V.

SOPRA UNA LEGGE DI RECIPROCITÀ NELLA DISTRIBUZIONE DELLE TEMPERATURE E DELLE CORRENTI GALVANICHE COSTANTI IN UN CORPO QUALUNQUE (*)

« Nuovo Cimento », ser. 3, vol. XI, 1882; pp. 188–192.

Per il teorema di GREEN generalizzato dai signori THOMSON e TAIT [1], si ha, supponendo ψ_1, ψ_2 e α funzioni di x, y, z monodrome finite e continue insieme alle loro derivate prime e seconde, in un campo S a tre dimensioni limitato da un contorno σ formato da una o più superficie

$$\iiint_S \alpha^2\left(\frac{d\psi_1}{dx}\,\frac{d\psi_2}{dx}+\frac{d\psi_1}{dy}\,\frac{d\psi_2}{dy}+\frac{d\psi_1}{dz}\,\frac{d\psi_2}{dz}\right)dS$$

$$=-\iint_\sigma \alpha^2\,\psi_1\,\frac{d\psi_2}{dn}\,d\sigma-\iiint_S \psi_1\left(\frac{d\left(\alpha^2\,\frac{d\psi_2}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(\alpha^2\,\frac{d\psi_2}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(\alpha^2\,\frac{d\psi_2}{dz}\right)}{dz}\right)dS$$

$$=-\iint_\sigma \alpha^2\,\psi_2\,\frac{d\psi_1}{dn}\,d\sigma-\iiint_S \psi_2\left(\frac{d\left(\alpha^2\,\frac{d\psi_1}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(\alpha^2\,\frac{d\psi_1}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(\alpha^2\,\frac{d\psi_1}{dz}\right)}{dz}\right)dS,$$

in cui $d\psi/dn$ sta ad indicare la derivata della funzione ψ rispetto alla normale n al contorno σ diretta verso l'interno di S.

Poniamo

$$\frac{d\left(\alpha^2\,\frac{d\psi_1}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(\alpha^2\,\frac{d\psi_1}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(\alpha^2\,\frac{d\psi_1}{dz}\right)}{dz}=f_1$$

$$\frac{d\left(\alpha^2\,\frac{d\psi_2}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(\alpha^2\,\frac{d\psi_2}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(\alpha^2\,\frac{d\psi_2}{dz}\right)}{dz}=f_2,$$

avremo

$$(1)\qquad \iint_\sigma \alpha^2\,\psi_1\,\frac{d\psi_2}{dn}\,d\sigma-\iint_\sigma \alpha^2\,\psi_2\,\frac{d\psi_1}{dn}\,d\sigma+\iiint_S(\psi_1 f_2-\psi_2 f_1)\,dS=0,$$

(*) Nel titolo di questo lavoro al nome dell'A. segue la qualifica di « Allievo della R. Scuola Normale Superiore di Pisa ».

(1) *Handbuch der Theoretischen Physik* von W. THOMSON und P. G. TAIT. Bd. I. Th. I. s. 152.

da cui si deduce ponendo $\psi_2 = 1$,

$$\iint_\sigma \alpha^2 \frac{d\psi_1}{dn} d\sigma + \iiint_S f_1 dS = 0. \tag{2}$$

Supponiamo f_1 sempre finita e continua e ψ_1 pure sempre finita continua e monodroma insieme alle sue derivate, escluso il punto a interno ad S; suppongasi inoltre

$$\iint_{\sigma'} \alpha^2 \frac{d\psi_1}{dn} d\sigma' + \iiint_{S'} f_1 dS' = 1,$$

in cui σ' è una superficie qualunque che limita una porzione S' di S nel cui interno è situato a. A causa della (2) avremo evidentemente, se σ'' è un altro contorno il quale limita una porzione S'' di S che contiene nell'interno a,

$$\iint_{\sigma''} \alpha^2 \frac{d\psi_1}{dn} d\sigma'' + \iiint_{S''} f_1 dS'' = 1.$$

Sia s la superficie di una sfera situata tutta internamente ad S, avente per raggio r, per centro a; alla superficie di questa sfera $d\psi_1/dr$ conservi sempre lo stesso segno per tutti i valori della r sufficientemente piccoli. Supposta α sempre diversa da zero dovremo avere per tutti i valori di r, in valore assoluto,

$$r^2 \iint_\omega \frac{d\psi_1}{dr} d\omega < A, \tag{3}$$

in cui A è un numero finito e ω è la sfera di raggio 1. Risulterà quindi in valore assoluto

$$r^2 \iint_\omega \psi_1 d\omega < Br \tag{4}$$

essendo B un numero finito.

