Anhang.

LXVII.

Zusatz zu der vorstehenden Abhandlung*).

[Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 58, S. 217—228 (1861).]

Bei dem gegenwärtigen neuen Abdruck der Dirichletschen Abhandlung erschien es mir zweckmäßig, zu den im § 9 aufgestellten Sätzen die Rechnungen nachzuliefern, welche ich in die Abhandlung selbst nicht aufnehmen zu dürfen glaubte; es ist mir bei dieser erneuerten Beschäftigung mit dem Gegenstande gelungen, einen neuen allgemeinen Satz zu finden, welcher eine eigentümliche Reziprozität zwischen je zwei zusammengehörigen Bewegungen eines und desselben flüssigen Ellipsoides ausspricht, und als speziellen Fall die Beziehung enthält, welche zwischen der Rotation eines Jacobischen ungleichachsigen Ellipsoides und der von mir aufgefundenen Bewegung desselben Ellipsoides stattfindet.

§ 1.

Wir beschäftigen uns zunächst mit der Untersuchung desjenigen Falles, in welchem während der ganzen Dauer der Bewegung die Relationen

$$(1)\qquad \begin{cases} P' = mn + m'n' + m''n'' = 0, \\ Q' = nl + n'l' + n''l'' = 0, \\ R' = lm + l'm' + l''m'' = 0 \end{cases}$$

stattfinden, deren geometrische Bedeutung, wie im § 9 der Abhandlung bemerkt ist, darin besteht, daß die Hauptachsen des Ellipsoides

*) [Es handelt sich um einen Zusatz zu der Arbeit von Dirichlet, Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik, aus dessen Nachlaß hergestellt von Dedekind, Journ. f. Math. 58 (1861), S. 181—216, wieder abgedruckt Werke 2 (1897), S. 263—301, zuerst publiziert ohne Zusatz Abh. d. Gött. Gesellsch. d. Wissensch., Bd. 8. Da beim Wiederabdruck in Dirichlets Werken der Zusatz Dedekinds nicht mitaufgenommen wurde, bringen wir ihn hier im Anhang, obwohl er nur im Zusammenhang mit der Arbeit von Dirichlet verständlich ist. Diese Arbeit drucken wir nicht ab, da sie ja schon in Dirichlets Werke aufgenommen ist. E. N.]

stets von denselben Elementen der flüssigen Masse gebildet werden. Bezeichnet man, wie ich es in § 4 der Abhandlung getan habe, die Verbindungen

$$\begin{aligned} l^2 + l'^2 + l''^2 &\quad \text{mit} \quad P, \\ m^2 + m'^2 + m''^2 &\quad \text{mit} \quad Q, \\ n^2 + n'^2 + n''^2 &\quad \text{mit} \quad R, \end{aligned}$$

so ergibt sich aus der Hypothese (1) folgendes System von Relationen:

$$(2) \qquad \begin{cases} l = P\lambda, & l' = P\lambda', \quad l'' = P\lambda'', \\ m = Q\mu, & m' = Q\mu', \quad m'' = Q\mu'', \\ n = R\nu, & n' = R\nu', \quad n'' = R\nu''. \end{cases}$$

Es leuchtet ein, daß die neun Größen

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{l}{\sqrt{P}}, & \dfrac{l'}{\sqrt{P}}, & \dfrac{l''}{\sqrt{P}}, \\ \dfrac{m}{\sqrt{Q}}, & \dfrac{m'}{\sqrt{Q}}, & \dfrac{m''}{\sqrt{Q}}, \\ \dfrac{n}{\sqrt{R}}, & \dfrac{n'}{\sqrt{R}}, & \dfrac{n''}{\sqrt{R}} \end{array}$$

die Koeffizienten einer orthogonalen Koordinaten-Transformation bilden, und es ist

$$PQR = 1.$$

Setzt man daher

$$\begin{aligned} x'\sqrt{P} &= lx + l'y + l''z, \\ y'\sqrt{Q} &= mx + m'y + m''z, \\ z'\sqrt{R} &= nx + n'y + n''z, \end{aligned}$$

so sind x', y', z' die Koordinaten eines Punktes in bezug auf ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Koordinaten in bezug auf das ursprüngliche x, y, z sind. Da nun die mit der Zeit veränderlichen Koordinaten x, y, z eines flüssigen Elementes von den anfänglichen Koordinaten a, b, c desselben Elementes in folgender Weise abhängen:

$$\begin{aligned} x &= la + mb + nc, \\ y &= l'a + m'b + n'c, \\ z &= l''a + m''b + n''c, \end{aligned}$$

