III.

SUI PRINCIPII DEL CALCOLO INTEGRALE (*)

« Giornale di Matematiche », vol. XIX, 1881, pp. 333-372.

RIEMANN nella sua Memoria *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (1) ha introdotto il concetto di *integrale definito* di una funzione che si mantiene sempre finita nell'intervallo di integrazione definendolo come *il limite* (*quando esiste*) *della somma dei prodotti di ciascuno degli intervalli in cui viene diviso l'intervallo totale d'integrazione rispettivamente moltiplicato per uno dei valori che assume la funzione nell'intervallo stesso, quando questi intervalli decrescono insieme indefinitamente*.

Nella stessa Memoria RIEMANN enuncia la condizione necessaria e sufficiente per la possibilità della integrazione di una funzione definita in questo senso. RIEMANN ritornò poi con maggiori sviluppi su questo concetto nelle sue lezioni sulle equazioni differenziali (2).

Il chiar. prof. DINI (3) dà una dimostrazione completa del teorema di RIEMANN dopo avere alquanto estesa la definizione di integrale definito.

Partendo dal concetto di RIEMANN e considerando un integrale definito come funzione del suo limite superiore, esso risulta continuo ed ammette per derivata in tutti i punti di continuità della funzione che si integra, la funzione stessa; nei punti di discontinuità ordinaria a destra (o a sinistra) possiede una derivata a destra (o a sinistra) eguale al limite dei valori a destra (o a sinistra) della funzione che si integra; in un punto di discontinuità di seconda specie può l'integrale non avere la derivata: in ogni caso i suoi *estremi oscillatori destri e sinistri* (4) sono rispettivamente compresi fra i *limiti superiore* e *inferiore destri* e i *limiti superiore* e *inferiore sinistri* della funzione che si integra in quel punto (5).

Reciprocamente si può dimostrare che se una funzione continua ammette una derivata a destra o a sinistra o una derivata ordinaria atte alla integra-

(*) Nel titolo di questo lavoro al nome dell'A. segue la qualifica di « Allievo della R. Scuola Normale Superiore di Pisa ».

(1) RIEMANN, *Gesammelte Mathematische Werke*, p. 225.

(2) Vedi *Partielle Differentialgleichungen* von BERNHARD RIEMANN, herausgegeben von K. HATTENDORFF, p. 5.

(3) DINI, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, p. 232 e sgg.

(4) DINI, op. cit., p. 190.

(5) Per *limite superiore destro* di una funzione in un punto si intende il limite (che esiste sempre) dei limiti superiori dei valori della funzione negli intorni a destra del punto quando si fanno indefinitamente impiccolire questi intorni. Analogamente si definiscono il limite inferiore destro ed i due limiti di sinistra.

zione (nel concetto di RIEMANN), gli integrali definiti di queste funzioni fra dati limiti sono eguali alle differenze fra i valori della funzione primitiva ai limiti dell'integrale, e più generalmente si ha, che se uno dei quattro estremi oscillatori di una funzione continua è atto alla integrazione in un certo intervallo, in questo stesso intervallo sono pure atti alla integrazione gli altri tre estremi oscillatori ed il loro integrale fra dati limiti è la differenza dei valori della funzione primitiva in questi limiti stessi.

Così la definizione introdotta da RIEMANN di integrale definito in molti casi (quello, per esempio, in cui la funzione sotto il segno è continua) comprende la definizione ordinaria di integrale che viene data dai trattati (6) e ne dimostra rigorosamente la esistenza. Il chiar. prof. DINI (7) solleva il dubbio che in alcuni casi possa la definizione ordinaria di integrale non rientrare in quella di RIEMANN, cioè vi siano delle funzioni le cui derivate non sono atte alla integrazione.

Mi propongo di dare alcuni esempi di tali funzioni, come pure una dimostrazione del teorema di RIEMANN, alcune conseguenze che possono dedursi da questa dimostrazione e l'applicazione di essa alla dimostrazione dell'esistenza in alcuni casi degli integrali delle equazioni differenziali ordinarie.

I.

Nell'intervallo (0 , 1) può costruirsi un gruppo di punti P di seconda specie i quali godono della proprietà che non si possono rinchiudere in un numero finito di intervalli di cui la somma sia tanto piccola quanto si vuole, tale però che nell'interno di ogni intervallo entro a quello totale (0 , 1) esista un nuovo intervallo in cui mancano punti del gruppo (8).

Costruiamo nell'intervallo (ab) una funzione che indicheremo con

$$f(x, a, b)$$

la quale goda delle seguenti proprietà: 1° in a e b sia zero; 2° sia definita dalla espressione

$$A = (x - a)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x - a}$$

dal punto a fino al punto x_1 a destra di a corrispondente al massimo della funzione situato a sinistra del punto di mezzo c dell'intervallo (ab) più vicino a questo punto; 3° sia definita dalla espressione

$$B = (b - x)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{b - x}$$

(6) Vedi ad esempio SERRET, *Cours de Calcul différentiel et intégral*, vol. 2, p. 2.

(7) Vedi DINI, op, cit., p. 276.

(8) Vedi la mia Nota: *Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue.* « Giornale di Matematica » diretto dal prof. G. BATTAGLINI, vol. XIX, p. 76. [In questo volume, II, p. 7].

dal punto b fino al punto x_2 a sinistra di b corrispondente al massimo della funzione a destra del punto c e più vicino a questo punto; 4° dal punto x_1 al punto x_2 sia costante ed eguale al valore comune che hanno le espressioni A e B rispettivamente per i valori x_1 e x_2 della x. La funzione $f(x, a, b)$ sarà una funzione finita, inferiore a $(b - a)^2$, continua e che avrà in tutti i punti dell'intervallo (ab) una derivata determinata finita e inferiore sempre a $2(b - a) + 1$ (eguale a o agli estremi); soltanto questa derivata nei punti a e b avrà una discontinuità di seconda specie perchè in vicinanza di questi punti essa assume valori prossimi a $+1$ e a -1 quanto si vuole.

È facile poi scorgere che in un punto qualunque m dell'intervallo (ab) la funzione ha un valore inferiore ai due numeri $(m - a)^2$, $(m - b)^2$.

Ciò premesso costruiamo nell'intervallo $(0, 1)$ una funzione $\varphi(x)$ la quale sia zero in tutti i punti del gruppo e nei suoi punti limiti; preso poi un punto qualunque che non appartiene al gruppo né è suo punto limite e determinato il massimo intorno di esso (ab) in cui non esistono punti del gruppo, in questo intervallo (ab) prendiamo la funzione $\varphi(x)$ come data da $f(x, a, b)$.

Avremo così definito in tutti i punti la $\varphi(x)$, la quale resulterà finita, inferiore a 1 e continua in tutto l'intervallo $(0, 1)$; di più avrà la derivata in tutti i punti. Che esista la derivata nei punti che non sono del gruppo né sono suoi punti limiti è evidente; nei punti del gruppo e nei punti limiti la derivata è zero. Infatti preso un punto del gruppo o un punto limite m qualunque avremo:

$$\frac{\varphi(m+h) - \varphi(m)}{h} = \frac{\varphi(m+h)}{h}.$$

Ma $\varphi(m + h)$ non può superare h^2 quindi in valore assoluto avremo:

$$\frac{\varphi(m+h) - \varphi(m)}{h} < h$$

e

$$\lim \frac{\varphi(m+h) - \varphi(m)}{h} = 0.$$

Ora abbiamo dimostrato che nell'interno di un intervallo arbitrario entro $(0, 1)$ esiste sempre un altro intervallo in cui mancano punti del gruppo P, quindi in intorni arbitrariamente piccoli di un punto di questo gruppo o di un suo punto limite ne esistono di quelli in cui la $\varphi(x)$ ha la derivata vicina a $+1$ o a -1 quanto si vuole. La derivata della $\varphi(x)$ è dunque una funzione discontinua in tutti i punti del gruppo P e nei suoi punti limiti, ed i suoi salti in questi punti sono eguali a 1, quindi, poichè i punti del gruppo P non sono richiudibili in intervalli in numero finito di cui la somma sia arbitrariamente piccola, essa derivata non è atta alla integrazione.

La funzione $\varphi(x)$ che abbiamo ora costruita gode della proprietà che preso un intervallo arbitrario entro $(0, 1)$ in esso se ne può costruire un altro nel quale la derivata è atta alla integrazione. Vediamo ora di costruire un'altra funzione di cui la derivata non sia atta alla integrazione in nessuna porzione dell'intervallo $(0, 1)$.

La funzione

$$(b-a)\,\varphi\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

definita fra a e b sarà sempre finita, inferiore in valore assoluto a $(b-a)$, continua e avrà in tutti i punti la derivata determinata finita, inferiore a $3\,(b-a)$ e non atta alla integrazione in tutto l'intervallo (ab), perchè in un gruppo di punti non rinchiudibili in intervalli di cui la somma è arbitrariamente piccola, che chiameremo $P_{b,a}$, essa è discontinua e fa dei salti eguali a 1. Formiamo ora una funzione $\varphi_1(x)$ nell'intervallo $(0\,,\,1)$ eguale a 0 in tutti i punti del gruppo P e nei suoi punti limiti; preso poi un punto m arbitrario che non appartenga al gruppo né ai suoi punti limiti e costruito il massimo intorno (ab) di esso che non contiene punti del gruppo P, in questo intervallo sia la $\varphi_1(x)$ definita dalla espressione

$$(b-a)\,\varphi\left(\frac{x-a}{b-a}\right).$$

Sia P_1 l'insieme di tutti i punti del gruppo P e dei gruppi $P_{b,a}$ che così si vengono a ottenere. Formiamo una nuova funzione $\varphi_2(x)$ eguale a zero nei punti del gruppo P_1 e nei suoi punti limiti; preso poi un punto m non appartenente al gruppo, né suo punto limite, e costruito il massimo intorno $(a_1\,b_1)$ non avente punti del gruppo P_1, in questo intorno la $\varphi_2(x)$ sia definita dalla espressione

$$(b_1-a_1)\,\varphi\left(\frac{x-a_1}{b_1-a_1}\right);$$

così analogamente si costruiscano le funzioni $\varphi_3(x)\,,\,\varphi_4(x)\,,\cdots,\,\varphi_n(x)$ mediante i gruppi di punti $P_2\,,\,P_3\,,\cdots,\,P_n$ ottenuti analogamente a P_1. È facile riconoscere che in ogni intervallo superiore a $1/2^{2n}$ esistono sempre dei punti del gruppo P_n e nell'interno di ogni intervallo si possono costruire altri intervalli in cui mancano punti del gruppo stesso.

Ciò premesso si costruisca la serie:

$$\psi(x)=\varphi(x)+\frac{\varphi_1(x)}{3^2}+\frac{\varphi_2(x)}{3^4}+\cdots+\frac{\varphi_n(x)}{3^{2n}}+\cdots$$

Essa sarà convergente in egual grado in tutto l'intervallo $(0\,,\,1)$, di più la serie delle derivate

$$\varphi'(x)+\frac{\varphi_1'(x)}{3^2}+\cdots+\frac{\varphi_n'(x)}{3^{2n}}+\cdots,$$

essendo essa pure convergente in egual grado, avremo che la $\psi(x)$ sarà una funzione finita e continua la quale avrà in tutti i punti una derivata determinata e finita che sarà la serie delle derivate dei termini (9). Dimostriamo che la $\psi'(x)$ in qualunque porzione dell'intervallo $(0\,,\,1)$ non è atta alla integrazione. Sia infatti $(\alpha\,,\,\beta)$ un intervallo qualunque entro $(0\,,\,1)$; se esso è maggiore di $1/2^{2n-1}$ dovrà trovarsi entro di esso più di un punto

(9) Vedi DINI, op. cit., p. 115.

del gruppo P_n, e quindi un intervallo (cd) in cui mancano punti del gruppo P_n, ma tale che c e d siano punti di questo gruppo o suoi punti limiti.

