LXV.

Aus Briefen an R. Lipschitz.

Braunschweig, 29 April 1876.

Sie haben mir durch Ihren Brief eine sehr große und zugleich sehr unverhoffte Freude gemacht, da ich seit einigen Jahren so ziemlich die Hoffnung aufgegeben hatte, daß meine Darstellung und Auffassung einer allgemeinen Theorie der Ideale in jetziger Zeit noch irgend Jemand außer mir interessiren würde. Mit Ausnahme des Prof. H. Weber in Königsberg, der als Herausgeber der demnächst erscheinenden gesammelten Werke Riemann's in einen nahen Verkehr mit mir getreten ist und mir neulich, wohl durch diesen Umstand veranlaßt, seine Absicht zu erkennen gegeben hat, sich mit dieser Theorie zu beschäftigen, sind Sie der erste, der nicht blos ein Interesse an dem Gegenstande äußert, sondern dasselbe auch in so praktischer Weise bethätigt, daß ich daraus die Hoffnung schöpfe, nicht ganz vergeblich gearbeitet zu haben. Ich hatte geglaubt, daß die Aufnahme dieser Untersuchung in Dirichlet's Zahlentheorie das sicherste Mittel wäre, um einen größeren Kreis von Mathematikern für die Bearbeitung dieses Feldes zu gewinnen, allein ich habe mich nach und nach davon überzeugt, daß die Darstellung selbst wohl die Schuld an dem Mißlingen dieses Planes trägt. Ich muß vermuthen, daß die Darstellung durch übertriebene Kürze und Gedrängtheit die Leser abgeschreckt hat, und ich habe daher seit dem Herbst meine freie Zeit, die ich durch Niederlegung meines dreijährigen Directorats des hiesigen Polytechnikums gewonnen habe, dazu benutzt, eine ausführlichere Darstellung der Theorie der Ideale auszuarbeiten, mit welcher ich auch so weit gekommen bin, daß die eigentliche Grundlage (der Inhalt des § 163) in einer etwas verbesserten Form gewonnen ist. Die Änderung ist indessen keine wesentliche, und ich glaube auch, daß eine solche, wenigstens bei dem von mir eingeschlagenen Wege, gar nicht möglich ist; die Schwierigkeiten, die ich bei der

Herstellung dieser allgemeinen, ausnahmelosen Theorie vor sechs Jahren zu überwinden gehabt habe, finden nach meiner Überzeugung ihren innern Grund in dem Umstande, daß neben dieser Theorie, welche alle ganzen Zahlen eines beliebigen Körpers umfaßt, immer unendlich viele mit Ausnahmen behaftete Theorieen nebenher laufen, die sich immer nur auf einen Theil aller ganzen Zahlen (auf Ordnungen, derivirte Formen) beziehen. Und diese Schwierigkeit, durch welche die Beweisführung sehr verlängert wird, halte ich für ganz unvermeidlich. Leider! denn jeder Leser wird schon auf dem halben Wege glauben, dem Abschlusse der Beweisführung ganz nahe zu sein, und dann immer zu seinem Verdrusse bemerken, daß noch neue Hülfsmittel zugezogen werden müssen. Allerdings kommt dann endlich der Abschluß, aber der Weg ist weit.

Ich bitte Sie nun sehr um Entschuldigung, daß ich nicht schon längst Ihnen meinen Dank für Ihre mir überaus erfreuliche und werthvolle Theilnahme ausgesprochen habe; mein Zögern, das, wie ich fürchte, Ihnen auffällig und kaum erklärlich sein wird, hat theils seinen Grund in der großen Menge von Geschäften und Arbeiten, die ich gerade in dieser Zeit zu erledigen hatte, theils und vor Allem in meiner Unentschlossenheit über die Art, wie der von Ihnen geäußerte Gedanke sich wohl verwirklichen ließe; so ist es gekommen, daß ich schon mehrere Male begonnen habe Ihnen zu schreiben, dann aber durch neue Zweifel an der Ausführbarkeit meiner Vorschläge bewogen bin, sie noch zurückzuhalten. Nach nochmaliger reiflicher Überlegung erlaube ich mir nun, Ihnen meine Ansicht mitzutheilen, in der Hoffnung, daß ich durch meine Lässigkeit das Interesse, welches Sie an der Sache nehmen, nicht gänzlich verscherzt habe.

Die oben erwähnte, in diesem Winter begonnene, aber noch nicht vollendete Arbeit, welche ich entweder für das Borchardt'sche Journal oder für die Göttinger Abhandlungen bestimmt hatte, würde für den vorliegenden Zweck viel zu ausführlich sein; andererseits würde eine auszugsweise Darstellung in ähnlicher Weise, wie Sie eine solche von Ihren höchst interessanten Untersuchungen über die homogenen Differential-Ausdrücke für das Bulletin ausgearbeitet haben, mir schwerlich gelingen; Sie haben es in sehr glücklicher Weise erreicht, dem Leser ein übersichtliches Bild Ihrer Forschungen vorzuführen und in so verständlicher Weise, daß man allenfalls im Stande wäre, die Original-Abhandlungen danach wiederherzustellen. Bei meinem Gegenstande aber, bei der Ihnen ja so genau bekannten Natur der zahlentheoretischen Deduction, scheint mir die wirkliche Begründung durch vollständige Beweise unerläßlich zu sein; ohne diese würde die Mittheilung der Hauptresultate allein schwerlich in verständlicher Weise möglich sein, und jedenfalls würde sie kein Interesse erregen. Es ist auch nicht möglich, die Beweise etwa nur andeutungsweise mitzutheilen; ob der Beweis glückt oder nicht, das hängt meist an einem Haare. Obgleich damals das zu erreichende Ziel stets klar vor mir lag, so ist es mir doch erst nach wirklich unsäglichen Anstrengungen gelungen, Schritt für Schritt vorwärts zu kommen und endlich jede Lücke auszufüllen; ich hatte fortwährend das Gefühl, an einer Leiter zu hängen mit der Furcht, daß es mir nicht mehr gelingen würde, die folgende Sprosse zu abreichen, und wenn ich meine damalige Darstellung dieser Beweise nicht gedruckt oder geschrieben vor mir hätte, so würde es mir jetzt abermals eine große Mühe machen, alle Beweismittelchen, jedes am rechten Orte wieder so zusammenzufügen, daß das Ziel wirklich erreicht würde. Aus diesem Grunde glaube ich fest, daß nur eine in den Beweisen vollständige Darstellung einige Aussicht haben kann, den Leser für die Sache zu interessiren. Wenn die Herausgeber des Bulletin hierauf eingehen und mir sogar zugestehen wollen, daß ich einzelne Puncte etwas weiter ausführe, dagegen alles Überflüssige weglasse, so würde der Inhalt sich etwa so gestalten.

