, so muß a in $s'b$ liegen, und hieraus folgt wieder (nach 1), daß auch s (als Bild a') in $s'b$ liegt. Mithin ist das Bild a' eines jeden Elementes a von A ebenfalls in A enthalten, also $A' \mathfrak{3} A$. Da aber hieraus $A = S$ folgen würde, während doch A das Element b nicht enthält, so ist unsere Annahme unzulässig, also der Satz wahr, w. z. b. w. Der zweite Teil folgt durch Vertauschung von a mit b.

20. Satz. Sind a, b verschieden, so haben die Strecken $a'b$, $b'a$ kein gemeinsames Element.

Beweis. Nimmt man nämlich das Gegenteil an, es gebe ein gemeinsames Element m von $a'b$, $b'a$, so folgt aus dem vorhergehenden Satz 19, daß m verschieden von b und von a ist; mithin muß (nach 11) das Bild m' ebenfalls gemeinsames Element von $a'b$ und $b'a$ sein; bezeichnet man daher mit M das System aller solcher Elemente m, so ist $M' \mathfrak{3} M$, also $M = S$. Dies ist aber unmöglich, weil a, b Elemente von S, aber nicht Elemente von M sind. Also ist unser Satz wahr.

21. Satz. Sind a, b verschieden, so sind auch die Bilder a', b' verschieden.

Beweis. Denn sonst hätten die Strecken $a'b$, $b'a$ ein gemeinsames Element $a' = b'$, weil a' (nach 10) Element von $a'b$ und b' Element von $b'a$ ist.

22. Satz. Aus $cb = S$ folgt $c = b'$.

Beweis. Es gibt (nach 1 und 21) in S ein und nur ein Element a, welches der Bedingung $a' = c$ genügt, und es ist also $a'b = S$, mithin $[a] \mathfrak{3} a'b$; es muß daher (19) $a = b$, also $c = b'$ sein, w. z. b. w.

23. Satz. Sind a, b verschieden, so ist jedes Element von S in einer und nur einer der Strecken $a'b$, $b'a$ enthalten. — Dies folgt aus 17 und 20.

24. Satz. Sind a, b, c verschieden, so haben die Strecken $b'c$, $c'a$, $a'b$ kein gemeinsames Element, und dasselbe gilt von den Strecken $a'c$, $b'a$, $c'b$.

Beweis. Denn die gegenteilige Annahme, es gebe ein den Strecken $b'c$, $c'a$, $a'b$ gemeinsames Element m, führt zu einem Widerspruch. Es sei M das System aller solcher Elemente. Da (nach 19) a nicht in $a'b$, b nicht in $b'c$, c nicht in $c'a$ liegt, so ist m verschieden von c, a, b, und folglich (11) ist m' ebenfalls gemeinsames Element von $b'c$, $c'a$, $a'b$, also Element von M; mithin ist $M' \mathfrak{3} M$, also $M = S$. Dies ist aber unmöglich, weil M keins der Elemente a, b, c enthält. Also ist unser Satz wahr. — Der zweite Teil ergibt sich aus dem ersten, wenn man a mit b vertauscht, wodurch die Annahme nicht geändert wird. —

Zusatz. Setzt man (wie auch in dem folgenden 25):

$$A = c'b,\ B = a'c,\ C = b'a;\ A_1 = b'c,\ B_1 = c'a,\ C_1 = a'b,$$

so ist $A - B - C = 0$*) (leer) und $A_1 - B_1 - C_1 = 0$ (leer) und (nach 17, 20) ist

$$S = A + A_1 = B + B_1 = C + C_1;$$
$$0 = A - A_1 = B - B_1 = C - C_1.$$

Dies gilt auch dann (nach 20), wenn von den Elementen a, b, c wenigstens zwei verschieden sind.