so sind

$$x' = a\sqrt{P}, \quad y' = b\sqrt{Q}, \quad z' = c\sqrt{R}$$

die Koordinaten desselben Elementes zur Zeit t in bezug auf das neue mit der Zeit veränderliche System, und die Gleichung der Oberfläche des Ellipsoides wird

$$\frac{x'^2}{A^2 P} + \frac{y'^2}{B^2 Q} + \frac{z'^2}{C^2 R} = 1,$$

woraus die oben angegebene geometrische Bedeutung unserer Hypothese (1) unmittelbar hervorgeht. Aber es ergibt sich auch der Wert des Potentiales im Elemente (x', y', z') oder (a, b, c) zur Zeit t:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}\left(1 - \frac{x'^2}{A^2 P + s} - \frac{y'^2}{B^2 Q + s} - \frac{z'^2}{C^2 R + s}\right) \\ &= \pi \int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}\left(1 - \frac{P a^2}{A^2 P + s} - \frac{Q b^2}{B^2 Q + s} - \frac{R c^2}{C^2 R + s}\right), \end{aligned}$$

also

$$L = \pi \int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta} \cdot \frac{P}{A^2 P + s}, \quad M = \pi \int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta} \cdot \frac{Q}{B^2 Q + s}, \quad N = \pi \int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta} \cdot \frac{R}{C^2 R + s},$$

$$L' = 0, \qquad M' = 0, \qquad N' = 0,$$

worin

$$\varDelta = \sqrt{\left(1 + \frac{s}{A^2 P}\right)\left(1 + \frac{s}{B^2 Q}\right)\left(1 + \frac{s}{C^2 R}\right)}$$

ist. Dieselben Werte ergeben sich auch aus den Formeln des § 4 der Abhandlung; doch schien es mir zweckmäßig, dieselben für unsern Fall direkt abzuleiten.

§ 2.

Nach diesen unmittelbaren Folgerungen aus der Hypothese gehen wir zu der Untersuchung über, wann dieselbe mit den Differentialgleichungen (a) im § 1 der Abhandlung in Übereinstimmung ist. Durch eine erste Differentiation erhalten wir in Verbindung mit den Integralgleichungen (I.) (in § 5 der Abh.) folgende Gleichungen:

$$(3)\quad \begin{cases} m\dfrac{dn}{dt} + m'\dfrac{dn'}{dt} + m''\dfrac{dn''}{dt} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}; & n\dfrac{dm}{dt} + n'\dfrac{dm'}{dt} + n''\dfrac{dm''}{dt} = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}; \\ n\dfrac{dl}{dt} + n'\dfrac{dl'}{dt} + n''\dfrac{dl''}{dt} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}; & l\dfrac{dn}{dt} + l'\dfrac{dn'}{dt} + l''\dfrac{dn''}{dt} = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}; \\ l\dfrac{dm}{dt} + l'\dfrac{dm'}{dt} + l''\dfrac{dm''}{dt} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}; & m\dfrac{dl}{dt} + m'\dfrac{dl'}{dt} + m''\dfrac{dl''}{dt} = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{C}; \end{cases}$$

also für den Anfangszustand der Bewegung die Relationen

$$\left(\frac{dn'}{dt}\right)_0 = -\left(\frac{dm''}{dt}\right)_0 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{A};\ \left(\frac{dl''}{dt}\right)_0 = -\left(\frac{dn}{dt}\right)_0 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{B};\ \left(\frac{dm}{dt}\right)_0 = -\left(\frac{dl'}{dt}\right)_0 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}.$$

Da ferner

$$L' = M' = N' = 0$$

ist, so ergibt die folgende Differentiation

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dm}{dt}\frac{dn}{dt} + \frac{dm'}{dt}\frac{dn'}{dt} + \frac{dm''}{dt}\frac{dn''}{dt} = 0,\\ &\frac{dn}{dt}\frac{dl}{dt} + \frac{dn'}{dt}\frac{dl'}{dt} + \frac{dn''}{dt}\frac{dl''}{dt} = 0,\\ &\frac{dl}{dt}\frac{dm}{dt} + \frac{dl'}{dt}\frac{dm'}{dt} + \frac{dl''}{dt}\frac{dm''}{dt} = 0. \end{aligned}\right.$$

Hieraus folgen für den Anfangszustand der Bewegung die Relationen

$$\mathfrak{B}\,\mathfrak{C} = 2\mathfrak{A}\left\{\left(\frac{dm'}{dt}\right)_0 - \left(\frac{dn''}{dt}\right)_0\right\};\quad \mathfrak{C}\,\mathfrak{A} = 2\mathfrak{B}\left\{\left(\frac{dn''}{dt}\right)_0 - \left(\frac{dl}{dt}\right)_0\right\};$$