Von § 159 würde der Theil I beibehalten, II und III gänzlich gestrichen; § 160 beibehalten etwa mit Weglassung von Nros. 5 und 7; § 161 beibehalten, sogar noch etwas vervollständigt; § 162 wesentlich beibehalten; § 163 in veränderter, ausführlicherer Darstellung beibehalten; § 164 beibehalten.

Hiermit wäre ein gewisser Abschluß erreicht, mit welchem man sich wohl begnügen könnte, da die eigentliche Grundlage der Theorie dann gewonnen ist. Dies würde etwa 50 Druckseiten, vielleicht auch noch mehr geben. In Wahrheit habe ich meine Untersuchungen, von denen damals nur ein Theil veröffentlicht ist, sowohl im Allgemeinen als auch in ihrer Anwendung auf specielle Körper-Classen weiter fortgeführt, soviel es meine in den letzten Jahren sehr beschränkte Zeit gestattete; ein eigentliches Ende dieses Arbeitsfeldes ist gar nicht zu absehen. Würde mehr gewünscht, so könnte eine Fortsetzung geliefert werden, aber mir scheint die obige Abgrenzung vorläufig eine zweckmäßige, und man könnte der beabsichtigten Darstellung mit Recht den Titel Éléments de la théorie des idéaux geben, wenn dieser Plural von idéal richtig ist. Ich würde übrigens nicht mehr im Stande sein, diese Darstellung selbst in französischer Sprache auszuarbeiten, da es mir seit meinem Weggang von Zürich an der erforderlichen Übung gefehlt hat.

Ich bitte Sie nun, hochgeehrter Herr College, meinen Vorschlag zu prüfen und, falls er Ihren Beifall findet, den Herausgebern des Bulletin mitzutheilen; sollten Sie aber von vornherein die Überzeugung haben, daß die von mir vorgeschlagene Darstellungsweise für die eigentlichen Zwecke des Bulletin ungeeignet ist, so bitte ich Sie, mir dies ohne Weiteres zu eröffnen; ich würde dann auf eine Darstellung in dem Bulletin, so leid es mir thun würde, verzichten müssen. Wie aber auch Ihr Urtheil hierüber ausfallen möge, seien Sie überzeugt, daß ich Ihnen von Herzen dankbar bin für die große Freude, die Sie mir durch Ihre freundliche Theilnahme bereitet haben; denn ich bin keineswegs unempfänglich für eine Anerkennung, die von so competenter Seite ausgeht. ...

Braunschweig, 30 Mai 1876.

Ihr Schreiben vom 4. d. M. habe ich mit großem Interesse gelesen, und ich sage Ihnen meinen besten Dank für die Theilnahme, die Sie meiner Ideal-Arbeit zu schenken fortfahren; ich bin aber fest überzeugt, daß Sie die Beziehungen zwischen einzelnen Theilen derselben und auch ihre Stellung zu den Untersuchungen anderer Mathematiker in etwas anderem Lichte sehen würden, wenn es mir vergönnt wäre, mich ausführlich darüber mit Ihnen mündlich zu unterhalten. Es ist mir unmöglich, in der Hauptsache den von Ihnen in Vorschlag gebrachten Plan zu befolgen, sowohl hinsichtlich der Anordnung, als dem Inhalte nach. Um hierüber keinen Zweifel übrig zu lassen und um noch nicht gänzlich auf die Ausführung der von Ihnen angeregten Publication verzichten zu müssen, habe ich mich zuletzt entschlossen, die beiliegende Einleitung zu verfassen, in welcher ich mich bemühe, den eigentlichen Gegenstand und denjenigen Kernpunct der Ideal-Theorie deutlich zu bezeichnen, auf dessen Darstellung ich mich durchaus beschränken muß, wenn diese nicht eine unpassende und gewiß unerwünschte Länge erhalten soll; selbst bei dieser Beschränkung fürchte ich schon zu lang zu werden. Der beiliegenden Einleitung würden drei Abschnitte folgen:

I. Hülfssätze aus der Theorie der Moduln (etwas genauere Ausführung von § 161 der Zahlentheorie von Dirichlet, mit dem Beweise des in der letzten Anmerkung daselbst angegebenen Satzes).

II. Der Keim der Theorie der Ideale (Erinnerung an die Lehre von der Theilbarkeit und deren Beweismethoden bei den rationalen und den Gauß'schen complexen Zahlen. Abweichendes Verhalten in dem Gebiete der Zahlen von der Form $x + y\sqrt{-5}$, an welchem einfachsten Beispiele die in der nachfolgenden Theorie auftretenden Hauptbegriffe ausführlich erörtert werden).

III. Theorie der ganzen algebraischen Zahlen (in der in der Einleitung angedeuteten Reihenfolge; eine lange Kette von Sätzen!).

Ich hoffe die Einleitung so geschrieben zu haben, daß aus ihr sich eine hinlängliche Rechtfertigung des vorstehenden Planes ergiebt, und es würde mich sehr freuen, wenn es mir gelänge, auch Ihre Zustimmung zu demselben zu gewinnen, da ich auf eine Änderung nicht eingehen könnte und dann ganz auf die Ausführung verzichten müßte. ...

1876. 6. 10.

