I.

SUL POTENZIALE DI UN'ELLISSOIDE ETEROGENEA SOPRA SÈ STESSA (*)

« Nuovo Cimento », ser. 3, vol. IX, 1881, pp. 221–229.

Supponiamo di avere dei corpi a tre dimensioni o delle superficie σ_1, $\sigma_2, \cdots, \sigma_n$ di cui le funzioni potenziali siano respettivamente $V_1, V_2, \cdots, V_n$ e le densità $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$. La funzione potenziale di tutto il sistema sarà:

$$\sum_1^n V_p$$

e il potenziale del sistema sopra se medesimo:

$$P = \frac{1}{2}\sum_1^n{}_s \int_{\sigma_s} \left(\sum_1^n{}_r V_r\right) \rho_s \, d\sigma_s = \frac{1}{2}\sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s \int_{\sigma_s} V_r \, \rho_s \, d\sigma_s \, .$$

Abbiamo ora, per una nota proprietà dei potenziali:

$$\sum_1^n{}_s \int_{\sigma_s} V_2 \, \rho_s \, d\sigma_s = \sum_2^n{}_s \int_{\sigma_s} V_2 \, \rho_s \, d\sigma_s + \int_{\sigma_1} V_2 \, \rho_1 \, d\sigma_1 = \sum_2^n{}_s \int_{\sigma_s} V_2 \, \rho_s \, d\sigma_s + \int_{\sigma_2} V_1 \, \rho_2 \, d\sigma_2$$

$$\sum_1^n{}_s \int_{\sigma_s} V_3 \, \rho_s \, d\sigma_s = \sum_3^n{}_s \int_{\sigma_s} V_3 \, \rho_s \, d\sigma_s + \int_{\sigma_3} V_1 \, \rho_3 \, d\sigma_3 + \int_{\sigma_3} V_2 \, \rho_3 \, d\sigma_3 \, ,$$

. . . .

e in generale:

$$\sum_1^n{}_s \int_{\sigma_s} V_r \, \rho_s \, d\sigma_s = \sum_r^n{}_s \int_{\sigma_s} V_r \, \rho_s \, d\sigma_s + \sum_1^{r-1}{}_s \int_{\sigma_r} V_s \, \rho_r \, d\sigma_r \, .$$

Ne segue che:

$$P = \sum_1^n{}_r \sum_r^n{}_s \int_{\sigma_s} V_r \, \rho_s \, d\sigma_s - \frac{1}{2} \sum_1^n{}_r \int_{\sigma_r} V_r \, \rho_r \, d\sigma_r \, . \tag{1}$$

Da questa si deduce immediatamente l'altra:

$$P = \sum_1^n{}_r \int_{\sigma_r} \left(\sum_r^n{}_s V_s\right) \rho_r \, d\sigma_r - \frac{1}{2} \sum_1^n{}_r \int_{\sigma_r} V_r \, \rho_r \, d\sigma_r \, . \tag{2}$$

(*) Nel titolo di questo lavoro al nome dell'A. segue la qualifica di « Allievo della R. Scuola Normale Superiore di Pisa ».

Suppongasi di dividere una massa a tre dimensioni in strati infinitesimi A_h compresi fra le superficie:

$$f(x, y, z, h) = 0 \quad \text{e} \quad f(x, y, z, h + dh) = 0,$$

e corrispondano ai valori h_0 ed h_1 del parametro arbitrario h, le superficie:

$$f(x, y, z, h_0) = 0 \quad , \quad f(x, y, z, h_1) = 0$$

contorni del corpo che si considera, ammesso che esso occupi uno spazio semplicemente connesso o al più doppiamente connesso; suppongasi inoltre che $d\sigma_h$ sia l'elemento superficiale della superficie $f(x, y, z, h) = 0$, $\rho_h \, dh \, d\sigma_h$ la massa contenuta fra le superficie:

$$f(x, y, z, h) = 0 \quad , \quad f(x, y, z, h + dh) = 0$$

e le normali al contorno dell'elemento $d\sigma_h$, e $V_{t,h} \, dt$ il valore della funzione potenziale dello strato A_t nei punti della superficie $f(x, y, z, h) = 0$.

In tal caso il potenziale del corpo sopra se stesso a causa della (1) resulta:

$$\int_{h_0}^{h_1} dt \int_{h_0}^{t} dh \int_{\sigma_h} V_{t,h} \, \rho_h \, d\sigma_h, \tag{3}$$

e a causa della (2)

$$\int_{h_0}^{h_1} dt \int_{\sigma_t} \rho_t \, V_t \, d\sigma_t, \tag{4}$$

essendo V_t la funzione potenziale della massa compresa fra le superficie $f(x, y, z, t) = 0$ e $f(x, y, z, h_0) = 0$ nei punti della superficie $f(x, y, z, t) = 0$.

