IV.

SOPRA ALCUNE CONDIZIONI CARATTERISTICHE DELLE FUNZIONI DI UNA VARIABILE COMPLESSA (*)

« Annali di Matematica pura ed applicata », ser. 2, vol. XI, 1882, pp. 1–55.

Nella presente Nota viene risoluto il problema della determinazione di funzioni di variabile complessa definite, sotto certe condizioni al contorno in campi finiti. Queste soluzioni portano alla integrazione della equazione differenziale $\Delta^2 u = 0$ con date condizioni ai limiti, come è da prevedersi a causa del legame che passa fra i due problemi. È da notare come le formule trovate risolvono altrettante questioni di fisica relative alla distribuzione delle temperature e delle correnti galvaniche costanti.

I.

È facile dimostrare che è sempre possibile costruire nell'interno di un circolo una ed una sola funzione di variabile complessa la quale verifichi le seguenti condizioni:

1° si mantenga finita in ogni campo situato internamente al cerchio in questione e in tutti i punti interni al cerchio sia monodroma e continua;

2° al contorno la sua parte reale (oppure la sua parte immaginaria) assuma valori dati arbitrariamente, colla condizione che anche al contorno essa si mantenga sempre finita e continua, esclusi al più un numero finito di punti o un gruppo infinito di punti di prima specie; sarà per conseguenza necessario che i valori dati al contorno costituiscano una funzione finita e continua dell'arco del contorno, esclusi al più i punti singolari in questione;

3° in questi punti singolari la funzione di variabile complessa possa essere discontinua e in vicinanza di essi possa anche crescere indefinitamente, colla condizione peraltro che in un intorno sufficientemente piccolo del punto d'infinito la parte reale (oppure la parte immaginaria) moltiplicata per una potenza, inferiore all'unità, della distanza dal punto d'infinito si mantenga sempre inferiore ad un numero finito; per conseguenza i valori dati al contorno dovranno costituire una funzione dell'arco, che diviene infinita soltanto in un numero finito di punti di ordine inferiore all'unità diminuita di un numero positivo;

(*) Nel titolo di questo lavoro al nome dell'A. segue la qualifica di « Allievo della R. Scuola Normale Superiore di Pisa ».

4° in un punto qualunque del campo la sua parte immaginaria (oppure la sua parte reale) assuma un dato valore arbitrario.

Ammetteremo come proprietà note le seguenti: Se la funzione $f(\theta)$ definita fra 0 e 2π, è atta alla integrazione, anche ridotta ai suoi valori assoluti, la funzione:

$$u(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)} d\theta$$

in cui r e α sono le coordinate polari di un punto del piano, è finita continua e verifica l'equazione differenziale $\Delta^2 u = 0$ in ogni punto interno al cerchio di raggio R che ha il centro all'origine ed è continua nel punto del contorno di questo cerchio di coordinate R e θ_0 se la $f(\theta)$ è continua nel punto θ_0.

Supposta l'esistenza di una funzione u finita e continua e che verifica l'equazione $\Delta^2 u = 0$ in tutti i punti interni ad un cerchio, che diviene infinita di ordine inferiore ad un numero minore di 1 soltanto avvicinandosi ad un numero finito di punti del contorno ed è discontinua in un gruppo di punti di prima specie del contorno, mentre in tutti gli altri è finita e continua e assume dati valori, questa funzione è unica.

Ciò premesso sia la funzione $f(\theta)$ definita fra 0 e 2π, infinita al più in un numero finito di punti di un ordine inferiore a $\mu < 1$ e discontinua al più in un gruppo di punti di prima specie.

Consideriamo la funzione

$$u(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)} d\theta$$

e determiniamo il modo con cui si comporta avvicinandosi ad un punto di infinito (R, α_1) del contorno.

È evidentemente possibile determinare il numero $\varepsilon < \pi/2$ e minore anche del minimo arco che separa due punti di infinito in modo che:

$$\left[\int_0^{\alpha_1 - \varepsilon} + \int_{\alpha_1 + \varepsilon}^{2\pi}\right] \left(f(\theta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)} d\theta\right)$$

si mantenga inferiore in valore assoluto ad un numero finito M positivo per $\alpha_1 + \varepsilon/2 > \alpha > \alpha_1 - \varepsilon/2$.

Ora la funzione

$$\rho^{-\mu} \cos \mu\omega = F(r, \alpha)$$

in cui ρ e ω sono le coordinate polari riferite al punto (R, α_1) come origine e al raggio che passa per questo punto come asse polare, è finita continua e verifica l'equazione $\Delta^2 F = 0$ in tutti i punti del cerchio in questione e del contorno di esso, escluso il punto (R, α_1) in cui diviene infinita di ordine μ.

Per θ entro l'intervallo $(\alpha_1 - \varepsilon, \alpha_1 + \varepsilon)$

$$\frac{f(\theta)}{F(R, \theta)}$$

non supera in valore assoluto un numero finito positivo N; quindi in valore assoluto si ha:

$$\int_{\alpha_1-\varepsilon}^{\alpha_1+\varepsilon} f(\theta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)} d\theta$$

$$= \int_{\alpha_1-\varepsilon}^{\alpha_1+\varepsilon} \frac{f(\theta)}{F(R, \theta)} F(R, \theta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)} d\theta$$

$$< N \int_{\alpha_1-\varepsilon}^{\alpha_1+\varepsilon} F(R, \theta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)} d\theta.$$

Ora esiste evidentemente un numero finito positivo P tale che in valore assoluto si ha:

$$\left[\int_0^{\alpha_1-\varepsilon} + \int_{\alpha_1+\varepsilon}^{2\pi}\right] \left(F(R, \theta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)} d\theta\right) < P.$$

Quindi se $\alpha_1 + \varepsilon/2 > \alpha > \alpha_1 - \varepsilon/2$ in valore assoluto abbiamo:

$$u(r, \alpha) < \frac{M}{2\pi} + \frac{NP}{2\pi} + \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(R, \theta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)} d\theta.$$

Ma per i lemmi enunciati deve aversi:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(R, \theta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)} d\theta = F(r, \alpha)$$

per conseguenza in valore assoluto:

$$u(r, \alpha) < \frac{M}{2\pi} + \frac{NP}{2\pi} + NF(r, \alpha)$$

il che prova che nel punto (R, α_1) la $u(r, \alpha)$ è infinita di ordine non superiore a μ. Ciò dimostra evidentemente il teorema enunciato da principio.

Questo teorema si estende facilmente in molti casi a quei campi i quali ammettono una rappresentazione conforme nell'interno del cerchio.

II.

Per uno qualunque di tali campi è pure una condizione caratteristica di una funzione di variabile complessa finita monodroma e continua in ogni punto interno al campo e al contorno pure sempre finita e continua (esclusi al più un numero finito di punti nei quali essa diviene infinita, di un ordine inferiore ad 1/2 meno un numero positivo, rispetto alla inversa delle distanze dal punto d'infinito stesso, ed esclusi pure al più un gruppo di punti di prima specie nei quali essa può essere discontinua) la conoscenza in una porzione del contorno della sua parte reale e nella rimanente della sua parte immaginaria [1].

Supponiamo infatti che in tutti i punti interni ad un dato campo (che si può rappresentare conformemente in un circolo) le due funzioni di variabile complessa

$$w = u + iv \quad , \quad w_1 = u_1 + iv_1$$

siano finite monodrome e continue.

Ammettiamo che la u e la u_1 in una porzione del contorno (esclusi al più un numero finito o un gruppo di prima specie di punti) siano finite e continue ed assumano gli stessi valori; nella porzione rimanente del contorno la v e la v_1 (esclusi sempre un numero finito di punti o un gruppo di prima specie) siano finite continue e prendano gli stessi valori.

Ammettiamo che se le w e w_1 divengono infinite lo siano in un numero finito di punti del contorno e moltiplicate per le distanze dai punti d'infinito elevate alla potenza $1/2 - \mu$ $(\mu > 0)$ rimangano sempre finite e inferiori ad un numero dato.

Consideriamo la funzione:

$$w_2 = (w - w_1)^2 = (u - u_1)^2 - (v - v_1)^2 + 2i\,(u - u_1)\,(v - v_1)$$

essa sarà finita monodroma e continua in tutti i punti nell'interno del campo; al contorno la sua parte immaginaria sarà (esclusi al più un numero finito o un gruppo di prima specie di punti) finita continua ed eguale a zero; inoltre diventerà infinita al più in un numero finito di punti del contorno di un ordine, rispetto alle inverse delle distanze da questi punti, inferiore all'unità diminuita di un numero positivo. Ne segue che w_2 non potrà essere che costante in tutto il campo e quindi come si vede subito eguale allo zero. Dunque in tutti i punti del campo sarà

$$w = w_1 .$$

(1) Da un esempio che dà il signor SCHWARZ, *Zur Integration der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, « Journal f. reine u. angew. Math. », t. 74, 1872, p. 237, si vede subito che può costruirsi in un cerchio una funzione di variabile complessa non costante che in un dato punto abbia per la parte immaginaria un dato valore e abbia la parte reale nulla lungo tutto il contorno, purchè in un punto di questo la funzione divenga infinita di 1° ordine. La funzione $\sqrt{\frac{z - e^{i\theta}}{z - 1}}\, e^{-i\frac{\theta}{4}}$ ci offre l'esempio d'una funzione che ha in una porzione del contorno del circolo di raggio 1 la parte reale nulla, nella porzione rimanente nulla la parte immaginaria e diventa infinita soltanto nel punto $z = 1$ di ordine 1/2, mentre in tutti i punti interni si mantiene monodroma finita e continua.

Si vede facilmente che questa stessa proprietà sarebbe verificata qualunque fosse il campo (anche molteplicemente connesso) e comunque fossero le funzioni date al contorno, purchè si avesse che i moduli di w e w_1 si mantenessero in tutto il campo sempre inferiori ad un numero finito e si avesse che la u e la u_1 si comportassero egualmente coll'avvicinarsi a tutti i punti di una porzione del contorno, e la v e la v_1 si comportassero pure egualmente avvicinandosi alla porzione rimanente del contorno.

III.

Ammessa l'esistenza di una funzione $w = u + iv$ della variabile complessa z avente il modulo sempre inferiore ad un numero finito, monodroma e continua in tutti i punti di un campo semplicemente connesso S che supporremo per semplicità avere il contorno s costituito da un numero finito di pezzi di curve analitiche (2) e ammesso che la w possieda la derivata prima finita e generalmente continua anche al contorno di S, cerchiamo di determinare la w conoscendo in un pezzo A del contorno la u e nel pezzo B rimanente la v.

Eseguiamo perciò la rappresentazione conforme del campo S sopra il quarto di piano $\zeta = \xi + i\eta$ dalla parte delle ξ e η positive in modo che, Ω essendo l'origine degli assi ξ e η, al pezzo del contorno A corrisponda l'asse $\eta_{+\infty}\Omega$ e al pezzo B l'asse $\Omega\xi_{+\infty}$. Questa rappresentazione conforme si eseguisca mediante la funzione di variabile complessa

$$\zeta = \zeta(z)$$

che è in tutti i punti del campo delle z monodroma finita e continua e di cui l'inversa

$$z = z(\zeta)$$

è pure in tutti i punti del quarto di piano monodroma finita e continua e al contorno possiede una derivata finita e generalmente continua.

Della funzione

$$w[z(\zeta)]$$

definita come funzione monodroma finita e continua in tutti i punti del quarto di piano ζ e che ammette al contorno una derivata finita e generalmente continua si conosce il valore della parte reale

$$u[s(\eta)]$$

lungo l'asse delle η, e il valore della parte immaginaria

$$v[s(\xi)]$$

(2) Vedi SCHWARZ, *Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

unter vorgeschriebenen Grenz-und Unstetigkeitsbedingungen. «Monatsberichte der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin», October 1870.

lungo l'asse delle ξ; conosciamo quindi al contorno, lungo l'asse delle η:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{du}{ds}\frac{ds}{d\eta}$$

e lungo l'asse delle ξ;

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = -\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{d\xi}.$$

Ma $\partial u/\partial \eta$ è la parte reale della funzione di variabile complessa

$$i\frac{dw}{d\zeta} = \frac{\partial u}{\partial \eta} + i\frac{\partial v}{\partial \eta}$$

quindi conosciamo di questa funzione il valore della parte reale lungo il contorno del quarto di piano, dato come funzione generalmente continua dell'arco del contorno stesso. Poichè ora si sa eseguire la rappresentazione conforme del quarto di piano nel circolo, potremo determinare il valore di $i\, dw/d\zeta$ in ogni punto del quarto di piano a meno di una costante additiva. Il valore di questa costante dovrà scegliersi in modo che $i\, dw/d\zeta$ si annulli nel punto $\zeta = \infty$ perchè abbiamo supposto che la w sia sempre finita. Determinato così il $dw/d\zeta$ si otterrà con una quadratura il $w(\zeta)$ e quindi la funzione richiesta $w[\zeta(z)]$.

IV.

Applichiamo questo metodo al caso in cui il campo S sia un circolo di raggio 1. Per potere applicare il metodo generale che è stato indicato, alle funzioni date u e v dovremo imporre le seguenti condizioni:

1° che esista una funzione di variabile complessa che verifica alle condizioni volute al contorno e nell'interno del cerchio;

2° che le due funzioni date al contorno siano continue ed ammettano rispetto all'arco del contorno una derivata finita e generalmente continua.

Risolveremo il problema sotto queste due ipotesi; però trovata la formula risolutiva determineremo direttamente le proprietà della funzione di variabile complessa che risulta senza fare alcuna ipotesi sopra i valori dati di u e di v e così verranno a togliersi la maggior parte delle condizioni imposte alle u e alle v stesse.

La formula che dà la rappresentazione conforme del circolo di raggio 1 situato nel piano delle z sul mezzo piano situato dalla parte delle Y positive nel piano delle Z è

$$z = \frac{Z - Z_0}{Z - Z_0'}$$

in cui Z_0 e Z_0' sono valori complessi coniugati e avendosi

$$Z_0 = X_0 + iY_0$$

è

$$Y_0 > 0\ ^{(3)}.$$

(3) Vedi CHRISTOFFEL, *Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una superficie*. « Annali di Matematica », ser. II, t. 1, p. 94.

La rappresentazione conforme del mezzo piano delle Z sul quarto di piano delle ζ situato dalla parte delle ξ e η positive viene data da

$$\zeta = \sqrt{Z},$$

quindi si ha:

$$\zeta = \sqrt{\frac{z\,Z'_0 - Z_0}{z - 1}}$$

per la rappresentazione conforme del circolo sul quarto di piano.