Nell'intervallo (cd) le funzioni $\varphi', \varphi', \ldots, \varphi'_{n-1}$ sono continue, mentre la φ'_n non è atta alla integrazione perchè nel gruppo di punti $P_{c,d}$ è discontinua e fa dei salti eguali a 1. Ne segue che nello stesso intervallo, e quindi in (α, β), la $\psi'(x)$ non è atta alla integrazione perchè i salti della somma

$$\sum_{n+1}^{\infty} \frac{\varphi'_m(x)}{3^{2m}}$$

sono certamente inferiori a $1/3^{2n+1}$ e quindi inferiori ai salti della funzione

$$\frac{\varphi'_n(x)}{3^{2n}}.$$

II.

Se $f(x)$ è una funzione finita qualunque data nell'intervallo (x_0, x_1) esistono (per le $h_1, h_2, \cdots, h_n$ tendenti arbitrariamente allo zero) i limiti delle somme

$$h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_n L_n,$$
$$h_1 l_1 + h_2 l_2 + \cdots + h_n l_n,$$

quando $h_1 + h_2 + \cdots + h_n = x_1 - x_0$ e L_p e l_p sono rispettivamente i limiti superiore e inferiore di $f(x)$ nell'intervallo h_p (gli estremi inclusi).

Infatti ammettiamo $x_1 > x_0$; costruiamo due diverse divisioni $(h_1, h_2, \cdots, h_n)$ $(h'_1, h'_2, \cdots, h'_m)$ dell'intervallo (x_0, x_1).

Chiamiamo $h'_{t+1}, h'_{t+2}, \cdots, h'_{t+p}$ tutti quegli intervalli situati internamente all'intervallo h_t; avremo

$$h'_{t+1} L'_{t+1} + h'_{t+2} L'_{t+2} + \cdots + h'_{t+p} L'_{t+p} \leqq h_r L_r;$$

quindi poichè gli intervalli h' che contengono (gli estremi esclusi) estremi degli intervalli $h_1, h_2, \cdots, h_n$ sono certo in numero di n, ed in essi l'oscillazione della $f(x)$ è inferiore a $2M$, (M essendo il limite superiore dei valori assoluti della $f(x)$ nell'intervallo (x_0, x_1)), avremo se le h' sono tutte inferiori a δ

$$h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_n L_n > h'_1 L'_1 + h'_2 L'_2 + \cdots + h'_m L'_m - 2n\delta M,$$

L'_p essendo il limite superiore della $f(x)$ nell'intervallo h'_p. Ciò prova che il

$$\lim (h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_n L_n)$$

comunque impiccoliscano le $h_1, h_2, \cdots, h_n$ è il limite inferiore dei valori che assume la somma

$$h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_n L_n$$

per tutti i valori possibili di $h_1, h_2, \cdots, h_n$; perchè se questo limite inferiore è A, avremo che dovrà esistere qualunque sia il numero positivo σ una speciale divisione $h_1, h_2, \cdots, h_n$ dell'intervallo (x_0, x_1) per cui si ha

$$0 < h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_n L_n - A < \frac{\sigma}{2}$$

e quindi per δ inferiore a $\sigma/4n\mathrm{M}$, se $h'_1, h'_2, \cdots, h'_m$ sono comunque, purchè inferiori a δ, avremo

$$0 < h'_1 \mathrm{L}'_1 + h'_2 \mathrm{L}'_2 + \cdots + h'_m \mathrm{L}'_m - \mathrm{A} < \sigma.$$

Analogamente si prova che

$$\lim (h_1 l_1 + h_2 l_2 + \cdots + h_n l_n)$$

esiste ed è il limite superiore dei valori che assume la somma

$$h_1 l_1 + h_2 l_2 + \cdots + h_n l_n$$

per tutti i valori possibili di $h_1, h_2, \cdots, h_n$.

Se $x_1 < x_0$ gli intervalli $h_1, h_2, \ldots, h_n$ vanno presi negativi; in tal caso il limite della somma

$$h_1 \mathrm{L}_1 + h_2 \mathrm{L}_2 + \cdots + h_n \mathrm{L}_n$$

esiste ed è il limite inferiore dei valori della stessa somma per tutti i valori delle $h_1, h_2, \cdots, h_n$.

Il limite della somma

$$h_1 l_1 + h_2 l_2 + \cdots + h_n l_n$$

è invece il limite superiore dei valori della somma stessa.

Ciò prova subito che se

$$h_1 (\mathrm{L}_1 - l_1) + h_2 (\mathrm{L}_2 - l_2) + \cdots + h_n (\mathrm{L}_n - l_n) = h_1 \mathrm{D}_1 + h_2 \mathrm{D}_2 + \cdots + h_n \mathrm{D}_n$$

$\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \cdots, \mathrm{D}_n$ essendo le oscillazioni della $f(x)$ negli intervalli $h_1, h_2, \cdots, h_n$, tende a zero coll'impiccolire delle h in un certo modo, tende pure a zero in qualunque altro modo si facciano impiccolire le h e si ha

$$\lim (h_1 \mathrm{L}_1 + h_2 \mathrm{L}_2 + \cdots + h_n \mathrm{L}_n) =$$
$$\lim (h_1 l_1 + h_2 l_2 + \cdots + h_n l_n) =$$
$$\lim (h_1 f_1 + h_2 f_2 + \cdots + h_n f_n),$$

f_p essendo un valore compreso fra il limite superiore e il limite inferiore (gli estremi inclusi), di $f(x)$ nell'intervallo h_p.

Si è così ritrovata la condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione sia atta alla integrazione secondo il concetto di RIEMANN [10]. Vediamo di dedurre dalla dimostrazione data alcune conseguenze.

Si è visto, come da una funzione qualunque si può dedurre (moltiplicando rispettivamente i limiti superiori ed inferiori, che essa ha negli intervalli nei quali è diviso l'intervallo totale in cui è definita, per gli intervalli stessi e passando al limite coll'impiccolire insieme questi intervalli) due quantità le quali si riducono, quando la funzione è atta all'integrazione,

(10) DINI, op. cit., p. 241.

all'integrale definito. Queste quantità godono di alcune proprietà analoghe a quelle degli integrali ordinari. Per brevità indicheremo con

$$\overline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx$$

quella che si ottiene considerando i limiti superiori e con

$$\underline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx$$

quella che si ottiene considerando i limiti inferiori della funzione $f(x)$ definita nell'intervallo (x_0, x_1), e chiameremo la prima *integrale superiore*, la seconda *integrale inferiore*.

Siano Λ_p e λ_p respettivamente i limiti superiore e inferiore dei valori della $f(x)$ nell'intervallo h_p (*gli estremi ora esclusi*) avremo:

$$h_1\Lambda_1 + h_2\Lambda_2 + \cdots + h_n\Lambda_n \leqq h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_n L_n$$

$$h_1\Lambda_1 + h_2\Lambda_2 + \cdots + h_n\Lambda_n \geqq h'_1 L'_1 + h'_2 L'_2 + \cdots + h'_m L'_m - 4n\delta M$$

$$h_1\lambda_1 + h_2\lambda_2 + \cdots + h_n\lambda_n \geqq h_1\ l_1 + h_2\ l_2 + \cdots + h_n l_n$$

$$h_1\lambda_1 + h_2\lambda_2 + \cdots + h_n\lambda_n \leqq h'_1\ l'_1 + h'_2\ l'_2 + \cdots + h'_m l'_m + 4n\delta M.$$

il che prova che

$$\lim(h_1\Lambda_1 + h_2\Lambda_2 + \cdots + h_n\Lambda_n) = \overline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx$$

$$\lim(h_1\lambda_1 + h_2\lambda_2 + \cdots + h_n\lambda_n) = \underline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx,$$

per le $h_1, h_2, \cdots, h_n$ tendenti ciascuna indefinitamente allo zero.

È facile dimostrare le formule

$$\overline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx = -\overline{\int_{x_1}^{x_0}}[f(x)]\,dx$$

$$\overline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx = \overline{\int_{x_0}^{x_2}}[f(x)]\,dx + \overline{\int_{x_2}^{x_1}}[f(x)]\,dx$$

$$\overline{\int_{x_0}^{x_2}}[f(x)]\,dx = \overline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx + \overline{\int_{x_1}^{x_2}}[f(x)]\,dx$$

$$\overline{\int_{x_0}^{x_1}}[Cf(x)]\,dx = C\overline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx$$

$$\overline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx \gtreqless \overline{\int_{x_0}^{x_1}}[\varphi(x)]\,dx$$

$$\overline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)+\psi(x)]\,dx \lesseqgtr \overline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx + \overline{\int_{x_0}^{x_1}}[\psi(x)]\,dx,$$

essendo respettivamente x_2 una quantità compresa fra x_0 e x_1, C una costante, $\varphi(x)$ una funzione definita fra x_0 e x_1 maggiore in tutti i punti alla $f(x)$ e $\psi(x)$ una funzione arbitraria definita nell'intervallo (x_0, x_1); nelle due ultime formule va preso il primo o il secondo segno di diseguaglianza secondo che x_1 è maggiore o minore di x_0.

Se si aggiunge alla funzione $f(x)$ una funzione di *integrale nullo* le due quantità

$$\overline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx, \quad \underline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx$$

non cambiano.

In particolare non cambiano mutando i valori della $f(x)$ in un numero finito di punti o in un gruppo di prima specie.

Da una delle formule scritte precedentemente si deduce se $x_1 > x_0$

$$M(x_1 - x_0) \geqq \overline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx \geqq \underline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx \geqq m(x_1 - x_0)$$

M e m essendo respettivamente i limiti superiore e inferiore di $f(x)$ nell'intervallo (x_0, x_1).

È facile inoltre dimostrare il teorema:

Se $f(x)$ è una funzione finita definita nell'intervallo $(\alpha\beta)$, *x_1 e x_0 sono valori compresi in questo intervallo, le due espressioni*

$$\overline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx \quad , \quad \underline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx,$$

considerate come funzioni di x_1 sono funzioni continue che hanno in ogni punto gli estremi oscillatori destri e sinistri respettivamente compresi fra i limiti superiore e inferiore destri e sinistri di $f(x)$ in quel punto, quando si prende per definizione:

$$\overline{\int_{x_0}^{x_0}}[f(x)]\,dx = \underline{\int_{x_0}^{x_0}}[f(x)]\,dx = 0.$$

Abbiamo infatti (M' e m' essendo respettivamente i limiti superiore e inferiore nell'intervallo (x_1, x'_1) interno ad $(\alpha\beta)$, dei valori della $f(x)$) se $x'_1 > x_1$

$$M'(x'_1 - x_1) \geqq \overline{\int_{x_0}^{x'_1}}[f(x)]\,dx - \overline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx \geqq m'(x'_1 - x_1)$$

e se $x'_1 < x_1$

$$M'(x'_1 - x_1) \leqq \overline{\int_{x_0}^{x'_1}} [f(x)]\, dx - \overline{\int_{x_0}^{x_1}} [f(x)]\, dx \leqq m'(x'_1 - x_1);$$

quindi in ogni caso

$$M' \geqq \frac{\overline{\int_{x_0}^{x'_1}} [f(x)]\, dx - \overline{\int_{x_0}^{x_1}} [f(x)]\, dx}{x'_1 - x_1} \geqq m'$$

il che prova quanto si voleva dimostrare.