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{B} = 2\mathfrak{C}\left\{\left(\frac{dl}{dt}\right)_0 - \left(\frac{dm'}{dt}\right)_0\right\},$$

also auch

$$\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{C}^2\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2 = 0,$$

d. h.

$$\mathfrak{B}\,\mathfrak{C} = 0,\quad \mathfrak{C}\,\mathfrak{A} = 0,\quad \mathfrak{A}\,\mathfrak{B} = 0.$$

Es ist daher entweder

$$\mathfrak{A} = 0,\quad \mathfrak{B} = 0,\quad \mathfrak{C} = 0,$$

oder z. B.

$$\mathfrak{A} = 0,\quad \mathfrak{B} = 0,\quad \left(\frac{dl}{dt}\right)_0 = \left(\frac{dm'}{dt}\right)_0.$$

In beiden Fällen entnimmt man aus den Gleichungen (3)

$$l\frac{dn}{dt} + l'\frac{dn'}{dt} + l''\frac{dn''}{dt} = 0,$$

$$m\frac{dn}{dt} + m'\frac{dn'}{dt} + m''\frac{dn''}{dt} = 0,$$

so daß mit Rücksicht auf die Gleichungen (2)

$$dn : dn' : dn'' = \nu : \nu' : \nu'' = n : n' : n''$$

ist, woraus folgt, daß die Verhältnisse $\frac{n}{n''}$, $\frac{n'}{n''}$ konstant und folglich

$$(5)\qquad n = 0,\quad n' = 0$$

ist. Hieraus ergibt sich sogleich in Verbindung mit $P' = 0$, $Q' = 0$, daß auch

$$m'' = 0, \quad l'' = 0 \tag{6}$$

sein muß. Die Forderungen der Hypothese (1) und die daraus abgeleiteten Folgerungen (3) und (4) reduzieren sich daher auf die Gleichungen

$$R' = lm + l'm' = 0; \quad l\frac{dm}{dt} + l'\frac{dm'}{dt} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}; \quad \frac{dl}{dt}\frac{dm}{dt} + \frac{dl'}{dt}\frac{dm'}{dt} = 0.$$

Man setze deshalb

$$l' = hl, \quad m = -hm',$$

worin h eine neue Funktion bezeichnet, deren Anfangswert $= 0$ ist; durch Einführung dieser beiden Ausdrücke für l', m in die zuletzt aufgestellten Gleichungen erhält man

$$-lm'\frac{dh}{dt} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}; \quad \left(l\frac{dm'}{dt} - m'\frac{dl}{dt}\right)\frac{dh}{dt} = 0.$$

Es ist daher entweder

$$\frac{dh}{dt} = 0, \quad h = 0, \quad l' = 0, \quad m = 0, \quad \mathfrak{C} = 0,$$

$$x = la, \quad y = m'b, \quad z = n''c$$

oder, wenn $\mathfrak{C}$ von Null verschieden,

$$l\frac{dm'}{dt} = m'\frac{dl}{dt}, \quad m' = l, \quad l' = -m,$$

$$x = la + mb, \quad y = -ma + lb, \quad z = n''c.$$

Der erste dieser beiden Fälle stimmt mit dem zu Anfang des § 9 der Abhandlung angeführten überein; bezeichnet man die Achsen Al, Bm', Cn'' mit α, β, γ, so hat man zur Bestimmung derselben und der Funktion σ die Gleichungen

$$\alpha\frac{d^2\alpha}{dt^2} = 2\sigma - 2\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}\cdot\frac{\alpha^2}{\alpha^2+s}; \quad \beta\frac{d^2\beta}{dt^2} = 2\sigma - 2\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}\cdot\frac{\beta^2}{\beta^2+s};$$

$$\gamma\frac{d^2\gamma}{dt^2} = 2\sigma - 2\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}\cdot\frac{\gamma^2}{\gamma^2+s}; \quad \alpha\beta\gamma = \text{Const.},$$

worin

$$\varDelta = \sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}$$

ist.

Im zweiten Fall reduzieren sich die Gleichungen (a) (§ 1 der Abh.) auf die folgenden fünf:

$$l\frac{d^2 l}{dt^2} + m\frac{d^2 m}{dt^2} = \frac{2\sigma}{A^2} - 2\varepsilon\pi\int\limits_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}\cdot\frac{1}{A^2+n''s},$$

$$m\frac{d^2 m}{dt^2} + l\frac{d^2 l}{dt^2} = \frac{2\sigma}{B^2} - 2\varepsilon\pi\int\limits_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}\cdot\frac{1}{B^2+n''s},$$

$$n''\frac{d^2 n''}{dt^2} = \frac{2\sigma}{C^2} - 2\varepsilon\pi\int\limits_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}\cdot\frac{n''^2}{C^2 n''^2+s},$$

$$l\frac{d^2 m}{dt^2} - m\frac{d^2 l}{dt^2} = 0,$$

$$(l^2+m^2)\,n'' = 1,$$

worin

$$\varDelta = \sqrt{\left(1+\frac{n''s}{A^2}\right)\left(1+\frac{n''s}{B^2}\right)\left(1+\frac{s}{C^2 n''^2}\right)}.$$