Sia $\theta = AB$ l'arco del circolo nei punti del quale è conosciuta la u, prendiamo per asse delle x la congiungente il centro col punto estremo A, (l'arco AB essendo contato in senso positivo); siano ρ e ω le coordinate polari di un punto del piano del circolo quando si prenda per origine il centro del circolo e l'asse x per asse polare. Pel modo col quale deve farsi nel nostro caso la rappresentazione conforme del circolo sul quarto di piano, le $Z_0 = e^{i\lambda}$ e $Z'_0 = e^{-i\lambda}$ si determineranno mediante la relazione:

$$e^{i\theta} Z'_0 - Z_0 = 0,$$

donde:

$$Z_0 = e^{i\frac{\theta}{2}} \qquad Z'_0 = e^{-i\frac{\theta}{2}}.$$

Se ne deduce che al punto del contorno del circolo $z = e^{i\omega}$ corrisponde il valore di ζ:

$$\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}},$$

quindi per $z = e^{i\omega}$ e $\omega < \theta$ si ha:

$$\xi = 0, \qquad \eta = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta - \omega}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}},$$

per $z = e^{i\omega}$ e $\omega > \theta$ si ha:

$$\xi = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}, \qquad \eta = 0.$$

Di qui si deduce inversamente che per $\zeta = i\eta$,

$$z = e^{i\left(2 \operatorname{arco\ tang} \frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{\eta^2 + \cos\frac{\theta}{2}}\right)},$$

e per $\zeta = \xi$,

$$z = e^{i\left(2 \text{ arco tang} \frac{\text{sen}\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} - \xi^2}\right)}.$$

Della $w(z)$, conosciamo $u(\omega)$ per $\omega < \theta$ e $v(\omega)$ per $\omega > \theta$ quindi della $w[z(\zeta)]$ conosciamo lungo l'asse η la parte reale

$$u\left(2 \text{ arco tang} \frac{\text{sen}\frac{\theta}{2}}{\eta^2 + \cos\frac{\theta}{2}}\right)$$

e lungo l'asse ξ il coefficiente della parte immaginaria

$$v\left(2 \text{ arco tang} \frac{\text{sen}\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} - \xi^2}\right)$$

quindi lungo l'asse delle η:

$$\frac{du}{d\eta} = -4u'\left(2 \text{ arco tang} \frac{\text{sen}\frac{\theta}{2}}{\eta^2 + \cos\frac{\theta}{2}}\right)\frac{\eta \,\text{sen}\frac{\theta}{2}}{\text{sen}^2\frac{\theta}{2} + \left(\eta^2 + \cos\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

e lungo l'asse delle ξ

$$\frac{dv}{d\xi} = -\frac{du}{d\eta} = 4v'\left(2 \text{ arco tang} \frac{\text{sen}\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} - \xi^2}\right)\frac{\xi \,\text{sen}\frac{\theta}{2}}{\text{sen}^2\frac{\theta}{2} + \left(\cos\frac{\theta}{2} - \xi^2\right)^2}.$$

Poniamo

$$i\frac{dw}{d\zeta} = w_1(\zeta)$$

e consideriamo la funzione

$$w_1[\zeta(z)].$$

Il valore della parte reale u_1 di questa funzione al contorno del circolo sarà:

per $\omega < \theta$

$$u_1(\omega) = -4u'(\omega)\sqrt{\frac{\text{sen}\left(\frac{\theta-\omega}{2}\right)\text{sen}^3\frac{\omega}{2}}{\text{sen}^2\frac{\theta}{2}}}$$

e per $\omega > \theta$

$$u_1(\omega) = -4v'(\omega)\sqrt{\frac{\text{sen}\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)\text{sen}^3\frac{\omega}{2}}{\text{sen}^2\frac{\theta}{2}}};$$

quindi essendo z un punto interno al circolo:

$$w_1[\zeta(z)] = -\frac{2}{\pi}\int_0^\theta u'(\omega)\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\omega}{2}\right)\operatorname{sen}^3\frac{\omega}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}}\cdot\frac{e^{i\omega}+z}{e^{i\omega}-z}\,d\omega$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_\theta^{2\pi} v'(\omega)\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)\operatorname{sen}^3\frac{\omega}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}}\cdot\frac{e^{i\omega}+z}{e^{i\omega}-z}\,d\omega + C$$

in cui C è una costante (4), e poichè per $z = 1$ si ha $\zeta = \infty$, così:

$$C = \frac{2}{\pi}\int_0^\theta u'(\omega)\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\omega}{2}\right)\operatorname{sen}^3\frac{\omega}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{\omega}{2}}}\cdot\frac{e^{i\omega}+1}{e^{i\omega}-1}\,d\omega + \frac{2}{\pi}\int_\theta^{2\pi} v'(\omega)\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)\operatorname{sen}^3\frac{\omega}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}}\cdot\frac{e^{i\omega}+1}{e^{i\omega}-1}\,d\omega,$$

onde:

$$i\frac{dw}{d\zeta} = w_1[\zeta(z)] = -\frac{2}{\pi}\int_0^\theta u'(\omega)\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta-\omega}{2}\operatorname{sen}^3\frac{\omega}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}}\left(\frac{e^{i\omega}+z}{e^{i\omega}-z}-\frac{e^{i\omega}+1}{e^{i\omega}-1}\right)d\omega$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_\theta^{2\pi} v'(\omega)\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)\operatorname{sen}^3\frac{\omega}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}}\left(\frac{e^{i\omega}+z}{e^{i\omega}-z}-\frac{e^{i\omega}+1}{e^{i\omega}-1}\right)d\omega.$$

Ma si ha:

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{4}}}{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)^3}},$$

quindi:

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{2}{\pi}\int_0^\theta u'(\omega)\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\omega}{2}\right)\operatorname{sen}^3\left(\frac{\omega}{2}\right)}\,e^{i\frac{\theta}{4}}\left(\frac{e^{i\omega}+z}{e^{i\omega}-z}-\frac{e^{i\omega}+1}{e^{i\omega}-1}\right)\frac{1}{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)^3}}\,d\omega$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_\theta^{2\pi} v'(\omega)\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)\operatorname{sen}^3\frac{\omega}{2}}\,e^{i\frac{\theta}{4}}\left(\frac{e^{i\omega}+z}{e^{i\omega}-z}-\frac{e^{i\omega}+1}{e^{i\omega}-1}\right)\frac{1}{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}}\,d\omega$$

e integrando:

$$w = \frac{i}{\pi}\int_0^\theta u'(\omega)\log\frac{\sqrt{\frac{z-e^{i\theta}}{z-1}}+\sqrt{\frac{e^{i\omega}-e^{i\theta}}{e^{i\omega}-1}}}{\sqrt{\frac{z-e^{i\theta}}{z-1}}-\sqrt{\frac{e^{i\omega}-e^{i\theta}}{e^{i\omega}-1}}}\,d\omega - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} v'(\omega)\log\frac{\sqrt{\frac{z-e^{i\theta}}{z-1}}+\sqrt{\frac{e^{i\omega}-e^{i\theta}}{e^{i\omega}-1}}}{\sqrt{\frac{z-e^{i\theta}}{z-1}}-\sqrt{\frac{e^{i\omega}-e^{i\theta}}{e^{i\omega}-1}}}\,d\omega + C_1$$

(4) SCHWARZ, *Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ *für die Fläche eines Kreises*, XV Jahrgange der Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, p. 123.

in cui C_1 è una costante. Eseguendo una integrazione per parti si trova, C_2 essendo una costante,

$$w = -\frac{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}}{2\pi}\int_0^\theta u(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{4}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\omega}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}d\omega$$

$$+\frac{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}}{2\pi}\int_\theta^{2\pi} v(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{4}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}d\omega + C_1 + C_2.$$

V.

In ordine a quello che abbiamo detto sopra, studiamo, senza occuparci del modo con cui siamo giunti a determinarla, le proprietà della funzione della variabile complessa z:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} w(z) = &-\frac{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}}{2\pi}\int_0^\theta f(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{4}\right)}}{(z-e^{i\theta})\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\omega}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}d\omega \\ &+\frac{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}}{2\pi}\int_\theta^{2\pi} f_1(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{4}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}d\omega \end{aligned}\right.$$

in cui $f(\omega)$ e $f_1(\omega)$ sono funzioni reali della variabile reale ω, finite e atte alla integrazione. Per valore della espressione $\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}$, fisseremo quello definito dalla relazione

$$\left[\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}\right]_{z=e^{i\alpha}} = +2\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{(\theta-\alpha)}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\cdot e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\theta}{4}\right)},\ (\theta > \alpha > 0).$$

Si riconosce subito che la w è una funzione finita monodroma e continua in tutti i punti interni al cerchio di raggio 1, e che almeno quando la f e la f_1 sono continue ed hanno la derivata finita e atta alla integrazione, verifica certamente alla condizione di mantenersi finita anche avvicinandosi ai punti del contorno.

Per vedere le proprietà della funzione w quando la z si avvicina al contorno del circolo ci serviremo di un teorema del sig. Du Bois-Reymond [5] relativo agli integrali definiti che sono atti a rappresentare analiticamente una funzione [6].

(5) Vedi Du Bois-Reymond, « Journal f. reine u. angew. Math. », vol. 79, 1875, pp. 38-66, e prof. Ulisse Dini, *Serie di Fourier ed altre rappresentazioni analitiche di una funzione di variabile reale*, p. 41.

(6) Faccio notare che il metodo che verrà ora adoperato potrebbe servire utilmente anche in altre analoghe verificazioni di proprietà ai limiti di funzioni note.

Chiamiamo rispettivamente con R (A) e I (A) la parte reale e il coefficiente della parte immaginaria del numero complesso A. Avremo ponendo:

$$z = re^{i\alpha} \qquad (r < 1)$$

che:

$$R\left(\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{z - e^{i\omega}}\right) = \frac{(r-1)\cos\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{r^2+1-2r\cos(\alpha-\omega)},$$

quindi:

$$R\left[\int_{\alpha}^{\omega_1} \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{z - e^{i\omega}}\, d\omega\right] = \frac{1}{\sqrt{r}} \text{arco tang} \frac{2\sqrt{r}\,\text{sen}\left(\frac{\omega_1-\alpha}{2}\right)}{r-1}.$$

Ne segue che supponendo

$$\omega_1 > \alpha \quad \text{e} \quad \omega_0 < \alpha$$

si ottiene:

$$\lim_{r=1} R\left[\int_{\alpha}^{\omega_1} \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{z - e^{i\omega}}\, d\omega\right] = \lim_{r=1} R\left[\int_{\omega_0}^{\alpha} \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{z - e^{i\omega}}\, d\omega\right] = -\frac{\pi}{2}$$

e per conseguenza:

$$\lim_{r=1} R\left[\int_{\omega_2}^{\omega_3} \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{z - e^{i\omega}}\, d\omega\right] = 0.$$

se ω_2 e ω_3 sono ambedue maggiori oppure ambedue minori di α.

Inoltre si ha che

$$\frac{(r-1)\cos\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{r^2+1-2r\cos(\omega-\alpha)}$$

si mantiene sempre negativo finchè si ha in valore assoluto

$$\omega - \alpha < \pi.$$

Di qui si deduce immediatamente supponendo $\theta > \alpha > 0$ e supponendo inoltre che nel punto α la $f(\omega)$ non abbia discontinuità di seconda specie:

$$\lim_{r=1} R\left[\int_0^{\theta} \frac{f(\omega)}{\sqrt{\text{sen}\left(\frac{\theta-\omega}{2}\right)\text{sen}\frac{\omega}{2}}} \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{z - e^{i\omega}}\, d\omega\right] = -\frac{\pi}{2} \frac{f(\alpha+0)+f(\alpha-0)}{\sqrt{\text{sen}\frac{\theta-\alpha}{2}\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}}}.$$

Di più si ha in valore assoluto

$$I\left[\int_0^{\theta} \frac{f(\omega)}{\sqrt{\text{sen}\frac{\theta-\omega}{2}\,\text{sen}\frac{\omega}{2}}} \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{z - e^{i\omega}}\, d\omega\right] < M_0 \log(1-r) + M,$$

essendo M e M_0 numeri finiti, e:

$$\lim_{r=1} \frac{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}}{e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\theta}{4}\right)}} = 2\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}},$$

quindi avremo per

$$\theta > \alpha > 0$$

che:

$$\lim_{r=1} R\left[-\frac{1}{2\pi}\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}\int_0^\theta f(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{4}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\theta-\omega}{2}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}d\omega\right] = \frac{f(\alpha+0)+f(\alpha-0)}{2}.$$

Analogamente si trova supponendo $2\pi > \alpha > \theta$:

$$\lim_{r=1} R\left[\int_0^\theta f(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\theta-\omega}{2}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}d\omega\right] = 0,$$

$$I\left[\int_0^\theta f(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\omega}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}\right] < M_1$$

in valore assoluto, M_1 essendo un numero finito, e poichè in questo caso

$$\lim_{r=1} \frac{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}}{e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\theta}{4}\right)}} = -2i\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$$

così sarà:

$$\lim_{r=1} I\left[-\frac{1}{2\pi}\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}\int_0^\theta f(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{4}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\theta-\omega}{2}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}d\omega\right] = 0$$

per $2\pi > \alpha > \theta$.

Se $\theta > \alpha > 0$ si ha:

$$\lim_{r=1} R\left[\int_\theta^{2\pi} f_1(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\omega-\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}d\omega\right] = 0$$

$$I\left[\int_\theta^{2\pi} f_1(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\omega-\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}d\omega\right] < M_2$$

in valore assoluto, M_2 essendo un numero finito; quindi:

$$\lim_{r=1} R\left[-\frac{1}{2\pi}\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}\int_\theta^{2\pi} f_1(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{4}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\omega-\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}d\omega\right] = 0.$$

Se $2\pi > \alpha > \theta$ e α non è un punto di discontinuità di seconda specie della $v(\omega)$ si trova:

$$\lim_{r=1} \mathrm{R}\left[\int_\theta^{2\pi} f_1(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\omega-\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}d\omega\right] = -\frac{\pi}{2}\frac{f_1(\alpha+0)+f_1(\alpha-0)}{\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\alpha-\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}}$$

$$\mathrm{I}\left[\int_\theta^{2\pi} f_1(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\omega-\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}d\omega\right] < \mathrm{M}_3\log(1-r)+\mathrm{M}_4$$

in valore assoluto, M_3 e M_4 essendo finiti, e siccome

$$\lim_{r=1}\frac{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}}{e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\theta}{4}\right)}} = -2i\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$$

così sarà:

$$\lim_{r=1}\mathrm{I}\left[\frac{1}{2\pi}\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}\int_\theta^{2\pi} f_1(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{4}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\omega-\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}d\omega\right] = \frac{f_1(\alpha+0)+f_1(\alpha-0)}{2}.$$

La $w(z)$ data dalla (1) è dunque una funzione che in ogni porzione tutta interna al circolo che si considera si mantiene sempre finita monodroma e continua; avvicinandosi ai punti (R, α) dell'arco θ del contorno nei quali la $f(\omega)$ non ha discontinuità di seconda specie (gli estremi esclusi) secondo i raggi vettori che vanno ai punti stessi, la parte reale della funzione $w(z)$ tende verso la media dei valori del limite a destra e di quello a sinistra dei valori della $u(\omega)$ nel punto α; avvicinandosi ai punti (R, α_1) della porzione rimanente del contorno nei quali non si hanno discontinuità di seconda specie per la $f_1(\omega)$ (gli estremi esclusi), sempre nella direzione dei raggi, il coefficiente della parte immaginaria di $w(z)$ tende verso la media del limite a destra e di quello a sinistra dei valori della $f_1(\omega)$ nel punto α_1.

Si riconosce dunque così il modo di comportarsi della $w(z)$ in tutti i punti del contorno, esclusi quelli in cui la $f(\omega)$ o la $f_1(\omega)$ hanno discontinuità di seconda specie e gli estremi dell'arco θ.

Si noti ora, come può verificarsi applicando le considerazioni precedenti, che in tutti i punti dell'intervallo (λ, μ) interno all'altro (λ_1, μ_1) $(\theta > \mu_1 > \lambda_1 > 0)$ in cui la $f(\omega)$ si mantiene sempre continua, la parte reale della $w(z)$, avvicinandosi la z ai punti del contorno lungo la normale, tende con continuità ed in egual grado verso i valori della $f(\omega)$. Se ne conclude che la parte reale della $w(z)$ è continua assolutamente nei punti $e^{i\alpha}$ $(\mu > \alpha > \lambda)$ del contorno. Una analoga proprietà si ha per la parte immaginaria della $w(z)$. Si ha dunque che, quando la $f(\omega)$ e la $f_1(\omega)$ sono continue ed ammettono la derivata finita e atta alla integrazione, può dirsi che la $w(z)$ data dalla (1) è l'unica funzione che si mantenga finita e abbia la parte reale e la parte immaginaria che prendano al contorno con continuità, rispettivamente i valori $f(\omega)$ e $f_1(\omega)$, l'una fra 0 e θ, l'altra fra θ e 2π.

VI.

Consideriamo ora la funzione:

$$
(2)\qquad \left\{
\begin{aligned}
w_1(z) = &-\frac{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}}{2\pi}\int_0^\theta f(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{4}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\theta-\omega}{2}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}\,d\omega \\
&-\frac{1}{\pi}\int_\theta^{2\pi}\varphi(\omega)\log\frac{\sqrt{\frac{z-e^{i\theta}}{z-1}}+\sqrt{\frac{e^{i\omega}-e^{i\theta}}{e^{i\omega}-1}}}{\sqrt{\frac{z-e^{i\theta}}{z-1}}-\sqrt{\frac{e^{i\omega}-e^{i\theta}}{e^{i\omega}-1}}}\,d\omega + Ci
\end{aligned}
\right.
$$

in cui $f(\omega)$ e $\varphi(\omega)$ sono funzioni reali dell'argomento reale ω finite e atte alla integrazione, e C è una costante reale. I valori dei radicali saranno fissati per mezzo della stessa relazione che ha servito allo stesso scopo nel paragrafo precedente.

La $w_1(z)$ è sempre finita monodroma e continua in ogni punto interno al cerchio di raggio 1.