Se ne deduce che se in un punto la $f(x)$ è continua a destra o a sinistra o da tutte due le parti, in quel punto le due funzioni

$$\overline{\int_{x_0}^{x_1}} [f(x)]\, dx, \quad \underline{\int_{x_0}^{x_1}} [f(x)]\, dx$$

ammettono una derivata a destra o a sinistra o ordinaria eguale al limite dei valori della funzione a destra o a sinistra, o al limite comune dei valori della funzione a destra e a sinistra di quel punto.

Avremo dunque che se una funzione punteggiata discontinua non è atta alla integrazione si possono sempre trovare delle funzioni (delle quali quelle che assumono un dato valore in un punto dato, sono in numero infinito) che godono rispetto alla funzione data di una proprietà analoga a quella che possiede per le funzioni atte alla integrazione l'integrale ordinario, cioè di avere per derivate nei punti di continuità i valori che ha la punteggiata discontinua in quei punti.

A questo riguardo si può enunciare il teorema:

Se una funzione ha delle discontinuità in un gruppo di punti entro un dato intervallo, esiste sempre una funzione che ha per derivata la funzione data in tutti i punti dell'intervallo, esclusi quelli appartenenti al gruppo e i punti limiti del medesimo; la condizione necessaria e sufficiente affinchè questa funzione sia unica, quando viene definita in un punto, è che i punti del gruppo siano rinchiudibili in intervalli arbitrariamente piccoli o anche, *se la derivata di una funzione si conosce in tutti i punti di un intervallo, esclusi quelli appartenenti ad un gruppo di punti e ai suoi punti limiti, la condizione necessaria e sufficiente affinchè si possa determinare la funzione primitiva (conoscendone il valore in un punto) è che il gruppo sia rinchiudibile in intervalli arbitrariamente piccoli.*

Infatti se il gruppo è rinchiudibile in intervalli arbitrariamente piccoli e se due funzioni $F(x)$ e $F_1(x)$ hanno per derivata la funzione data, la loro differenza

$$F(x) - F_1(x)$$

ha gli estremi oscillatori funzioni atte alla integrazione e di integrale nullo.

Se il gruppo non è rinchiudibile in intervalli arbitrariamente piccoli, aggiungendo alla $f(x)$ la $\varphi(x)$, funzione avente in tutti i punti del gruppo valori finiti discosti dallo zero più di una quantità finita maggiore della massima oscillazione della $f(x)$, e avente il valore zero in tutti gli altri punti, si otterrà la $f(x) + \varphi(x)$ funzione non atta alla integrazione e tale che A essendo una costante arbitraria

$$\mathrm{A} + \overline{\int_{x_0}^{x_1}} [f(x) + \varphi(x)] dx,$$

$$\mathrm{A} + \underline{\int_{x_0}^{x_1}} [f(x) + \varphi(x)] dx$$

saranno funzioni di x_1 aventi per derivata nei punti di continuità della $f(x)$ (esclusi i punti limiti del gruppo) la $f(x)$ stessa.

Mediante i teoremi ora enunciati si vede come è possibile costruire con facilità degli esempi di funzioni le quali hanno in ogni porzione dell'intervallo in cui sono definite dei tratti d'invariabilità senza essere sempre costanti. Se infatti definiamo una funzione $f(x)$ in un intervallo $(\alpha\beta)$ in modo che sia eguale ad una costante diversa da zero in tutti i punti e nei punti limiti di un gruppo non rinchiudibile in un numero finito d'intervalli di cui la somma è arbitrariamente piccola, ed eguale a zero in tutti i punti rimanenti (11), una delle funzioni di x_1

$$\overline{\int_{\alpha}^{x_1}} [f(x)] dx,$$

$$\underline{\int_{\alpha}^{x_1}} [f(x)] dx$$

per x_1 compresa fra α e β godrà della proprietà di avere in ogni porzione dell'intervallo $(\alpha\beta)$ dei tratti di invariabilità senza essere costante in tutto l'intervallo $(\alpha\beta)$.

Passiamo a considerare gli integrali superiori e inferiori degli estremi oscillatori di funzioni continue. Abbiamo i teoremi:

I quattro estremi oscillatori di una funzione hanno gli stessi integrali superiori e inferiori.

Infatti in ogni intervallo arbitrario in cui sono definiti i quattro estremi oscillatori di una funzione essi hanno uno stesso limite superiore ed uno stesso limite inferiore (12).

Se una funzione continua $f(x)$ definita fra x_0 e x_1 per $x = x_0$ assume il valore C *e $\lambda(x)$ è uno dei suoi estremi oscillatori si ha se $x_1 > x_0$*

$$\mathrm{C} + \underline{\int_{x_0}^{x_1}} [\lambda(x)] dx \leqq f(x_1) \leqq \mathrm{C} + \overline{\int_{x_0}^{x_1}} [\lambda(x)] dx,$$

(11) Ho considerata una di tali funzioni nella mia Nota già citata.

(12) Vedi DINI, op. cit., p. 194.

e se $x_1 < x_0$

$$C + \underline{\int_{x_0}^{x_1}} [\lambda(x)]\, dx \geqq f(x_1) \geqq C + \overline{\int_{x_0}^{x_1}} [\lambda(x)]\, dx.$$

Infatti dividiamo l'intervallo (x_0, x_1) negli altri $h_1, h_2, \cdots, h_n$; avremo se $x_1 > x_0$ e L_p e l_p sono respettivamente il limite superiore ed inferiore di $\lambda(x)$ nell'intervallo h_p

$$L_p h_p > f\left(x_0 + \sum_1^p h_r\right) - f\left(x_0 + \sum_1^{p-1} h_r\right) > l_p h_p$$

quindi

$$C + \sum_1^n L_r h_r \geqq f(x_1) \geqq C + \sum_1^n l_r h_r;$$

per conseguenza andando al limite per le h_r tendenti insieme allo zero si trova la prima relazione che dovevamo dimostrare.

Analogamente si ha la seconda.

Se una funzione è integrale superiore o inferiore di un'altra, essa è anche respettivamente integrale superiore o inferiore dei suoi quattro estremi oscillatori.

Infatti sia

$$f(x) = \overline{\int_{x_0}^{x_1}} [\varphi(x)]\, dx$$

e $x_1 > x_0$; avremo che in ogni punto uno degli estremi oscillatori destri $\lambda(x)$ di $f(x)$ sarà compreso fra il limite superiore e il limite inferiore destro di $\varphi(x)$; poichè dunque il limite superiore dei limiti superiori destri di una funzione in un certo intervallo (gli estremi esclusi) è minore del limite superiore dei valori che ha la funzione nell'intervallo (gli estremi esclusi o no), così per alcune proprietà sopra enunciate dovrà essere:

$$\overline{\int_{x_0}^{x_1}} [\lambda(x)]\, dx \leqq f(x_1).$$

Ma abbiamo trovato

$$\overline{\int_{x_0}^{x_1}} [\lambda(x)]\, dx \geqq f(x_1)$$

dunque

$$\overline{\int_{x_0}^{x_1}} [\lambda(x)]\, dx = f(x_1).$$

Analogamente si dimostrerebbe la proprietà simile per gli integrali inferiori.

Da questo teorema si deduce subito che *gli integrali superiore o inferiore di una funzione qualunque sono respettivamente eguali all'integrale superiore* *dei limiti superiori destri o sinistri e all'integrale inferiore dei limiti inferiori destri o sinistri della funzione in ogni punto dell'intervallo.*

Abbiamo poi gli altri teoremi:

Il massimo estremo oscillatorio destro o sinistro di cui una funzione può essere integrale superiore è il proprio estremo oscillatorio superiore destro o sinistro.

Infatti se

$$F(x_1) = \overline{\int_{x_0}^{x_1}} [\lambda(x)]\, dx$$

$\lambda(x)$ essendo estremo oscillatorio superiore destro o sinistro di $f(x)$ si ha per un teorema precedentemente dimostrato:

$$F(x_2) - F(x_3) \gtreqless f(x_2) - f(x_3)$$

in cui va preso il segno superiore o inferiore secondo che x_2 è maggiore o minore di x_3, l'intervallo (x_2, x_3) essendo interno all'altro (x_0, x_1), quindi:

$$\frac{F(x_2) - F(x_3)}{x_2 - x_3} \geq \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}$$

il che prova il teorema.

Analogamente si dimostra che: *il minimo estremo oscillatorio destro o sinistro di cui una funzione può essere integrale inferiore è il proprio estremo oscillatorio inferiore destro o sinistro.*

Dalla definizione di estremi oscillatori si deduce subito che *la somma degli estremi oscillatori superiori destri o sinistri di due funzioni è maggiore dell'estremo oscillatorio superiore destro o sinistro della somma delle due funzioni, e la somma degli estremi oscillatori inferiori destri o sinistri di due funzioni è minore dell'estremo oscillatorio destro o sinistro della somma delle due funzioni.*

Se ne deduce che *se* $f(x)$, $\varphi(x)$ *e* $f(x) + \varphi(x)$ *hanno respettivamente per estremi oscillatori destri superiori e inferiori* λ *e* λ', λ_1 *e* λ'_1, λ_2 *e* λ'_2

$$\lambda_2 > \lambda + \lambda'_1 > \lambda'_2$$

$$\lambda_2 > \lambda' + \lambda_1 > \lambda'_2 .$$

Infatti gli estremi oscillatori superiore e inferiore destri di $-\varphi(x)$ sono respettivamente $-\lambda'_1$ e $-\lambda_1$, quindi:

$$\lambda_2 - \lambda'_1 > \lambda$$
$$\lambda'_2 - \lambda_1 < \lambda',$$

e analogamente

$$\lambda_2 - \lambda' > \lambda_1$$
$$\lambda'_2 - \lambda < \lambda'_1 ;$$

queste relazioni provano il teorema.

Se ne ha uno analogo quando si considerino gli estremi oscillatori sinistri.

Si conclude che le funzioni

$$\lambda + \lambda_1' \,,\, \lambda' + \lambda_1 \,,\, \frac{\lambda + \lambda' + \lambda_1 + \lambda_1'}{2} \,,\, \lambda_2 \text{ e } \lambda_2'$$

hanno gli stessi integrali superiori e inferiori.

Non esiste che una sola funzione avente un dato valore in un dato punto e che in tutti i punti di un certo intervallo abbia un dato estremo oscillatorio, oppure una data media dei suoi due estremi oscillatori destri o dei suoi estremi oscillatori sinistri, oppure di cui si conoscano delle funzioni che differiscono da queste per funzioni di integrale nullo.

Siano $f(x)$ e $f_1(x)$ due funzioni che abbiano per estremo oscillatorio superiore destro $\lambda(x)$ o una funzione che differisce da questa per una di integrale nullo; la funzione $-f_1(x)$ avrà per estremo oscillatorio inferiore destro $-\lambda(x)$ o una funzione che differisce da questa per una di integrale nullo. Ne segue che gli estremi oscillatori di $f(x) - f_1(x)$ devono avere l'integrale superiore e l'integrale inferiore eguali allo zero il che prova che $f(x)$ e $f_1(x)$ non possono differire che per una costante. Similmente si dimostra il teorema negli altri casi.

Si può dunque generalizzare agli estremi oscillatori un teorema già dato riguardo alle derivate.

Se di una funzione si conosce il valore in un punto appartenente ad un certo intervallo, e in tutti i punti dell'intervallo stesso esclusi quelli appartenenti ad un gruppo di punti ed ai suoi punti limiti si conosce uno degli estremi oscillatori (*) *o la media degli estremi oscillatori destri o quella degli estremi oscillatori sinistri o funzioni che differiscono da queste per funzioni di integrale nullo, la condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione sia determinata è che il gruppo sia rinchiudibile in intervalli arbitrariamente piccoli.*

III.

Passiamo alla considerazione della esistenza degli integrali delle equazioni differenziali del primo ordine della forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

o dei sistemi della forma:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n),$$

(*) Che si suppone sempre finito. [Correzione autografa].

allo studio dei quali si riduce molto spesso quello di equazioni differenziali ordinarie di ordine superiore al primo.