Wenn nun $A = B$ ist, so sind die beiden ersten dieser Gleichungen untereinander identisch, und man erhält den in §§ 6—8 der Abhandlung untersuchten Fall. Ist dagegen B von A verschieden, so ergibt die genauere Untersuchung, wie sie sogleich angedeutet werden soll, daß diesen fünf zur Bestimmung der vier Funktionen l, m, n'', σ dienenden Gleichungen nur durch ein konstantes

$$n'' = 1$$

Genüge geschieht. Es folgt dann

$$\sigma = \varepsilon\pi\int\limits_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{s}{A^2}\right)\left(1+\frac{s}{B^2}\right)} = \varepsilon\pi\int\limits_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}\cdot\frac{1}{1+\frac{s}{C^2}},$$

$$l\frac{d^2 l}{dt^2} + m\frac{d^2 m}{dt^2} = -\frac{2\varepsilon\pi}{A^2 B^2}\int\limits_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}\cdot\frac{s}{\left(1+\frac{s}{A^2}\right)\left(1+\frac{s}{B^2}\right)} = -k^2;$$

$$l\frac{d^2 m}{dt^2} - m\frac{d^2 l}{dt^2} = 0;\quad l^2+m^2 = 1,$$

worin

$$\varDelta = \sqrt{\left(1+\frac{s}{A^2}\right)\left(1+\frac{s}{B^2}\right)\left(1+\frac{s}{C^2}\right)}.$$

Damit die drei letzten Gleichungen miteinander harmonieren, ist erforderlich, daß

$$\frac{d^2 l}{d t^2} = -k^2 l, \quad \frac{d^2 m}{d t^2} = -k^2 m,$$

$$l = \cos k t + \left(\frac{d l}{d t}\right)_0 \frac{\sin k t}{k}, \quad m = \left(\frac{d m}{d t}\right)_0 \frac{\sin k t}{k}$$

ist; aus $l^2 + m^2 = 1$ folgt endlich

$$\left(\frac{d l}{d t}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d m}{d t}\right)_0 = k,$$

$$l = \cos k t, \quad m = \sin k t,$$

worin k zweideutig ist. Dies ist der Satz von Jacobi.

Daß wirklich in diesem Falle n'' konstant sein muß, ergibt sich auf folgendem Wege, dessen nähere Ausführung hier aber zuviel Raum einnehmen würde. Die beiden ersten der fünf Gleichungen geben σ und $l \dfrac{d^2 l}{d t^2} + m \dfrac{d^2 m}{d t^2}$ ausgedrückt durch n''; verbindet man hiermit die beiden letzten Gleichungen und verfährt wie in § 6 der Abhandlung, so kann man l und m vollständig eliminieren, und man erhält folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{1}{2 n''^2} \frac{d^2 n''}{d t^2} - \frac{3}{4 n''^3} \left(\frac{d n''}{d t}\right)^2 + \omega_0^2 n'' = 2 \varepsilon \pi \int_0^\infty \frac{d s}{\Delta} \cdot \frac{n'' s}{(A^2 + n'' s)(B^2 + n'' s)},$$

welche nun noch mit der dritten jener fünf Gleichungen

$$n'' \frac{d^2 n''}{d t^2} = \frac{2 \varepsilon \pi}{C^2} \int_0^\infty \frac{d s}{\Delta} \cdot \frac{A^2}{A^2 + n'' s} \cdot \frac{B^2}{B^2 + n'' s} - 2 \varepsilon \pi \int_0^\infty \frac{d s}{\Delta} \cdot \frac{n''^2}{C^2 n''^2 + s}$$

harmonieren muß. Allein aus der Kombination dieser beiden Gleichungen leitet man eine von $\dfrac{d n''}{d t}$, $\dfrac{d^2 n''}{d t^2}$ befreite Gleichung ab, von welcher man nachweisen kann, daß sie für kein noch so kleines an $n'' = 1$ angrenzendes Intervall von Werten eine Identität in bezug auf n'' sein kann, wie auch die Integrationskonstanten und die Achsen A, B, C beschaffen sein mögen. Woraus folgt, daß n'' konstant sein muß.

§ 3.