Poichè si ha identicamente:

$$
\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\omega)\log\frac{\sqrt{\frac{z-e^{i\theta}}{z-1}}+\sqrt{\frac{e^{i\omega}-e^{i\theta}}{e^{i\omega}-1}}}{\sqrt{\frac{z-e^{i\theta}}{z-1}}-\sqrt{\frac{e^{i\omega}-e^{i\theta}}{e^{i\omega}-1}}}\,d\omega
$$

$$
=\frac{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^\omega\varphi(\omega)\,d\omega\right)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{4}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\omega-\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}\,d\omega + i\int_0^{2\pi}\varphi(\omega)\,d\omega,
$$

si vede che la parte reale della $w_1(z)$ coll'avvicinarsi della $z = re^{i\alpha}$ ad un punto del contorno $(1, \alpha_1)$, $\theta > \alpha_1 > 0$ [la $f(\omega)$ non avendo discontinuità di seconda specie nel punto α_1] tende verso

$$\frac{f(\alpha_1+0)+f(\alpha_1-0)}{2}.$$

Ora, il campo di variabilità della z può evidentemente essere esteso oltre il circolo di raggio 1 senza che la funzione

$$
w_2(z) = -\frac{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}}{2\pi}\int_0^\theta f(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{4}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\omega-\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}\,d\omega
$$

cessi di mantenersi finita monodroma e continua in tutti i punti interni al campo, purchè seguiti ad essere un pezzo del contorno di esso l'arco $(0, \theta)$ del circolo di raggio 1; si ha quindi, poichè la $w_2(z)$ è reale nei punti dell'arco $(\theta, 2\pi)$ del circolo di raggio 1, per $2\pi > \alpha > \theta$

$$\left(\frac{\partial R[w_2(z)]}{\partial r}\right)_{r=1} = 0 .$$

Ma per $r < 1$:

$$\frac{\partial w_3(z)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\pi}\int_\theta^{2\pi} \varphi(\omega) \log \frac{\sqrt{\frac{z-e^{i\theta}}{z-1}} + \sqrt{\frac{e^{i\omega}-e^{i\theta}}{e^{i\omega}-1}}}{\sqrt{\frac{z-e^{i\theta}}{z-1}} - \sqrt{\frac{e^{i\omega}-e^{i\theta}}{e^{i\omega}-1}}}\, d\omega\right]$$

$$= \frac{2}{\pi} i \frac{1}{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}} \int_\theta^{2\pi} \varphi(\omega) \sqrt{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\omega-\theta)\operatorname{sen}\frac{1}{2}\omega}\; \frac{e^{i\left(\alpha+\frac{\theta}{4}+\frac{\omega}{2}\right)}}{z-e^{i\omega}}\, d\omega$$

e si ha, essendo $2\pi > \alpha > \theta$, [la $\varphi(\omega)$ non avendo discontinuità di seconda specie nel punto α]

$$\lim_{r=1} R\left[\int_\theta^{2\pi} \varphi(\omega) \sqrt{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\omega-\theta)\operatorname{sen}\frac{1}{2}\omega}\; \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{z-e^{i\omega}}\, d\omega\right]$$

$$= -\frac{\pi}{2}[\varphi(\alpha+0)+\varphi(\alpha-0)] \sqrt{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-\theta)\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha}\, ;$$

$$I\left[\int_\theta^{2\pi} \varphi(\omega) \sqrt{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\omega-\theta)\operatorname{sen}\frac{1}{2}\omega}\; \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{z-e^{i\omega}}\, d\omega\right] < P \log(1-r) + Q$$

in valore assoluto, P e Q essendo numeri finiti, e finalmente:

$$\lim_{r=1} \frac{e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\theta}{4}\right)}}{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}} = \frac{1}{-2i\sqrt{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-\theta)\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha}},$$

per conseguenza essendo $2\pi > \alpha > \theta$

$$\lim_{r=1} \frac{\partial}{\partial r}\{R[w_1(z)]\} = \lim_{r=1} \frac{\partial}{\partial r}\{R[w_3(z)]\} = \frac{\varphi(\alpha+0)+\varphi(\alpha-0)}{2}.$$

Si ha dunque, come facilmente si poteva prevedere, che la formula (2) ci dà una soluzione del problema di determinare una funzione di variabile complessa finita monodroma e continua in tutti i punti interni ad un cerchio, di cui è noto il valore della parte reale in una porzione del contorno e nell'altra è noto il valore della derivata rispetto alla normale al contorno della parte reale.

Col separare la parte reale dalla parte immaginaria nella (2) si ottiene la soluzione del problema di determinare una funzione U di due variabili reali finita monodroma e continua in tutti i punti interni ad un cerchio, che verifica l'equazione differenziale:

$$\Delta^2 U = 0,$$

quando si conosca in una porzione del contorno il valore della funzione e nella porzione rimanente il valore della sua derivata rispetto alla normale al contorno.

Col fare nella (2) $\theta = 2\pi$ si trovano le note formule della teoria della integrazione della equazione $\Delta^2 U = 0$ [7].

VII.

La formula trovata (1) ci fornisce immediatamente per analogia la soluzione di un problema più generale di quello risoluto.

Suppongasi che di una funzione della variabile complessa z, definita come funzione finita monodroma e continua in tutti i punti di un circolo di raggio 1 si conosca il valore della parte reale u data come funzione dell'arco ω del contorno dal punto 0 al punto θ_1, il valore del coefficiente v della parte immaginaria dal punto θ_1 al punto θ_2, quello della parte reale dal punto θ_2 al punto θ_3, ecc. Finalmente quello del coefficiente della parte immaginaria dal punto θ_{2k-1} al punto 2π; si tratta di determinare la funzione di variabile complessa [*].

Consideriamo la funzione:

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} w(z) &= \\ &= -\frac{1}{2\pi}\sqrt{(-1)^k \prod_1^{2k}{}_s (z - e^{i\theta_s})}\; \sum_0^{k-1}{}_p \left\{ \int_{\theta_{2p}}^{2p+1} u_p(\omega)\, \frac{(-1)^p [i(1-z)]^{1-k} e^{i\left(\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{4}\sum_1^{2k}{}_s \theta_s\right)} \operatorname{sen}^{k-1}\frac{\omega}{2}}{(z - e^{i\omega})\sqrt{\prod_1^{2k}{}_s \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s - \omega}{2}\right)}}\, d\omega \right. \\ &\quad \left. - \int_{\theta_{2p+1}}^{\theta_{2p+2}} v_p(\omega)\, \frac{(-1)^p \{i(1-z)\}^{1-k} e^{i\left(\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{4}\sum_1^{2k}{}_s \theta_s\right)} \operatorname{sen}^{k-1}\frac{\omega}{2}}{(z - e^{i\omega})\sqrt{-\prod_1^{2k}{}_s \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s - \omega}{2}\right)}}\, d\omega \right\} \end{aligned} \right.$$

(7) Vedi SCHWARZ, terza opera citata.

(*) La formula (3) del testo è stata rettificata, tenendo conto di correzioni autografe dell'A. Va rilevato che, in questo paragrafo, l'A. non considera alcuna limitazione dell'ordine delle singolarità che $w(z)$ può presentare sul contorno del cerchio. D'altra parte non esamina il comportamento della funzione $w(z)$ nell'intorno dei punti θ_s. Quando si limita l'ordine di queste singolarità (per esempio, come al principio del paragrafo II, per ottenere il teorema di unicità) il problema posto (per $k > 1$) non ammette, in generale, soluzioni, in quanto le u e le v non possono essere scelte ad arbitrio. Ciò è stato notato da H. A. SCHWARZ nella sua recensione di questa Memoria (« J. ü. Fortschritte der Math. », vol. XV, 1883). A. SIGNORINI ha trattato completamente la questione ed ha ottenuto le relazioni, cui devono soddisfare le u e le v date. Cfr. « Ann. di Mat. », ser. 3, vol. XXV, 1916, p. 253. [N.d.R.].

in cui $\theta_0 = 0$, $\theta_{2k} = 2\pi$, $u_p(\omega)$ è una funzione definita fra θ_{2p} e θ_{2p+1} atta alla integrazione e $v_p(\omega)$ è una funzione definita fra θ_{2p+1} e θ_{2p+2} pure atta alla integrazione. Per valore della espressione $\sqrt{(-1)^k \prod_1^{2k} (z - e^{i\theta_s})}$ fisseremo quello definito dalla relazione

$$\left[\sqrt{(-1)^k \prod_1^{2k} (z - e^{i\theta_s})}\right]_{z=e^{i\alpha}} = +2^k \sqrt{\prod_1^{2k} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s - \alpha}{2}\right)}\, e^{i\left(\frac{k}{2}\alpha + \frac{1}{4}\sum_1^{2k}{}_s\,\theta_s\right)} \quad (\theta_1 > \alpha > 0).$$

La $w(z)$ è una funzione di z monodroma finita e continua in ogni porzione tutta interna al circolo di raggio 1; vediamo come si comporta al contorno.

Si ha analogamente a quanto venne trovato precedentemente supponendo $z = re^{i\alpha}$ $(r < 1)$

$$R\left[\int_\alpha^{\theta'} \frac{e^{i\frac{1}{2}(\omega+\alpha)}}{z - e^{i\omega}}\, d\omega\right] = r^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arco\,tang}\left[\frac{2r^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\theta' - \alpha)}{r - 1}\right]$$

e quindi se $\theta' > \alpha > \theta''$

$$\lim_{r=1} R\left[\int_\alpha^{\theta'} \frac{e^{i\frac{1}{2}(\omega+\alpha)}}{z - e^{i\omega}}\, d\omega\right] = \lim_{r=1} R\left[\int_{\theta''}^{\alpha} \frac{e^{i\frac{1}{2}(\omega+\alpha)}}{z - e^{i\omega}}\, d\omega\right] = -\frac{\pi}{2}$$

e per conseguenza se θ''' e θ^{IV} sono ambedue minori o ambedue maggiori di α

$$\lim_{r=1} R\left[\int_{\theta'''}^{\theta^{IV}} \frac{e^{i\frac{1}{2}(\omega+\alpha)}}{z - e^{i\omega}}\, d\omega\right] = 0.$$

Di più è da osservare che

$$R\left[\frac{e^{i\frac{1}{2}(\omega+\alpha)}}{z - e^{i\omega}}\right] = \frac{(r-1)\cos\frac{1}{2}(\omega - \alpha)}{r^2 + 1 - 2r\cos(\omega - \alpha)},$$

espressione che in valore assoluto, se $\omega - \alpha < \pi$, è sempre negativa.

Ciò premesso si ha subito, poichè:

$$\prod_1^{2k}{}_s \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s - \omega}{2}\right) > 0$$

per ω compreso fra θ_{2p} e θ_{2p+1}, che:

$$\lim_{r=1} R\left[\int_{\theta_{2p}}^{\theta_{2p+1}} \frac{u_p(\omega)\operatorname{sen}^{k-1}\frac{\omega}{2}}{\sqrt{\prod_1^{2k} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s - \omega}{2}\right)}} \frac{e^{i\frac{1}{2}(\omega+\alpha)}}{z - e^{i\omega}}\, d\omega\right] = -\frac{\pi}{2} \frac{u_p(\alpha+0) + u_p(\alpha-0)}{\sqrt{\prod_1^{2k} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s - \alpha}{2}\right)}} \operatorname{sen}^{k-1}\frac{\alpha}{2}$$

se il punto α è compreso fra θ_{2p} e θ_{2p+1} (gli estremi esclusi) e non è un punto di discontinuità di seconda specie per la funzione $u_p(\omega)$, mentre

$$\lim_{r=1} \mathrm{R}\left[\int_{\theta_{2p}}^{\theta_{2p+1}} \frac{u_p(\omega)\operatorname{sen}^{k-1}\frac{\omega}{2}}{\sqrt{\prod_1^{2k}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s-\omega}{2}\right)}} \frac{e^{i\frac{1}{2}(\omega+\alpha)}}{z-e^{i\omega}}\,d\omega\right]=0$$

se il punto α non è compreso nell'intervallo $(\theta_{2p}, \theta_{2p+1})$ né coincide cogli estremi di questo.

Si ha inoltre in valore assoluto:

$$\mathrm{I}\left[\int_{\theta_{2p}}^{\theta_{2p+1}} \frac{u_p(\omega)\operatorname{sen}^{k-1}\frac{\omega}{2}}{\sqrt{\prod_1^{2k}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s-\omega}{2}\right)}} \frac{e^{i\frac{1}{2}(\omega+\alpha)}}{z-e^{i\omega}}\,d\omega\right]<\mathrm{S}_\alpha\log(1-r)+\mathrm{T}_\alpha$$

S_α e T_α essendo numeri positivi finiti per tutti i valori di α diversi da θ_{2p} e θ_{2p+1} qualunque sia il valore di r.

Ora se α è compreso in un intervallo della forma $(\theta_{2q}, \theta_{2q+1})$, si ha

$$\lim_{r=1}\frac{\sqrt{(-1)^k\prod_1^{2k}(z-e^{i\theta_s})}}{e^{i\left(\frac{k}{2}\alpha+\frac{1}{4}\sum_1^{2k}{}_s\theta_s\right)}}=(-1)^q\,2^k\sqrt{\prod_1^{2k}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s-\alpha}{2}\right)},$$

mentre se α è compreso in un intervallo della forma $(\theta_{2q+1}, \theta_{2q+2})$ si ha invece

$$\lim_{r=1}\frac{\sqrt{(-1)^k\prod_1^{2k}(z-e^{i\theta_s})}}{e^{i\left(\frac{k}{2}\alpha+\frac{1}{4}\sum_1^{2k}{}_s\theta_s\right)}}=-i\,(-1)^q\,2^k\sqrt{-\prod_1^{2k}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s-\alpha}{2}\right)}.$$

Ne segue che:

$$\lim_{r=1}\mathrm{R}\left[-\frac{1}{2\pi}\sqrt{(-1)^k\prod_1^{2k}(z-e^{i\theta_s})}\int_{\theta_{2p}}^{\theta_{2p+1}}\frac{(-1)^p[i(z-1)]^{1-k}u_p(\omega)\operatorname{sen}^{k-1}\frac{\omega}{2}}{\sqrt{\prod_1^{2k}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s-\omega}{2}\right)}}\frac{e^{i\left(\frac{1}{2}\omega-\frac{1}{4}\sum_1^{2k}{}_s\theta_s\right)}}{z-e^{i\omega}}\,d\omega\right]$$

$$=\frac{u_p(\alpha+0)+u_p(\alpha-0)}{2}$$

se α è compreso nell'intervallo $(\theta_{2p}, \theta_{2p+1})$ (gli estremi esclusi) e non è un punto di discontinuità di seconda specie per la $u_p(\omega)$;

$$\lim_{r=1}\mathrm{R}\left[-\frac{1}{2\pi}\sqrt{(-1)^k\prod_1^{2k}(z-e^{i\theta_s})}\int_{\theta_{2p}}^{\theta_{2p+1}}\frac{(-1)^p[i(1-z)]^{1-k}u_p(\omega)\operatorname{sen}^{k-1}\frac{\omega}{2}}{\sqrt{\prod_1^{2k}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s-\omega}{2}\right)}}\frac{e^{i\left(\frac{1}{2}\omega-\frac{1}{4}\sum_1^{2k}{}_s\theta_s\right)}}{z-e^{i\omega}}\,d\omega\right]=0$$

se α è un punto dell'intervallo $(\theta_{2q}, \theta_{2q+1})$ $q \gtrless p$; e

$$\lim_{r=1} \mathrm{I}\left[-\frac{1}{2\pi}\sqrt{(-1)^k \prod_1^{2k}(z-e^{i\theta_s})}\int_{\theta_{2p}}^{\theta_{2p+1}} \frac{(-1)^p[i(1-z)]^{1-k}u_p(\omega)\,\mathrm{sen}^{k-1}\frac{\omega}{2}}{\sqrt{\prod_1^{2k}\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_s-\omega}{2}\right)}}\frac{e^{i\left(\frac{1}{2}\omega-\frac{1}{4}\sum_s{}_1^{2k}\theta_s\right)}}{z-e^{i\omega}}d\omega\right]=0$$

se α è un punto dell'intervallo $(\theta_{2q+1}, \theta_{2q+2})$ ($q \gtreqless p$, esclusi i punti θ_{2p} e θ_{2p+1}).