Se gli strati sono di livello ed interni gli uni agli altri, se h_0 è il valore del parametro h corrispondente al più interno, e h_1 è il valore corrispondente al più esterno, allora il potenziale del corpo si riduce a:

$$\int_{h_0}^{h_1} V'_t M_t \, dt, \tag{5}$$

in cui V'_t indica il valore costante che ha la funzione potenziale dello strato di livello A_t nei punti situati nell'interno della superficie $f(x, y, z, t) = 0$, e M_t indica la massa interna a questa superficie.

Gli strati A_h rimanendo strati di livello, siano le superficie $f(x, y, z, h) = 0$ superficie omotetiche rispetto ad un centro interno; il rapporto delle lunghezze di due linee omologhe nelle due superficie $f(x, y, z, h_2) = 0$ $f(x, y, z, h_3) = 0$ sia h_2/h_3, la superficie f $(x, y, z, h_0) = 0$ si riduca al centro di omotetia (avremo quindi $h_0 = 0$); sia di più $h_1 = 1$, e la densità di ciascuno strato A_h sia costante e data da una funzione $F'(1 - h^2)$, derivata, atta alla integrazione, della funzione $F(1 - h^2)$ rapporto ad $1 - h^2$, che si annulla per $h = 1$. Avremo:

$$M_t = C \int_0^t F'(1-h^2)\, h^2\, dh\,,$$

$$V'_t = C_1\, t\, F'(1-t^2)\,,$$

C e C_1 essendo due quantità dipendenti soltanto dalla forma della superficie $f(x, y, z, 1) = 0$. Ne segue che il potenziale a causa della (5) diviene:

$$W = CC_1 \int_0^1 F'(1-t^2)\, t\, dt \int_0^t F'(1-h^2)\, h^2\, dh$$

$$= \frac{1}{8} CC_1 \int_0^1 F^2(1-h^2)\, dh\,.$$

Facendo $F'(1-h^2) = 1$, la W diviene:

$$W' = \frac{1}{15} CC_1\,,$$

quindi:

$$W = \frac{15}{8} W' \int_0^1 F^2(1-h^2)\, dh\,, \tag{6}$$

formula che dà il valore del potenziale di una massa che occupa uno spazio a tre dimensioni semplicemente connesso, decomponibile in strati di livello omotetici, la densità essendo costante in ogni strato, in funzione del potenziale di una massa omogenea di densità 1 che occupa lo spazio stesso.

Applichiamo le formule trovate per avere in alcuni casi il potenziale sopra se stessa di un'ellissoide non omogenea di semiassi a, b, c.

Se la densità varia per ellissoidi omotetiche e concentriche, e alla superficie dell'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = h^2$$

la densità è $F'(1-h^2)$, si ha subito applicando la (6):

$$W' = \frac{8}{15} \pi^2 a^2 b^2 c^2 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} \text{ (1)}$$

e quindi:

$$W = \pi^2 a^2 b^2 c^2 \int_0^1 F^2(1-h^2)\, dh \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}\,, \tag{7}$$

formula dovuta al ch. prof. Betti.

(1) BETTI, *Teorica delle forze Newtoniane*, p. 128.

Se la densità varia per ellissoidi omotetiche e non concentriche, siano α, β, γ le coordinate, rispetto agli assi principali dell'ellissoide esterna E, del centro di omotetia O, e $F'(1-h^2)$ sia la densità alla superficie σ_h dell'ellissoide omotetica ad E che ha per semiassi ah, bh, ch. Per determinare il potenziale dell'ellissoide sopra se stessa adopreremo la formula (3).

Se ξ_h, η_h, ζ_h sono le coordinate di un punto della superficie σ_h riferite agli assi paralleli agli assi principali di E, che passano per O, abbiamo:

$$V_{t,h} = F'(1-t^2)\, v_{t,h} = 2\pi abc\, F'(1-t^2)\int_0^\infty \left(t - \frac{(\xi_h + t\alpha)\,\alpha}{a^2+\lambda} - \frac{(\eta_h + t\beta)\,\beta}{b^2+\lambda}\right.$$

$$\left. - \frac{(\zeta_h + t\gamma)\,\gamma}{c^2+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}\,,$$

$$\rho_h = p\, F'(1-h^2)\,,$$

p essendo la lunghezza della normale condotta per O al piano tangente all'ellissoide E nel punto della superficie di questa corrispondente al punto ξ_h, η_h, ζ_h della superficie σ_h (2).