Statt nun die zweite Hypothese, welche darin besteht, daß während der ganzen Dauer der Bewegung die Relationen

$$T = \frac{\lambda' \lambda''}{A^2} + \frac{\mu' \mu''}{B^2} + \frac{\nu' \nu''}{C^2} = 0,$$

$$T' = \frac{\lambda'' \lambda}{A^2} + \frac{\mu'' \mu}{B^2} + \frac{\nu'' \nu}{C^2} = 0,$$

$$T'' = \frac{\lambda \lambda'}{A^2} + \frac{\mu \mu'}{B^2} + \frac{\nu \nu'}{C^2} = 0$$

stattfinden, in ähnlicher Weise zu behandeln wie die soeben untersuchte, ziehe ich es vor, einen allgemeinen Satz zu beweisen, vermöge dessen diese Diskussion sogleich auf die vorhergehende zurückgeführt werden kann. Freilich ist die Umformung der Differentialgleichungen (a) (§ 1 der Abh.), welche zu diesem Resultat führt, etwas umständlich, allein es ist mir bis jetzt nicht geglückt, dasselbe auf einem kürzeren Wege zu erreichen.

Durch die zu Anfang des § 2 der Abhandlung angedeutete Auflösung der neun Differentialgleichungen erhält man z. B.

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 l}{d t^2} = \dfrac{2\sigma}{A^2}\lambda - 2\varepsilon (L\lambda + N'\mu + M'\nu), \\[2ex] \dfrac{d^2 m}{d t^2} = \dfrac{2\sigma}{B^2}\mu - 2\varepsilon (N'\lambda + M\mu + L'\nu), \\[2ex] \dfrac{d^2 n}{d t^2} = \dfrac{2\sigma}{C^2}\nu - 2\varepsilon (M'\lambda + L'\mu + N\nu), \end{cases}$$

und hieraus ergeben sich die sechs andern zweiten Derivierten durch gleichzeitige Akzentuation der Buchstaben l, m, n, λ, μ, ν. Setzen wir ferner zur Abkürzung

$$K = \pi \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta^3} + \left(\frac{QR - P'^2}{A^2} + \frac{RP - Q'^2}{B^2} + \frac{PQ - R'^2}{C^2}\right) \pi \int_0^\infty \frac{s\,ds}{\Delta^3},$$

$$K' = \pi \int_0^\infty \frac{s\,ds}{\Delta^3}; \quad K'' = \pi \int_0^\infty \frac{s^2\,ds}{\Delta^3},$$

so ist zufolge § 4 der Abhandlung:

$$L = \frac{K}{A^2} - \frac{QR - P'^2}{A^4} K' + \frac{P}{A^2 B^2 C^2} K'',$$

$$M = \frac{K}{B^2} - \frac{RP - Q'^2}{B^4} K' + \frac{Q}{A^2 B^2 C^2} K'',$$

$$N = \frac{K}{C^2} - \frac{PQ - R'^2}{C^4} K' + \frac{R}{A^2 B^2 C^2} K'',$$

$$L' = - \frac{Q'R' - P'P}{B^2 C^2} K' + \frac{P'}{A^2 B^2 C^2} K'',$$

$$M' = - \frac{R'P' - Q'Q}{C^2 A^2} K' + \frac{Q'}{A^2 B^2 C^2} K'',$$

$$N' = - \frac{P'Q' - R'R}{A^2 B^2} K' + \frac{R'}{A^2 B^2 C^2} K''.$$

Hieraus findet man

$$L\lambda + N'\mu + M'\nu = \frac{K}{A^2}\lambda - \frac{K'}{A^2}(S\lambda + T''\lambda' + T'\lambda'') + \frac{K''}{A^2}\,\frac{l}{B^2 C^2},$$

$$N'\lambda + M\mu + L'\nu = \frac{K}{B^2}\mu - \frac{K'}{B^2}(S\mu + T''\mu' + T'\mu'') + \frac{K''}{B^2}\,\frac{m}{C^2 A^2},$$

$$M'\lambda + L'\mu + N\nu = \frac{K}{C^2}\nu - \frac{K'}{C^2}(S\nu + T''\nu' + T'\nu'') + \frac{K''}{C^2}\,\frac{n}{A^2 B^2}.$$

Multipliziert man daher die Gleichungen (7) der Reihe nach einmal mit $A^2 l$, $B^2 m$, $C^2 n$; dann mit $A^2 l'$, $B^2 m'$, $C^2 n'$; endlich mit $A^2 l''$, $B^2 m''$, $C^2 n''$ und addiert jedesmal, so erhält man die folgenden Gleichungen:

$$(8)\quad \begin{cases} A^2 l \dfrac{d^2 l}{dt^2} + B^2 m \dfrac{d^2 m}{dt^2} + C^2 n \dfrac{d^2 n}{dt^2} = 2\sigma - 2\varepsilon\{K - SK' + (S'S'' - T^2)K''\}, \\ A^2 l' \dfrac{d^2 l}{dt^2} + B^2 m' \dfrac{d^2 m}{dt^2} + C^2 n' \dfrac{d^2 n}{dt^2} = \quad -2\varepsilon\{-T''K' + (TT' - T''S'')K''\}, \\ A^2 l'' \dfrac{d^2 l}{dt^2} + B^2 m'' \dfrac{d^2 m}{dt^2} + C^2 n'' \dfrac{d^2 n}{dt^2} = \quad -2\varepsilon\{-T'K' + (T''T - T'S')K''\}. \end{cases}$$