La prima dimostrazione della esistenza degli integrali di equazioni differenziali, soddisfacenti a date condizioni, è dovuta a CAUCHY. I signori BRIOT e BOUQUET [13] hanno dimostrato il teorema di CAUCHY con maggiore semplicità; il metodo porta diverse restrizioni nelle equazioni differenziali, consistendo nel determinare a quali condizioni esse devono soddisfare affinchè gli integrali resultino sviluppabili in serie di TAYLOR.

Indipendentemente dalla considerazione della sviluppabilità in serie degli integrali, il sig. LIPSCHITZ [14] e il sig. HOÜEL [15] dànno una dimostrazione della esistenza degli integrali delle equazioni differenziali ordinarie, di cui il concetto ha analogia con quello della dimostrazione della esistenza degli integrali definiti di RIEMANN. Seguendo lo stesso concetto ma applicando il metodo ora tenuto nella dimostrazione del teorema di RIEMANN, si arriva a dei risultati alquanto più generali.

Cominciamo dalle equazioni differenziali del primo ordine fra due variabili.

Sia la funzione $f(x, y)$ definita per tutti i valori della x ed y in un certo campo C a due dimensioni che contiene il punto x_0, y_0 e sia M il limite superiore dei suoi valori assoluti.

Consideriamo le somme

$$h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_n L_n$$
$$h_1 l_1 + h_2 l_2 + \cdots + h_n l_n$$

quando si supponga che $h_1 + h_2 + \cdots + h_n = x_1 - x_0$, ($x_1$ essendo maggiore di x_0), che L_1 sia il limite superiore e l_1 il limite inferiore dei valori che la funzione $f(x, y)$ ha nel rettangolo $(x_0, x_0 + h_1)$ $(y_0 + Mh_1, y_0 - Mh_1)$; L_2 e l_2 il limite superiore ed inferiore di $f(x, y)$ nel rettangolo $(x_0 + h_1, x_0 + h_1 + h_2)$ $(y_0 + h_1 L_1 + Mh_2, y_0 + h_1 l_1 - Mh_2)$; finalmente che L_n e l_n siano il limite superiore ed inferiore di $f(x, y)$ nel rettangolo

$$(x_0 + h_1 + h_2 + \cdots + h_{n-1}, x_0 + h_1 + h_2 + \cdots + h_{n-1} + h_n)$$
$$(y_0 + h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_{n-1} L_{n-1} + Mh_n, \quad y_0 + h_1 l_1 + h_2 l_2 + \cdots + h_{n-1} l_{n-1} - Mh_n).$$

Sarà poi evidentemente necessario supporre che non si esca mai dal campo C assegnato alla funzione $f(x, y)$.

Formiamo un'altra divisione qualunque $h'_1, h'_2, \cdots, h'_m$ dell'intervallo (x_0, x_1) e consideriamo le somme analoghe a quelle precedenti

$$h'_1 L'_1 + h'_2 L'_2 + \cdots + h'_m L'_m$$
$$h'_1 l'_1 + h'_2 l'_2 + \cdots + h'_m l'_m.$$

(13) « Journal de l'École Polytechnique », XXXVI Cahier, vol. 21, 1856, pp. 133–198; SERRET, op. cit., vol. II, p. 348.

(14) « Annali di Matematica » diretti da F. BRIOSCHI e L. CREMONA, ser. II, vol. II.

(15) HOÜEL, *Cours de Calcul infinitésimal*, vol. II, pp. 304, 316 e 323.

Suppongansi tutte le quantità $h'_1, h'_2, \cdots, h'_m$ minori di una quantità $\delta/2$, essendo δ inferiore alla più piccola delle $h_1, h_2, \cdots, h_m$. Sia

$$h'_1 + h'_2 + \cdots + h'_{p-1} < h_1$$
$$h'_1 + h'_2 + \cdots + h'_{p-1} + h'_p \geqq h_1,$$

avremo che:

$$h_1 L_1 + \delta M > h'_1 L'_1 + \cdots + h'_p L'_p > h_1 l_1 - \delta M.$$

Sia:

$$h_2 - \delta > h'_{p+1} + h'_{p+2} + \cdots + h'_{s-q} > h_2 - \frac{3}{2}\delta$$
$$h'_{p+1} + h'_{p+2} + \cdots + h'_{s-1} < h_2$$
$$h'_{p+1} + h'_{p+2} + \cdots + h'_{s-1} + h'_s \geqq h_2;$$

avremo che $L'_{p+1}, L'_{p+2}, \cdots, L'_{s-q}$ saranno tutti compresi fra L_2 e l_2, quindi:

$$h_2 L_2 + 4\,\delta M > h'_{p+1} L'_{p+1} + \cdots + h'_s L'_s > h_2 l_2 - 4\,\delta M$$

e per conseguenza

$$h_1 L_1 + h_2 L_2 + 5\,\delta M > h'_1 L'_1 + h'_2 L'_2 + \cdots + h'_s L'_s > h_1 l_1 + h_2 l_2 - 5\,\delta M.$$

Sia:

$$h_3 - 5\,\delta > h'_{s+1} + h'_{s+2} + \cdots + h'_{v-t} > h_3 - \left(5 + \frac{1}{2}\right)\delta$$
$$h'_{s+1} + h'_{s+2} + \cdots + h'_{v-1} < h$$
$$h'_{s+1} + h'_{s+2} + \cdots + h'_v \geqq h_3$$

si troverà:

$$h_3 L_3 + 11\,\delta M > h'_{s+1} L'_{s+1} + h'_{s+2} L'_{s+2} + \cdots + h'_v L'_v < h_3 l_3 - 11\,\delta M$$

e quindi:

$$h_1 L_1 + h_2 L_2 + h_3 L_3 + 16\,\delta M > h'_1 L'_1 + h'_2 L'_2 + \cdots$$
$$+ h'_v L'_v > h_1 l_1 + h_2 l_2 + h_3 l_3 - 16\,\delta M$$

e così di seguito, in modo che si potrà concludere, N essendo un numero che dipende soltanto da n, che:

$$h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_n L_n + NM\delta > h'_1 L'_1 + h'_2 L'_2 + \cdots + h'_m L'_m.$$

Si ha inoltre

$$h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_n L_n > -(x_1 - x_0)\,M,$$

per conseguenza si vede che facendo impiccolire indefinitamente le $h_1, h_2, \cdots, h_n$ in una maniera qualunque la somma

$$h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_n L_n$$

tende sempre verso uno stesso limite determinato e finito che è il limite inferiore dei valori della somma stessa per tutti i possibili valori di $h_1, h_2, \cdots, h_n$.

Analogamente si riconosce che la somma

$$h_1 l_1 + h_2 l_2 + \cdots + h_n l_n$$

tende pure verso un limite determinato e finito indipendentemente dal modo con cui impiccoliscono le $h_1, h_2, \cdots, h_n$ e questo limite è il limite superiore dei valori della somma stessa per tutti i valori possibili di $h_1, h_2, \cdots, h_n$. Se $x_1 < x_0$ allora $h_1, h_2, \cdots, h_n$ vanno presi negativi e si hanno proprietà analoghe a quelle dimostrate ora. Queste proprietà generali valgono per qualunque funzione di due variabili.

Suppongasi che

$$\lim (h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_n L_n) = \lim (h_1 l_1 + h_2 l_2 + \cdots + h_n l_n)$$

ossia:

$$\lim (h_1 D_1 + h_2 D_2 + \cdots + h_n D_n) = 0, \tag{1}$$

$D_1, D_2, \cdots, D_n$ essendo respettivamente le oscillazioni della $f(x, y)$ nei rettangoli considerati; in tal caso la somma

$$h_1 f_1 + h_2 f_2 + \cdots + h_n f_n = \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n f_n$$

$f_1, f_2, \cdots, f_n$ essendo quantità comprese fra L_1 e l_1, L_2 e $l_2, \cdots, L_n$ e l_n, (gli estremi inclusi) avrà sempre per limite una stessa quantità.

Reciprocamente volendo che la somma $\sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n f_n$ abbia sempre lo stesso limite comunque si prendano le h_p e le f_p purchè comprese fra L_p e l_p (gli estremi inclusi) è necessario che sia verificata la condizione (1).

Resulta dunque che *la condizione necessaria e sufficiente affinchè il limite della somma*

$$h_1 f_1 + h_2 f_2 + \cdots + h_n f_n$$

esista, comunque siano le $h_1, h_2, \cdots, h_n$ *purchè la loro somma sia* $x_1 - x_0$ *e tendano verso lo zero, è che la quantità*

$$h_1 D_1 + h_2 D_2 + \cdots + h_n D_n = \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n D_n,$$

possa rendersi coll'impiccolire delle h in una certa maniera minore di qualunque quantità assegnabile, $D_1, D_2, \cdots, D_n$ *essendo le oscillazioni della* $f(x, y)$ *nei diversi rettangoli che abbiamo considerato.*

Il limite (quando esiste) della quantità

$$y_0 + \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n f_n$$

lo indicheremo per brevità con

$$\int_{x_0 y_0}^{x_1} f(x, y).$$

Nella ipotesi che la $f(x, y)$ verifichi la condizione (1) e sia $x_1 > x_0$, per quanto abbiamo detto risulta che $\int_{x_0 y_0}^{x_1} f(x, y)$ è il limite inferiore dei valori della somma

$$y_0 + h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_n L_n$$

ed il limite superiore di quelli della somma

$$y_0 + h_1 l_1 + h_2 l_2 + \cdots + h_n l_n$$

mentre se $x_1 < x_0$, $\int_{x_0 y_0}^{x_1} f(x, y)$ è il limite superiore della prima somma e il limite inferiore della seconda; ne segue che se $x_1 > x_0$:

$$(2) \quad y_0 + h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_n L_n \geqq \int_{x_0 y_0}^{x_1} f(x, y) > y_0 + h_1 l_1 + h_2 l_2 + \cdots + h_n l_n .$$

E se $x_1 < x_0$,

$$(2') \quad y_0 + h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_n L_n \leqq \int_{x_0 y_0}^{x_1} f(x, y) < y_0 + h_1 l_1 + h_2 l_2 + \cdots + h_n l_n ,$$

e per conseguenza in valore assoluto

$$(3) \quad y_0 + \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n f_n - \int_{x_0 y_0}^{x_1} f(x, y) \leqq \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n D_n \text{ (16)}$$

e se $h'_1, h'_2, \cdots, h'_m$ è un'altra divisione dell'intervallo (x_0, x_1), in valore assoluto

$$(4) \quad \left[y_0 + \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n f_n \right] - \left[y_0 + \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h'_n f'_n \right] \leqq \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n D_n + \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h'_m D'_m .$$

Se si ha $x_1 > x_2 > x_0$, oppure $x_1 < x_2 < x_0$:

$$y_2 = \int_{x_0 y_0}^{x_2} f(x, y),$$

avremo supponendo che x_2 sia un estremo di uno degli intervalli $h_1, h_2, \cdots, h_n$

$$\left[y_0 + \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n f_n \right] - \left[y_2 + \sum_{x_2 y_2}^{x_1} h_n f_n \right] < \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n D_n ,$$

(16) Da ciò che segue si può vedere come per mezzo di questa formula si può determinare con quella approssimazione che si vuole il valore in un punto qualunque dell'integrale di una equazione differenziale ordinaria del primo ordine, del quale si conosca il valore in un dato punto. Una analoga osservazione si può fare per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine.

e quindi

$$(5) \qquad \int_{x_0 y_0}^{x_1} f(x, y) = \int_{x_2 y_2}^{x_1} f(x, y);$$

donde:

$$(6) \qquad \int_{x_0 y_0}^{x_1} f(x, y) = \int_{x_0 y_0}^{x_2} f(x, y) + \lim \left\{ \sum_{x_2 y_2}^{x_1} h_n f_n \right\}.$$

Supponiamo che la funzione $f(x, y)$ verifichi le condizioni:

$$\lim \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n \mathrm{D}_n = 0 \quad , \quad \lim \sum_{x_0 y_0}^{x_2} h'_m \mathrm{D}'_m = 0$$

in cui $x_1 < x_0 < x_2$, la funzione

$$\mathrm{F}(x) = \int_{x_0 y_0}^{x} f(x, y)$$

avrà un significato per tutti i valori della x compresi nell'intervallo (x_1, x_2) (gli estremi inclusi) ed escluso il valore x_0, pel quale però ammetteremo assuma il valore y_0.