Chiamando $d\sigma_1$ l'elemento della superficie dell'ellissoide E corrispondente all'elemento $d\sigma_h$ della superficie σ_h abbiamo dunque che il potenziale dell'ellissoide è:

$$W = \int_0^1 F'(1-t^2)\,dt \int_0^t F'(1-h^2)\, h^2\, dh \int_{\sigma_1} p\, v_{t,h}\, d\sigma_1\,.$$

Poniamo:

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} = K\,, \quad \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} = A\,,$$

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} = B\,, \quad \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} = C\,;$$

avremo:

$$W = 2\pi abc (K - A\alpha^2 - B\beta^2 - C\gamma^2)\left(\int_0^1 t F'(1-t^2)\,dt \int_0^t F'(1-h^2)\,h^2\,dh\right)\int_{\sigma_1} p\, d\sigma_1$$

$$- 2\pi abc \left(A\alpha \int_{\sigma_1} p\xi_1\, d\sigma_1 + B\beta \int_{\sigma_1} p\eta_1\, d\sigma_1 + C\gamma \int_{\sigma_1} p\zeta_1\, d\sigma_1\right)\left(\int_0^1 F'(1-t^2)\,dt \int_0^t F'(1-h^2)\,h^3\,dh\right).$$

Ora:

$$\int_{\sigma_1} p\, d\sigma_1 = 4\pi abc\,,$$

$$\int_{\sigma_1} p\xi_1\, d\sigma_1 = -\frac{16}{3}\pi abc\,\alpha\,,$$

(2) BELTRAMI, *Sulla teoria dell'attrazione degli ellissoidi*, « Nuovo Cimento », ser. 3, vol. VIII, 1880, p. 190 e sg. [*Opere mat.*, t. III, Milano, Hoepli, 1911; pp. 269-304].

perchè $\frac{1}{4} p\xi_1 \, d\sigma_1$ è il momento, rispetto al piano $\eta\zeta$ del cono omogeneo di densità 1 che ha per base l'elemento $d\sigma_1$ e per vertice O. Abbiamo inoltre, ponendo $\int_1^H F(H)\, dH = \Phi(H)$:

$$\int_0^1 F'(1-t^2)\, t\, dt \int_0^t F'(1-h^2)\, h^2\, dh = \frac{1}{8}\int_0^1 F^2(1-t^2)\, dt,$$

$$\int_0^1 F'(1-t^2)\, dt \int_0^t F'(1-h^2)\, h^3\, dh = -\frac{1}{8}\int_0^1 F^2(1-t^2)dt - \frac{1}{2}\int_0^1 \Phi(1-t^2)\,\Phi''(1-t^2)dt,$$

e quindi:

$$\text{(8)} \qquad W = \pi^2 a^2 b^2 c^2 K \int_0^1 F^2(1-t^2)\, dt - \frac{1}{3}\pi^2 a^2 b^2 c^2 (A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2)\left(7\int_0^1 F^2(1-t^2)\, dt + 16\int_0^1 \Phi(1-t^2)\,\Phi''(1-t^2)\, dt\right).$$

Qualunque sia il punto O, purchè appartenga all'ellissoide:

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = \text{cost.},$$

e rimanga la stessa la distribuzione della densità da strato a strato, il potenziale ha lo stesso valore.

Dalla (8) si deduce immediatamente la (7) facendo $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Consideriamo il caso in cui la densità varia per ellissoidi omofocali. Applicheremo la formula (4).

Supponiamo che la densità nei punti della superficie σ_t dell'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2+t} + \frac{y^2}{b^2+t} + \frac{z^2}{c^2+t} = 1$$

sia data da $F'(D_t)$, derivata atta alla integrazione della funzione $F(D_t)$ che è zero per $D_t = 0$, essendo;

$$D_t = \sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)},$$

e sia M_t la massa contenuta nell'interno dell'ellissoide σ_t; avremo:

$$V_t = \frac{3}{4} M_t \int_0^\infty \left(1 - \frac{x_t^2}{a^2+t+\lambda} - \frac{y_t^2}{b^2+t+\lambda} - \frac{z_t^2}{c^2+t+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{D_{\lambda+t}}$$

$$M_t = \frac{4}{3}\pi \int_{-c^2}^t F'(D_h)\, \frac{d}{dh} D_h\, dh = \frac{4}{3}\pi F(D_t)$$

quando sia $a > c$, $b > c$. Quindi il potenziale sopra se stessa dell'ellissoide è:

$$W = \pi \int_{-c^2}^0 F(D_t)\, dt \int_{\sigma_t} \rho_t\, d\sigma_t \int_0^\infty \left(1 - \frac{x_t^2}{a^2+t+\lambda} - \frac{y_t^2}{b^2+t+\lambda} - \frac{z_t^2}{c^2+t+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{D_{\lambda+t}}.$$