Analogamente si trova poichè:

$$-\prod_s{}_1^{2k}\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_s-\omega}{2}\right)>0,$$

per ω compreso fra θ_{2p+1} e θ_{2p+2}, che:

$$\lim_{r=1}\mathrm{R}\left[\int_{\theta_{2p+1}}^{\theta_{2p+2}}\frac{v_p(\omega)\,\mathrm{sen}^{k-1}\frac{\omega}{2}}{\sqrt{-\prod_1^{2k}\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_s-\omega}{2}\right)}}\frac{e^{i\frac{1}{2}(\omega+\alpha)}}{z-e^{i\omega}}d\omega\right]=\frac{\pi}{2}\frac{v_p(\alpha+0)+v_p(\alpha-0)}{\sqrt{-\prod_1^{2k}\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_s-\alpha}{2}\right)}}\mathrm{sen}^{k-1}\frac{\omega}{2}$$

se α è compreso fra θ_{2p+1} e θ_{2p+2} (gli estremi esclusi) e non è un punto di discontinuità di seconda specie per la funzione $v_p(\omega)$, mentre

$$\lim_{r=1}\mathrm{R}\left[\int_{\theta_{2p+1}}^{\theta_{2p+2}}\frac{v_p(\omega)\,\mathrm{sen}^{k-1}\frac{\omega}{2}}{\sqrt{-\prod_s{}_1^{2k}\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_s-\omega}{2}\right)}}\frac{e^{i\frac{1}{2}(\omega+\alpha)}}{z-e^{i\omega}}d\omega\right]=0$$

se α è un punto esterno all'intervallo $(\theta_{2p+1}, \theta_{2p+2})$ e non coincide cogli estremi di questo. Di più si ha in valore assoluto

$$\mathrm{I}\left[\int_{\theta_{2p+1}}^{\theta_{2p+2}}\frac{v_p(\omega)\,\mathrm{sen}^{k-1}\frac{\omega}{2}}{\sqrt{-\prod_s{}_1^{2k}\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_s-\omega}{2}\right)}}\frac{e^{i\frac{1}{2}(\omega+\alpha)}}{z-e^{i\omega}}d\omega\right]<\mathrm{S}'_\alpha\log(1-r)+\mathrm{T}'_\alpha$$

S'_α e T'_α essendo numeri finiti positivi per qualunque valore di r, essendo α differente da θ_{2p+1} e θ_{2p+2}. Ne segue che:

$$\lim_{r=1}\mathrm{I}\left[\frac{1}{2\pi}\sqrt{(-1)^k\prod_s{}_1^{2k}(z-e^{i\theta_s})}\int_{\theta_{2p+1}}^{\theta_{2p+2}}\frac{(-1)^p[i(1-z)]^{1-k}v_p(\omega)\,\mathrm{sen}^{k-1}\frac{\omega}{2}}{\sqrt{-\prod_s{}_1^{2k}\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_s-\omega}{2}\right)}}\frac{e^{i\left(\frac{1}{2}\omega-\frac{1}{4}\sum_s{}_1^{2k}\theta_s\right)}}{z-e^{i\omega}}d\omega\right]$$

$$=\frac{v_p(\alpha+0)+v_p(\alpha-0)}{2}$$

se il punto α è compreso fra θ_{2p+1} e θ_{2p+2} (questi due valori esclusi) e $v_p(\omega)$ non ha discontinuità di seconda specie nel punto α;

$$\lim_{r=1}\mathrm{I}\left[\frac{1}{2\pi}\sqrt{(-1)^k\prod_s{}_1^{2k}(z-e^{i\theta_s})}\int_{\theta_{2p+1}}^{\theta_{2p+2}}\frac{(-1)^p[i(1-z)]^{1-k}v_p(\omega)\,\mathrm{sen}^{k-1}\frac{\omega}{2}}{\sqrt{-\prod_s{}_1^{2k}\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_s-\omega}{2}\right)}}\frac{e^{i\left(\frac{1}{2}\omega-\frac{1}{4}\sum_s{}_1^{2k}\theta_s\right)}}{z-e^{i\omega}}d\omega\right]=0$$

per α compreso in un intervallo $(\theta_{2q+1}, \theta_{2q+2})$ $q \gtrless p$;

$$\lim_{r=1} R\left[\frac{1}{2\pi}\sqrt{(-1)^k \prod_1^{2k}{}_s (z-e^{i\theta_s})} \int_{\theta_{2p+1}}^{\theta_{2p+2}} \frac{(-1)^p [i(1-z)]^{1-k} v_p(\omega) \operatorname{sen}^{k-1}\frac{\omega}{2}}{\sqrt{-\prod_1^{2k} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s-\omega}{2}\right)}} \frac{e^{i\left(\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{4}\sum_1^{2k}{}_s \theta_s\right)}}{z-e_i^{\omega}} d\omega\right] = 0$$

per α compreso in un intervallo $(\theta_{2q}, \theta_{2q+1})$ il punto α essendo però differente dagli estremi.

Abbiamo dunque che la $w(z)$ gode della proprietà che avvicinandosi il punto z lungo la normale al contorno ad un punto di questo appartenente ad un arco $(\theta_{2p}, \theta_{2p+1})$ (gli estremi esclusi) tale che la funzione $u_p(\omega)$ in quel punto non abbia discontinuità di seconda specie, la parte reale della $w(z)$ tende con continuità verso la media del limite a destra e del limite a sinistra dei valori della $u_p(\omega)$ in quel punto, mentre avvicinandosi il punto z, sempre lungo la normale al contorno, ad un punto di questo appartenente all'arco $(\theta_{2p+1}, \theta_{2p+2})$ (gli estremi esclusi) tale che la $v_p(\omega)$ non abbia in quel punto discontinuità di seconda specie, il coefficiente della parte immaginaria della $w(z)$ tende con continuità verso la media del limite a destra e del limite a sinistra dei valori della $v_p(\omega)$ in quel punto.

VIII.

Dalle formole trovate si possono dedurre subito le soluzioni dei problemi analoghi a quelli ora risoluti per il cerchio, nel caso generale di aree piane semplicemente connesse di cui si conosce la rappresentazione conforme nel cerchio. Alla conoscenza di questa rappresentazione può sostituirsi, come è noto, quella di una funzione reale, monodroma e continua che si annulla al contorno, in un punto interno qualunque diviene infinita di ordine logaritmico rispetto alle distanze da questo punto, mentre in tutti gli altri si mantiene finita, e verifica di più l'equazione $\Delta^2 = 0$ (8). La determinazione di questa funzione corrisponde a quella della funzione di GREEN (9) per un punto qualunque del campo.

Se per un dato campo S nel piano $\zeta = \xi + i\eta$, la funzione di GREEN di un certo punto P corrispondente al valore ζ_0 di ζ è $u(\xi, \eta)$, e

$$u_1(\xi, \eta) = u(\xi, \eta) - \frac{1}{2}\log[(\xi-\xi_0)^2 + (\eta-\eta_1)^2]$$

e $u_1(\xi, \eta) + iv_1(\xi, \eta)$ è una funzione monodroma finita e continua della ζ in tutti i punti interni del campo che si ottiene aggiungendo al contorno σ di S una linea situata tutta internamente a questo campo che non taglia sè

(8) Vedi RIEMANN, *Dissertazione inaugurale*. «Annali di Matematica», ser. I, t. 2, p. 353 e la seconda Memoria già citata di SCHWARZ, p. 787.

(9) Vedi C. NEUMANN, *Integration der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$. «Journal f. reine u. angew. Math.», vol. 59, 1861, pp. 335-366.

stessa ed unisce P con un punto di σ, si otterranno subito per il campo S le soluzioni dei problemi analoghi a quelli risoluti nel caso del cerchio sostituendo nelle formole (1), (2), (3) in luogo di z

$$F(\zeta) = e^{u_1(\xi,\eta) + iv_1(\xi,\eta)}$$

e $v_1[\xi(\sigma), \eta(\sigma)]$ invece di ω, intendendo con $\xi(\sigma)$ e $\eta(\sigma)$ i valori di ξ e η nel punto σ del contorno di S.

IX.

Con un metodo analogo a quello adoperato per risolvere il primo problema propostoci potrebbe risolversi il seguente:

Determinare una funzione $w = u + iv$ della variabile complessa z, monodroma finita e continua in tutti i punti di un cerchio di raggio 1 (il contorno incluso) e che nei punti dell'arco (θ_p, θ_{p+1}) del contorno verifichi alla condizione

$$A_p u(\theta) + B_p v(\theta) = F_p(\theta), \qquad (p = 1, 2, \cdots, n)$$

supponendo la circonferenza del cerchio divisa in n parti, essendo A_p e B_p numeri reali variabili con p soltanto e $F_p(\theta)$ una funzione reale finita, continua, avente la derivata finita e continua (*).

Eseguiamo perciò la rappresentazione conforme (il che può sempre farsi quando si supponga $n > 2$) del cerchio nel piano z, entro un poligono chiuso ad un solo strato e semplicemente connesso nel piano ζ in modo che all'arco (θ_p, θ_{p+1}) corrisponda un lato del poligono avente per equazione

$$A_p \xi + B_p \eta = \text{cost}\ ^{(10)}.$$

Sia

$$z = z(\zeta)$$

la funzione che dà questa rappresentazione conforme; poniamo:

$$w[z(\zeta)] = w_1(\zeta) = u_1 + iv_1.$$

L'arco θ del contorno del cerchio può considerarsi come una funzione del corrispondente contorno s del poligono; determiniamo il valore di

$$\frac{dF_p[\theta(s)]}{ds}$$

per i valori s_p di s corrispondenti ai punti del lato p^{esimo} del poligono (gli estremi esclusi).

(*) Anche qui l'A. ha tralasciato lo studio delle singolarità che w può presentare sulla circonferenza. Conviene anche notare che, nell'analisi che segue, intervengono soltanto le derivate delle condizioni poste

$$A_p u(\theta) + B_p v(\theta) = F_p(\theta).$$

Per tornare, dunque, al problema iniziale è necessaria una discussione, che del resto non è molto difficile. [N.d.R.].

(10) Vedi DINI, *Sulla rappresentazione geografica di una superficie su di un'altra*. « Annali di Matematica », ser. II, t. 8.

Avremo:

$$\frac{d\mathrm{F}_p[\theta(s_p)]}{ds_p} = \mathrm{A}_p \frac{du[\theta(s_p)]}{ds_p} + \mathrm{B}_p \frac{dv[\theta(s_p)]}{ds_p}.$$

Ora:

$$\frac{du[\theta(s_p)]}{ds_p} = \frac{\partial u_1}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial s_p} + \frac{\partial u_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial s_p},$$

$$\frac{dv[\theta(s_p)]}{ds_p} = \frac{\partial v_1}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial s_p} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial s_p} = -\frac{\partial u_1}{\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial s_p} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi}\frac{\partial \eta}{\partial s_p},$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial s_p} = \frac{\pm \mathrm{B}_p}{\sqrt{\mathrm{A}_p^2 + \mathrm{B}_p^2}},$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial s_p} = \frac{\mp \mathrm{A}_p}{\sqrt{\mathrm{A}_p^2 + \mathrm{B}_p^2}},$$

onde

$$\frac{d\mathrm{F}_p[\theta(s_p)]}{ds_p} = \mp\sqrt{\mathrm{A}_p^2 + \mathrm{B}_p^2}\,\frac{\partial u_1}{\partial \eta}.$$

Si ha dunque che la parte reale della funzione di variabile complessa

$$i\frac{dw_1}{d\zeta} = w_2(\zeta)$$

al contorno del poligono (i vertici esclusi) è data da

$$\frac{\mp 1}{\sqrt{\mathrm{A}_p^2 + \mathrm{B}_p^2}}\frac{d\mathrm{F}_p[\theta(s_p)]}{ds_p} = \frac{\mp 1}{\sqrt{\mathrm{A}_p^2 + \mathrm{B}_p^2}}\frac{d\mathrm{F}(\theta)}{d\theta}\frac{d\theta(s_p)}{ds_p},$$

e nei vertici se diviene infinita è di ordine inferiore ad un numero minore di uno. Ne segue che la parte reale della funzione $w_2[\zeta(z)]$ nei punti interni all'arco (θ_p, θ_{p+1}) del contorno del circolo è:

$$\frac{\mp 1}{\sqrt{\mathrm{A}_p^2 + \mathrm{B}_p^2}}\frac{d\mathrm{F}_p(\theta)}{d\theta}\frac{1}{\left(\frac{ds_p}{d\theta}\right)}$$

e se in qualche punto del contorno diviene infinita, è di ordine inferiore ad un numero minore dell'unità, quindi per mezzo di note formule si può determinare in tutti i punti interni al circolo il valore di

$$w_2[\zeta(z)] = i\frac{dw}{dz}\frac{1}{\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)}$$

e per conseguenza mediante una quadratura quello di w.

X.

Non starò a sviluppare la soluzione del problema col metodo precedente, perchè ne darò ora un altro per mezzo del quale si risolve un problema più generale, cioè di determinare quali sono le funzioni

$$w(z) = u + iv$$

che nell'interno di un dato campo si mantengono sempre monodrome, finite e continue ed avvicinandosi ad un punto qualunque s del contorno (escluso al più un gruppo di punti di prima specie $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$) lungo la normale al contorno in quel punto, sono tali che

$$f(s)\, u + \varphi(s)\, v$$

tende con continuità verso un limite $\Theta(s)$. Le funzioni $f(s)$ e $\varphi(s)$ sono reali, finite e continue, colle derivate prime e seconde determinate, atte alla integrazione ed inferiori ad un numero finito in tutti i punti, escluso un numero finito di punti; ammetteremo inoltre che $f(s)$ e $\varphi(s)$ non siano mai zero contemporaneamente e se s_1 è un punto [o (s_1, s_1') è un tratto] in cui la $\varphi(s)$ si annulla; la $\varphi(s)$ non cangi segno coll'attraversare il punto s_1 [o il tratto (s_1, s_1')], supporremo che la $f(s)$ non sia mai negativa.

La funzione $\Theta(s)$ è reale, finita, ed escluso un gruppo di punti di prima specie con degli intervalli di cui la somma è arbitrariamente piccola, risulta in tutti gli intervalli rimanenti continua e con estremi oscillatori [11] inferiori ad un numero finito.

Fra i punti $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ esclusi in principio si intendano compresi quelli di singolarità delle funzioni $f(s)$, $\varphi(s)$ e $\Theta(s)$.

Premettiamo la dimostrazione dei seguenti teoremi [12]:

1° Se la funzione $F(\theta)$ definita fra 0 e 2π è finita e continua nell'intervallo $(\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon)$ $(\varepsilon < \pi/2)$ e di più nello stesso intervallo ha gli estremi oscillatorii sempre inferiori in valore assoluto ad un numero finito positivo M, mentre fra 0 e $\theta_1 - \varepsilon$, e $\theta_1 + \varepsilon$ e 2π è atta alla integrazione, anche ridotta ai suoi valori assoluti, il modulo della funzione di variabile complessa

$$w = u + iv$$

definita nei punti z del cerchio di raggio R dalla formula:

$$w(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\, \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z}\, d\theta$$

si mantiene sempre inferiore ad un numero finito in un intorno del punto (R, θ_1).

Infatti sappiamo che la u coll'avvicinarsi di z a $Re^{i\theta_1}$ tende con continuità verso $F(\theta_1)$; esiste dunque un intorno del punto (R, θ_1) in cui la u si mantiene in valore assoluto inferiore ad un certo numero finito; abbiamo poi ponendo $z = re^{i\alpha}$, $F(\alpha)$ essendo finito:

$$v(r, \alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\, \frac{Rr \operatorname{sen}(\alpha - \theta)}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\alpha - \theta)}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [F(\theta) - F(\alpha)]\, \frac{Rr \operatorname{sen}(\alpha - \theta)}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\alpha - \theta)}\, d\theta.$$

(11) Vedi DINI, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, p. 190 e sg.

(12) Alcuni di questi lemmi sono analoghi a teoremi dimostrati dal prof. DINI nella sua Memoria: *Sull'equazione* $\Delta^2 u = 0$. « Annali di Matematica », ser. II, t. 8.

Ora finchè la α è compresa nell'intervallo $\left(\theta_1 - \frac{\varepsilon}{2}, \theta_1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ si ha in valore assoluto:

$$\left[\int_0^{\theta_1-\varepsilon} + \int_{\theta_1+\varepsilon}^{2\pi}\right]\left\{[F(\theta) - F(\alpha)] \frac{Rr \operatorname{sen}(\alpha - \theta)}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\alpha - \theta)} d\theta\right\} < N$$

N essendo un numero positivo finito.

Abbiamo inoltre in valore assoluto per α sempre compreso fra gli stessi limiti

$$\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} [F(\theta) - F(\alpha)] \frac{Rr \operatorname{sen}(\alpha - \theta)\, d\theta}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\alpha - \theta)}$$

$$= \int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} \frac{F(\theta) - F(\alpha)}{\theta - \alpha} \frac{\theta - \alpha}{\operatorname{sen}(\theta - \alpha)} \operatorname{sen}(\theta - \alpha) \frac{Rr \operatorname{sen}(\alpha - \theta)}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\alpha - \theta)} d\theta$$

$$< M\frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\alpha - \theta) \frac{Rr \operatorname{sen}(\alpha - \theta)\, d\theta}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\alpha - \theta)} < M\frac{\pi}{2},$$

in cui M è un numero finito. Quindi in valore assoluto:

$$v < \frac{N}{\pi} + \frac{1}{2}M.$$

Ne segue, che il modulo di $w(z)$ in un intorno del punto $Re^{i\theta_1}$ si mantiene inferiore ad un numero finito, come volevasi dimostrare.

2° Se la funzione $F(\theta)$, definita fra 0 e 2π, nell'intervallo $(\theta_1 - \varepsilon, \theta_1)$ (gli estremi esclusi) è finita e continua ed ha gli estremi oscillatorî inferiori ad un numero finito e nell'intervallo $(\theta_1, \theta_1 + \varepsilon)$ gode delle stesse proprietà, mentre nel punto θ_1 ha una discontinuità di prima specie avendosi

$$F(\theta_1 + 0) - F(\theta_1 - 0) = k;$$

di più negli intervalli $(0, \theta_1 - \varepsilon)$ e $(\theta_1 + \varepsilon, 2\pi)$ è atta alla integrazione, anche ridotta ai suoi valori assoluti, la funzione della variabile complessa z

$$w = u + iv$$

definita dalla relazione

$$w = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta) \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta$$

per tutti i valori di z nell'interno del circolo di raggio R, nel punto $Re^{i\theta_1} = z_0$ diviene infinita come la funzione $\frac{ki}{\pi}\log(z - z_0)$, cioè:

$$-\frac{ki}{\pi}\log(z - z_0) + w(z) = w_1(z)$$

si mantiene finita in un intorno del punto (R, θ_1).

Esiste infatti un intorno del punto θ_1, tale che per θ compresa in questo intorno la parte reale di $w_1(Re^{i\theta})$ è sempre finita continua ed ha gli estremi oscillatorî sempre inferiori in valore assoluto ad un numero positivo finito.