Es wird nicht nötig sein, die sechs anderen Gleichungen, welche man durch Akzentuation (die jedoch nicht auf K, K', K'' auszudehnen ist) aus diesen erhält, ebenfalls hieher zu setzen; doch bemerke ich, daß aus den drei Paaren dieser Gleichungen, auf deren rechter Seite σ fehlt, sogleich die drei Integralgleichungen (II.) (§ 5 der Abh.) folgen, welche von dem Prinzip der Flächen herrühren. Die Gleichungen (8) führen nun zum Beweise eines neuen Satzes über das Dirichletsche Problem. Zu dem Zweck führe ich folgende neun Funktionen der Zeit ein:

$$l_1 = l; \qquad m_1 = \frac{A}{B} l'; \quad n_1 = \frac{A}{C} l'';$$

$$l_1' = \frac{B}{A} m; \quad m_1' = m'; \qquad n_1' = \frac{B}{C} m'';$$

$$l_1'' = \frac{C}{A} n; \quad m_1'' = \frac{C}{B} n'; \quad n_1'' = n'';$$

und übertrage jede früher zur Abkürzung eingeführte Bezeichnung durch Anhängung des Index 1 auf die Verbindungen, welche in derselben Weise von diesen neuen Funktionen abhängen, so daß z. B.

$$P_1 = l_1^2 + l_1'^2 + l_1''^2$$

ist. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} P_1 &= B^2 C^2 (S' S'' - T^2); & P_1' &= A^2 B C (T' T'' - T S); \\ Q_1 &= C^2 A^2 (S'' S - T'^2); & Q_1' &= B^2 C A (T'' T - T' S'); \\ R_1 &= A^2 B^2 (S S' - T''^2); & R_1' &= C^2 A B (T T' - T'' S''); \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned} Q_1 R_1 - P_1'^2 &= A^2 S; & Q_1' R_1' - P_1' P_1 &= B C T; \\ R_1 P_1 - Q_1'^2 &= B^2 S'; & R_1' P_1' - Q_1' Q_1 &= C A T'; \\ P_1 Q_1 - R_1'^2 &= C^2 S''; & P_1' Q_1' - R_1' R_1 &= A B T''. \end{aligned}$$

Da ferner umgekehrt

$$l = l_1; \qquad m = \frac{A}{B} l_1'; \qquad n = \frac{A}{C} l_1'';$$

$$l' = \frac{B}{A} m_1; \quad m' = m_1'; \qquad n' = \frac{B}{C} m_1'';$$

$$l'' = \frac{C}{A} n_1; \quad m'' = \frac{C}{B} n_1'; \qquad n'' = n_1''$$

ist, so folgt unmittelbar, daß auch

$$P = B^2 C^2 (S_1' S_1'' - T_1^2); \quad P' = A^2 B C (T_1' T_1'' - T_1 S_1);$$

usw.

und

$$Q R - P'^2 = A^2 S_1; \quad Q' R' - P' P = B C T_1;$$

usw.

ist. Nun war früher

$$\frac{P}{B^2 C^2} + \frac{Q}{C^2 A^2} + \frac{R}{A^2 B^2} = S' S'' - T^2 + S'' S - T'^2 + S S' - T''^2;$$

zufolge der vorstehenden Relationen ist dieser Ausdruck aber auch gleich dem folgenden:

$$S_1' S_1'' - T_1^2 + S_1'' S_1 - T_1'^2 + S_1 S_1' - T_1''^2 = \frac{P_1}{B^2 C^2} + \frac{Q_1}{C^2 A^2} + \frac{R_1}{A^2 B^2},$$

und ebenso ergibt sich

$$\frac{QR - P'^2}{A^2} + \frac{RP - Q'^2}{B^2} + \frac{PQ - R'^2}{C^2} = S + S' + S'' =$$

$$\frac{Q_1 R_1 - P_1'^2}{A^2} + \frac{R_1 P_1 - Q_1'^2}{B^2} + \frac{P_1 Q_1 - R_1'^2}{C^2} = S_1 + S_1' + S_1'',$$

folglich

$$\varDelta_1 = \varDelta,$$

$$K_1 = K, \quad K_1' = K', \quad K_1'' = K''$$

und daher

$$L_1 = \frac{K_1}{A^2} - \frac{Q_1 R_1 - P_1'^2}{A^4} K_1' + \frac{P_1}{A^2 B^2 C^2} K_1''$$

$$= \frac{K}{A^2} - \frac{S}{A^2} K' + \frac{S' S'' - T^2}{A^2} K''$$

usw.

$$L_1' = -\frac{Q_1' R_1' - P_1' P_1}{B^2 C^2} K_1' + \frac{P_1'}{A^2 B^2 C^2} K_1''$$

$$= -\frac{T}{BC} K' + \frac{T' T'' - TS}{BC} K''$$

usw.