25. Satz. Sind a, b, c verschieden, so tritt einer und nur einer der beiden folgenden Fälle ein: Entweder ist

$$b'c = b'a + a'c,\ c'a = c'b + b'a,\ a'b = a'c + c'b$$
$$c'b = c'a - a'b,\ a'c = a'b - b'c,\ b'a = b'c - c'a$$

und jedes Element von S liegt in einer, aber nur einer der Strecken $c'b$, $a'c$, $b'a$; oder es ist

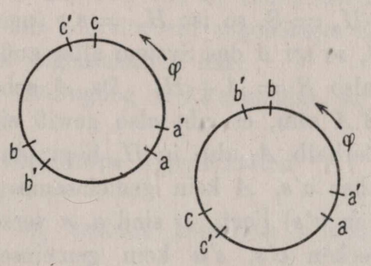
$$c'b = c'a + a'b,\ a'c = a'b + b'c,\ b'a = b'c + c'a$$
$$b'c = b'a - a'c,\ c'a = c'b - b'a,\ a'b = a'c - c'b$$

und jedes Element von S liegt in einer, aber nur einer der Strecken $b'c$, $c'a$, $a'b$.

Beweis. Zufolge 23 liegt c entweder in $a'b$ oder in $b'a$. Wir betrachten nur den ersten Fall, weil aus ihm der zweite durch Vertauschung von a mit b hervorgeht. Da c in $a'b$ liegt und von b

*) [Dabei bedeutet das Zeichen — den Durchschnitt.]

verschieden ist, so liegt (nach 11) auch c' in $a'b$, und folglich (16) ist $c'b \mathfrak{Z} a'b$; hieraus folgt (19), daß $c'b$ mit $b'a$ kein gemeinsames Element hat; nun ist (17) $a'b + b'a = b'c + c'b$, mithin $b'a \mathfrak{Z} b'c$, und folglich (11) liegt a in $b'c$. Aus der Annahme, daß c in $a'b$ liegt, hat sich also ergeben: $c'b \mathfrak{Z} a'b$, $b'a \mathfrak{Z} b'c$, a liegt in $b'c$. Auf dieselbe Weise ergeben sich aus dieser letzten Folgerung, wenn man c, a, b in der Annahme resp. durch a, b, c ersetzt, wieder die Folgerungen $a'c \mathfrak{Z} b'c$, $c'b \mathfrak{Z} c'a$, b liegt in $c'a$; und hieraus folgt abermals $b'a \mathfrak{Z} c'a$, $a'c \mathfrak{Z} a'b$ (und die erste Annahme: c liegt in $a'b$). Es



ist also: $c'b \mathfrak{Z} a'b$, $b'a \mathfrak{Z} b'c$, $a'c \mathfrak{Z} b'c$, $c'b \mathfrak{Z} c'a$, $b'a \mathfrak{Z} c'a$, $a'c \mathfrak{Z} a'b$, also auch $b'a + a'c \mathfrak{Z} b'c$, $c'b + b'a \mathfrak{Z} c'a$, $a'c + c'b \mathfrak{Z} a'b$. Läge nun z. B. ein Element von $b'c$ weder in $b'a$, noch in $a'c$, so wäre es (nach 23) gemeinsames Element von $b'c$, $a'b$, $c'a$, was (nach 24) unmöglich ist; mithin ist $b'c \mathfrak{Z} b'a + a'c$, also auch $b'c = b'a + a'c$, und ebenso folgt $c'a = c'b + b'a$, $a'b = a'c + c'b$. Hätten nun z. B. $b'a$, $a'c$ ein gemeinsames Element, so wäre dasselbe auch gemeinsames Element von $b'c$, $c'a$, $a'b$, was (nach 24) nicht der Fall ist. Aus $S = b'c + c'b$ folgt endlich $S = b'a + a'c + c'b$, womit unser Satz vollständig bewiesen ist.