... Ich bin weit davon entfernt, die Bemerkungen, welche Sie über meine „Einleitung" [XLVIII] machen, übel aufzunehmen; im Gegentheil bin ich sehr erfreut über die aufrichtige Mittheilung Ihrer Bedenken und über das Interesse an dem Gegenstande, welches sich in denselben deutlich ausspricht. Aber ich hoffe auch, daß Sie es nicht einem hartnäckigen Eigensinn zuschreiben werden, wenn ich nach einer durch zwanzig Jahre fortgesetzten Beschäftigung mit diesen Gedanken Ihre Bedenken nicht theile und mich auch nicht dazu entschließen kann, durch Abänderungen dieser Einleitung, in welcher ich jedes Wort erst nach der sorgfältigsten Überlegung niedergeschrieben habe, noch weitere Concessionen zu machen; denn es finden sich in derselben wirklich schon mehrere Concessionen. Mein Streben in der Zahlentheorie geht dahin, die Forschung nicht auf zufällige Darstellungsformen oder Ausdrücke sondern auf einfache Grundbegriffe zu stützen und hierdurch — wenn diese Vergleichung auch vielleicht anmaßend klingen mag — auf diesem Gebiete etwas Ähnliches zu erreichen, wie Riemann auf dem Gebiete der Functionentheorie, wobei ich die beiläufige Bemerkung nicht unterdrücken kann, daß die Riemannschen Principien von den meisten Schriftstellern, z. B. auch in den neuesten Werken über elliptische Functionen, nach meiner Ansicht nicht in consequenter Weise zur Anwendung gebracht werden; fast immer wird die einfache Theorie verunziert durch unnöthige Einmischung der Darstellungsformen, welche doch eigentlich nur Resultat, nicht Hülfsmittel der Theorie sein sollten. In ähnlicher Weise verunziere ich in der Einleitung den Begriff eines endlichen Körpers Ω dadurch, daß ich eine Darstellungsform angebe, in welcher alle Zahlen des Körpers enthalten sind und welche ebenso gut durch unendlich viele andere Darstellungsformen ersetzt werden könnte, wenn statt der dortigen Zahl θ andere Zahlen desselben Körpers als Ausdrucksmittel genommen würden; es bedarf offenbar schon einiger Überlegung oder gar eines wenn auch leichten Beweises, um einzusehen, daß hierbei der gesammte Zahlen-Inhalt des Körpers durchaus unverändert bleibt. Principiell ist daher die in der Zahlentheorie § 159 [XLVII] gegebene Definition bei Weitem vorzuziehen „ein endlicher Körper ist ein solcher, der nur eine endliche Anzahl von Divisoren besitzt“ oder auch die hiermit abermals äquivalente Definition: „ein endlicher Körper ist ein solcher Körper, welcher nur eine endliche Anzahl von einander unabhängiger Zahlen enthält“. Aber ich habe diese Concession gemacht, um aus der allgemeinen Theorie der Körper möglichst wenig zu entlehnen und um an allgemein bekannte Dinge anzuknüpfen. ...

. . . .

... 3⁰. Hinsichtlich meiner auf die irrationalen Zahlen bezüglichen Note schreiben Sie: ... „Ich muß jetzt gestehen, daß ich die „Berechtigung Ihrer Definition nicht leugne, daß ich aber der Meinung „bin, dieselbe unterscheide sich nur in der Form des Ausdruckes aber „nicht in der Sache von dem, was die Alten festgestellt haben. Ich „kann nur sagen, daß die von Euclid V, 5 aufgestellte Definition, „welche ich lateinisch anführe

rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quae possunt multiplicatae sese mutuo superare,

„und was folgt, für genau so befriedigend halte, als Ihre Definition. „Aus diesem Grunde würde ich wünschen, daß namentlich die Be-

„hauptung wegfiele, daß solche Sätze wie $\sqrt{2} . \sqrt{3} = \sqrt{6}$ bisher nicht „wirklich bewiesen seien. Ich glaube nämlich, daß insbesondere die „französischen Leser mit mir der Überzeugung sein werden, daß das „angeführte Buch des Euklid die Principien enthalte, die zum Beweise „dieser Sätze nothwendig und hinreichend sind. Ich kann übrigens „diese Bemerkung nicht schließen, ohne zu sagen, wie schwer es mir „wird, Ihnen dieselbe zu schreiben. Diese Fragen berühren, um einen „Ausdruck Jacobi's zu gebrauchen, ein analytisches Herz auf das „tiefste, und ich will nur wünschen, daß Sie mir nicht böse werden."

Hier bin ich leider gestern (Freitag) Abend durch einen Besuch unterbrochen, und dadurch verzögert sich meine Antwort. — Zunächst bitte ich Sie nochmals überzeugt zu sein, daß ich bei dieser Gelegenheit ganz und gar nicht empfindlich bin; ich habe mir nie eingebildet, daß meine Auffassung der irrationalen Zahlen einen besonderen Werth habe, sonst würde ich sie nicht beinahe vierzehn Jahre für mich behalten haben; im Gegentheil bin ich immer überzeugt gewesen, daß jeder gut durchgebildete Mathematiker unserer Zeit, der sich nur einmal ernstlich die Aufgabe stellt, diesen Gegenstand in strenger Weise zu erledigen, auch ganz gewiß zum Ziele kommen wird; zugleich bin ich weit davon entfernt, etwa den Mathematikern, die sich diese Frage überhaupt gar nicht vorlegen, daraus einen Vorwurf zu machen; jeder von ihnen wird mit Recht das untrügliche Gefühl haben, daß er die Sache machen könnte, wenn er nur wollte, und wenn es sich der Mühe verlohnte, die Zeit daran zu wenden. Ich werde daher, obgleich ich durchaus nicht unempfänglich für Lob und Tadel bin, in diesem Falle wirklich gar nicht gekränkt sein, wenn man mir selbst das geringe Verdienst abspricht, was ich an der Sache zu haben glaube. Trotzdem will ich, weil der Gegenstand mich nun einmal sehr interessirt, mir erlauben Ihnen die Gründe vorzutragen, weshalb ich mich Ihrer Ansicht durchaus nicht anschließen kann. Ich setze dabei als Basis, über die man sich natürlich verständigt haben muß, die Arithmetik der rationalen Zahlen als fest begründet voraus und Nichts weiter; in meiner Schrift zeige ich, ohne jede Einmischung fremdartiger Dinge, daß in dem Gebiete der rationalen Zahlen selbst eine Erscheinung sich angeben läßt (der Schnitt), welche dazu benutzt werden kann, dieses Gebiet durch eine einzige Schöpfung von neuen, irrationalen Zahlen zu vervollständigen, und ich beweise, daß das so entstandene Gebiet aller reellen Zahlen die Eigenthümlichkeit besitzt, in welcher ich das Wesen der Stetigkeit (§ 3) erblicke (will man keine neuen Zahlen einführen, so habe ich nichts dagegen; der von mir bewiesene Satz (§ 5, IV) lautet dann so: das System aller Schnitte in dem für sich unstetigen Gebiete der rationalen Zahlen bildet eine stetige Mannigfaltigkeit); ich zeige ferner (§ 6), daß die Addition von je zwei reellen Zahlen in aller Schärfe definirbar ist, und behaupte, daß dasselbe von den übrigen Rechnungen gilt, und daß man hierauf gestützt auch die Sätze, aus welchen das Gebäude der Arithmetik besteht, in aller Strenge beweisen könne. Natürlich sind diese letzten Behauptungen obligatorisch für mich in der Weise, daß, wenn Jemand die Beweisbarkeit eines Satzes aus meinen Principien noch bezweifeln sollte, ich diesen Beweis wirklich liefern muß. Zugleich behaupte ich, daß diese Sätze der Arithmetik zum größten Theile (eigentlich fast alle) bisher nicht bewiesen seien, und um wo möglich den Widerspruch aufs Äußerste zu reizen, sage ich, der Satz: $\sqrt{2}\,.\,\sqrt{3} = \sqrt{6}$ sei vorher noch nie bewiesen. Will Jemand mich hierin widerlegen, will man also behaupten, der Satz sei schon bewiesen, so liegt jetzt die Beweislast dem Anderen ob, und er muß mir einen wirklich publicirten Beweis dieses oder eines ihn umfassenden Satzes namhaft machen. Glauben Sie nun wirklich, daß ein solcher Beweis sich in irgend einem Buche findet? Natürlich habe ich eine ganze Menge von Werken der verschiedenen Nationen auf diesen Punct hin geprüft, und was findet man da? Nichts als die rohesten Cirkelschlüsse, etwa so: $\sqrt{a}\sqrt{b}$ ist $= \sqrt{ab}$, weil $(\sqrt{a}\,.\,\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2\,.\,(\sqrt{b})^2 = ab$ ist; nicht die geringste Erklärung des Productes von zwei irrationalen Zahlen geht voraus, und ohne irgend ein Bedenken wird der für rationale Zahlen m, n bewiesene Satz $(mn)^2 = m^2 n^2$ auch für irrationale Zahlen in Anspruch genommen. Ist es nun nicht eigentlich empörend, daß der Unterricht in der Mathematik auf Schulen als ein besonders ausgezeichnetes Bildungsmittel des Verstandes gilt, während doch in keiner anderen Disciplin (wie z. B. Grammatik) solche grobe Verstöße gegen die Logik nur einen Augenblick geduldet würden? Man sei, wenn man einmal nicht wissenschaftlich verfahren will oder auch der Zeit wegen nicht kann, wenigstens ehrlich und gestehe dies auch dem Schüler offen ein, der ohnehin sehr geneigt ist, dem Lehrer auf dessen Wort hin an einen Satz zu glauben; das ist besser, als durch Scheinbeweise den reinen, edelen Sinn für wahre Beweise zu ertödten.