3° Se la funzione $F(\theta)$ definita fra o e 2π è finita e continua nell'intervallo $(\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon)$ ed ammette in tutti i punti di questo intervallo una derivata $F'(\theta)$ determinata, inferiore in valore assoluto ad un numero finito e atta alla integrazione, e negli intervalli $(0, \theta_1 - \varepsilon)$ e $(\theta_1 + \varepsilon, 2\pi)$ la $F(\theta)$ è atta alla integrazione, anche ridotta ai valori assoluti, la funzione di variabile complessa:

$$w(z) = u + iv = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\, \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z}\, d\theta$$

definita per tutti i valori di z nell'interno del circolo di raggio R, coll'avvicinarsi di z lungo la normale al contorno al punto $Re^{i\theta_1}$ tende con continuità verso un valore determinato e finito. Se prendiamo per valori della $w(z)$ al contorno del circolo i limiti (quando esistono) verso cui tende la funzione $w(z)$ coll'avvicinarsi ai punti del contorno lungo la normale, avremo che nei punti $Re^{i\alpha}$ (pei quali $\theta_1 + \varepsilon > \alpha > \theta_1 - \varepsilon$) la $w(z)$ avrà valori determinati e finiti e sarà continua e monodroma.

Infatti sappiamo che la u coll'avvicinarsi della z al punto $Re^{i\theta_1}$ lungo la normale tende con continuità verso $F(\theta_1)$; dimostreremo che anche la v tende verso un limite determinato e finito.

Se $z = re^{i\theta_1}$ si ha:

$$v = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\, \frac{Rr \operatorname{sen}(\theta - \theta_1)}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \theta_1)}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\theta_1 - \varepsilon} + \int_{\theta_1 + \varepsilon}^{2\pi} + \int_{\theta_1 - \varepsilon}^{\theta_1 + \varepsilon}\right]\left(F(\theta)\, \frac{Rr \operatorname{sen}(\theta - \theta_1)}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \theta_1)}\, d\theta\right).$$

La funzione

$$\left(\int_0^{\theta_1 - \varepsilon} + \int_{\theta_1 + \varepsilon}^{2\pi}\right)\left(F(\theta)\, \frac{Rr \operatorname{sen}(\theta - \theta_1)}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \theta_1)}\, d\theta\right)$$

è finita e continua per tutti i valori di r da o ad R (R incluso). Abbiamo poi:

$$2\int_{\theta_1 - \varepsilon}^{\theta_1 + \varepsilon} F(\theta)\, \frac{Rr \operatorname{sen}(\theta - \theta_1)}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \theta_1)}\, d\theta$$

$$= [F(\theta_1 + \varepsilon) - F(\theta_1 - \varepsilon)] \log(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varepsilon)$$

$$- \int_{\theta_1 - \varepsilon}^{\theta_1 + \varepsilon} F'(\theta) \log[R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \theta_1)]\, d\theta.$$

Ma

$$\frac{d}{dr}\int_{\theta_1 - \varepsilon}^{\theta_1 + \varepsilon} F'(\theta) \log[R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \theta_1)]\, d\theta$$

$$= \frac{1}{r}\int_{\theta_1 - \varepsilon}^{\theta_1 + \varepsilon} F'(\theta)\, \frac{r^2 - R^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \theta_1)}\, d\theta + \frac{1}{r}\int_{\theta_1 - \varepsilon}^{\theta_1 + \varepsilon} F'(\theta)\, d\theta$$

quantità che si mantiene, per tutti i valori di r compresi fra un certo valore $r > 0$ e R, sempre inferiore ad un numero finito. Ne segue che

$$\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} F(\theta) \frac{Rr \operatorname{sen}(\theta-\theta_1)}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\theta_1)} d\theta$$

coll'avvicinarsi di r a R tende verso un limite determinato e finito e quindi anche v ha un limite pure determinato e finito per $r = R$. Si vede analogamente che esiste sempre un limite determinato e finito per $v(r, \alpha)$ quando r tende verso R e $\theta_1 + \varepsilon > \alpha > \theta_1 - \varepsilon$.

Se il limite superiore dei valori di $F'(\theta)$ nell'intervallo $(\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon)$ è M si ha in valore assoluto:

$$\lim_{r=R} \int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} F'(\theta) \log[R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)]\, d\theta$$

$$-\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} F'(\theta) \log[R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)]\, d\theta < 2\frac{M}{r}(\varepsilon+\pi)(R-r).$$

Ciò prova che la funzione v è continua nei punti (R, α) e quindi anche w è continua negli stessi punti.

4° Se oltre tutte le condizioni imposte nel teorema precedente alla $F(\theta)$, si pone che nell'intervallo $(\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon)$ essa possieda la derivata seconda determinata inferiore ad un numero finito ed atta alla integrazione, avremo che la $v(R, \alpha)$ per $\theta_1 + \varepsilon > \alpha > \theta_1 - \varepsilon$ ammetterà una derivata determinata, finita e continua rispetto ad α.

Abbiamo infatti in valore assoluto, se $\varepsilon' < \pi/2$,

$$\int_{\theta_1-\varepsilon'}^{\theta_1+\varepsilon'} \log\left[\frac{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)}{4R^2}\right] d\theta < \int_{\theta_1-\varepsilon'}^{\theta_1+\varepsilon'} \log\left[\operatorname{sen}^2\frac{\theta-\alpha}{2}\right] d\theta,$$

il che prova, che

$$\int_{\theta_1-\varepsilon'}^{\theta_1+\varepsilon'} \log[R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)]\, d\theta$$

può rendersi, qualunque sia r, inferiore ad un numero piccolo ad arbitrio impiccolendo sufficientemente ε'. Si ha dunque che:

$$\lim_{r=R} \int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} F'(\theta) \log[R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)]\, d\theta$$

$$= \int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} F'(\theta) \log\left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)\right] d\theta + [F(\theta_1+\varepsilon) - F(\theta_1-\varepsilon)] \log 4R^2;$$

e per conseguenza:

$$v(\mathrm{R}, \alpha) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\theta_1-\varepsilon} + \int_{\theta_1+\varepsilon}^{2\pi}\right]\left[\mathrm{F}(\theta)\cot\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)d\theta\right] - \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon}\mathrm{F}'(\theta)\log\left(\operatorname{sen}^2\frac{\theta-\alpha}{2}\right)d\theta$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left[\mathrm{F}(\theta_1+\varepsilon) - \mathrm{F}(\theta_1-\varepsilon)\right]\log\left(\operatorname{sen}^2\frac{\varepsilon}{2}\right)^{(13)}.$$

Ora:

$$\psi(\alpha) = \int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon}\mathrm{F}'(\theta)\log\left(\operatorname{sen}^2\frac{\theta-\alpha}{2}\right)d\theta$$

$$= \mathrm{F}'(\theta_1+\varepsilon)\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon}\log\left(\operatorname{sen}^2\frac{\theta-\alpha}{2}\right)d\theta - \int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon}\left[\mathrm{F}''(\theta)\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta}\log\left(\operatorname{sen}^2\frac{\theta-\alpha}{2}\right)d\theta\right]d\theta;$$

ma

$$\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta}\log\left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)\right]d\theta = \int_{\theta_1-\varepsilon-\alpha}^{\theta-\alpha}\log\left[\operatorname{sen}^2\frac{\lambda}{2}\right]d\lambda,$$

quindi:

$$\psi(\alpha) = \mathrm{F}'(\theta_1+\varepsilon)\int_{\theta_1-\varepsilon-\alpha}^{\theta_1+\varepsilon-\alpha}\log\operatorname{sen}^2\left(\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda - \int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon}\left[\mathrm{F}''(\theta)\int_{\theta_1-\varepsilon-\alpha}^{\theta-\alpha}\log\operatorname{sen}^2\left(\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda\right]d\theta,$$

il che dimostra che esiste la derivata di $\psi(\alpha)$ rispetto ad α ed è data dalla funzione continua:

$$\psi'(\alpha) = -\mathrm{F}'(\theta_1+\varepsilon)\log\left(\operatorname{sen}^2\frac{\theta_1+\varepsilon-\alpha}{2}\right) + \mathrm{F}'(\theta_1-\varepsilon)\log\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_1-\varepsilon-\alpha}{2}\right)$$

$$+\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon}\mathrm{F}''(\theta)\log\left(\operatorname{sen}^2\frac{\theta-\alpha}{2}\right)d\theta.$$

Ne segue che $v(\mathrm{R}, \alpha)$ possiede una derivata determinata finita e continua rispetto ad α per $\theta_1+\varepsilon > \alpha > \theta_1-\varepsilon$.

Evidentemente questi teoremi si estendono ad un gran numero di campi pei quali si ha la rappresentazione conforme nel cerchio.

XI.

Ciò premesso nel caso in cui si tratti di uno di tali campi, passiamo alla risoluzione del problema enunciato. Consideriamo la funzione:

$$\psi(s) = -\operatorname{arco\ tang}\frac{f(s)}{\varphi(s)},$$

quando si prenda per l'arco tang $\frac{f(s)}{\varphi(s)}$ il valore compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$, e

(13) Questa formula prova, indipendentemente dalla dimostrazione già fatta, la seconda parte del teorema precedente.

si assuma arco tang $\frac{A}{o} = \pm \frac{\pi}{2}$ in modo che la $\psi(s)$ risulti per tutti i valori di s finita e continua, esclusi al più un numero finito di punti corrispondenti ai punti singolari di $f(s)$ e $\varphi(s)$ in cui ha discontinuità di prima specie e fa salti inferiori in valore assoluto a π. Indicheremo tali punti con $s_1, s_2, \cdots, s_n$ e i salti che in essi hanno luogo con $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

La $\psi(s)$ viene a possedere le derivate prime e seconde determinate e inferiori ad un numero finito in tutti i punti, esclusi quelli di singolarità.

Sarà dunque possibile determinare la $w_1(z)$ finita, monodroma e continua in tutti i punti interni al campo in questione e in tutti i punti del contorno, esclusi i punti $s_1, s_2, \cdots, s_n$, e tale che al contorno la parte reale prenda con continuità i valori $\psi(s)$ nei punti in cui questa funzione è continua. Avremo inoltre che nei punti del contorno, esclusi $s_1, s_2, \cdots, s_n$, la parte immaginaria, considerata come funzione dell'arco del contorno, possederà la derivata prima determinata, finita e continua. Nei punti $s_1, s_2, \cdots, s_n$ corrispondenti ai valori $z_1, z_2, \cdots, z_n$ di z la $w_1(z)$ diventerà infinita logaritmicamente rispettivamente come

$$\pm \frac{ia_1}{\pi} \log(z - z_1), \qquad \pm \frac{ia_2}{\pi} \log(z - z_2), \cdots \qquad \pm \frac{ia_n}{\pi} \log(z - z_n).$$

Consideriamo la funzione

$$w_2(z) = u_2 + iv_2 = e^{iw_1(z)};$$

essa sarà finita, diversa da zero, continua e monodroma in tutti i punti interni al campo in questione, e sarà pure finita, continua, monodroma e diversa da zero in tutti i punti del contorno, esclusi i punti $s_1, s_2, \cdots, s_n$. Inoltre la u_2 e la v_2, nei punti del contorno (esclusi $s_1, s_2, \cdots, s_n$), considerate come funzioni dell'arco del contorno, possederanno la derivata prima finita e continua. In un intorno di uno qualunque dei punti singoli s_p avremo che $(z - z_p)^{\pm \frac{a_p}{\pi}} w_2(z)$ si manterrà sempre inferiore ad un numero finito in valore assoluto e discosto da zero più di una certa quantità.

Indichiamo con z_s i valori della z nei punti s del contorno, e con $u_2(s)$ e $v_2(s)$ i valori di u_2 e v_2 negli stessi punti; avremo, per tutti i valori di s diversi da $s_1, s_2, \cdots, s_n$,

$$\frac{\operatorname{mod} w_2(z_s)}{\sqrt{f^2(s) + \varphi^2(s)}} \varphi(s) = u_2(s)$$

$$\frac{\operatorname{mod} w_2(z_s)}{\sqrt{f^2(s) + \varphi^2(s)}} f(s) = -v_2(s)$$

in cui i radicali debbono intendersi presi collo stesso segno di $\varphi(s)$.

Ora poichè $w_2(z)$ è finita e continua in tutti i punti del contorno (esclusi i punti $s_1, s_2, \cdots, s_n$) sarà mod $w_2(z_s)$ una funzione finita e continua dell'arco del contorno esclusi i punti $s_1, s_2, \cdots, s_n$ nei quali, se diviene infinita, è di ordine non superiore in valore assoluto ad $\frac{a_1}{\pi}, \frac{a_2}{\pi}, \cdots, \frac{a_n}{\pi}$ che hanno tutti un valore inferiore all'unità.

Potrà dunque costruirsi una funzione $w_3(z)$ la quale sia monodroma, finita e continua in tutti i punti interni al campo e coll'avvicinarsi della z ad un punto qualunque s del contorno [esclusi i punti $s_1, s_2, \cdots, s_n$ e quelli di discontinuità della $\Theta(s)$] lungo la normale al contorno, la parte reale tenda con continuità verso

$$\frac{\operatorname{mod} w_2(z_s)}{\sqrt{f^2(s)+\varphi^2(s)}}\Theta(s)=\chi(s).$$

Nei punti $s_1, s_2, \cdots, s_n$, la parte reale della $w_3(z)$, se diviene infinita, sarà di ordine inferiore all'unità diminuita di un numero positivo. Inoltre poichè $\operatorname{mod} w_2(z_s)$ considerata come funzione di s possiede la derivata prima finita e continua in tutti i punti, esclusi $s_1, s_2, \cdots, s_n$, e $\Theta(s)$, escluso un gruppo di punti di prima specie, possiede estremi oscillatori inferiori ad un numero finito, la parte immaginaria di $w_3(z)$ si manterrà inferiore ad un certo numero A_s coll'avvicinarsi a ciascuno dei punti s del contorno, esclusi $s_1, s_2, \cdots, s_n$ e i punti di singolarità della $\Theta(s)$. Tutte le funzioni della forma

$$w_3(z)+Ci,$$

in cui C è una costante arbitraria reale, godono della stessa proprietà.

Consideriamo la funzione

$$u+iv=w(z)=\frac{w_3(z)+Ci}{w_2(z)};$$

essa sarà monodroma, finita e continua in tutti i punti interni al campo, e il suo modulo si manterrà inferiore ad un numero finito A'_s variabile con s, avvicinandosi al punto s del contorno [esclusi i punti $s_1, s_2, \cdots, s_n$ e quelli di singolarità della $\Theta(s)$]. Ora abbiamo:

$$R[w_3(z)]=uu_2-vv_2;$$

quindi avvicinandosi ad un punto qualunque s del contorno [esclusi i punti $s_1, s_2, \cdots, s_n$ e quelli di discontinuità della $\Theta(s)$] lungo la normale, avremo che

$$uu_2-vv_2$$

tenderà con continuità verso $\chi(s)$. Ma u_2 e v_2 tendono con continuità verso $u_2(s)$ e $v_2(s)$, quindi:

$$u[u_2-u_2(s)]-v[v_2-v_2(s)]$$

tenderà verso zero avvicinandosi al punto s del contorno lungo la normale. Ne segue che

$$uu_2(s)-vv_2(s)$$

tende con continuità verso $\chi(s)$, ossia

$$\varphi(s)u+f(s)v$$

tende con continuità verso $\Theta(s)$.

Ciò prova l'esistenza di un numero infinito di funzioni che verificano le condizioni imposte e dà il modo di trovare un numero infinito di esse. È poi evidente che quando esistono delle funzioni $w(z)$ che nei punti $s_1, s_2, \cdots, s_n$, divengono infinite di ordine inferiore a $(\pi - a_n)/\pi$ diminuito di un numero positivo e negli altri punti singolari divengono infinite di ordine inferiore ad 1 diminuito di un numero positivo, esse appartengono a quelle delle funzioni $w(z)$ che sono date dalla espressione trovata

$$\frac{w_3(z) + Ci}{w_2(z)}.$$

È facile quindi vedere quali altre condizioni vanno imposte alla w affinchè resulti completamente definita.

In ultimo è da osservare che se la $\Theta(s)$ oltre essere continua possiede la derivata prima atta alla integrazione ed inferiore ad un numero finito in tutti gli intervalli che si ottengono escludendo, con intervalli di cui la somma è arbitrariamente piccola, un gruppo di punti di prima specie, la $w(z)$ data da

$$\frac{w_3(z) + Ci}{w_2(z)}$$

in tutti i punti del contorno, esclusi $s_1, s_2, \cdots, s_n$ e i punti di singolarità della $\Theta(s)$, resulta finita e continua; e in questi punti, considerando la u e la v come funzioni di s, viene verificata la relazione (*):

$$u\varphi(s) + vf(s) = \Theta(s).$$

XII.

Facciamo l'applicazione al caso del cerchio di raggio 1.

Chiamiamo ω l'arco s del contorno, e poniamo $z = re^{i\alpha}$.