La funzione $\mathrm{F}(x)$ è continua. Infatti per un valore x' diverso da x_0 si ha per h sufficientemente piccola

$$(7) \qquad \int_{x_0 y_0}^{x'+h} f(x, y) - \int_{x_0 y_0}^{x'} f(x, y) = \lim \sum_{x\ y'}^{x'+h} h_r f_n = h\mathrm{P},$$

P essendo una quantità compresa fra il limite superiore e il limite inferiore (gli estremi inclusi) di $f(x, y)$ nel rettangolo $(x', x'+h)\ (y'+\mathrm{M}h, y'-\mathrm{M}h)$ ed essendo $y' = \int_{x_0 y_0}^{x'} f(x, y)$. Per x tendente a destra o a sinistra verso x_0 evidentemente $\int_{x_0 y_0}^{x} f(x, y)$ tende verso y_0.

Consideriamo ora gli estremi oscillatori della funzione $\mathrm{F}(x)$.

Siano x' e $x' + h$ due valori di x compresi nell'intervallo (x'', x'''); avremo, se h è positivo:

$$h\mathrm{A} \geqq \int_{x_0 y_0}^{x'+h} f(x, y) - \int_{x_0 y_0}^{x'} f(x, y) > ha,$$

A e a essendo il limite superiore ed inferiore di $f(x, y)$ nel rettangolo $(x'', x''')\ (y'' + \mathrm{M}(x''' - x''), y'' - \mathrm{M}(x''' - x''))$ ed essendo y'' il valore di $\int_{x_0 y_0}^{x''} f(x, y)$. Se ne deduce:

$$\mathrm{A} \geqq \frac{\int_{x_0 y_0}^{x'+h} f(x,y) - \int_{x_0 y_0}^{x'} f(x,y)}{h} \geqq a,$$

il che prova che gli estremi oscillatori di $F(x)$ in tutti i punti dell'intervallo (x'', x''') sono compresi fra A e a. Da ciò si deduce che se $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$ sono le oscillazioni di un estremo oscillatorio λ_x della funzione $F(x)$ negli intervalli $h_1, h_2, \cdots, h_n$ in cui è diviso l'intervallo (x_0, x_1) si ha in valore assoluto:

$$h_1 \Delta_1 + h_2 \Delta_2 + \cdots + h_n \Delta_n \leqq \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n D_n,$$

e se $\Delta'_1, \Delta'_2, \cdots, \Delta'_m$ sono le oscillazioni di λ_x negli intervalli $h'_1, h'_2, \cdots, h'_m$ in cui è diviso l'intervallo (x_0, x_2) si ha:

$$h'_1 \Delta'_1 + h'_2 \Delta'_2 + \cdots + h'_m \Delta'_m \leqq \sum_{x_0 y_0}^{x_2} h'_m D'_m;$$

ciò prova che gli estremi oscillatori della funzione $F(x)$ sono atti alla integrazione. Ne segue che in ogni intervallo compreso in quello totale in cui è definita la funzione $F(x)$ vi sono un numero infinito di punti in cui essa ammette una derivata determinata e finita.

Consideriamo nella funzione $f(x, y)$, y come funzione della x definita dalla relazione $y = F(x)$; la $f(x, y)$ resulterà una funzione $\varphi(x)$ della sola x definita in tutto l'intervallo (x_1, x_2); questa funzione è atta alla integrazione in tutto l'intervallo. Infatti dividiamo l'intervallo (x_0, x), x essendo compreso fra x_1 e x_2 (gli estremi inclusi) negli altri $h_1, h_2, \cdots, h_n$, avremo indicando con φ_p un valore compreso fra il limite superiore ed inferiore di $\varphi(x)$ nell'intervallo h_p che:

$$L_p > \varphi_p > l_p,$$

quindi:

$$h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_n L_n > h_1 \varphi_1 + h_2 \varphi_2 + \cdots + h_n \varphi_n > h_1 l_1 + h_2 l_2 + \cdots + h_n l_n,$$

il che prova quanto si voleva dimostrare.

Dalla stessa relazione si deduce

$$y_0 + \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\, dx = \int_{x_0 y_0}^{x} f(x, y), \tag{8}$$

quindi $\varphi(x)$ differisce dagli estremi oscillatori di $F(x)$ per funzioni di integrale nullo.

Riprendiamo la formula (7), avremo

$$\int_{x_0 y_0}^{x'+h} f(x, y) - \int_{x_0 y_0}^{x'} f(x, y) = h\,[f(x', y') + \theta\delta]$$

$$\int_{x_0 y_0}^{x'-h_1} f(x, y) - \int_{x_0 y_0}^{x'} f(x, y) = -h_1\,[f(x', y') + \theta_1 \delta_1],$$

δ e δ_1 essendo rispettivamente le oscillazioni della $f(x, y)$ nei rettangoli $(x', x'+h)$ $(y'+Mh, y'-Mh)$ e $(x', x'-h_1)$ $(y'+Mh_1, y'-Mh_1)$ e θ e θ_1 numeri compresi fra $+1$ e -1 (gli estremi inclusi).

Ne segue che:
$$\frac{F(x'+h)-F(x')}{h}=f(x',y')+\theta\delta$$
$$\frac{F(x'-h_1)-F(x')}{-h_1}=f(x',y')+\theta_1\delta_1 .$$

Suppongasi la $f(x, y)$ continua assolutamente rispetto ad ambedue le variabili x ed y nel punto (x', y'); avremo:
$$\lim_{h=0}\frac{F(x'+h)-F(x')}{h}=f(x',y')$$
$$\lim_{h_1=0}\frac{F(x'-h_1)-F(x')}{h_1}=f(x',y')$$

il che prova che la $F(x)$ ammette nel punto x' una derivata ordinaria determinata e finita ed eguale a $f(x', y')$.

Di qui si deduce che *se $f(x, y)$ è in un certo campo continua assolutamente rispetto alle due variabili x e y, per tutti quei sistemi di valore (x_0, y_0) per cui vien soddisfatta la condizione* (1) *la funzione*
$$\int_{x_0 y_0}^{x} f(x, y)$$
è un integrale della equazione differenziale
$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) .$$

È facile di più provare che *se per il punto x_0, y_0 la funzione $f(x, y)$ verifica la condizione* (1) *non può esistere che una sola funzione $y = F(x)$ che per $x = x_0$ assuma il valore y_0 e verifichi l'equazione differenziale*
$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$
per x compreso fra x_0 e x_1.

Infatti se ne esistessero due diverse $F(x)$ e $F_1(x)$ dovrebbe potersi trovare un punto x_2 compreso fra x_0 e x_1 in cui esse differissero per una quantità finita k. Costruiamo successivamente i rettangoli $(x_0, x_0+h_1)(y_0+ + Mh_1, y_0 - Mh_1)$, $(x_0+h_1, x_0+h_1+h_2)(y_0+h_1L_1+Mh_2, y_0+h_1l_1 - - Mh_2)$ ecc. essendo $h_1+h_2+\cdots+h_n=x_1-x_0$, evidentemente se x è compreso fra x_0 e x_0+h_1 (gli estremi inclusi) i valori $F(x)$ e $F_1(x)$ devono essere compresi fra $y_0+h_1L_1$ e $y_0+h_1l_1$; se x è compreso fra x_0+h_1 e $x_0+h_1+h_2$ (gli estremi inclusi) i valori di $F(x)$ e $F_1(x)$ saranno compresi fra $y_0+h_1L_1+h_2L_2$ e $y_0+h_1l_1+h_2l_2$ ecc. Finalmente per x compreso fra $x_1+h_1+\cdots+h_{n-1}$ e $x_0+h_1+\cdots+h_{n-1}+h_n$ (gli estremi inclusi) $F(x)$ e $F_1(x)$ saranno compresi fra $y_0+h_1L_1+h_2L_2+\cdots+h_nL_n$ e $y_0+h_1l_1+\cdots+h_{n-1}l_{n-1}+h_nl_n$. Quindi in valore assoluto
$$[y_0+h_1L_1+h_2L_2+\cdots+h_nL_n]$$
$$-[y_0+h_1l_1+\cdots+h_nl_n]=\sum_{x_0}^{x_1}h_nD_n > F(x_2)-F_1(x_2)=k$$

qualunque sieno $h_1, h_2, \cdots, h_n$ il che è contrario alla ipotesi fatta. Analogamente si riconosce che se per il punto x_0, y_0 è verificata la condizione (1) per la funzione $f(x, y)$, e di più esiste una funzione $y = F(x)$ che verifica la equazione differenziale $dy/dx = f(x, y)$ si ha

$$F(x) = \int_{x_0 y_0}^{x} f(x, y).$$

Suppongasi che per x_0 ed x_1 fissi e per tutti i valori della y compresi fra y_1 e y_2 sia verificata la condizione (1) per la esistenza di

$$\int_{x_0 y}^{x_1} f(x, y),$$

potremo in tal caso considerare

$$F(y) = \int_{x_0 y}^{x_1} f(x, y)$$

come funzione della y definita nell'intervallo (y_1, y_2).

Se preso σ piccolo ad arbitrio si ha in valore assoluto

$$\sum_{x_0 y}^{x_1} h_n D_n < \sigma,$$

quando tutte le h_n sono inferiori ad una certa quantità, per tutti i valori di y compresi nell'intervallo (y_1, y_2), la $F(y)$ è continua rispetto ad y. Infatti prendendo $h_1, h_2, \cdots, h_n$ sufficientemente piccoli potremo avere per $y_2 > y_0 \geqq y_1, y_2 \geqq y_0 + \delta \geqq y_1$

$$F(y_0) - \left[y_0 + \sum_{x_0 y_0}^{x_1} f_n h_n \right] < \sigma$$

$$F(y_0 + \delta) - \left[y_0 + \delta + \sum_{x_0 y_0 + \delta}^{x_1} f'_n h_n \right] < \sigma.$$

Ora f_1 è compreso fra il limite superiore ed inferiore dei valori della $f(x, y)$ nel rettangolo $(x_0, x_0 + h_1)(y_0 + Mh_1, y_0 - Mh_1)$ e f'_1 fra il limite superiore ed inferiore nel rettangolo $(x_0, x_0 + h_1)(y_0 + \delta + Mh_1, y_0 + \delta - Mh_1)$.

Quindi se δ è inferiore in valore assoluto alla minima delle quantità $2Mh_1, 2Mh_2, \cdots, 2Mh_n$, i due rettangoli hanno una porzione comune, quindi possiamo prendere $f_1 = f'_1$; f_2 può prendersi fra il limite superiore ed inferiore di $f(x, y)$ nel rettangolo $(x_0 + h_1, x_0 + h_1 + h_2)(y_0 + h_1 f_1 + Mh_2, y_0 + h_1 f_1 - Mh_2)$ e f'_2 fra il limite superiore ed inferiore di $f(x, y)$ nel rettangolo

$$(x_0 + h_1, x_0 + h_1 + h_2)(y_0 + \delta + h_1 f_1 + Mh_2, y_0 + \delta + h_1 f_1 - Mh_2),$$

quindi possiamo prendere $f_2 = f'_2$, e così di seguito. Se ne deduce che

$$F(y_0 + \delta) - F(y_0) < 2\sigma + \delta,$$

in valore assoluto, il che prova la continuità di $F(y)$.