Ich glaube nun eigentlich, daß ich mich durch das Vorstehende schon hinlänglich gerechtfertigt habe; aber ich will so leichten Kaufes gar nicht davon kommen und sehr gern auf die ganz andere Wendung eingehen, die Sie der Frage gegeben haben; Sie behaupten gar nicht, daß ein strenger Beweis des obigen Satzes irgendwo zu finden sei, aber Sie sprechen die Ansicht aus, daß in der berühmten und mit Recht bewunderten Euklidischen Definition des Verhältnisses (ratio, λογος) von gleichartigen Größen, sowie in dem übrigen Inhalte des fünften Buches der Elemente die Principien enthalten seien, welche zum Beweise des Satzes nothwendig und hinreichend sind. Abgesehen davon, daß mir wie schon oben bemerkt die Hereinziehung der Größen in die reine Zahlenlehre nicht gefällt, muß ich mich bestimmt gegen diese Ansicht erklären; die genannte Basis ist nach meiner Meinung nicht ausreichend, wenn nicht zu den Euklidischen Principien außerdem noch der darin keineswegs enthaltene Kernpunct meiner Schrift, das Wesen der Stetigkeit (§ 3), hinzugethan wird. Die Definition von Euklid lautet in unserer Ausdrucksweise so: die gleichartigen Größen A, B haben dasselbe Verhältniß wie die gleichartigen Größen A_1, B_1, wenn für jedes Paar von ganzen rationalen Zahlen m, n entweder gleichzeitig $nA < mB$ und $nA_1 < mB_1$, oder gleichzeitig $nA = mB$ und $nA_1 = mB_1$, oder gleichzeitig $nA > mB$ und $nA_1 > mB_1$ ist. Soll diese Definition überhaupt einen Sinn haben, so wird über die Dinge, die Größen genannt werden, zweierlei und nichts weiter vorausgesetzt:

1°. Von je zwei verschiedenen, gleichartigen Größen wird stets eine als die größere, die andere als die kleinere erkannt.

2°. Ist A eine Größe, und n eine ganze Zahl, so giebt es immer eine mit A gleichartige Größe nA, das der Zahl n entsprechende Vielfache von A.

Im Übrigen erfährt man, außer diesen stillschweigend gemachten und den in Ihren lateinischen Worten (ich bitte Sie mir zu schreiben, weshalb unterstreichen Sie das Wort superare so bedeutungsvoll?*)) enthaltenen Voraussetzungen, Nichts über die Ausdehnung oder

*) [Lipschitz antwortet hier: „Das Wort superare habe ich deshalb unterstrichen, weil Euklid sich mit demselben die Möglichkeit öffnet, die Verhältnisse von solchen Größen zu betrachten, die nicht das Verhältniß von zwei ganzen Zahlen haben.“ Er fährt dann mit den von Dedekind im nächsten Brief (S. 476 f.) zitierten Worten fort: Die ... Definition von der Gleichheit zweier Verhältnisse .... E. N.]