Avremo:

$$w_1(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\omega)\frac{e^{i\omega} + z}{e^{i\omega} - z}\,d\omega,$$

$$w_2(z) = e^{\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\omega)\frac{e^{i\omega}+z}{e^{i\omega}-z}d\omega},$$

$$\bmod w_2(z) = e^{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\omega)\frac{r\,\mathrm{sen}\,(\omega-\alpha)}{1+r^2-2r\cos(\omega-\alpha)}d\omega},$$

$$\chi(\alpha) = \Theta(\alpha)\frac{e^{\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}\psi(\omega)\frac{r\,\mathrm{sen}\,(\omega-\alpha)}{1+r^2-2r\cos(\omega-\alpha)}d\omega\right]_{r=1}}}{\sqrt{f^2(\alpha)+\varphi^2(\alpha)}},$$

(*) A questa stessa elegante analisi è pervenuto più tardi anche D. HILBERT (cfr. *Gött. Nach.*, 1905, p. 307) e spesso essa viene senz'altro attribuita a lui. Si potrà facilmente completare con lo studio delle singolarità di w al contorno. [N.d.R.].

e per conseguenza:

$$w(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\omega)\frac{e^{i\omega}+z}{e^{i\omega}-z}d\omega}\left[\int_0^{2\pi}\Theta(\beta)\frac{e^{\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{2\pi}\psi(\omega)\frac{r\,\mathrm{sen}\,(\omega-\beta)}{1+r^2-2r\cos(\omega-\beta)}d\omega\right]_{r=1}}}{\sqrt{f^2(\beta)+\varphi^2(\beta)}}\frac{z+e^{i\beta}}{z-e^{i\beta}}d\beta + Ci\right] \tag{4}$$

in cui C è una costante arbitraria reale.

La soluzione del problema già risoluto per altra via nel § IV, si ottiene subito da questa formula prendendo la funzione $\varphi(\omega)$ eguale a 1 fra 0 e θ ed eguale a 0 fra θ e 2π; la funzione $f(\alpha)$ eguale a 0 fra 0 e θ, eguale ad 1 fra θ e 2π. Si ottiene in questo caso che $\psi(\omega)$ è eguale a 0 fra 0 e θ ed è eguale a $-\pi/2$ fra θ e 2π, quindi:

$$w_1(z) = -i\log\sqrt{\frac{e^{i\theta}-z}{1-z}} + \frac{1}{4}(2\pi-\theta),$$

$$w_2(z) = i\sqrt{\frac{e^{i\theta}-z}{1-z}}\, e^{-i\frac{\theta}{4}},$$

$$w(z) = -\frac{i}{2\pi}\sqrt{\frac{1-z}{e^{i\theta}-z}}\, e^{i\frac{\theta}{4}}\left[\int_0^{\theta}\Theta(\beta)\sqrt{\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\theta-\beta}{2}\right)}{\mathrm{sen}\,\frac{\beta}{2}}}\frac{z+e^{i\beta}}{z-e^{i\beta}}d\beta\right.$$

$$\left.-\int_\theta^{2\pi}\Theta(\beta)\sqrt{\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\beta-\theta}{2}\right)}{\mathrm{sen}\,\frac{\beta}{2}}}\frac{z+e^{i\beta}}{z-e^{i\beta}}d\beta + Ci\right].$$

Prendendo

$$C = \int_0^{\theta}\Theta(\beta)\sqrt{\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\theta-\beta}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)}}\cot\frac{1}{2}(\theta-\beta)\,d\beta - \int_\theta^{2\pi}\Theta(\beta)\sqrt{\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\beta-\theta}{2}\right)}{\mathrm{sen}\,\frac{\beta}{2}}}\cot\frac{1}{2}(\beta-\theta)\,d\beta,$$

si trova:

$$w(z) = -\frac{1}{2\pi}\sqrt{(1-z)(e^{i\theta}-z)}\left[\int_0^{\theta}\Theta(\beta)\frac{e^{i\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}}{\sqrt{\mathrm{sen}\,\frac{\beta}{2}\;\mathrm{sen}\,\frac{\theta-\beta}{2}}}\frac{d\beta}{z-e^{i\beta}}\right.$$

$$\left.-\int_\theta^{2\pi}\Theta(\beta)\frac{e^{i\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}}{\sqrt{\mathrm{sen}\,\frac{\beta}{2}\;\mathrm{sen}\,\frac{\beta-\theta}{2}}}\frac{d\beta}{z-e^{i\beta}}\right].$$

Servendosi della formula (4) si potrebbe risolvere il noto problema, già risoluto con altri metodi, di determinare la rappresentazione conforme di un poligono in un circolo (14).

(14) Vedi CHRISTOFFEL, op. cit.; H. A. SCHWARZ, *Ueber einige Abbildungsaufgaben*. « Journal f. reine u. angew. Math. », vol. 70, 1869, pp. 105–120; DINI, *Sulla rappresentazione geografica di una superficie su di un'altra*. « Annali di Matematica », ser. II, t. 8.

XIII.

Il primo dei metodi esposti (§§ III e IX) per la risoluzione dei varî problemi trattati, non può evidentemente estendersi al caso in cui si vogliano considerare dei campi molteplicemente connessi, essendo fondato sulla rappresentazione conforme dei campi stessi entro un quarto di piano o un poligono semplicemente connesso. È molto facile vedere che il secondo metodo esposto (§ XI) può invece estendersi a un gran numero di casi in cui si hanno dei campi molteplicemente connessi. Però darò ora un altro metodo mediante il quale possono risolversi alcuni problemi analoghi a quelli già risoluti sulle funzioni di variabile complessa e sull'integrazione dell'equazione $\Delta^2 u = 0$, e che può applicarsi facilmente al caso di campi molteplicemente connessi.

La U e la φ siano funzioni di due variabili x e y finite, continue e aventi le derivate prime e seconde pure finite e continue in tutti i punti interni ad un campo C a due dimensioni e in tutti i punti del contorno; la U e la φ verifichino inoltre l'equazioni

$$\Delta^2 U = 0 \quad , \quad \Delta^2 \varphi = 0.$$

Se r è la distanza fra il punto (x_1, y_1) interno a C e il punto (x, y), p è la normale diretta verso l'interno del campo, si ha:

$$U(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi}\int_s \left[\frac{\partial U}{\partial p}(\log r + \varphi) - U\left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)\right] ds,$$

in cui l'integrale è esteso a tutto il contorno s del campo. Da questa formula si deduce, se $A_m \gtrless 0$,

$$\begin{aligned} U(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi}\sum\nolimits_m \frac{1}{A_m}\int_{s_m} \Big\{ & \left(A_m \frac{dU}{dp} + B_m U\right)(\log r + \varphi) \\ & - U\left[B_m(\log r + \varphi) + A_m\left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)\right]\Big\} ds \\ & + \frac{1}{2\pi}\sum\nolimits_n \int_{s'_n}\left[\frac{\partial U}{\partial p}(\log r + \varphi) - U\left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)\right] ds, \end{aligned}$$

quando si supponga diviso in una maniera qualunque il contorno totale s negli intervalli $s_1, s_2, \cdots, s_m, \cdots$; $s'_1, s'_2, \cdots, s'_n, \cdots$

Se dunque si può determinare la φ in modo che nella porzione s_m del contorno si abbia:

$$B_m(\log r + \varphi) + A_m\left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right) = 0$$

e nella porzione s'_n

$$\log r + \varphi = 0,$$

si avrà:

$$(5)\quad \begin{cases} U(x_1, y_1) = \dfrac{1}{2\pi} \sum_m \dfrac{1}{A_m} \displaystyle\int_{s_m} \left(A_m \dfrac{\partial U}{\partial p} + B_m U\right)(\log r + \varphi)\, ds \\ \qquad - \dfrac{1}{2\pi} \sum_n \displaystyle\int_{s'_n} U \left(\dfrac{\partial \log r}{\partial p} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial p}\right) ds, \end{cases}$$

e quindi basterà conoscere al contorno il valore di

$$A_m \frac{\partial U}{\partial p} + B_m U$$

negli intervalli s_m e il valore di U negli intervalli s'_n per poter determinare la funzione U in un punto qualunque (x_1, y_1) interno al campo C. La funzione φ viene così a calcolarsi analogamente a quella di GREEN e a quella del chiarissimo prof. DINI (15).

È facile estendere una proprietà reciproca della funzione di GREEN (16) alle funzioni che abbiamo ora considerato. Indichi infatti r' la distanza di un punto (x_2, y_2) interno a C dal punto (x, y); φ' sia una funzione che rispetto al punto (x_2, y_2) goda delle stesse proprietà della φ rispetto ad (x_1, y_1). Avremo:

$$\varphi'(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi} \sum_m \frac{1}{A_m} \int_{s_m} \left(A_m \frac{\partial \varphi'}{\partial p} + B_m \varphi'\right)(\log r + \varphi)\, ds$$

$$- \frac{1}{2\pi} \sum_n \int_{s'_n} \varphi' \left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right) ds,$$

$$\varphi(x_2, y_2) = \frac{1}{2\pi} \sum_m \frac{1}{A_m} \int_{s_m} \left(A_m \frac{\partial \varphi}{\partial p} + B_m \varphi\right)(\log r' + \varphi')\, ds$$

$$- \frac{1}{2\pi} \sum_n \int_{s'_n} \varphi \left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi'}{\partial p}\right) ds.$$

Ora osservando che si ha

$$\sum_m \frac{1}{A_m} \int_{s_m} \left(A_m \frac{\partial \varphi'}{\partial p} + B_m \varphi'\right) \varphi\, ds - \sum_n \int_{s'_n} \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial p}\, ds$$

$$- \sum_m \frac{1}{A_m} \int_{s_m} \left(A_m \frac{\partial \varphi}{\partial p} + B_m \varphi\right) \varphi'\, ds + \sum_n \int_{s'_n} \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial p}\, ds = 0,$$

nei tratti s_m si ha:

$$A_m \frac{\partial \varphi}{\partial p} + B_m \varphi = - A_m \frac{\partial \log r}{\partial p} B_m \log r,$$

$$A_m \frac{\partial \varphi'}{\partial p} + B_m \varphi' = - A_m \frac{\partial \log r'}{\partial p} - B_m \log r',$$

(15) Vedi DINI, *Su una funzione analoga a quella di Green*. Nota letta alla Reale Accademia dei Lincei il 6 febbraio 1876.

(16) Vedi NEUMANN, Memoria citata.

e nei tratti s'_n si ha

$$\varphi = -\log r \quad , \quad \varphi' = -\log r',$$

si ottiene

$$\varphi'(x_1, y_1) - \varphi(x_2, y_2) = -\frac{1}{2\pi}\int_s \left(\frac{\partial \log r'}{\partial p}\log r - \frac{\partial \log r}{\partial p}\log r'\right) ds.$$

Ma è facile dimostrare che

$$\int_s \left(\frac{\partial \log r'}{\partial p}\log r - \frac{\partial \log r}{\partial p}\log r'\right) ds = 0,$$

quindi

$$\varphi'(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2)\ ^{(17)}.$$

XIV.

Se $U + iV$ è una funzione della variabile complessa $x + iy$ monodroma finita e continua in tutti i punti del campo C (il contorno incluso), si ha, ricordando che:

$$\frac{\partial U}{\partial p} = -\frac{\partial V}{\partial s},$$

e integrando per parti:

$$\int_s \frac{\partial U}{\partial p}(\log r + \varphi)\, ds = \int_s V\left(\frac{\partial \log r}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s}\right) ds,$$

quindi:

$$U(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi}\int_s \left[V\left(\frac{\partial \log r}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s}\right) - U\left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)\right] ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_m \frac{1}{A_m}\int_{s_m} \Big\{ (A_m V + B_m U)\left(\frac{\partial \log r}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)$$

$$- U\left[B_m\left(\frac{\partial \log r}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s}\right) + A_m\left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)\right]\Big\} ds$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\sum_n \int_{s'_n} \left[V\left(\frac{\partial \log r}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s}\right) - U\left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)\right] ds.$$

Se è possibile determinare la φ in modo che negli intervalli s_m verifichi le relazioni

$$B_m\left(\frac{\partial \log r}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s}\right) + A_m\left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right) = 0$$

(17) La funzione del prof. DINI gode al pari di quella di GREEN e delle funzioni ora considerate di una proprietà reciproca. Essa può dedursi immediatamente da un teorema dimostrato nella mia Nota, *Sopra una legge di reciprocità nella distribuzione del calore e delle correnti galvaniche costanti*. «Nuovo Cimento», ser. III, t. 11. [In questo volume, V, p. 96].

e negli intervalli s'_n verifichi l'altra

$$\frac{\partial \log r}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0,$$

si trova:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} U(x_1, y_1) &= \frac{1}{2\pi} \sum_m \frac{1}{A_m} \int_{s_m} (A_m V + B_m U) \left(\frac{\partial \log r}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) ds \\ &- \frac{1}{2\pi} \sum_n \int_{s'_n} U \left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right) ds . \end{aligned} \right.$$

Ciò prova che basterà conoscere nei tratti s_m del contorno il valore di

$$A_m V + B_m U$$

e nei tratti s'_n il valore di U per poter determinare in tutti i punti interni al campo C il valore di U.

Quando si sia determinata la U mediante la (5) o la (6) si avrà subito la V per mezzo delle note relazioni

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{\partial V}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial U}{\partial y_1} = -\frac{\partial V}{\partial x_1}.$$

XV.

Applichiamo le formule trovate nel § XIII al caso in cui il campo C sia lo spazio compreso fra due cerchi concentrici di raggi R e R_1 $(R > R_1)$ e si voglia determinare la U conoscendone i valori sul cerchio di raggio R_1 e conoscendo i valori di $\partial U/\partial p$ sul cerchio di raggio R. Basterà perciò determinare una funzione φ monodroma, finita e continua insieme alle derivate prime e seconde nel campo C che verifichi l'equazione $\Delta^2 \varphi = 0$, che sul cerchio di raggio R_1 sia eguale a $-\log r_1$ e sul cerchio di raggio R sia tale che $\partial\varphi/\partial p = -\partial \log r_1/\partial p$, r_1 essendo la distanza da un punto interno (x_1, y_1) al punto sul contorno.

Prendiamo l'origine nel centro comune ai due cerchi e poniamo:

$$x = \rho \cos \theta \qquad y = \rho \operatorname{sen} \theta,$$

$$x_1 = \rho_1 \cos \theta_1 \qquad y_1 = \rho_1 \operatorname{sen} \theta_1 .$$

L'immagine del punto (x_1, y_1) nella trasformazione per raggi vettori reciproci rispetto al cerchio di raggio R_1, avrà per coordinate:

$$x_2 = \frac{R_1^2}{\rho_1} \cos \theta_1 \quad , \quad y_2 = \frac{R_1^2}{\rho_1} \operatorname{sen} \theta_1 .$$

Sia $\varphi_1(\rho, \theta)$ la funzione del prof. DINI, [18] corrispondente al punto (x_1, y_1) rispetto ai due cerchi concentrici di raggi R e R_1^2/R, e $\varphi_2(\rho, \theta)$ quella corrispondente al punto (x_2, y_2). Poniamo:

$$\psi(\rho, \theta) = \log r_1 - \log r_2 + \varphi_1(\rho, \theta) - \varphi_2(\rho, \theta),$$

in cui r_1 è la distanza dal punto (x_1, y_1) al punto (x, y) e r_2 è la distanza dal punto (x_2, y_2) al punto (x, y).

Avremo che:

$$\varphi_1(\rho, \theta) - \varphi_2(\rho, \theta)$$

sarà una funzione definita fra i due cerchi di raggi R e R_1^2/R, monodroma, finita e continua insieme alle derivate prime e seconde, e che verifica l'equazione $\Delta^2 = 0$; si avrà inoltre:

$$\left[\frac{\partial\psi(\rho, \theta)}{\partial\rho}\right]_{\varrho=R} = \left[\frac{\partial\psi(\rho, \theta)}{\partial\rho}\right]_{\varrho=\frac{R_1^2}{R}} = 0.$$

Consideriamo la funzione:

$$\psi(\rho, \theta) + \psi\left(\frac{R_1^2}{\rho}, \theta\right) = \Theta(\rho, \theta);$$

essa sarà finita, monodroma e continua insieme alle derivate prime e seconde e verificherà l'equazione $\Delta^2\,\Theta = 0$, in tutti i punti, al più esclusi (x_1, y_1) e (x_2, y_2); inoltre sarà:

$$\left[\frac{\partial\Theta(\rho, \theta)}{\partial\rho}\right]_{\varrho=R} = \left[\frac{\partial\Theta(\rho, \theta)}{\partial\rho}\right]_{\varrho=\frac{R_1^2}{R}} = 0.$$

Ora:

$$\log r_1(\rho, \theta) = \frac{1}{2}\log(\rho_1^2 + \rho^2 - 2\rho\rho_1\cos(\theta - \theta_1))$$

$$\log r_2(\rho, \theta) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{R_1^4}{\rho_1^2} + \rho^2 - 2\frac{R_1^2}{\rho_1}\rho\cos(\theta - \theta_1)\right)$$

quindi:

$$\log r_1(\rho, \theta) - \log r_2(\rho, \theta) + \log r_1\left(\frac{R_1^2}{\rho}, \theta\right) - \log r_2\left(\frac{R_1^2}{\rho}, \theta\right) = \log\frac{\rho_1^2}{R_1^2}.$$

Ciò prova che la $\Theta(\rho, \theta)$ si mantiene monodroma, finita e continua insieme alle derivate prime e seconde anche nei punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2); quindi:

$$\Theta(\rho, \theta) = C$$

in cui C è una costante. Ma

$$\psi(\rho, \theta)_{\varrho=R_1} = \psi\left(\frac{R_1^2}{\rho}, \theta\right)_{\varrho=R_1},$$

(18) Vedi l'ultima Memoria citata del prof. DINI.

quindi:

$$\psi(\rho, \theta)_{\rho=R_1} = \frac{1}{2} C.$$

Si ha dunque che la funzione

$$-\log r_2 + \varphi_1(\rho, \theta) - \varphi_2(\rho, \theta) - \frac{1}{2} C$$

gode delle proprietà della funzione $\varphi(\rho, \theta)$ cercata.