Analogamente si può provare che, se

$$\int_{xy_0}^{x_2} f(x, y)$$

ha un significato per tutti i valori della x in un intervallo (x_0, x_1) e di più si ha sempre che preso σ piccolo ad arbitrio si ha in valore assoluto

$$\sum_{xy_0}^{x_1} h_n \mathrm{D}_n < \sigma$$

per le h_n inferiori ad una certa quantità e x compreso nell'intervallo (x_0, x_1), essa è funzione di x nello stesso intervallo finita e continua.

Se delle tre quantità x_0, y_0, x_1 nell'espressione

$$\int_{x_0 y_0}^{x_1} f(x, y)$$

due qualunque possono variare in un dato campo a due dimensioni, nel campo stesso la espressione considerata può riguardarsi come funzione finita e continua assolutamente rispetto alle due variabili e infine se tutte e tre le quantità x_0, y_0, x_1 possono variare in un certo campo a tre dimensioni la espressione considerata è una funzione finita e continua assolutamente rispetto a queste tre variabili purchè sia sempre verificata la solita condizione

$$\sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n \mathrm{D}_n < \sigma,$$

essendo σ piccola ad arbitrio e le h_n inferiori ad un certo numero, per tutti i valori che $x_0 y_0 x_1$ possono assumere.

Se la x ed y possono variare in un certo campo C a due dimensioni la espressione

$$\int_{xy}^{x_1} f(x, y)$$

sarà una funzione $\psi(x, y)$ di x e y. In essa consideriamo y come funzione della x definita da

$$y_x = \int_{x_0 y_0}^{x} f(x, y)$$

essendo $x_0 y_0$ un punto del campo C e x compreso fra x_0 ed x_1.

Questa funzione $\psi(x, y_x)$ sarà costante ed eguale a

$$\int_{x_0 y_0}^{x_1} f(x, y).$$

Di qui si conclude che se la relazione $\psi(x, y) = \psi(x_0, y_0)$ che è evidentemente verificata per $x = x_0$, $y = y_0$ è capace a partire da questo punto fino ad un valore x_2 compreso nell'intervallo $(x_0 x_1)$ a definire una sola funzione implicita y della x, questa funzione è

$$\int_{x_0 y_0}^{x} f(x, y) \, .$$

Quindi se oltre alle condizioni ora imposte la funzione $f(x, y)$ è continua assolutamente rispetto ad x ed y in tutti i punti del campo C la relazione

$$\psi(x, y) = \psi(x_0, y_0)$$

sarà una relazione integrale della equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) .$$

Diamo alcuni casi di equazioni differenziali per le quali è verificata la condizione (1).

Se la funzione $f(x, y)$ è in un certo campo finita e continua assolutamente rispetto alle due variabili ed ammette in tutti i punti un estremo oscillatorio in valore assoluto inferiore ad un certo numero finito A, si avrà sempre, se $x_0 y_0$ è un punto del campo, purchè si resti sempre nell'*interno* del campo stesso

$$\lim \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n \mathrm{D}_n = 0 .$$

Infatti abbiamo, se la funzione $f(x, y)$ è continua assolutamente nel campo che si considera, che è possibile determinare un valore δ tale che la differenza fra due valori della funzione in due punti del campo situati alla distanza δ o a una distanza minore di δ, sia inferiore ad un numero arbitrario σ [17].

Ciò posto prendiamo $h_1 = h_2 = \cdots = h_n = \delta$, avremo

$$\mathrm{D}_1 \leqq 2\,\mathrm{AM}\delta + \sigma$$
$$\mathrm{D}_2 \leqq \mathrm{A}\,[(2\,\mathrm{AM}\delta + \sigma) + 2\,\mathrm{M}]\,\delta + \sigma$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathrm{D}_p \leqq \mathrm{A}\left[\sum_1^{p-1} \mathrm{D}_n + 2\,\mathrm{M}\right]\delta + \sigma ,$$

M essendo il massimo valore assoluto della funzione $f(x, y)$ nel campo che si considera. Se ne deduce

$$\sum_1^{p} \mathrm{D}_n < \mathrm{A}\left[\sum_1^{p-1} \mathrm{D}_n + 2\,\mathrm{M}\right]\delta + \sigma + \sum_1^{p-1} \mathrm{D}_n$$
$$= \sum_1^{p-1} \mathrm{D}_n\,[\mathrm{A}\delta + 1] + 2\,\mathrm{AM}\delta + \sigma = \sum_1^{p-1} \mathrm{D}_n\,[\mathrm{A}\delta + 1] + \varepsilon ,$$

in cui $\varepsilon = 2\,\mathrm{AM}\delta + \sigma$.

(17) Questa proprietà delle funzioni di due variabili continue assolutamente è una estensione di un teorema sulle funzioni continue di una variabile del sig. CANTOR (DINI, op. cit., p. 48). Essa può generalizzarsi anche alle funzioni di più variabili.

Quindi:

$$\sum_1^p \mathrm{D}_n \leqq \varepsilon\,[(\mathrm{A}\delta + 1)^{p-1} + (\mathrm{A}\delta + 1)^{p-2} + \cdots + 1] = \varepsilon\,\frac{(\mathrm{A}\delta + 1)^p - 1}{\mathrm{A}\delta},$$

e per conseguenza:

$$\sum_1^p h_n \mathrm{D}_n \leqq \frac{\varepsilon}{\mathrm{A}}\,[(\mathrm{A}\delta + 1)^p - 1].$$

Se p è il numero totale di intervalli contenuti in quello totale (x_0, x_1) si deduce che:

$$\sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n \mathrm{D}_n < \frac{\varepsilon}{\mathrm{A}}\,\{e^{\mathrm{A}\alpha} - 1\}$$

α essendo il valore assoluto di $x_1 - x_0$. Ciò prova il teorema enunciato.

Esso può generalizzarsi supponendo che nel piano per la funzione finita $f(x, y)$, escluso un numero finito o infinito di punti costituenti un gruppo di prima specie, o anche più generalmente un gruppo di punti rinchiudibili in un numero finito di strisce parallele all'asse delle y di cui la somma delle larghezze contate parallelamente all'asse delle x può rendersi inferiore a qualunque quantità assegnabile, in tutti gli altri punti siano verificate le condizioni del teorema precedente, intendendo sempre che i numeri A e σ non dipendano dalla larghezza delle strisce che si escludono.

Infatti supponiamo di prendere queste strisce di piano comprese respettivamente fra le rette

$$\begin{array}{lcl} x = x' & , & x = x' + \mathrm{K}' \\ x = x'' & , & x = x'' + \mathrm{K}'' \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ x = x^{(p)} & , & x = x^{(p)} + \mathrm{K}^{(p)}, \end{array}$$

e supponiamo inoltre di prendere fra i punti di divisione dell'intervallo (x_0, x_1) i punti $x', x' + \mathrm{K}', x'', x'' + \mathrm{K}'', \cdots, x^{(p)}, x^{(p)} + \mathrm{K}^{(p)}$.

Ammettiamo inoltre che tutti gli altri intervalli di divisione siano eguali a δ in modo che

$$\begin{gathered} x' - x_0 = q_0\,\delta \\ x'' - (x' + \mathrm{K}') = q'\,\delta \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_1 - (x^{(p)} + \mathrm{K}^{(p)}) = q^{(p)}\,\delta. \end{gathered}$$

Avremo, in modo analogo a quanto venne fatto precedentemente, che

$$\sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n \mathrm{D}_n < 2\mathrm{MK}'(1 + \mathrm{A}\delta)^{q'' + q''' + \cdots + q^{(p)}} + 2\mathrm{MK}''(1 + \mathrm{A}\delta)^{q''' + q^{\mathrm{IV}} + \cdots + q^{(p)}} + \cdots$$

$$+ 2\,\mathrm{MK}^{(p)}(1 + \mathrm{A}\delta)^{q^{(p)}} + \frac{\varepsilon}{\mathrm{A}}\,[(1 + \mathrm{A}\delta)^z - 1],$$

quando si ponga:

$$\varepsilon = 2\,\mathrm{AM}\delta + \sigma \quad , \quad z = q' + q'' + \cdots + q^{(p)}.$$

Ne segue che (essendo α eguale al valore assoluto di $x_1 - x_0$)

$$\sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n D_n < 2M(K' + K'' + \cdots + K^{(p)}) e^{A\alpha} + \frac{\varepsilon}{A}(e^{A\alpha} - 1),$$

il che dimostra il teorema.

Si può dunque concludere:

Se si ha l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

ed il punto $x_0 y_0$ è un punto arbitrario di un campo a due dimensioni in cui la $f(x, y)$ si mantiene sempre finita e di più è continua assolutamente rispetto ad x e ad y e ammette in tutti i punti un estremo oscillatorio rapporto ad y inferiore ad un numero finito A, *(escluso per queste due ultime condizioni al più un numero finito o infinito di punti rinchiudibili in strisce di piano parallele ad y e di cui la somma delle larghezze contate parallelamente ad x può rendersi minore di qualunque quantità data) esiste sempre una funzione finita e continua y della x definita in un intorno del punto x_0 la quale per $x = x_0$ assume il valore y_0 e verifica la equazione differenziale data per tutti quei valori della x a cui corrispondono valori della y tali che nei punti x, y la funzione $f(x, y)$ è continua assolutamente rispetto ad x ed y.*

Se intendiamo ora *per integrale generale di una equazione differenziale $dy/dx = f(x, y)$ in un certo campo una funzione $y = \varphi(x, y_0, x_0)$ tale che per ogni sistema di valori di $x_0 y_0$ corrispondente ad un punto del campo che si considera risulta la y una funzione della x (che può chiamarsi un integrale particolare) definita in un certo intervallo che contiene il punto x_0, e che verifica l'equazione differenziale data e di più assume per $x = x_0$ il valore y_0*, e intendiamo *per integrale singolare di una equazione, che ammette già un integrale generale, qualunque funzione $y = \psi(x)$ definita in un certo intervallo* $(\alpha\beta)$ *la quale verifica l'equazione differenziale data, e non coincide in nessuna porzione finita dell'intervallo* $(\alpha\beta)$ *con un integrale particolare*, avremo che *se nell'integrale singolare al valore x' di x corrisponde il valore y' di y, esiste sempre un'altra funzione $y = \theta(x)$ che per $x = x'$ assume il valore y' e verifica l'equazione differenziale data.* Di qui si vede subito che colle condizioni imposte nel teorema precedente alla $f(x, y)$ supposto di più che essa sia continua in tutti i punti del campo, l'equazione differenziale ammette *un unico integrale generale* e non ammette *alcuna soluzione singolare.*

Se la $f(x, y)$ fosse sempre finita e continua e, escluso un numero finito o infinito di linee mediante dei campi che le racchiudono e i cui contorni siano infinitamente vicini alle linee stesse, in tutti gli altri punti del campo si verificassero le condizioni del teorema precedente, in tal caso la equazione differenziale non potrebbe ammettere (posto che ne avesse) per integrale singolare che alcune o tutte le funzioni y delle x corrispondenti alle linee singolari considerate.

Se quindi la $f(x, y)$ fosse finita e continua in un certo campo e avesse in tutto il campo una derivata rispetto alla y, $\partial f(x, y)/\partial y$, finita o no, ma continua rispetto alle due variabili x ed y e la relazione

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \infty$$

definisse implicitamente un numero finito o infinito di funzioni continue y della x, fra queste sole dovrebbero trovarsi gli integrali singolari della equazione differenziale $dy/dx = f(x, y)$ nel campo che si considera dato che in questo stesso campo l'equazione differenziale avesse un integrale generale (18).