Mannigfaltigkeit eines Gebietes von gleichartigen Größen, und die Definition sagt nur, wann zwei in einem Größengebiete vorhandenen Individuen dasselbe Verhältniß haben wie zwei andere. Ich will aber außerdem noch gern zugeben, daß das Verhältniß als allgemeine Definition einer Zahl gelten soll, obgleich Euklid niemals λογος und ἀριθμος als gleichbedeutend gebraucht. Nun bildet z. B., wenn A eine bestimmte Größe ist, der Inbegriff aller Vielfachen nA ein Größen-Gebiet, welches für sich allein schon den obigen Voraussetzungen genügt, und es findet sich in diesem Buche Euklids nicht die geringste Andeutung darüber, daß noch vollständigere Größen-Gebiete existiren können; ein solches Größen-Gebiet würde offenbar durch die Verhältnisse zwischen je zwei dieser Größen zu der Definition aller rationalen Zahlen führen; und dieses Zahlgebiet würde auch nicht mehr erweitert werden, wenn man zu den um eine Stufe vollständigeren Größen-Gebieten übergeht, welche aus allen genauen Theilen (Definition 1) einer bestimmten Größe und deren Vielfachen also allen mit einer Größe commensurabeln Größen bestehen. Ein solches Gebiet besitzt schon eine sehr respectabele Mannigfaltigkeit der Größen-Abstufungen, und es würde so leicht kein Mensch darauf kommen, noch vollständigere Gebiete zu verlangen. Der Begriff der Zahl als Verhältniß gleichartiger Größen würde dann niemals über das Rationale hinaus kommen. Nun wird Jeder sagen: wenn Euklid weiter Nichts gewollt hätte, als die Betrachtung solcher Größen-Gebiete, dann hätte er nicht nöthig gehabt, seine Verhältniß-Definition so schwerfällig zu machen, er hätte einfach sagen können: das Verhältniß von A zu B ist gleich dem von A_1 zu B_1, wenn es zwei ganze Zahlen m, n von der Art giebt, daß gleichzeitig $nA = mB$ und $nA_1 = mB_1$ ist. Also versteht sich von selbst, daß Euklid vollständigere Größen-Gebiete im Auge gehabt hat; und in der That wird im Buch X auch von incommensurabeln Größen gehandelt, denen mithin neue Verhältnisse, neue, irrationale Zahlen entsprechen. Aber nirgends findet sich bei Euklid oder einem späteren Schriftsteller der Abschluß solcher Vervollständigung, der Begriff des stetigen d. h. denkbar vollständigsten Größen-Gebietes, dessen Wesen in der Eigenschaft besteht: „zerfallen alle Größen eines stetig abgestuften Größen-Gebietes in zwei Classen von der Art, daß jede Größe der ersten Classe kleiner ist als jede Größe der zweiten Classe, so existirt entweder in der ersten Classe eine größte, oder in der zweiten Classe eine kleinste Größe". Wenn diese Eigenschaft nicht ausdrücklich in den Begriff des Größen-Gebietes aufgenommen wird, so bleibt auch das zugehörige Zahlen-Gebiet unvollständig, und es sind schon deshalb allgemein-gültige Definitionen der arithmetischen Operationen geradezu unmöglich, weil in solchen lückenhaften Zahlen-Gebieten die aus zwei wirklich darin existirenden Zahlen abzuleitende Summe, Differenz u. s. w. in demselben Zahlen-Gebiete vielleicht nicht existirt. Wenn man freilich auf allgemeine Definitionen der Addition, Subtraction, Multiplication, Division verzichtet, so braucht man nur zu sagen: Ich verstehe unter dem Producte $\sqrt{2}\,.\,\sqrt{3}$ die Zahl $\sqrt{6}$, folglich ist $\sqrt{2}\,.\,\sqrt{3} = \sqrt{6}$, w. z. b. w.! Es wäre dies nur das äußerste Extrem einer an sich wohl denkbaren aber gewiß nicht empfehlenswerthen Behandlungsweise, bei welcher eine Operation, z. B. die Multiplication, immer wieder von Neuem definirt würde, sobald ihr neue Zahlen unterworfen werden sollen. Nach allem diesem bleibe ich bei meiner Behauptung, daß die Euklidischen Principien allein, ohne Zuziehung des Principes der Stetigkeit, welches in ihnen nicht enthalten ist, unfähig sind, eine vollständige Lehre von den reellen Zahlen als den Verhältnissen der Größen zu begründen; und ich halte die provocirende Bemerkung, der Satz $\sqrt{2}\,.\,\sqrt{3} = \sqrt{6}$ sei nicht bewiesen, nicht blos für wahr, sondern auch für nützlich. Umgekehrt aber wird durch meine Theorie der irrationalen Zahlen das vollkommene Muster eines stetigen Gebietes erschaffen, welches eben deshalb fähig ist, jedes Größen-Verhältniß durch ein bestimmtes in ihm enthaltenes Zahl-Individuum zu charakterisiren. — Und nun bitte ich Sie, meinem analytischen Herzen auch eine offenherzige Anfrage zu verzeihen: nicht wahr, die von Ihnen unter 3º ausgesprochene Ansicht über das Verhältniß meiner Principien zu Euklid's Elementen ist bis jetzt nur eine Vermuthung, deren Triftigkeit Sie selbst nicht bis auf den tiefsten Grund geprüft haben? im entgegengesetzten Falle würden Sie mich zum größten Danke verpflichten, wenn Sie mir eine Begründung Ihrer Ansicht mittheilen wollten. ...

1876. 7. 27.

... Obgleich ich nun, wie schon gesagt, wenig Hoffnung habe, daß wir uns einigen werden, weil wir uns schwerlich einander etwas Neues zu bieten haben, und obgleich es vielleicht zweckmäßiger wäre, die Discussion zu verschieben, bis Ihr Werk vollendet ist, falls dann überhaupt noch eine Veranlassung zur Fortsetzung unserer Verhandlung vorliegen sollte, so bitte ich Sie doch, auf Ihren zweiten Brief mir auch zum zweiten Male das Wort zu gestatten, da ich wünsche, Ihrem Standpuncte gegenüber den meinigen noch einmal möglichst deutlich hervorzuheben. Zunächst möchte ich mich gern gegen eine Äußerung von Ihnen vertheidigen, aus welcher mir hervorzugehen scheint, daß Sie mir noch immer eine unrichtige Meinung über den Werth meiner Schrift über die Stetigkeit zuschreiben, während ich doch in meinem letzten Briefe an Sie mich so darüber ausgesprochen habe, daß ich jeden Zweifel zerstreut zu haben glaubte. Nachdem Sie das Beispiel von der $\sqrt{2}$ besprochen haben, fügen Sie die Worte hinzu: „Auch dies haben uns die Alten gelehrt, und hat die Definition Ihres Schnittes einen hievon verschiedenen Inhalt? Ich meine, nein. Was Sie von der Vollständigkeit des Gebietes erwähnen, die aus Ihren Principien abgeleitet wird, so fällt dieselbe in der Sache mit der Grundeigenschaft einer Linie zusammen, ohne die kein Mensch sich eine Linie vorstellen kann.“ Die erste Hälfte dieses Passus, von welcher ich zunächst allein rede, klingt nun genau so, als schrieben Sie mir die Meinung zu, ich hätte zuerst die Erscheinung beobachtet und hervorgehoben, die ich lediglich der Kürze wegen, weil sie so oft in meiner Schrift erwähnt wird, mit einem besondern Namen — Schnitt — bezeichnet habe. Diese Annahme bitte ich Sie gänzlich fallen zu lassen; niemals habe ich geglaubt, in meiner Schrift auch nur eine einzige neue Erscheinung oder irgend ein neues Object der mathematischen Untersuchung zu Tage gefördert zu haben. Die Erscheinung des Schnittes wird ja fast in jedem arithmetischen Lehrbuche angeführt, wenn es sich darum handelt, irrationale Zahlen mit jeder beliebigen Annäherung durch rationale Zahlen darzustellen (wobei freilich immer ein logischer Hauptfehler gemacht wird). Ebenso wenig habe ich gemeint, durch meine Definition der irrationalen Zahlen irgend eine Zahl erschaffen zu haben, die nicht vorher schon in dem Geiste eines jeden Mathematikers mehr oder weniger deutlich aufgefaßt war; dies geht aus meiner ausdrücklichen Erklärung (S. 10 und 30) hervor, daß die durch meine Definition der irrationalen Zahlen erreichte Vollständigkeit oder Stetigkeit (A) des reellen Zahlgebietes wesentlich äquivalent ist mit dem von allen Mathematikern anerkannten und benutzten Satze (B):