Hieraus folgt nun endlich, daß die Gleichungen (8) sich folgendermaßen schreiben lassen:

$$l_1 \frac{d^2 l_1}{dt^2} + l_1' \frac{d^2 l_1'}{dt^2} + l_1'' \frac{d^2 l_1''}{dt^2} = \frac{2\sigma}{A^2} - 2\varepsilon L_1,$$

$$m_1 \frac{d^2 l_1}{dt^2} + m_1' \frac{d^2 l_1'}{dt^2} + m_1'' \frac{d^2 l_1''}{dt^2} = \quad - 2\varepsilon N_1',$$

$$n_1 \frac{d^2 l_1}{dt^2} + n_1' \frac{d^2 l_1'}{dt^2} + n_1'' \frac{d^2 l_1''}{dt^2} = \quad - 2\varepsilon M_1'$$

usw.

Da nun außerdem

$$\sum \pm l_1 m_1' n_1'' = \sum \pm l m' n'' = 1,$$

so ergibt sich durch Vergleichung mit den Gleichungen (a) (§ 1 der Abh.) folgendes Theorem:

Einer jeden durch die Gleichungen

$$x = la + mb + nc,$$
$$y = l'a + m'b + n'c,$$
$$z = l''a + m''b + n''c$$

ausgedrückten Bewegung eines flüssigen Ellipsoides, dessen anfängliche Oberfläche die Gleichung

$$\frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{B^2} + \frac{c^2}{C^2} = 1$$

hat, entspricht durch Abänderung des anfänglichen Bewegungszustandes eine zweite durch die Gleichungen

$$x_1 = la + \frac{A}{B} l'b + \frac{A}{C} l''c,$$
$$y_1 = \frac{B}{A} ma + m'b + \frac{B}{C} m''c,$$
$$z_1 = \frac{C}{A} na + \frac{C}{B} n'b + n''c$$

ausgedrückte Bewegung desselben Ellipsoides.

Über diesen Satz mögen hier nur folgende allgemeine Bemerkungen noch Platz finden. Die zweite Bewegung unterscheidet sich von der ersten dadurch, daß an die Stelle von

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{dn}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{dl'}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{dn'}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{dl''}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{dm''}{dt}\right)_0$$

die Größen

$$\frac{A}{B}\left(\frac{dl'}{dt}\right)_0, \quad \frac{A}{C}\left(\frac{dl''}{dt}\right)_0, \quad \frac{B}{A}\left(\frac{dm}{dt}\right)_0, \quad \frac{B}{C}\left(\frac{dm''}{dt}\right)_0, \quad \frac{C}{A}\left(\frac{dn}{dt}\right)_0, \quad \frac{C}{B}\left(\frac{dn'}{dt}\right)_0$$

treten. Die beiden anfänglich koinzidierenden Ellipsoide sind auch zu jeder späteren Zeit einander kongruent, da $\Delta_1 = \Delta$ ist. Je zwei anfänglich zusammenfallende Teilchen erleiden in beiden Bewegungen zu derselben Zeit auch denselben Druck, da für beide Bewegungen σ dieselbe Bedeutung hat; dies läßt sich auch leicht durch die im § 4 der Abhandlung zur Bestimmung von σ gegebene Formel verifizieren, da die Größen

$$\frac{QR - P'^2}{A^2} + \frac{RP - Q'^2}{B^2} + \frac{PQ - R'^2}{C^2} \quad \text{und} \quad \sum \frac{dl}{dt}\frac{d\lambda}{dt}$$

beim Übergange von der einen Bewegung zur anderen ungeändert bleiben.