Quando si sappia solamente che la funzione $f(x, y)$ è finita e continua assolutamente rispetto alle due variabili x ed y, in tutti i punti di un certo campo, non si è sicuri della esistenza di integrali della equazione differenziale $dy/dx = f(x, y)$ nel campo che si considera. Però anche con queste sole condizioni, purchè la funzione $f(x, y)$ in tutto il campo sia sempre crescente o sempre decrescente rispetto ad y si può dimostrare l'esistenza di integrali generali della equazione differenziale in tutto il campo; anzi si può dimostrare che per ogni punto $x_0 y_0$ per cui non si verifica la condizione

$$\lim \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n \mathrm{D}_n = 0$$

esiste sempre più di una funzione che per $x = x_0$ assume il valore y_0 e verifica l'equazione differenziale data.

Suppongasi infatti la funzione $f(x, y)$ sempre crescente rapporto ad y, $x_0 y_0$ un punto del campo che si considera. Costruiscansi le note somme (purchè non si esca mai dal campo)

$$y_0 + \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n \mathrm{L}_n \quad \text{e} \quad y_0 + \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n l_n,$$

e si passi al limite per le h_n tendenti a zero.

Indichiamo i due limiti con

$$y_1 = \Phi(x_1) \quad \text{e} \quad y'_1 = \varphi(x_1);$$

avremo che ambedue queste funzioni tenderanno verso y_0 per $x_1 = x_0$. Se x'_1 è il massimo valore che può assumere x_1 e

$$x_1 > x_2 > x_3 > x_0$$

si avrà

$$\sum_{x_0 y_0}^{x_2} h_n \mathrm{L}_n - \sum_{x_0 y_0}^{x_3} h_n \mathrm{L}_n = (x_2 - x_3)\,\theta,$$

quando si supponga che l'intervallo (x_0, x_2) tanto nel fare l'una che l'altra somma si divida nello stesso modo, e θ sia una quantità compresa fra il massimo e il minimo di $f(x, y)$ nel rettangolo

$$(x_2, x_3), \left(y_0 + \sum_{x_0 y_0}^{x_3} h_n \mathrm{L}_n - \mathrm{M}(x_2 - x_3), y_0 + \sum_{x_0 y_0}^{x_3} h_n \mathrm{L}_n + \mathrm{M}(x_2 - x_3)\right);$$

(18) Vedi SERRET, op. cit., vol. II, p. 384.

se ne deduce che

$$\Phi(x_2) - \Phi(x_3) = \theta_1 (x_2 - x_3),$$

θ_1 essendo compreso fra il massimo e il minimo di $f(x, y)$ nel rettangolo

$$(x_2, x_3), (\Phi(x_3) - M(x_2 - x_3), \Phi(x_3) + M(x_2 - x_3)),$$

ossia (ponendo $y_3 = \Phi(x_3)$)

$$\Phi(x_2) - \Phi(x_3) = [f(x_3, y_3) + \varepsilon](x_2 - x_3),$$

ε essendo inferiore in valore assoluto alla oscillazione della funzione $f(x, y)$ nel rettangolo (x_2, x_3), $(\Phi(x_3) - M(x_2 - x_3), \Phi(x_3) + M(x_2 - x_3))$.

Ne segue che:

$$\lim_{x_2 = x_3} \frac{\Phi(x_2) - \Phi(x_3)}{x_2 - x_3} = f(x_3, y_3),$$

il che prova che la derivata a destra della funzione $\Phi(x)$ nel punto x_3 è $f(x_3, y_3)$. La derivata a sinistra si prova analogamente avere lo stesso valore e pure in modo analogo si dimostra (ponendo $y'_3 = \varphi(x_3)$) che

$$\left[\frac{d\varphi(x)}{dx}\right]_{x=x_3} = f(x_3, y'_3)$$

il che prova che le due funzioni $\Phi(x)$ e $\varphi(x)$ verificano nell'intervallo (x_0, x_1), qualunque sia x_0 purchè però sia preso convenientemente x_1 maggiore di x_0, la equazione differenziale data e si riducono a y_0 per $x = x_0$. Si riconosce facilmente che il teorema non è più valevole se $x_1 < x_0$.

È poi facile il provare che qualunque funzione $y = \theta(x)$ definita in una porzione dell'intervallo (x_0, x_1) che per $x = x_0$ assume il valore y_0 e verifica l'equazione differenziale data, deve soddisfare la relazione

$$\Phi(x) \geqq \theta(x) \geqq \varphi(x).$$

Se consideriamo le due funzioni $\Phi(x)$ e $\varphi(x)$ come funzioni anche del punto $x_0 y_0$ e le indichiamo con $\Phi(x, x_0, y_0)$, $\varphi(x, x_0, y_0)$ si può dimostrare che ambedue queste funzioni sono continue rispetto ad y_0.

Infatti se $y_0 > y'_0$ si deve avere, per essere la $f(x, y)$ crescente con y,

$$y_0 + \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n L_n \geqq y'_0 + \sum_{x_0 y'_0}^{x_1} h_n L_n,$$

onde:

$$\Phi(x, x_0, y_0) \geqq \Phi(x, x_0, y'_0).$$

Se ne deduce che la $\Phi(x, x_0, y_0)$ è crescente con y_0 e analogamente si prova che la differenza

$$\Phi(x, x_0, y_0) - \Phi(x, x_0, y'_0)$$

cresce col crescere della x.

Dall'essere la $\Phi(x, x_0, y_0)$ crescente con y_0 si deduce che supposti x e x_0 fissi e qualunque esiste il limite di $\Phi(x, x_0, y_0)$ per $y_0 = y'_0$; indichiamolo con $\psi(x)$. Questa funzione assume per $x = x_0$ il valore y'_0 di più la differenza $\Phi(x, x_0, y_0) - \psi(x)$ cresce in valore assoluto col crescere della x. Consideriamo il rapporto

$$\frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h},$$

se h è inferiore ad un numero positivo h_0 avremo che

$$\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}=\frac{\Phi(x+h,x_0,y_0)-\Phi(x,x_0,y_0)}{h}+\frac{2\varepsilon}{h},$$

ε essendo in valore assoluto inferiore alla differenza $\Phi(x+h_0 x_0, y_0)-$ $-\psi(x+h_0)$ ossia, se h_0 resta fisso, ε è una quantità tendente allo zero soltanto con $y_0 - y'_0$. Ma

$$f(x+\delta h, \Phi(x+\delta h, x_0, y_0))=\frac{\Phi(x+h,x_0,y_0)-\Phi(x,x_0,y_0)}{h},$$

δ essendo un numero compreso fra 0 e 1, e per la continuità della $f(x, y)$ si avrà, (β tendendo allo zero con $y_0 - y'_0$ e h)

$$f(x+\delta h, \Phi(x+\delta h, x_0, y_0))=f(x, \psi(x))+\beta.$$

Ne segue che:

$$\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}=f(x, \psi(x))+\frac{2\varepsilon}{h}+\beta,$$

il che prova che la $\psi(x)$ è una funzione continua della x che ha in tutti i punti la derivata eguale a $f(x, \psi(x))$. Essa adunque verifica l'equazione differenziale data.

Ma la $\psi(x)$ è in ogni punto superiore o eguale a $\Phi(x_1, x_0, y'_0)$, dunque deve aversi

$$\psi(x)=\Phi(x, x_0, y_0),$$

ciò che prova la continuità della funzione $\Phi(x, x_0, y_0)$ rispetto ad y_0.

Ciò premesso si prova subito che qualunque sia il punto $x_0 y_0$ interno al campo in questione è sempre possibile trovare un valore x''_1 inferiore ad x_0 tale che esista una funzione y della x che nell'intervallo (x_0, x''_1) verifichi la equazione differenziale data e nel punto, x_0 assuma il valore y_0.

Infatti se $y'_1 > y_0 + (x_0 - x''_1)\,\mathrm{M}$ e $y''_1 < y_0 - (x_0 - x''_1)\,\mathrm{M}$, x''_1 essendo inferiore ad x_0; purchè non si esca mai dal campo avremo;

$$y'_1+\sum_{x''_1 y'_1}^{x_0} h_n \mathrm{L}_n > y_0 > y''_1+\sum_{x''_1 y''_1}^{x_0} h_n \mathrm{L}_n,$$

onde

$$\Phi(x_0, x''_1, y'_1) > y_0 > \Phi(x_0, x''_1, y''_1);$$

per quanto dunque è stato detto esisterà una funzione

$$\Phi(x, x''_1, y'''_1)$$

y'''_1 essendo compreso fra y_1 e y''_1, che per $x = x_0$ assume il valore y_0 e verifica l'equazione differenziale data mentre è definita fra $x''_1 < x_0$ e x_0.

Analogamente operando, se la funzione $f(x, y)$ fosse decrescente rispetto ad y si troverebbe che *se in un campo a due dimensioni la funzione $f(x, y)$ è sempre crescente o sempre decrescente rispetto ad y, preso un punto arbitrario $x_0 y_0$ si può sempre trovare un intorno (x''_1, x'_1) del punto x_0 in cui è definita una funzione y della x che verifica l'equazione differenziale data e assume il valore y_0 per $x = x_0$.*

IV.

Consideriamo ora il caso di un sistema di equazioni differenziali ordinarie.

Si abbiano le funzioni finite:

$$
\begin{gathered}
f'\,(x\,, y', y'', \cdots, y^{(n)}) \\
f''\,(x\,, y', y'', \cdots, y^{(n)}) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f^{(n)}(x\,, y', y'', \cdots, y^{(n)})
\end{gathered}
$$

definite in un campo a $n+1$ dimensioni di cui un punto interno sia il punto $x_0\,, y'_0\,, y''_0\,, \cdots, y^{(n)}_0$.

Consideriamo le somme

$$\sum_1^n h_r\, L_r^{(p)} \quad , \quad \sum_1^n h_r\, L_r^{(p)}$$

per tutti i valori di p da 1 ad n, con $L_r^{(p)}$ e $l_r^{(p)}$ si intendano rispettivamente il limite superiore ed il limite inferiore dei valori della funzione $f^{(p)}$ nel campo a $(n+1)$ dimensioni:

$$
\left\{
\begin{array}{ccc}
x_0 & , & x_0 + h_r \\
y'_0 + \sum_{1}^{r-1}{}_t\, h_t\, l'_t - h_r\, M' & , & y'_0 + \sum_{1}^{r-1}{}_t\, h_t\, L'_t + h_r\, M' \\
y''_0 + \sum_{1}^{r-1}{}_t\, h_t\, l''_t - h_r\, M'' & , & y''_0 + \sum_{1}^{r-1}{}_t\, h_t\, L''_t + h_r\, M'' \\
\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots \\
y^{(n)}_0 + \sum_{1}^{r-1}{}_t\, h_t\, l^{(n)}_t - h_r\, M^{(n)} & , & y^{(n)}_0 + \sum_{1}^{r-1}{}_t\, h_t\, L^{(n)}_t + h_r\, M^{(n)},
\end{array}
\right.
$$

sia $h_1 + h_2 + \ldots + h_m = x_1 - x_0$ avendosi $x_1 > x_0$ ed $M^{(p)}$ sia il limite superiore dei valori assoluti della $f^{(p)}$ in tutto il campo in cui questa funzione viene considerata. Si dovrà evidentemente ammettere che x_1 e $h_1\,, h_2\,, \cdots, h_m$ siano tali che non si abbia mai da escire dal campo assegnato alle funzioni che si considerano.