„Wächst eine Größe beständig, aber nicht über alle Grenzen, so nähert sie sich einem Grenzwerth“. Ebenso habe ich (S. 18) ausdrücklich bemerkt, daß ich keinem Menschen etwas Neues zu sagen glaube durch den Satz (C): „Zerfallen alle Puncte ... in zwei Stücke hervorbringt“. Ebenso wenig endlich halte ich für neu den in meinem letzten Briefe an Sie angeführten Satz (D): „Zerfallen alle Größen . . . . eine kleinste Größe“. Die ganze Tendenz meiner Schrift, die ich in der Einleitung und in § 3. deutlich bezeichnet zu haben glaube, geht vielmehr lediglich darauf hinaus, mit Benutzung der allgemein bekannten Schnitt-Erscheinung nachzuweisen (was meines Wissens noch nirgends geschehen war), daß auf der alleinigen Grundlage der Arithmetik der rationalen Zahlen, also ohne jede Zuziehung des ziemlich dunkelen und complicirten Größen-Begriffes, die irrationalen Zahlen mit einem Schlage definirt werden können, und zwar, was das Wichtigste ist, in derjenigen Vollständigkeit (Stetigkeit), welche für einen absolut strengen, wissenschaftlichen Aufbau der Arithmetik der reellen Zahlen ausreichend und zugleich unentbehrlich ist. Daß dies wirklich gelungen ist, stellen Sie, wie ich glaube, nicht in Abrede (dasselbe gilt von der Darstellung der Herrn Heine und Cantor in Halle, die nur äußerlich von der meinigen verschieden ist); unsere Meinungs-Differenz bezieht sich ausschließlich auf die von Ihnen ausgesprochene Ansicht, daß diese Principien, wenn auch in anderem Gewande, doch vollständig in Euklid's Elementen enthalten seien, und Sie wiederholen in Ihrem letzten Briefe diesen Ausspruch theils ausdrücklich, theils implicite dadurch, daß Sie in dem zweiten Theile des oben citirten Passus gerade die Vollständigkeit oder Stetigkeit, — um die allein sich meine ganze Schrift dreht und drehen mußte, wenn der beabsichtigte Erfolg erreicht werden sollte —, für etwas Selbstverständliches erklären, theils endlich dadurch, daß Sie schreiben: „Die .. Definition von der Gleichheit zweier Verhältnisse ... entscheidet Alles mit Einem Schlage. Wenn Sie dies nicht anerkennen, so kann ich es mir nur dadurch erklären, dass Sie nicht erwogen haben, dass Euklid bei jener Definition die Existenz von Verhältnissen, die nicht dem Verhältniss von zwei ganzen Zahlen gleich sind, voraussetzt. Sie haben die Absicht von vorne herein nur rationale Zahlen vorauszusetzen und Grössen, die durch rationale Zahlen gemessen werden. Euklid verfährt in diesem Stücke anders, und das ist auch der Kern Ihrer Differenz mit Euklid. Euklid denkt sich eine Grösse durch das Mass einer scharf definirten Linie bestimmt, und unter diesem Gesichtspunkt kann er Linien aufweisen, die zu einer gewissen Linie in einem Verhältnisse stehen, das nicht durch zwei ganze Zahlen ausgedrückt werden kann". Es folgt dann die Besprechung des Beispiels vom Verhältnisse der Diagonale zur Seite des Quadrats, dessen Irrationalität (im modernen Sinne) auch ich in meiner Schrift (S. 16) als etwas den alten Griechen Bekanntes erwähnt habe. Seit meinem dreizehnten oder vierzehnten Jahre kenne ich Euklid und bewundere ihn, und ich sehe auch jetzt nicht ein, inwiefern ich mich mit ihm in einer Differenz befinde; auch habe ich in meinem letzten Briefe ausführlich von seiner Behandlung der incommensurabelen Größen gesprochen, ohne jede Einwendung gegen sein Verfahren, so daß ich die im Obigen von Ihnen mir zugeschriebene Absicht wohl mit Recht in Abrede stellen darf. Euklid kann seine Definition gleicher Verhältnisse auf alle Größen anwenden, die ihm in seinem System vorkommen, d. h. deren Existenz aus guten Gründen ersichtlich ist, und dies reicht für Euklid vollständig aus. Für denjenigen Zweck aber, welcher die Arithmetik auf dem Begriffe des Größen-Verhältnisses aufbauen will (was Euklid's Absicht nicht gewesen ist), genügt dies durchaus nicht; da vielmehr die Vollständigkeit des Zahlbegriffs bei dieser Begründung der Arithmetik lediglich von der Vollständigkeit des Größen-Begriffs abhängt, und da die stetige Vollständigkeit der reellen Zahlen für den wissenschaftlichen Aufbau der Arithmetik unentbehrlich ist, so ist unerläßlich von vorneherein genau zu wissen, wie vollständig das Gebiet der Größen ist, weil Nichts in der Mathematik gefährlicher ist, als ohne genügenden Beweis Existenzen anzunehmen und zwar erst dann, wenn die Noth, das augenblickliche Bedürfniß es gebeut. Woran sollen die erlaubten Existenz-Annahmen erkannt und von den unzähligen unerlaubten unterschieden werden, wie z. B. von der Annahme der Existenz einer Größe A, welche das Doppelte von B und zugleich das Dreifache von der Hälfte von B ist? Soll dies nur von dem Erfolge, von dem zufälligen Gewahrwerden eines inneren Widerspruchs abhängig gemacht werden? Wenn nun Euklid weitergehende Untersuchungen beabsichtigt hätte, als es in Wahrheit der Fall war, nämlich solche, bei denen die Stetigkeit eine wesentliche Rolle spielt, und wenn in den Handschriften sich unter den Definitionen oder Axiomen des fünften Buches der obige Passus (D) dem Inhalte nach vorfände, so bin ich der Meinung, es würde Niemand denselben für überflüssig oder selbstverständlich erklären; vielmehr glaube ich, daß dann unter denjenigen, welche die Arithmetik auf dem Begriffe der Zahl als Größen-Verhältniß aufbauen wollen, sich gewiß schon Jemand gefunden hätte, der erkannt und gesagt hätte: „Mit dieser präcis definirten Vollständigkeit des Größen-Begriffs ist auch die Vollständigkeit des Zahlbegriffs gegeben, welche zum strengen Aufbau der Arithmetik der reellen Zahlen ausreichend und unentbehrlich ist." Und ich glaube, wir besäßen in diesem Falle bessere Lehrbücher der Arithmetik, als die wir wirklich haben. Aber Euklid schweigt vollständig über diesen, für die Arithmetik wichtigsten Punct, und deshalb kann ich Ihrer Ansicht nicht zustimmen, daß bei Euklid die vollständigen Grundlagen für die Theorie der irrationalen Zahlen zu finden seien. Wenn Euklid es nicht für überflüssig hält, in der Erklärung des fünften Buches, die Sie in Ihrem vorletzten Briefe lateinisch angeführt haben, eine so einfache Eigenschaft der Größen namhaft zu machen, so würde er den viel complicirteren Charakter (D) der Stetigkeit ganz gewiß in seiner Art ebenfalls definirt haben, wenn er desselben in seinem System bedurft hätte. Sie sagen dagegen, diese Vollständigkeit oder Stetigkeit sei selbstverständlich und brauche also nicht ausgesprochen zu werden, kein Mensch könne sich eine Linie ohne dieselbe, also ohne die obige Eigenschaft (C) denken. Obgleich dies Heranziehen der Geometrie zur Begründung der reinen Arithmetik, wie Sie im voraus vermutheten, ganz gegen meine Neigung ist, so will ich mich doch jetzt selbst auf diesen Standpunct stellen; aber auch dann kann ich Ihnen nicht beistimmen; ich kann mir den ganzen Raum und jede Linie in ihm, wie ich schon am Schlusse des § 3. meiner Schrift hinter (C) bestimmt ausgesprochen habe, durchweg unstetig vorstellen; ein zweiter Mensch dieser Art wird wohl Herr Prof. Cantor in Halle sein, wenigstens scheint dies aus seiner von mir citirten Abhandlung hervorzugehen; und ich sollte meinen, jeder Mensch kann dasselbe. Man wird mir vielleicht entgegnen, daß ich mich über mein räumliches Vorstellungsvermögen täusche, daß nämlich Jeder, der den stetigen Raum zu denken fähig ist, eben deshalb unfähig sein müsse, den Raum sich als unstetig vorzustellen, weil von vorneherein im Raum-begriffe die Vorstellung von der denkbar größten Vollständigkeit enthalten sei. Dies muß ich aber durchaus bestreiten; vielmehr ist für mich der Raumbegriff gänzlich unabhängig, gänzlich trennbar von der Vorstellung der Stetigkeit, und die Eigenschaft (C) dient nur dazu, aus dem allgemeinen Raumbegriff den speciellen des stetigen Raums auszusondern. Und wie steht es in dieser Beziehung mit Euklid? Man analysire alle Annahmen, sowohl die ausdrücklich als die stillschweigend gemachten, auf welchen das gesammte Gebäude der Geometrie Euklid's beruht, man gebe die Wahrheit aller seiner Sätze, die Ausführbarkeit aller seiner Constructionen zu (eine untrügliche Methode einer solchen Analyse besteht für mich darin, alle Kunstausdrücke durch beliebige neu erfundene (bisher sinnlose) Worte zu ersetzen, das Gebäude darf, wenn es richtig construirt ist, dadurch nicht einstürzen, und ich behaupte z. B., daß meine Theorie der reellen Zahlen diese Probe aushält): niemals, so weit ich geforscht habe, gelangt man auf diese Weise zu der Stetigkeit des Raums als einer mit Euklid's Geometrie untrennbar verbundenen Bedingung; sein ganzes System bleibt bestehen auch ohne die Stetigkeit — ein Resultat, was gewiß für Viele überraschend ist und mir deshalb wohl erwähnenswerth schien.