Ora

$$dt \int_{\sigma_t} \rho_t \, d\sigma_t = \frac{4}{3} \pi \, \mathrm{F}' (\mathrm{D}_t) \frac{d}{dt} \mathrm{D}_t \, dt,$$

e

$$dt \int_{\sigma_t} x_t^2 \, \rho_t \, d\sigma_t$$

è il momento d'inerzia rispetto al piano yz dello strato compreso fra le ellissoidi σ_t e σ_{t+dt}, quindi:

$$dt \int_{\sigma_t} x_t^2 \, \rho_t \, d\sigma_t = \frac{4}{15} \pi \, \mathrm{F}' (\mathrm{D}_t) \frac{d}{dt} ((a^2 + t) \mathrm{D}_t) \, dt,$$

e analogamente:

$$dt \int_{\sigma_t} y_t^2 \, \rho_t \, d\sigma_t = \frac{4}{15} \pi \, \mathrm{F}' (\mathrm{D}_t) \frac{d}{dt} ((b^2 + t) \mathrm{D}_t) \, dt,$$

$$dt \int_{\sigma_t} z_t^2 \, \rho_t \, d\sigma_t = \frac{4}{15} \pi \, \mathrm{F}' (\mathrm{D}_t) \frac{d}{dt} ((c^2 + t) \mathrm{D}_t) \, dt.$$

Ne segue che:

$$\mathrm{W} = \frac{4}{15} \pi^2 \int_{-c^2}^{0} \mathrm{F} (\mathrm{D}_t) \, \mathrm{F}' (\mathrm{D}_t) \, dt \left\{ \left(\frac{d}{dt} \mathrm{D}_t \right) \int_0^\infty \left(5 - \frac{a^2 + t}{a^2 + t + \lambda} - \frac{b^2 + t}{b^2 + t + \lambda} \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{c^2 + t}{c^2 + t + \lambda} \right) \frac{d\lambda}{\mathrm{D}_{\lambda+t}} - \mathrm{D}_t \int_0^\infty \left(\frac{1}{a^2 + t + \lambda} + \frac{1}{b^2 + t + \lambda} + \frac{1}{c^2 + t + \lambda} \right) \frac{d\lambda}{\mathrm{D}_{\lambda+t}} \right\}.$$

Da questa facilmente si deduce:

$$\mathrm{W} = \frac{8}{15} \pi^2 \int_{-c^2}^{0} \mathrm{F} (\mathrm{D}_t) \, \mathrm{F}' (\mathrm{D}_t) \left\{ 2 \left(\frac{d}{dt} \mathrm{D}_t \right) \int_t^\infty \frac{d\lambda}{\mathrm{D}_\lambda} - 1 \right\} dt$$

$$= \frac{8}{15} \pi^2 \, \mathrm{F}^2 (abc) \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\mathrm{D}_\lambda} + \frac{8}{15} \pi^2 \int_{-c^2}^{0} \frac{\mathrm{F} (\mathrm{D}_t)}{\mathrm{D}_t} (\mathrm{F} (\mathrm{D}_t) - \mathrm{D}_t \, \mathrm{F}' (\mathrm{D}_t)) \, dt.$$

Ma se M è la massa dell'ellissoide,

$$\mathrm{M} = \frac{4}{3} \pi \mathrm{F} (abc),$$

quindi:

$$\mathrm{W} = \frac{3}{10} \mathrm{M}^2 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\mathrm{D}_\lambda} + \frac{8}{15} \pi^2 \int_{-c^2}^{0} \frac{\mathrm{F} (\mathrm{D}_t)}{\mathrm{D}_t} (\mathrm{F} (\mathrm{D}_t) - \mathrm{D}_t \mathrm{F}' (\mathrm{D}_t)) \, dt$$

ossia indicando con W′ il potenziale dell'ellissoide omogenea di massa M e di semiassi a, b, c:

$$\mathrm{W} = \mathrm{W}' + \frac{8}{15} \pi^2 \int_{-c^2}^{0} \frac{\mathrm{F} (\mathrm{D}_t)}{\mathrm{D}_t} (\mathrm{F} (\mathrm{D}_t) - \mathrm{D}_t \, \mathrm{F}' (\mathrm{D}_t)) \, dt.$$

Pisa, Maggio 1881.