Es verdient ferner bemerkt zu werden, daß infolge der Willkürlichkeit der Vorzeichen der Achsen A, B, C jedesmal vier solche korrespondierende Bewegungen existieren, welche untereinander in derselben Beziehung stehen wie die vier durch die Koeffizientensysteme

$$\begin{matrix} l, & m, & n, \\ l', & m', & n', \\ l'', & m'', & n'', \end{matrix} \qquad \begin{matrix} l, & -m, & -n, \\ -l', & m', & n', \\ -l'', & m'', & n'', \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} l, & -m, & n, \\ -l', & m', & -n', \\ l'', & -m'', & n'', \end{matrix} \qquad \begin{matrix} l, & m, & -n, \\ l', & m', & -n', \\ -l'', & -m'', & n'' \end{matrix}$$

charakterisierten Bewegungen, welche durch Vertauschung der positiven Koordinatenrichtungen mit den negativen auseinander entspringen.

Endlich leuchtet ein, daß bei dem Übergange von der einen zu der anderen Bewegung die Integralgleichungen (I.) und (II.) sich miteinander vertauschen, während das aus dem Prinzip der lebendigen Kraft herrührende Integral (III.) ungeändert bleibt (§ 5 der Abh.).

Wenn ferner für den Anfangszustand der Bewegung die Relationen

$$B\left(\frac{dm}{dt}\right)_0 = A\left(\frac{dl'}{dt}\right)_0, \quad C\left(\frac{dn}{dt}\right)_0 = A\left(\frac{dl''}{dt}\right)_0, \quad B\left(\frac{dm''}{dt}\right)_0 = C\left(\frac{dn'}{dt}\right)_0$$

gelten, so ist auch für die ganze Dauer der Bewegung

$$Bm = Al', \quad Cn = Al'', \quad Bm'' = Cn',$$

und die beiden Bewegungen sind identisch. In diesem Fall reduzieren sich die neun Differentialgleichungen (a) auf nur sechs wesentlich verschiedene, und die Bewegung hängt nur noch von fünf willkürlichen Konstanten ab.

§ 4.

Ist nun während der ganzen Dauer der Bewegung $T = 0$, $T' = 0$, $T'' = 0$, so ist in der korrespondierenden Bewegung beständig

$$P_1' = 0, \quad Q_1' = 0, \quad R_1' = 0$$

und umgekehrt. Die Gleichungen der letzteren haben daher zufolge unserer ersten Untersuchung entweder die Form

$$x_1 = l_1 a, \quad y_1 = m_1' b, \quad z_1 = n_1'' c$$

oder

$$x_1 = l_1 a + m_1 b, \quad y_1 = -m_1 a + l_1 b, \quad z_1 = n_1'' c; \quad B = A,$$

in welchen beiden Fällen die ursprüngliche Bewegung dieselben Gleichungen hat; oder endlich die korrespondierende Bewegung besteht in der gleichförmigen Rotation

$$x_1 = a \cos kt + b \sin kt, \quad y_1 = -a \sin kt + b \cos kt, \quad z_1 = c$$

eines Jacobischen ungleichachsigen Ellipsoides. Dann ist die ursprüngliche Bewegung durch die Gleichungen

$$x = a \cos kt - b \frac{A}{B} \sin kt, \quad y = a \frac{B}{A} \sin kt + b \cos kt, \quad z = c$$

ausgedrückt, und hierin besteht der am Schluß der Dirichletschen Abhandlung von mir mitgeteilte Satz.

Zürich, den 6ten August 1860.

[Über den zugrunde liegenden Sachverhalt entnimmt man das Nähere aus der Anzeige Gött. Nachr. **1859**, S. 191—192:

„Der Königlichen Sozietät legte der Professor Riemann eine von Herrn Professor Dedekind in Zürich aus Dirichlets Nachlasse hergestellte Abhandlung vor:

‚Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik.'

Der Verstorbene hatte von diesen Untersuchungen schon in Nro. 14 d. Jahrg. 1857 dieser Nachrichten einen kurzen Auszug veröffentlicht, hinterließ aber das Manuskript der Abhandlung in einem unvollendeten und noch sehr lückenhaften Zustande mit der ausdrücklichen Bestimmung, daß nach seinem Tode Herr Professor Dedekind ersucht werden sollte, die Vollendung der Abhandlung zum Zwecke ihrer Herausgabe in den Schriften der Sozietät zu übernehmen. In betreff des wesentlichen Inhalts der Abhandlung genügt es hier auf die erwähnte Anzeige Dirichlets zu verweisen, und es bleibt daher nur zu bemerken übrig, daß die beigefügte Anwendung der Dirichletschen Prinzipien auf spezielle Fälle fast ganz Hrn. Prof. Dedekind verdankt wird, indem derselbe nicht bloß die schon von Dirichlet untersuchten Fälle nach den in seinen Vorlesungen und im Nachlasse gegebenen Andeutungen bearbeitet hat, sondern auch durch Anwendung derselben Prinzipien auf einen neuen Fall zu einem neuen und sehr schönen Resultate gelangt ist."

Der Zusatz führt hauptsächlich das eben genannte Resultat im einzelnen aus. E. N.]