Mit diesen Bemerkungen, die nur weitere Ausführungen von den in meiner Schrift ausgesprochenen Gedanken sind, glaube ich meinen Standpunct so genau bezeichnet zu haben, daß ich nichts Weiteres hinzuzufügen brauche. Vielmehr muß ich Sie sehr um Entschuldigung bitten wegen der Ausführlichkeit meiner Erörterungen; Sie wissen aber, wie tief mein analytisches Herz von diesen Fragen berührt wird, und deshalb hoffe ich auf Ihre Nachsicht. ...

1876. 9. 28.

... Auch diese Antwort kann nur eine sehr oberflächliche sein, da der Gegenstand, um den es sich handelt, mir einigermaßen fremd geworden ist. Meine Untersuchungen über denselben*) stammen nämlich aus den Jahren 1866 und 1867 und sind — wenigstens der Hauptsache nach — in drei Abhandlungen zusammengestellt, die ich dem Collegen Weber, als er die Herausgabe der Riemann'schen Werke

*) [Vgl. Band 2, S. 353.]

auf meinen dringenden Wunsch ganz in seine Hände genommen hatte, zu beliebiger Benutzung überlassen habe; von ihm stammt der in der ersten Note zu der Pariser Preisaufgabe enthaltene Auszug her, gegen dessen Abdruck ich auch Nichts einzuwenden hatte, da das Verständniß des Textes für die meisten Leser dadurch wohl erleichtert wird. Ich ging ursprünglich mit der Absicht um, diese Untersuchungen zu veröffentlichen, aber ich wurde, bevor ich ihnen den wünschenswerthen Abschluß geben konnte, durch andere Arbeiten davon abgezogen, und als bald darauf Ihre Untersuchungen und die von Christoffel erschienen, verlohnte es sich nicht mehr der Mühe, die meinigen zu publiciren; seitdem habe ich mich so gut wie gar nicht mehr mit dem Gegenstande beschäftigt und mich begnügt, im Großen und Ganzen den Fortgang Ihrer Arbeiten zu verfolgen. Heute Morgen habe ich meine Papiere, die H. Weber mir schon vor einem Jahre zurückgegeben hat, wieder durchgesehen, um sie mit dem Inhalte Ihres Briefes zu vergleichen. Es ist in denselben das Ziel verfolgt (im Anschluß an Riemann's Vorschriften), den Covarianten-Charakter der Ausdrücke unmittelbar durch ihre Definition festzustellen und jede wirkliche Transformations-Rechnung durch Einführung neuer Variabeln zu vermeiden. Wird das Quadrat des dem Fortschritte ∂ (Differential, Variation) entsprechenden Längenelementes ohne Nennung der Orts-Variabeln mit (∂, ∂) bezeichnet, und