Zusatz. Es kann nie gleichzeitig $[a] \mathfrak{Z} cb$ und $[b] \mathfrak{Z} ca$ sein; weil (nach 18) dann auch gleichzeitig $[a] \mathfrak{Z} c'b$ und $[b] \mathfrak{Z} c'a$ sein müßte, was unmöglich.

26. Satz. Aus $ab = cb$ folgt $a = c$, und wenn $ab = cd$ ein echter Teil von S ist, so ist $a = c$, $b = d$.

Dies folgt schon aus früheren Sätzen. Da (10) c in cb, also auch in ab liegt, so muß, falls $a = b$, also $ab = [a]$ ist, auch $c = a$ sein. Ist aber a verschieden von b, so ist (18) $ab = [a]$

$+ a'b$, und (19) $a'b$ ist echter Teil von ab; nimmt man an, es sei c verschieden von a, so muß c in $a'b$ liegen, also ist (16) $cb \mathfrak{Z} a'b$, also cb echter Teil von ab; da aber $cb = ab$ ist, so ist diese Annahme unzulässig, mithin immer $c = a$, w. z. b. w. Ist ferner $ab = cd$ ein echter Teil von S, so muß $b = d$ sein; ist nämlich b verschieden von d, so muß (11) auch b' in cd, also auch in ab liegen; dann wäre aber (14) $ab = S$ gegen die Voraussetzung, also ist $b = d$, mithin $ab = cb$, also auch $a = c$, w. z. b. w.

27. *Satz.* Jedes (in 3. erklärte) System H_s ist eine Strecke $a's$ mit dem Ende s und ihr Anfang a' ist völlig bestimmt.

Beweis. Ist $H_s = S$, so ist $H_s = s's$ (nach 15). Ist aber H_s *echter* Teil von S, so sei A das System aller außerhalb H_s liegenden Elemente von S, also $S = A + H_s$. Da A echter Teil von S ist, so kann nicht $A' \mathfrak{Z} A$ sein, es gibt also gewiß ein Element a in A, dessen Bild a' außerhalb A, also in H_s liegt; da (nach 12) folglich $a's \mathfrak{Z} H_s$ ist, so haben $a's$, A kein gemeinsames Element. Da a in A, s in H_s (sogar in $a's$) liegt, so sind a, s verschieden, also haben (nach 20) die Strecken $a's$, $s'a$ kein gemeinsames Element, und (nach 17) ist $a's + s'a = S = H_s + A$, mithin $A \mathfrak{Z} s'a$. Nimmt man nun an, es sei $a's$ ein *echter* Teil von H_s, und bezeichnet mit H das System aller derjenigen Elemente von H_s, welche außerhalb $a's$, also in $s'a$, so ist $H_s = H + a's$, und $s'a = H + A$, also ist $H = H_s - s'a$ der Durchschnitt der Systeme H_s, $s'a$. Da nun weder s, noch a in H liegt, so folgt aus $H \mathfrak{Z} H_s$ und $H \mathfrak{Z} s'a$ (nach 3 und 11), daß auch $H' \mathfrak{Z} H_s$ und $H' \mathfrak{Z} s'a$, also auch $H' \mathfrak{Z} H$, mithin $H = S$ ist. Dies ist aber unmöglich, weil s (und ebenso a) außerhalb H liegt. Mithin ist gewiß $H_s = a's$, und $A = s'a$, w. z. b. w.

28. *Satz.* Der Durchschnitt von solchen Strecken as, $bs \ldots$, welche dasselbe Ende s haben, ist selbst eine solche Strecke hs, und ihr Anfang h ist vollständig bestimmt.

Denn jede solche Strecke ist (nach 11) ein System H_s, und (nach 8) gilt dasselbe von ihrem Durchschnitt, woraus der Satz (nach 27) folgt.