Analogamente a quanto venne trovato nel § III si ha ora

$$\sum_1^m{}_r\, h_r\, L_r^{(p)} + k_m\,\delta > \sum_1^{m_1}{}_r\, h_{r,1}\, L_{r,1}^{(p)},$$

in cui k_m è un numero che dipende soltanto da m quando le $h_{r,1}$ sono nuove divisioni dell'intervallo $(x_0\, x_1)$ inferiori tutte a $\delta/2$ in cui δ è quantità minore delle più piccole delle h_r, ed $L_{r,1}^{(p)}$ ha rispetto ad $h_{r,1}$ lo stesso significato che L_r rispetto a h_r.

Si ha dunque che le somme

$$\sum_{1}^{m}{}_r\, h_r\, L_r^{(p)} \quad , \quad \sum_{1}^{m}{}_r\, h_r\, l_r^{(p)}$$

hanno per le h_r tendenti insieme allo zero limiti determinati e finiti che sono respettivamente il limite inferiore ed il limite superiore delle somme stesse per tutti i possibili valori delle h_r. Proprietà analoghe si hanno se $x_1 < x_0$.

Quando si abbia per tutti i valori di p

$$\text{(1)} \qquad 0 = \lim \sum_{1}^{m} h_r\, D_r^{(p)} \quad \text{per} \quad h_1 = h_2 = \cdots = h_m = 0,$$

in cui

$$D_r^{(p)} = L_r^{(p)} - l_r^{(p)},$$

allora le somme

$$\text{(2)} \qquad y_0^{(p)} + \sum_{1}^{m}{}_r\, h_r\, L_r^{(p)} \quad , \quad y_0^{(p)} + \sum_{1}^{m}{}_r\, h_r\, l_r^{(p)} \quad , \quad y_0^{(p)} + \sum_{1}^{m}{}_r\, h_r\, f_r^{(p)}$$

in cui $f_r^{(p)}$ è un valore qualunque compreso fra $L_r^{(p)}$ e $l_r^{(p)}$, tendono coll'avvicinarsi insieme allo zero delle h_r verso uno stesso limite. Questo limite lo indicheremo per brevità con

$$\int_{x_0 y'_0 y''_0 \cdots y_0^{(n)}}^{x_1} f^{(p)}(x, y', y'', \cdots, y^{(n)}).$$

Reciprocamente si ha: *affinchè le tre somme* (2) *abbiano per le h_r tendenti insieme allo zero uno stesso limite è necessario che sia:*

$$\lim \sum_{1}^{m}{}_r\, h_r\, D_r^{(p)} = 0,$$

per qualunque valore di p.

Supponiamo verificate le condizioni (1) per tutti i valori di p. Si hanno subito le formule, valevoli per tutti i valori di p, se $x_1 > x_0$,

$$\text{(3)} \qquad y_0^{(p)} + \sum_{1}^{m}{}_r\, h_r\, L_r^{(p)} \geqq \int_{x_0 y'_0 \cdots y_0^{(n)}}^{x_1} f^{(p)} \geqq y_0^{(p)} + \sum_{1}^{m}{}_r\, h_r\, l_r^{(p)},$$

e se $x_1 < x_0$:

$$\text{(3')} \qquad y_0^{(p)} + \sum_{1}^{m}{}_r\, h_r\, L_r^{(p)} \leqq \int_{x_0 y'_0 \cdots y_0^{(n)}}^{x_1} f^{(p)} \leqq y_0^{(p)} + \sum_{1}^{m}{}_r\, h_r\, l_r^{(p)};$$

quindi in valore assoluto:

$$\text{(4)} \qquad \int_{x_0 y'_0 \cdots y_0^{(n)}}^{x_1} f^{(p)} - y_0^{(p)} - \sum_{1}^{m}{}_r\, h_r\, f_r^{(p)} \leqq \sum_{1}^{m}{}_r\, h_r\, D_r^{(p)}.$$

Se $x_1 > x_2 > x_0$ oppure $x_1 < x_2 < x_0$, e per qualunque valore di p

$$y_2^{(p)} = \int_{x_0 y'_0 \cdots y_0^{(n)}}^{x_2} f^{(p)},$$

allora si ha:

$$\int_{x_0 y'_0 \cdots y_0^{(n)}}^{x_1} f^{(p)} = \int_{x_2 y_2 y'_2 \cdots y_2^{(n)}}^{x_1} f^{(p)}. \tag{5}$$

Sia $x_1 > x_0 > x_2$ e oltre alle relazioni (1) si verificano le altre:

$$\lim \sum_{1}^{m_1}{}_r\, h_{r,1}\, D_{r,1}^{(p)} = 0,$$

$h_{r,1}$ essendo gli intervalli in cui è diviso (x_0, x_2), allora

$$\int_{x_0 y'_0 \cdots y_0^{(n)}}^{x} f^{(p)}$$

considerato come funzione della x definita nell'intervallo (x_2, x_1), posto che per $x = x_0$ assuma il valore $y_0^{(p)}$, è una funzione finita e continua che in ogni punto x_3 ammette per estremi oscillatori quantità comprese fra i limiti superiore e inferiore (19) della $f^{(p)}$ nel punto

$$x = x_3 \quad , \quad y_3^{(p)} = \int_{x_0 y'_0 \cdots y_0^{(n)}}^{x_3} f^{(p)} \qquad (p = 1, 2, \cdots, n).$$

Questi estremi oscillatori resultano funzioni atte alla integrazione.

Se la funzione $f^{(p)}$ è in tutti i punti del campo in cui è definita continua assolutamente, allora

$$\int_{x_0 y'_0 \cdots y_0^{(n)}}^{x} f^{(p)}$$

ammette in tutti i punti x_3 una derivata che è il valore della $f^{(p)}$ nel punto

$$x = x_3 \quad , \quad y^{(p)} = \int_{x_0 y'_0 \cdots y_0^{(n)}}^{x_3} f^{(p)} \qquad (p = 1, 2, \cdots, n).$$

Se quindi tutte le funzioni $f', \cdots, f^{(n)}$ sono nel campo in cui vengono definite continue assolutamente, allora le funzioni

$$\int_{x_0 y'_0 \cdots y_0^{(n)}}^{x} f^{(p)} \qquad (p = 1, 2, \cdots, n)$$

(19) Intenderemo, analogamente a quanto fu detto innanzi, per *limite superiore* di una funzione di n variabili in un punto il limite verso cui tendono i limiti superiori della funzione in un intorno a n dimensioni del punto che si considera, quando questi intorni decrescono indefinitamente. Questo limite esiste sempre ed è indipendente dal modo con cui gli intorni decrescono.

sono integrali del sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\frac{dy^{(p)}}{dx} = f^{(p)}(x, y', \cdots, y^{(n)}) \qquad (p = 1, 2, \cdots, n),$$

e per $x = x_0$ assumono i valori

$$y_0^{(p)} \qquad (p = 1, 2, \cdots, n).$$

Nessun altro sistema di funzioni che assumono questi valori per $x = x_0$ può verificare il sistema differenziale.

Abbiamo dunque il teorema:

Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\frac{dy^{(p)}}{dx} = f^{(p)}(x, y', y'', \cdots, y^{(p)}) \qquad (p = 1, 2, \cdots, n),$$

le $f^{(p)}$ essendo funzioni finite e continue assolutamente in un campo a $(n+1)$ dimensioni nel cui interno si trova un punto

$$x = x_0, \qquad y^{(p)} = y_0^{(p)} \qquad (p = 1, 2, \cdots, n),$$

se esistono due valori x_1 e x_2 tali che

$$x_1 > x_0 > x_2,$$

e

$$\lim \sum_1^m {}_r\, h_r \mathrm{D}_r^{(p)} = \lim \sum_1^{m_1} {}_r\, h_{r,1} \mathrm{D}_{r,1}^{(p)} = 0$$

qualunque sia p, ($h_1, h_2, \cdots, h_m$ e $h_{1,1}, h_{2,1}, \cdots, h_{m,1}$ essendo gli intervalli in cui sono divisi gli altri (x_0, x_1), (x_0, x_2) e $\mathrm{D}_r^{(p)}$ e $\mathrm{D}_{r,1}^{(p)}$ avendo sempre il solito significato) esiste sempre un unico sistema di funzioni

$$y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)$$

definite fra x_2 e x_1 che verificano il sistema di equazioni differenziali date e assumono rispettivamente i valori

$$y_0', y_0'', \cdots, y_0^{(n)}$$

per $x = x_0$.

Le condizioni che abbiamo ora imposto per la esistenza degli integrali delle equazioni differenziali sono verificate per qualunque punto $x = x_0$, $y^{(p)} = y_0^{(p)}$, $(p = 1, 2, \cdots, n)$ quando gli estremi oscillatori delle funzioni $f^{(n)}(x, y', y'', \cdots, y^{(n)})$ rispetto ad $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ sono finite ed inferiori ad una data quantità A.

Infatti sia δ una quantità tale che due valori di una qualunque delle $f^{(p)}$ in due punti distanti fra loro di δ o meno di δ sia minore di σ. Prendiamo $h_1 = h_2 = h_3, \cdots, = h_n = \delta$, avremo analogamente a quanto venne fatto nel § III, se μ è una quantità maggiore di tutte le $\mathrm{M}^{(p)}$,

$$\sum_1^s {}_r\, \mathrm{D}_r^{(p)} < \left[\sum_1^{s-1} {}_r\, \mathrm{D}_r^{(p)} + 2\mu \right] \mathrm{A} n \delta + \sigma + \sum_1^{s-1} {}_r\, \mathrm{D}_r^{(p)},$$

quindi:

$$\sum_{1}^{s}{}_r \mathrm{D}_r^{(p)} < \sum_{1}^{s-1} \mathrm{D}_r^{(p)} [1 + \mathrm{A}n\delta] + \varepsilon ,$$

posto $\varepsilon = 2\,\mu \mathrm{A} n\delta + \sigma$.

Per conseguenza:

$$\sum_{1}^{m}{}_r h_r \mathrm{D}_r^{(p)} < \frac{\varepsilon}{\mathrm{A}} \left(e^{\mathrm{A}n(x_1 - x_0)} - 1\right),$$

il che prova che:

$$\lim \sum_{1}^{m}{}_r h_r \mathrm{D}_r^{(p)} = 0 .$$

Analogamente si dimostra che:

$$\lim \sum_{1}^{m_1}{}_r h_{r,1} \mathrm{D}_{r,1}^{(p)} = 0 .$$

Se dunque chiamiamo [20] *integrale generale di un sistema di equazioni differenziali*

$$\frac{dy^{(p)}}{dx} = f^{(p)}(x, y', y'', \cdots, y^{(n)}) \qquad (p = 1, 2, \cdots, n)$$

un sistema di funzioni:

$$y^{(p)} = y^{(p)}(x, x_0, y'_0, \cdots, y_0^{(n)}) \qquad (p = 1, 2, \cdots, n)$$

tali che per ogni sistema di valori di $x_0, y'_0, \cdots, y_0^{(n)}$ *che definiscono un punto del campo* C, *resultino le* $y^{(p)}$ *funzioni della* x *definite in un intervallo che comprende il punto* x_0, *le quali verifichino il sistema dato e per* $x = x_0$ *assumano i valori*

$$y_0^{(p)} \qquad (p = 1, 2, \cdots, n)$$

avremo che *se le*

$$f^{(p)}(x, y', y'', \cdots, y^{(n)})$$

sono funzioni finite e continue assolutamente e hanno gli estremi oscillatori rispetto alle $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ *inferiori ad un numero finito, esiste sempre un unico sistema di integrali generali del sistema proposto* [21].

Analogamente a quanto abbiamo ora fatto possono generalizzarsi alcune altre delle proprietà trovate per le equazioni a due variabili.

Pisa, 21 aprile 1881.

(20) Vedi §, III.
(21) Vedi LIPSCHITZ, op. cit.