$$2(\partial, \partial') = (\partial + \partial', \partial + \partial') - (\partial, \partial) - (\partial', \partial')$$

gesetzt, so werden die Änderungen d in den kürzesten Linien durch das Gesetz

$$(d, d)\delta(d, d) + (d, \delta)d(d, d) = 2(d, d)d(d, \delta) + 2(d, d)(d, \delta')$$

bestimmt, wo δ eine willkürliche Änderung, und $\delta' = \delta d - d\delta$ wieder eine Operation bedeutet, welche die Gesetze der totalen Differentiation erster Ordnung befolgt. Der Ausdruck für die Abweichung von der Ebenheit oder für die allgemeinere quadrilineare Form wird dann ohne Schwierigkeit auf den folgenden zurückgeführt

$$\partial'\partial'''(\partial, \partial'') + \partial\partial''(\partial', \partial''') - \partial'\partial''(\partial, \partial''') - \partial\partial'''(\partial', \partial''),$$

aus welchem die Differentiale zweiter Ordnung $\partial\partial'$ etc. durch die Gleichungen $\partial(\partial', \partial'') = 0$ etc. entfernt werden. Die Covarianten, welche aus den durch die letzten Bedingungen fortfallenden Gliedern bestehen, habe ich nicht untersucht, und es ist mir sehr interessant, aus Ihrem Briefe zu erfahren, daß sie ebenfalls eine so wichtige

Bedeutung besitzen. In der Note zu der Pariser Preisaufgabe ist die Darstellung mit Benutzung der Central- oder Normal-Variabeln, die sich auch in meinen Papieren findet. von H. Weber gewiß deshalb vorgezogen, weil sie die unmittelbare Ausführung der Riemann'schen Vorschriften ist (Hypoth. d. Geom. II. 2), während die oben angedeutete, äußerlich variabelnlose Ableitung wohl einige allgemeine Erörterungen nothwendig gemacht hätte. Auch der Nachweis der Übereinstimmung mit dem Gauß'schen Krümmungsmaß scheint mir in dieser erläuternden Note nicht überflüssig zu sein, da sie selbst für den Fall $n = 2$ nicht ohne Weiteres vorausgesetzt werden konnte. Ihr Beweis, den ich soeben in der Abhandlung (in Crelle 72) nachgesehen habe, macht denselben allerdings überflüssig, sobald die Übereinstimmung für $n = 2$ schon gewiß ist; ich gebe auch zu, daß in Ihren Arbeiten der Inhalt der Note, obgleich sie ganz unabhängig von denselben, lediglich nach den Vorschriften Riemann's abgefaßt ist, größten Theils enthalten ist, und ich bedaure, daß wir versäumt haben, dies zu bemerken, was bei einer hoffentlich bald nöthigen neuen Auflage jedenfalls nachgeholt werden soll. Der von Ihnen beabsichtigten neuen Publication über diesen Gegenstand, und namentlich über die Bedeutung der oben erwähnten Covarianten, sehe ich nun, da ich mich in diese Untersuchungen wieder einzudenken anfange, mit großem Interesse entgegen, und ich bitte Sie, ja nicht aus Rücksicht auf mich oder Andere Etwas zu unterdrücken. ...

[Als-Ergänzung zu den ersten Briefen seien hier noch einige Aufzeichnungen wiedergegeben, die F. Bernstein sich nach einem Besuch bei Dedekind am 6. März 1911 machte und die er freundlich zur Verfügung stellt:

„... Wir sprachen dann von Dirichlet und Kummer. Dedekind sagte, daß nach seiner Ansicht bei Kummer doch vielerlei nicht haltbar sei; z. B. werde der Satz, daß die Norm des Produktes gleich dem Produkt der Normen sei, einfach vorausgesetzt. In der französischen Ausgabe [XLVIII] habe er auch seinen Bedenken Ausdruck gegeben.

‚Kummer wollte übrigens gar nichts von meinen Untersuchungen wissen. Als ich nach Berlin kam, um meinen Freund H. Weber zu besuchen, da ging ich auch zu Kummer, und da empfing er mich gar nicht freundlich. Er sagte: Sie kommen wohl, um zu sehen, ob ich nicht bald abgehe. Ich sagte darauf: Ich komme, um den Mann zu sehen, den ich aufs höchste verehre und dem ich die größte Anregung meines Lebens verdanke. Da wurde er etwas freundlicher, und zum Schluß kamen wir ganz gut auseinander. Er machte meiner Theorie hauptsächlich das zum Vorwurf, was eigentlich genau betrachtet ihr Vorzug ist, nämlich daß ich die Ideale, die in der Diskriminante aufgehen, ganz wie die andern behandele; die seien eben etwas total Verschiedenes, das dürfe man nicht durcheinanderbringen.' "

Eine weitere Ergänzung bildet die folgende Stelle aus einem Brief vom 23. Mai 1892 an Gymnasial-Direktor H. Seeger-Güstrow i. M.:

„Es hat mich sehr gefreut ... mich dabei wieder — was auch sonst sehr häufig geschehen ist — in die schöne Zeit des Jahres 1852 zurückzuversetzen, wo Sie in Göttingen erschienen, und wo ich durch den lebhaften, freundschaftlichen Verkehr mit Ihnen so vielfache wissenschaftliche Anregung empfangen habe. ... Ich hatte damals, als Sie kamen, schon ein wenig Zahlentheorie getrieben, aber den eigentlichen Antrieb, tiefer in dieselbe einzudringen, habe ich durch Sie und durch zwei von Ihnen ausgearbeitete Hefte Dirichletscher Vorlesungen erhalten, aus denen ich mir damals mehr oder weniger vollständige Auszüge machte. Das eine ist betitelt: ‚Einige Anwendungen der Infinitesimalrechnung auf die Zahlentheorie', das andere war eine größere Vorlesung über Zahlentheorie von den Elementen an bis zur Bestimmung der Klassenanzahl der binären quadratischen Formen. Die hierdurch und durch weitere Studien erworbene genaue Bekanntschaft mit den Arbeiten von Dirichlet ist später, als dieser unvergleichliche Forscher, Lehrer und Mensch als Nachfolger von Gauß nach Göttingen berufen wurde, für mich die Grundlage eines sehr innigen persönlichen Verkehrs mit ihm geworden, den ich leider nur noch wenige Jahre genießen konnte."

Im übrigen sei auf die Anmerkungen am Schluß von L verwiesen. E. N.]