È da avvertire che si può riconoscere facilmente che la funzione φ è anche data da

$$\varphi(\rho, \theta) = \log r_3 + \varphi_1'(\rho, \theta) + \varphi_3'(\rho, \theta)$$

in cui r_3 è la distanza fra i punti (ρ, θ) e (ρ_3, θ_3), immagine ottenuta colla trasformazione per raggi vettori reciproci rispetto alla circonferenza di raggio R del punto (ρ_1, θ_1); φ_1' è la funzione di GREEN corrispondente al punto (ρ_1, θ_1) rispetto ai due cerchi di raggi R_1 e R_1^2/R; φ_3' è la funzione di GREEN rispetto agli stessi cerchi corrispondente al punto (ρ_3, θ_1).

Ora si ha:

$$\varphi_1(\rho, \theta) = -\frac{\left(\frac{R_1^2}{R}\right)}{R + \left(\frac{R_1^2}{R}\right)} \log \rho - \sum_1^\infty \frac{\rho^{2n}\left[\rho_1^{2n} + \left(\frac{R_1^2}{R}\right)^{2n}\right] + \left(\frac{R_1^2}{R}\right)^{2n}(\rho_1^{2n} + R^{2n})}{n\rho^n \rho_1^n \left[R^{2n} - \left(\frac{R_1^2}{R}\right)^{2n}\right]} \cos n(\theta - \theta_1) + C_1$$

$$\varphi_2(\rho, \theta) = -\frac{\left(\frac{R_1^2}{R}\right)}{R + \left(\frac{R_1^2}{R}\right)} \log \rho - \sum_1^\infty \frac{\rho^{2n}\left[\left(\frac{R_1^2}{\rho_1}\right)^{2n} + \left(\frac{R_1^2}{R}\right)^{2n}\right] + \left(\frac{R_1^2}{R}\right)^{2n}\left[\left(\frac{R_1^2}{\rho_1}\right)^{2n} + R^{2n}\right]}{n\rho^n \left(\frac{R_1^2}{\rho_1}\right)^n \left[R^{2n} - \left(\frac{R_1^2}{R}\right)^{2n}\right]} \cos n(\theta - \theta_1) + C_2$$

in cui C_1 e C_2 sono costanti. Si vede subito che

$$-\log \frac{\rho_1}{R_1} + C_1 - C_2 - \frac{1}{2} C = 0,$$

quindi:

$$\varphi(\rho, \theta) = -\frac{1}{2} \log\left[R_1^2 + \frac{\rho_1^2 \rho^2}{R_1^2} - 2\rho_1 \rho \cos(\theta - \theta_1)\right] + \sum_1^\infty \frac{(\rho^{2n} - R_1^{2n})(R_1^{2n} - \rho_1^{2n})}{n\rho^n \rho_1^n (R^{2n} + R_1^{2n})} \cos n(\theta - \theta_1).$$

Se ne deduce, poichè le serie che qui compariscono sono derivabili termine a termine,

$$U(\rho_1, \theta_1) = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial U_R}{\partial p} \left[\frac{1}{2} \log\left(\frac{R_1^2(\rho_1^2 + R^2 - 2\rho_1 R \cos(\theta - \theta_1))}{R_1^4 + R^2 \rho_1^2 - 2\rho_1 R R_1^2 \cos(\theta - \theta_1)}\right)\right.$$

$$\left. + \sum_1^\infty \frac{(R^{2n} - R_1^{2n})(R_1^{2n} - \rho_1^{2n})}{nR^n \rho_1^n (R^{2n} + R_1^{2n})} \cos n(\theta - \theta_1)\right] d\theta$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_{R_1} \left[\frac{R_1^2 - \rho_1^2}{R_1^2 + \rho_1^2 - 2R_1 \rho_1 \cos(\theta - \theta_1)} + 2\sum_1^\infty \frac{R_1^n}{\rho_1^n} \left(\frac{R_1^{2n} - \rho_1^{2n}}{R^{2n} + R_1^{2n}}\right) \cos n(\theta - \theta_1)\right] d\theta$$

essendo U_{R_1} i valori di U sulla circonferenza di raggio R_1 e $\partial U_R/\partial p$ i valori di $\partial U/\partial p$ sulla circonferenza di raggio R.

Applicando noti sviluppi in serie di FOURIER si trova:

$$U(\rho_1, \theta_1) = -\frac{R}{2\pi}\left(\log\frac{R\rho_1}{R_1}\right)\int_0^{2\pi}\frac{\partial U_R}{\partial p}\,d\theta$$

$$+\frac{R}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{R}{\rho_1}\right)^n\left(\frac{R_1^{2n}-\rho_1^{2n}}{R^{2n}+R_1^{2n}}\right)\int_0^{2\pi}\frac{\partial U_R}{\partial p}\cos n(\theta-\theta_1)\,d\theta$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U_{R_1}\,d\theta+\frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\left(\frac{R_1}{\rho_1}\right)^n\left(\frac{R^{2n}+\rho_1^{2n}}{R^{2n}+R_1^{2n}}\right)\int_0^{2\pi}U_{R_1}\cos n(\theta-\theta_1)\,d\theta\,.$$

Quindi ponendo $\rho_1 e^{i\theta_1} = z_1$ si ha:

$$U+iV=W(z_1)=\left[-\frac{R}{2\pi}\log\frac{R}{R_1}\int_0^{2\pi}\frac{\partial U_R}{\partial p}\,d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U_{R_1}\,d\theta\right]$$

$$-\frac{R}{2\pi}\log z_1\int_0^{2\pi}\frac{\partial U_R}{\partial p}\,d\theta+\frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{z_1^n}{(R^{2n}+R_1^{2n})}\left[R_1^n\int_0^{2\pi}U_{R_1}\,e^{-ni\theta}\,d\theta\right.$$

$$\left.-\frac{R^{n+1}}{n}\int_0^{2\pi}\frac{\partial U_R}{\partial p}e^{-ni\theta}\,d\theta\right]+\frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{1}{z_1^n}\,\frac{R^n R_1^n}{(R^{2n}+R_1^{2n})}\left[\frac{RR_1^n}{n}\int_0^{2\pi}\frac{\partial U_R}{\partial p}\,e^{ni\theta}\,d\theta\right.$$

$$\left.+R^n\int_0^{2\pi}U_{R_1}\,e^{ni\theta}\,d\theta\right]+Ci,$$

essendo C una costante arbitraria reale.

Ciò prova che è necessario che sia verificata la relazione

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial U_R}{\partial p}\,d\theta=0$$

affinchè la funzione di variabile complessa costruita resulti monodroma, come facilmente poteva riconoscersi *a priori*.

Dalle ultime due formule scritte si deduce subito, mediante una integrazione per parti, supponendo la $W(z_1)$ monodroma,

$$\left\{\begin{aligned} U&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U_{R_1}\,d\theta-\frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\left(\frac{R}{\rho_1}\right)^n\left(\frac{R_1^{2n}-\rho_1^{2n}}{R^{2n}+\rho_1^{2n}}\right)\int_0^{2\pi}V_R\,\mathrm{sen}\,n(\theta-\theta_1)\,d\theta\\ &+\frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\left(\frac{R_1}{\rho_1}\right)^n\left(\frac{R^{2n}+\rho_1^{2n}}{R^{2n}+R_1^{2n}}\right)\int_0^{2\pi}U_{R_1}\cos n(\theta-\theta_1)\,d\theta,\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}W(z_1) &= \frac{1}{2\pi}\int_2^{2\pi} U_{R_1}\,d\theta + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_R\,d\theta \\ &+ \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{z_1^n}{R^{2n}+R_1^{2n}}\left[R_1^n\int_0^{2\pi} U_{R_1} e^{-ni\theta}\,d\theta + i\,R^n\int_0^{2\pi} V_R\, e^{-ni\theta}\,d\theta\right] \\ &+ \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{1}{z_1^n}\frac{R^n R_1^n}{R^{2n}+R_1^{2n}}\left[R^n\int_0^{2\pi} U_{R_1} e^{ni\theta}\,d\theta + iR_1^n\int_0^{2\pi} V_R\, e^{ni\theta}\,d\theta\right],\end{aligned}\right.$$

essendo V_R i valori di V nei punti della circonferenza di raggio R.

L'ultima formula si può anche porre sotto la forma

$$W(z_1) = \frac{1}{\pi i}\sum_0^{\infty}\frac{z_1^n}{R^{2n}+R_1^{2n}}\left[R_1^{2n}\int_{s_1} U\frac{dz}{z^{n+1}} + iR^{2n}\int_s V\frac{dz}{z^{n+1}}\right]$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\sum_1^{\infty}\frac{z_1^{-n}}{R^{2n}+R_1^{2n}}\left[R^{2n}\int_{s_1} Uz^{n-1}\,dz + iR_1^{2n}\int_s Vz^{n-1}\,dz\right]$$

in cui s e s_1 sono rispettivamente le due circonferenze di raggi R e R_1.

Quando $A + B \gtrless 0$ si deduce subito da questa formula, l'altra

$$W(z_1) = \frac{1}{\pi i(A+B)}\sum_0^{\infty}\frac{z_1^n}{R^{2n}+R_1^{2n}}\left[R_1^{2n}\int_{s_1}(AU + BiV)\frac{dz}{z^{n+1}}\right.$$

$$\left. + R^{2n}\int_s (BU + AiV)\frac{dz}{z^{n+1}}\right]$$

$$+ \frac{1}{\pi i(A+B)}\sum_1^{\infty}\frac{z_1^{-n}}{R^{2n}+R_1^{2n}}\left[R^{2n}\int_{s_1}(AU + BiV)\,z^{n-1}\,dz\right.$$

$$\left. + R_1^{2n}\int_s (BU + AiV)\,z^{n-1}\,dz\right],$$

la quale diviene la nota formula di LAURENT quando si prende

$$A = B = 1.$$

Si avrebbero formule analoghe a quelle già trovate nel caso in cui si conoscessero i valori della U nei punti della circonferenza di raggio R e si conoscessero nei punti della circonferenza di raggio R_1 i valori di $\partial U/\partial p$.

È facile estendere il metodo adoperato per la determinazione della funzione φ, al caso in cui si ha un campo doppiamente connesso, di cui una sola delle linee chiuse costituenti il contorno è un cerchio.

XVI.

Dalle formule ottenute si passa con facilità ad altre che risolvono i problemi analoghi a quelli ora risoluti, nel caso di molti campi doppiamente connessi di cui è nota la rappresentazione conforme entro lo spazio compreso fra due cerchi concentrici. Per esempio, poichè si può, mediante una trasformazione per raggi vettori reciproci, rappresentare conformemente lo spazio compreso fra due cerchi non concentrici e che non si tagliano né si toccano in quello compreso fra due cerchi concentrici, potranno con facilità generalizzarsi le formule trovate nel caso di un campo compreso fra due cerchi situati comunque, purchè non si taglino né si tocchino.

Quindi in molti casi potranno dirsi risoluti i problemi analoghi ai precedenti, se il campo dato è compreso fra due linee di livello [19], perchè si conosce la rappresentazione conforme di questi campi, in molti casi, nello spazio compreso fra due cerchi concentrici.

Quando si tratta, per esempio, del campo compreso fra due ellissi omofocali per i quali la distanza focale è 2δ e, essendo α e β i parametri isometrici di un doppio sistema di ellissi ed iperbole omofocali, α_0 e α_1 sono i parametri corrispondenti alle due ellissi contorno, si ha che la funzione

$$z = \frac{z_1 + \sqrt{z_1^2 - \delta^2}}{\delta},$$

in cui il radicale va preso positivo per z_1 positivo e maggiore di δ, ci dà la rappresentazione conforme dello spazio compreso fra le due ellissi situato sul piano delle z_1, nello spazio compreso fra due cerchi aventi il centro comune nell'origine del piano delle z, di raggi e^{α_0}, e e^{α_1} [20].

Quindi se si conosce, di una funzione di variabile complessa $W(z_1)$ definita come monodroma, finita e continua in tutti i punti del campo (il contorno incluso) compreso fra le due ellissi α_0 e α_1, il valore della parte reale U nei punti dell'ellisse α_0, e il valore della parte immaginaria V nei punti dell'ellisse α_1, si potrà determinare completamente la funzione $W(z)$ in tutti i punti interni al campo e si avrà:

$$W(z_1) = \frac{1}{\pi i} \sum_0^\infty \frac{\left(z_1 + \sqrt{z_1^2 - \delta^2}\right)^n}{\left(e^{2n\alpha_0} + e^{2n\alpha_1}\right)} \left[e^{2n\alpha_0} \int_{\alpha_0} U \frac{dz_1}{\sqrt{z_1^2 - \delta^2}\left(z_1 + \sqrt{z_1^2 - \delta^2}\right)^n} \right.$$

$$\left. + ie^{2n\alpha_1} \int_{\alpha_1} V \frac{dz_1}{\sqrt{z_1^2 - \delta^2}\left(z_1 + \sqrt{z_1^2 - \delta^2}\right)^n} \right] +$$

(19) Vedi NEUMANN, Memoria citata.

(20) Vedi DINI, *Sopra le funzioni di una variabile complessa*. « Annali di Matematica », ser. II, t. 4.

$$+\frac{1}{\pi i}\sum_{1}^{\infty}\frac{\left(z_1+\sqrt{z_1^2-\delta^2}\right)^{-n}}{\left(e^{2n\alpha_0}+e^{2n\alpha_1}\right)}\left[e^{2n\alpha_1}\int_{\alpha_0}\mathrm{U}\left(z_1+\sqrt{z_1^2-\delta^2}\right)^n\frac{dz_1}{\sqrt{z_1^2-\delta^2}}\right.$$

$$\left.+\,ie^{2n\alpha_0}\int_{\alpha_1}\mathrm{V}\left(z_1+\sqrt{z_1^2-\delta^2}\right)^n\frac{dz_1}{\sqrt{z_1^2-\delta^2}}\right],$$

z_1 essendo un punto interno al campo compreso fra le due ellissi omofocali α_0 e α_1.

XVII.

Nel caso in cui si tratti di un campo compreso fra due cerchi concentrici, accenneremo all'applicazione di un metodo (21) per mezzo del quale si possono risolvere direttamente alcuni problemi simili a quelli già risoluti, e determinare alcune delle funzioni analoghe a quelle di GREEN e del chiarissimo prof. DINI.

Supponiamo che la funzione

$$w(z)=u+iv$$

definita in tutti i punti interni al campo compreso fra i due cerchi di raggi R′ e R aventi il centro all'origine, sia monodroma, finita e continua. Per un noto teorema di LAURENT, avremo, se $\rho e^{i\omega}$ è un punto compreso fra i due cerchi:

$$u=a_0+\sum_{1}^{\infty}\rho^n(a_n\cos n\omega+b_n\operatorname{sen} n\omega)+\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\rho^n}(\alpha_n\cos n\omega+\beta_n\operatorname{sen} n\omega)$$

$$v=b_0+\sum_{1}^{\infty}\rho^n(a_n\operatorname{sen} n\omega-b_n\cos n\omega)+\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\rho^n}(-\alpha_n\operatorname{sen} n\omega+\beta_n\cos n\omega),$$

$$(m=1,2,\cdots,q_1)\left\{\begin{aligned}\frac{\partial^m u}{\partial\rho^m}&=\sum_{1}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-m+1)\,\rho^{n-m}(a_n\cos n\omega+b_n\operatorname{sen} n\omega)\\&+\sum_{1}^{\infty}n(n+1)\cdots(n+m-1)\,\frac{(-1)^m}{\rho^{n+m}}(\alpha_n\cos n\omega+\beta_n\operatorname{sen} n\omega),\end{aligned}\right.$$

$$(m=1,2,\cdots,q_2)\left\{\begin{aligned}\frac{\partial^m v}{\partial\rho^m}&=\sum_{1}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-m+1)\,\rho^{n-m}(a_n\operatorname{sen} n\omega-b_n\cos n\omega)\\&+\sum_{1}^{\infty}n(n+1)\cdots(n+m-1)\,\frac{(-1)^m}{\rho^{n+m}}(-\alpha_n\operatorname{sen} n\omega+\beta_n\cos n\omega),\end{aligned}\right.$$

in cui a_n, b_n, α_n, β_n sono costanti reali.