Zusatz zu 28. Der Durchschnitt der Strecken as, bs, $cs \ldots$ ist selbst eine dieser Strecken. — Zum Beweise schicke man voraus den

Hülfssatz. Ist hs *echter* Teil von as, und k das Element, dessen Bild $k' = h$ ist, so ist hs auch echter Teil von ks, und zugleich ist $ks \mathfrak{Z} as$.

Beweis. Wäre $k = s$, so wäre $hs = s's = S$, während doch hs echter Teil von as, also auch von S ist. Da also k verschieden von s ist, so ist (18) $ks = [k] + hs$, und (nach 19) k nicht in hs enthalten, also hs echter Teil von ks. Da hs echter Teil von as ist, so sei $as = M + hs$, wo M das System aller Elemente m von as, die außerhalb hs liegen und also auch von s verschieden sind; daraus folgt $M' \mathfrak{Z}\, as$, und da offenbar M' nicht Teil von M sein kann (weil M nicht $= S$ ist), so muß es in M ein Element m geben, dessen Bild m' außerhalb M, also in hs liegt, woraus $m's \mathfrak{Z}\, hs$ folgt*).

29. Satz. Ist T ein Teil von S, und s ein Element von S, so gibt es in S immer ein und nur ein zugehöriges Element s_1, welches die beiden folgenden Eigenschaften hat:

1. Wenn a der Bedingung $T \mathfrak{Z}\, as$ genügt, so ist $s_1 s \mathfrak{Z}\, as$
2. $T \mathfrak{Z}\, s_1 s$

und hieraus folgen die beiden Eigenschaften

3. s_1 liegt in T
4. Die Strecke ss_1 enthält kein von s und s_1 verschiedenes Element von T.

Beweis. Da $s's = S$, also $T \mathfrak{Z}\, s's$ ist (15), so gibt es mindestens ein Element a, das der Bedingung $T \mathfrak{Z}\, as$ genügt. Ist A das System aller dieser Elemente a, so ist (nach 28) der Durchschnitt aller ihnen entsprechenden Strecken eine Strecke $s_1 s$, wo s_1 ein völlig bestimmtes Element von S. Nach dem Begriffe eines Durchschnitts hat s_1 die Eigenschaft 1., aber auch die Eigenschaft 2., weil T ein gemeinsamer Teil aller as, mithin auch Teil ihres Durchschnitts $s_1 s$ ist. Ist $s_1 = s$, also $s_1 s = ss = [s]$, so folgt aus 2., daß T aus dem einzigen Elemente s besteht; und umgekehrt, wenn s in T liegt und das einzige Element von T ist, so ist $T = [s] = ss$, also nach 1. auch $s_1 s \mathfrak{Z}\, ss$, mithin $s_1 = s$; in diesem Falle hat daher s_1 die Eigenschaft 3. und offenbar auch die Eigenschaft 4. Ist aber s_1 verschieden von s, so ist (nach 18) $s_1 s = [s_1] + (s_1)'s$. Nimmt man nun an, s_1 liege außerhalb T, es sei also jedes Element von T verschieden von s_1, so folgt aus 2. auch $T \mathfrak{Z}\, (s_1)'s$, und hieraus nach 1. auch $s_1 s \mathfrak{Z}\, (s_1)'s$, was aber unmöglich ist, weil das (nach 10) in $s_1 s$ liegende Element s_1 (nach 19) außerhalb $(s_1)'s$ liegt; mithin

*) [Der Beweis ist offenbar unvollständig. Ein Beweis des Hilfssatzes ergibt sich nach Mitteilung von J. Cavaillès direkt aus 25, indem man die dortigen a, b, c durch a, k, s ersetzt. Der Zusatz folgt aus 28 und dem Hilfssatz. E. N.]

ist unsere Annahme unzulässig, d. h. s_1 hat die Eigenschaft 3. Wir betrachten nun die Strecke ss_1; besitzt sie ein von s und s_1 verschiedenes Element u, so ist auch s verschieden von s_1 (weil sonst $ss_1 = [s]$, also auch $u = s$ wäre), und (nach 18) $ss_1 = [s] + s's_1$; mithin liegt u in $s's_1$, also (nach 19) außerhalb $(s_1)'s$, und da (wie oben) $s_1 s = [s_1] + (s_1)'s$, und u auch von s_1 verschieden ist, so liegt u auch außerhalb $s_1 s$, also zufolge 2. auch außerhalb T, d. h. s_1 hat auch die Eigenschaft 4.