(21) Vedi NEUMANN, *Das Dirichlet'sche Princip*..., e DINI, *Sopra una funzione analoga a quella di Green*.

Supponiamo che tutte le serie scritte si mantengano convergenti in egual grado in tutti i punti dello spazio compreso fra i due cerchi (il contorno incluso), e supponiamo di conoscere su ciascuna delle due circonferenze i valori di una espressione lineare in u, v e nelle derivate successive di queste quantità rispetto alla normale, cioè si abbia al contorno del circolo di raggio R,

$$M_0 u + N_0 v + \sum_1^{q_1} {}_m M_m \frac{\partial^m u}{\partial \rho^m} + \sum_1^{q_2} {}_m N_m \frac{\partial^m v}{\partial \rho^m} = f(\omega),$$

e al contorno del circolo di raggio R′,

$$M'_0 u + N'_0 v + \sum_1^{q_1} {}_m M'_m \frac{\partial^m u}{\partial \rho^m} + \sum_1^{q_2} {}_m N'_m \frac{\partial^m v}{\partial \rho^m} = \varphi(\omega)$$

in cui M_m, N_m, M'_m, N'_m sono costanti note, e $f(\omega)$ e $\varphi(\omega)$ sono funzioni note.

Dovremo avere per le ipotesi fatte:

$$\left\{\begin{aligned} M_0 a_0 + N_0 b_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega)\, d\omega \\ M'_0 a_0 + N'_0 b_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\omega)\, d\omega \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} l_n a_n + \lambda_n \alpha_n - m_n b_n + \mu_n \beta_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega) \cos n\omega\, d\omega \\ m_n a_n - \mu_n \alpha_n + l_n b_n + \lambda_n \beta_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega) \operatorname{sen} n\omega\, d\omega \\ l'_n a_n + \lambda'_n \alpha_n - m'_n b_n + \mu'_n \beta_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\omega) \cos n\omega\, d\omega \\ m'_n a_n - \mu'_n \alpha_n + l'_n b_n + \lambda'_n \beta_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\omega) \operatorname{sen} n\omega\, d\omega \end{aligned}\right.$$

in cui:

$$l_n = M_0 R^n + \sum_1^{q_1} {}_m M_m n(n-1)\cdots(n-m+1) R^{n-m}$$

$$\lambda_n = \frac{M_0}{R^n} + \sum_1^{q_1} {}_m M_m n(n+1)\cdots(n+m-1) \frac{(-1)^m}{R^{n+m}}$$

$$m_n = N_0 R^n + \sum_1^{q_2} {}_m N_m n(n-1)\cdots(n-m+1) R^{n-m}$$

$$\mu_n = \frac{N_o}{R^n} + \sum_1^{q_2} N_m\, n\,(n+1)\cdots(n+m-1)\,\frac{(-1)^m}{R^{n+m}}$$

$$l'_n = M'_o\, R'^n + \sum_1^{q_1} M'_m\, n\,(n-1)\cdots(n-m+1)\, R'^{n-m}$$

$$\lambda'_n = \frac{M'_o}{R'^n} + \sum_1^{q_1} M'_m\, n\,(n+1)\cdots(n+m-1)\,\frac{(-1)^m}{R'^{n+m}}$$

$$m'_n = N'_o\, R'^n + \sum_1^{q_2} N'_m\, n\,(n-1)\cdots(n-m+1)\, R'^{n-m}$$

$$\mu'_n = \frac{N'_o}{R'^n} + \sum_1^{q_2} N'_m\, n\,(n+1)\cdots(n+m-1)\,\frac{(-1)^m}{R'^{n+m}}\,.$$

Si ha dunque il modo, conoscendo la $f(\omega)$ e la $\varphi(\omega)$, di determinare le a_o, b_o, a_n, α_n, b_n, β_n e quindi di conoscere le espressioni in serie di u e v purchè queste serie resultino convergenti in egual grado anche nei punti del contorno, il determinante

$$\begin{vmatrix} l_n\,, & \lambda_n\,, & -m_n\,, & \mu_n \\ m_n\,, & -\mu_n\,, & l_n\,, & \lambda_n \\ l'_n\,, & \lambda'_n\,, & -m'_n\,, & \mu'_n \\ m'_n\,, & -\mu'_n\,, & l'_n\,, & \lambda'_n \end{vmatrix}$$

si mantenga diverso da zero per tutti i valori di n, e inoltre sia

$$\begin{vmatrix} M_o\,, & N_o \\ M'_o\,, & N'_o \end{vmatrix}$$

pure diverso da zero.

Quando sono verificate queste condizioni si ha che la soluzione del problema è unica.

Allorchè si avesse che il primo determinante scritto, per qualche valore di n, oppure il secondo determinante, si annullasse, allora evidentemente si avrebbe che il problema dato ammetterebbe un numero infinito di soluzioni oppure non ne ammetterebbe alcuna.

XVIII.

Se la u è una funzione monodroma, finita e continua, avente le derivate prime e seconde determinate, finite e continue nell'interno ed al contorno di un campo compreso fra due cerchi concentrici di raggi R e R′, di più la u verifica l'equazione $\Delta^2 u = 0$, si ha:

$$u = a + a' \log\rho + \sum_1^{\infty} \rho^n\,(a_n \cos n\omega + b_n \operatorname{sen} n\omega) + \sum_1^{\infty} \frac{1}{\rho_n}\,(\alpha_n \cos n\omega + \beta_n \operatorname{sen} n\omega)$$

$$
(m=1,2,\cdots,q)\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^m u}{\partial\rho^m} &= \Pi\,(m-1)\,\frac{(-1)^{m-1}a'}{\rho^m}\\
&+\sum_1^\infty n\,(n-1)\cdots(n-m+1)\,\rho^{n-m}\,(a_n\cos n\omega+b_n\,\mathrm{sen}\,n\omega)\\
&+\sum_1^\infty n\,(n+1)\cdots(n+m-1)\,\frac{(-1)^m}{\rho^{n+m}}\,(\alpha_n\cos n\omega+\beta_n\,\mathrm{sen}\,n\omega),
\end{aligned}\right.
$$

$\rho e^{i\omega}$ essendo un punto compreso fra i due cerchi.

Supponendo che queste serie siano convergenti in egual grado in tutto lo spazio compreso fra i due cerchi (il contorno incluso) e posto al contorno del circolo di raggio R

$$
\mathrm{M}_0\,u+\sum_1^q \mathrm{M}_m\,\frac{\partial^n u}{\partial\rho^m}=f(\omega)
$$

e al contorno del circolo di raggio R':

$$
\mathrm{M}'_0\,u+\sum_1^q \mathrm{M}'_m\,\frac{\partial^m u}{\partial\rho^m}=\varphi(\omega),
$$

si trovano le equazioni:

$$
\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{M}_0\,a+\left(\mathrm{M}_0\log\mathrm{R}+\sum_1^q \Pi\,(m-1)\,\frac{(-1)^{m-1}}{\mathrm{R}^m}\,\mathrm{M}_m\right)a'=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\omega)\,d\omega\\
&\mathrm{M}'_0\,a+\left(\mathrm{M}'_0\log\mathrm{R}'+\sum_1^q \Pi\,(m-1)\,\frac{(-1)^{m-1}}{\mathrm{R}'^m}\,\mathrm{M}'_m\right)a'=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\omega)\,d\omega
\end{aligned}\right.
$$

$$
\left|\begin{aligned}
&l_n\,a_n+\lambda_n\,\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\omega)\cos n\omega\,d\omega\\
&l'_n\,a_n+\lambda'_n\,\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\omega)\cos n\omega\,d\omega\\
&l_n\,b_n+\lambda_n\,\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\omega)\,\mathrm{sen}\,n\omega\,d\omega\\
&l'_n\,b_n+\lambda'_n\,\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\omega)\,\mathrm{sen}\,n\omega\,d\omega
\end{aligned}\right.
$$

in cui

$$
l_n=\mathrm{M}_0\,\mathrm{R}^n+\sum_1^q n\,(n-1)\cdots(n-m+1)\,\mathrm{R}^{n-m}\,\mathrm{M}_m
$$

$$
\lambda_n=\frac{\mathrm{M}_0}{\mathrm{R}^n}+\sum_1^q n\,(n+1)\cdots(n+m-1)\,\frac{(-1)^m}{\mathrm{R}^{n+m}}\,\mathrm{M}_m
$$

$$l'_n = \mathrm{M}'_0\,\mathrm{R}'^n + \sum_1^q n\,(n-1)\cdots(n-m+1)\,\mathrm{R}'^{n-m}\,\mathrm{M}'_m$$

$$\lambda'_n = \frac{\mathrm{M}'_0}{\mathrm{R}'^n} + \sum_1^q n\,(n+1)\cdots(n+m-1)\,\frac{(-1)^m}{\mathrm{R}'^{n+m}}\mathrm{M}'_m .$$

Per conseguenza quando i determinati

$$\begin{vmatrix} \mathrm{M}_0\,, & \mathrm{M}_0 \log \mathrm{R} + \sum_1^q \Pi\,(m-1)\,\frac{(-1)^{m-1}}{\mathrm{R}^m}\mathrm{M}_m \\ \mathrm{M}'_0\,, & \mathrm{M}'_0 \log \mathrm{R}' + \sum_1^q \Pi\,(m-1)\,\frac{(-1)^{m-1}}{\mathrm{R}'^m}\mathrm{M}'_m \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} l_n\,, & \lambda_n \\ l'_n\,, & \lambda'_n \end{vmatrix}$$

sono sempre differenti da zero si può determinare in un modo solo la u, purchè la serie che risulta sia convergente in egual grado nel campo compreso fra i due cerchi (il contorno incluso). Affinchè la u risulti la parte reale di una funzione monodroma bisogna evidentemente che si abbia:

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{f(\omega)}{\mathrm{M}_0} - \frac{\varphi(\omega)}{\mathrm{M}'_0} \right) d\omega = 0.$$

XIX.

I metodi indicati nei due paragrafi precedenti rendono necessario di verificare la convergenza in egual grado di serie i cui termini sono funzioni di due variabili e che verificano l'equazione $\Delta^2 = 0$. In molti casi perciò potrà riescire utile applicare il seguente teorema:

Se $f_1(s), f_2(s), \cdots, f_n(s), \cdots$ sono funzioni dell'arco s del contorno di un campo C (connesso o no), se la serie

$$\sum_1^\infty{}_n\, f_n(s)$$

è convergente in egual grado per tutti i valori di s, e se è possibile determinare le funzioni $u_1, u_2, \cdots, u_n, \ldots$ definite in tutto il campo C finite, continue (il contorno incluso), che assumono al contorno rispettivamente i valori $f_1(s), f_2(s), \cdots, f_n(s), \cdots$ e che soddisfano l'equazione $\Delta^2 = 0$, saranno verificate le seguenti proprietà:

1° la serie

$$\sum_1^\infty{}_n\, u_n = \mathrm{V}$$

sarà convergente in egual grado entro tutto il campo C;

2° si potranno eseguire le derivazioni successive per serie della funzione V in tutti i punti interni a C ed in direzioni qualunque;

3° la funzione V verificherà l'equazione $\Delta^2 V = 0$ in tutti i punti interni al campo C.

Infatti dovranno esistere due valori s_1 e s_2 di s per cui si ha

$$\sum_p^m {}_n f_n(s_1) < \sum_p^m {}_n u_n(x\,,y) < \sum_p^m {}_n f_n(s_2),$$

qualunque sia il punto $(x\,,y)$ interno a C. Ma si può prendere p così grande che si abbia qualunque sia s e qualunque sia $m > p$, in valore assoluto

$$\sum_p^m {}_n f_n(s) < \sigma$$

in cui σ è un numero piccolo ad arbitrio. Avremo quindi in valore assoluto:

$$\sum_p^m {}_n u_n(x\,,y) < \sigma,$$

per tutti i punti $(x\,,y)$ interni a C. Ciò prova che la serie

$$\sum_1^\infty u_n = V$$

è convergente in egual grado in tutto il campo C.

Preso a considerare un cerchio qualunque c di raggio R, situato tutto internamente a C, e chiamando $u_{n,c}$ e V_c i valori di u_n e V al contorno di esso avremo in un punto qualunque interno ad esso di coordinate polari r e α riferite al centro del cerchio preso come origine:

$$u_n(r\,,\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_{n,c}\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2\,Rr\cos(\theta - \alpha)}\,d\theta,$$

quindi per quanto è stato ora dimostrato:

$$V(r\,,\alpha) = \sum_1^\infty {}_n u_n(r\,,\alpha) = \frac{1}{2\pi}\sum_1^\infty {}_n \int_0^{2\pi} u_{n,c}\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2\,Rr\cos(\theta - \alpha)}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_c\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2\,Rr\cos(\theta - \alpha)}\,d\theta.$$

Ne segue, indicando con $\left(\frac{\partial^n}{\partial a_1, \partial a_2, \cdots, \partial a_n}\right)_{r,\alpha}$ la derivata di una funzione nel punto $(r\,,\alpha)$ di C presa rispetto alle direzioni $a_1\,, a_2\,, \cdots, a_n$,

$$\left(\frac{\partial^n V}{\partial a_1\,\partial a_2, \cdots, \partial a_n}\right)_{r,\alpha} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_c\,\frac{\partial^n}{\partial a_1 \partial a_2, \cdots, \partial a_n}\left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2\,Rr\cos(\theta - \alpha)}\right)d\theta$$

$$= \sum_1^\infty {}_n \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_{n,c}\,\frac{\partial^n}{\partial a_1\,\partial a_2, \cdots, \partial a_n}\left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2\,Rr\cos(\theta - \alpha)}\right)d\theta = \sum_1^\infty {}_n \left(\frac{\partial^n u_n}{\partial a_1 \partial a_2, \cdots, \partial a_n}\right)_{r,a}.$$

Ciò evidentemente dimostra la seconda e la terza parte del teorema enunciato.

XX.

Può applicarsi il metodo del § XVIII per determinare la funzione φ analoga a quella di Green, volendo adoperare la formula (5) (vedi § XIII) nel caso in cui il campo nel quale è definita la U sia quello compreso fra i due cerchi concentrici di raggi R e R′ (R > R′) e sia s_1 il contorno del circolo di raggio R, s_2 il contorno del circolo di raggio R′.

Ponendo l'origine delle coordinate nel centro comune dei due cerchi, prendendo le coordinate polari ρ e θ, e ricordando che si ha, se r rappresenta la distanza fra i punti (ρ, θ) e (ρ_1, θ_1):

$$\log r = \log \rho - \sum_1^\infty \frac{\rho_1^n}{n\rho^n} \cos n(\theta - \theta_1)$$

per $\rho > \rho_1$, e

$$\log r = \log \rho_1 - \sum_1^\infty \frac{\rho^n}{n\rho_1^n} \cos n(\theta - \theta_1)$$

per $\rho < \rho_1$, si trova che la φ viene data dalla serie,

$$a + a' \log \rho + \sum_1^\infty a_n \frac{\rho^n}{R^n} \cos n(\theta - \theta_1) + \sum_1^\infty \alpha_n \frac{R'^n}{\rho^n} \cos n(\theta - \theta_1);$$

i cui coefficienti vengono determinati dalle relazioni

$$\left\{\begin{aligned} & B_1 a + \left(B_1 \log R - \frac{A_1}{R}\right) a' = B_1 \log R - \frac{A_1}{R} \\ & B_2 a + \left(B_2 \log R' + \frac{A_2}{R'}\right) a' = B_2 \log \rho_1 \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} & \left(\frac{B_1}{n} - \frac{A_1}{R}\right) a_n + \left(\frac{B_1}{n} + \frac{A_1}{R}\right) \frac{R'^n}{R^n} \alpha_n = \frac{\rho_1^n}{nR^n} \left(\frac{B_1}{n} + \frac{A_1}{R}\right), \\ & \left(\frac{B_2}{n} + \frac{A_2}{R'}\right) \frac{R'^n}{R^n} a_n + \left(\frac{B_2}{n} - \frac{A_2}{R'}\right) \alpha_n = \frac{R'^n}{n\rho_1^n} \left(\frac{B_2}{n} + \frac{A_2}{R'}\right) \end{aligned}\right.$$

in cui le B e le A hanno lo stesso significato che venne loro attribuito nel § XIII, quando i determinanti

$$B_1 \left(B_2 \log R' + \frac{A_2}{R'}\right) - B_2 \left(B_1 \log R - \frac{A_1}{R}\right),$$

$$\left(\frac{B_1}{n} - \frac{A_1}{R}\right)\left(\frac{B_2}{n} - \frac{A_2}{R'}\right) - \left(\frac{B_1}{n} + \frac{A_1}{R}\right)\left(\frac{B_2}{n} + \frac{A_2}{R'}\right) \frac{R'^{2n}}{R^{2n}}$$

si mantengono sempre diversi da zero.

Infatti in questo caso si vede che la serie che dà il valore di φ risulta convergente in egual grado anche per ρ eguale a R e a R′.

Pisa, 15 gennaio 1882.