30. Abbildung von S in T. Durch (29) ist eine Abbildung ψ von S in T hergestellt, welche dadurch definiert wird, daß jedes Element s von S durch ψ in das dort erklärte, (nach 3.) in T liegende Element s_1 übergeht. Ist dann A irgend ein Teil von S, so soll A_1 das zugehörige Bild von A (d. h. das System der Bilder a_1 aller Elemente a von A) bedeuten. Es ist also $S_1 \mathfrak{z} T$, also auch $T_1 \mathfrak{z} T$, d. h. T wird durch ψ in sich selbst abgebildet.

31. Satz. Diese Abbildung ψ von T in sich selbst ist eine ähnliche, d. h.: sind a, b verschiedene Elemente von T, so sind auch deren Bilder a_1, b_1 verschieden.

Beweis. Nach 29 ist $T \mathfrak{z} a_1 a$ und $T \mathfrak{z} b_1 b$. Da nun a, b Elemente von T sind, so ist auch $[a] \mathfrak{z} b_1 b$, $[b] \mathfrak{z} a_1 a$. Wäre nun, obgleich a, b verschieden sind, doch $a_1 = b_1 = c$, so wäre $[a] \mathfrak{z} cb$, $[b] \mathfrak{z} ca$; da aber c von a und b verschieden ist (weil sonst auch $a = b$ wäre), so ist dies (nach Zusatz zu 25) unmöglich. Mithin sind a_1, b_1 verschieden, w. z. b. w.

Erläuterungen zur vorstehenden Abhandlung.

Die hier gegebene Definition des Endlichen ist chronologisch die erste, die die Ableitung aller Eigenschaften ohne Heranziehung des Auswahlaxioms ermöglicht — eine Tatsache, die Dedekind wohl noch nicht bewußt war. Er selbst zieht nur die ersten Folgerungen; auf diesem Weg läßt sich aus seinem letzten Satz noch folgern, daß jede Untermenge einer endlichen Menge endlich ist, und es läßt sich das Prinzip der vollständigen Induktion beweisen und damit zu der ursprünglichen Dedekindschen Definition übergehen (vgl. eine demnächst, Fund. Math. **19**, erscheinende Note von J. Cavaillès).

Einen vergleichenden Überblick über die verschiedenen Definitionen des Endlichen gibt A. Tarski (Sur les ensembles finis, Fund. Math. **6**), dessen eigene Definition so lautet: Eine Menge heißt endlich, wenn in jedem System von Untermengen mindestens eine im System minimale enthalten ist. Gleichbedeutend mit dieser Minimalbedingung — durch Übergang zur Komplementärmenge — ist die entsprechende Maximalbedingung; aus beiden folgen alle Eigenschaften der endlichen Mengen ohne Heranziehung des Auswahlpostulats. Daß die obige Definition von Dedekind mit der Minimalbedingung äquivalent ist, folgert Tarski aus der auch bei Dedekind in einer anderen Fassung auftretenden Relation: $a b' \mathfrak{Z} a b + [b']$. Insbesondere gelangt Tarski so von der obigen zu der ursprünglichen Dedekindschen Definition, während der umgekehrte Übergang das Auswahlpostulat erfordert.

Dedekind glaubte — Vorwort zur 2. Auflage von „Was sind und was sollen die Zahlen?" —, daß der Nachweis der Übereinstimmung der Definitionen die volle dort entwickelte Theorie erfordere. Wie er sich den Übergang im einzelnen gedacht hatte, zeigt die folgende Stelle aus einem Brief an H. Weber:

„Die kürzeste Charakterisierung des Endlichen und Unendlichen ist, wie ich glaube, diejenige, welche ich am 9. März 1889 gefunden und in dem Vorwort (S. XI) zur zweiten Auflage (1893) der Schrift ‚Was sind und was sollen die Zahlen?' mitgeteilt habe. Ich spreche sie so aus: ‚Ein System S heißt endlich, wenn es eine Abbildung von S in sich selbst gibt, durch welche kein echter Teil von S in sich selbst abgebildet wird; im entgegengesetzten Falle heißt S ein unendliches System.'

Nimmt man aber an, daß man die natürliche Zahlenreihe und ihre Gesetze schon vollständig kennt, und ersetzt man im vorstehenden das Wort ‚heißt' durch das Wort ‚ist', so verwandelt sich diese Definition in einen Satz, der sich so beweisen läßt:

Es sei φ eine Abbildung eines Systems S in sich selbst, durch welche kein echter Teil von S in sich selbst abgebildet wird. Das Bild eines Elementes a oder eines Teiles A von S bezeichne ich mit $a\varphi$ oder $A\varphi$ (viel natürlicher als $\varphi(a)$ oder $\varphi(A)$). Ist a irgendein Element von S, so sind auch alle Bilder

$$a\varphi,\ a\varphi^2 = (a\varphi)\varphi \ldots, \quad a\varphi^{n+1} = (a\varphi^n)\varphi \ldots$$

Elemente von S, also ist auch das System A aller dieser Bilder ein Teil von S, und da $A\varphi$ das System aller Bilder

$$(a\varphi)\varphi = a\varphi^2, \qquad (a\varphi^2)\varphi = a\varphi^3,$$

also ein Teil von A ist, so wird A durch φ in sich selbst abgebildet; und folglich ist $A = S$. Mithin ist a auch Element von A, es gibt also eine kleinste natürliche Zahl n, die der Bedingung

$$a\varphi^n = a$$

genügt. Dann ist S das System der n Elemente

$$a\varphi,\ a\varphi^2 \ldots a\varphi^n$$

und diese sind voneinander verschieden. Denn zufolge der Definition von n ist das letzte Element verschieden von allen vorhergehenden; wäre ferner $1 \leqslant r < s < n$ und

$$a\varphi^r = a\varphi^s,$$

so wäre

$$(a\varphi^r)\varphi^{n-s} = (a\varphi^s)\varphi^{n-s},$$

also

$$a\varphi^{r+n-s} = a\varphi^n = a;$$

obgleich $1 < r + n - s < n$. Daß endlich S keine anderen als diese n Elemente enthält, folgt aus $a\varphi^{m+n} = a\varphi^m$. Also ist wirklich S ein endliches System (im üblichen Sinne), und zugleich ergibt sich, daß φ eine zyklische Permutation der n Elemente von S, also auch eine ähnliche (d. h. eindeutig umkehrbare) Abbildung ist.

Umgekehrt, besteht ein (im üblichen Sinne) endliches System S aus n verschiedenen Elementen

$$a_1, a_2 \cdots a_{n-1}, a_n$$

und definiert man eine Abbildung φ von S durch

$$a_n \varphi = a_1, \; a_r \varphi = a_{r+1}$$

für $1 \leqslant r < n$, so ist $S' = S$, also φ eine Abbildung von S in sich selbst, und man zeigt leicht, daß kein echter Teil von S in sich selbst abgebildet wird. Denn wenn ein Teil A von S durch φ in sich selbst abgebildet wird und ein Element a enthält, so muß A auch alle Elemente $a\varphi$, $a\varphi^2$, $a\varphi^3$, ..., also alle Elemente von S enthalten, mithin $= S$ sein. W. z. b. w."

Noether.