Ora si ha, a causa della (1)

$$\iint_\sigma \alpha^2 \psi_1 \frac{d\psi_2}{dn} d\sigma - \iint_\sigma \alpha^2 \psi_2 \frac{d\psi_1}{dn} d\sigma + \iiint_{S_1} (\psi_1 f_2 - \psi_2 f_1)) dS$$

$$= - \iint_s \alpha^2 \psi_1 \frac{d\psi_2}{dr} ds + \iint \alpha^2 \psi_2 \frac{d\psi_1}{dr} ds$$

essendo S_1 il campo S meno il campo rinchiuso dalla sfera s. Ne segue col fare impiccolire indefinitamente s, ponendo mente alle relazioni (3) e (4) e supponendo ψ_1 sempre dello stesso segno in vicinanza di a, che

$$\psi_2(a) = \iint_\sigma \alpha^2 \psi_1 \frac{d\psi_2}{dn} d\sigma - \iint_\sigma \alpha^2 \psi_2 \frac{d\psi_1}{dn} d\sigma + \iiint_S (\psi_1 f_2 - \psi_2 f_1) dS \tag{5}$$

in cui $\psi_2(a)$ indica il valore di ψ_2 nel punto a. Se la ψ_2 oltre alla singolarità in a gode della proprietà che

$$\iint\limits_{\sigma'''} \alpha^2 \left(\frac{d\psi_1}{dn}\right) d\sigma''' + \iiint\limits_{S'''} f_1\, dS''' = -1$$

in cui σ''' è il contorno di una porzione qualunque S''' di S nel cui interno è il punto b, e $d\psi_1/dn$ e ψ_1 al contorno di sfere sufficientemente prossime a b hanno sempre lo stesso segno, allora non ha più luogo la (5) ma si deve avere

$$\psi_2(a) - \psi_2(b) = \iint\limits_{\sigma} \alpha^2 \psi_1 \frac{d\psi_2}{dn} d\sigma - \iint\limits_{\sigma} \alpha^2 \psi_2 \frac{d\psi_1}{dn} d\sigma + \iiint\limits_{S} (\psi_1 f_2 - \psi_2 f_1)\, dS,$$

purchè si supponga la f_1 sempre finita e continua in tutto il campo S.

Moltiplichiamo ambo i membri per la costante M e sostituiamo a ψ_1 e a ψ_2, respettivamente $\psi_1 + P$ e $\psi_2 + P$, essendo P una costante, avremo:

$$M[\psi_2(a) - \psi_2(b)] = \iint\limits_{\sigma} \alpha^2 (\psi_1 + P)\left[M \frac{d\psi_2}{dn} + N(\psi_2 + P)\right] d\sigma$$

$$-\iint\limits_{\sigma} \alpha^2 (\psi_2 + P)\left[M \frac{d\psi_1}{dn} + N(\psi_1 + P)\right] d\sigma + \iiint\limits_{S} [(\psi_1 + P) f_2 - (\psi_2 + P) f_1]\, dS.$$

Suppongasi ora che la ψ_2 goda rispetto a due punti c e d delle stesse proprietà di cui gode la ψ_1 rispetto ai punti a e b. Allora la formula precedente varrà quando si sostituisca $\sigma + \sigma_c + \sigma_d$ a σ, e $S - S_c - S_d$ ad S, essendo σ_c e σ_d i contorni di campi semplicemente connessi S_c e S_d che racchiudono respettivamente i punti c e d.

Sia entro S

$$f_1 = f_2 = 0$$

e sopra σ

$$M \frac{d\psi_2}{dn} + N(\psi_2 + P) = M \frac{d\psi_1}{dn} + N(\psi_1 + P) = 0,$$

avremo

$$\psi_2(a) - \psi_2(b) = \iint\limits_{\sigma_c + \sigma_d} \alpha^2 \psi_1 \frac{d\psi_2}{dn} d\sigma - \iint\limits_{\sigma_c + \sigma_d} \alpha^2 \psi_2 \frac{d\psi_1}{dn} d\sigma.$$

Ma

$$\iint\limits_{\sigma_c} \alpha^2 \psi_1 \frac{d\psi_2}{dn} d\sigma - \iint\limits_{\sigma_c} \alpha^2 \psi_2 \frac{d\psi_1}{dn} d\sigma = \psi_1(c)$$

$$\iint\limits_{\sigma_d} \alpha^2 \psi_1 \frac{d\psi_2}{dn} d\sigma - \iint\limits_{\sigma_d} \alpha^2 \psi_2 \frac{d\psi_1}{dn} d\sigma = -\psi_1(d),$$

quindi sarà

$$\psi_2(a) - \psi_2(b) = \psi_1(c) - \psi_1(d).$$

Alla stessa conclusione si giunge supponendo ψ_1 e ψ_2 funzioni di due variabili definite in un campo a due dimensioni e aventi le stesse singolarità nei punti a, b, c, d.

La eguaglianza precedente ci dimostra:

1° Se in un corpo qualunque di cui la conducibilità al calore varia con continuità da punto a punto, si hanno in due punti A e B due sorgenti di calore tali che la quantità di calore che entra dall'una sia eguale a quella che esce dall'altra, e in due punti C e D si ha una certa differenza di temperatura t, poste le due sorgenti di calore in C e in D si avrà in A e in B la stessa differenza di temperatura.

2° Se in un conduttore a due o a tre dimensioni di cui la conducibilità varia con continuità da punto a punto si fa passare una corrente di intensità I da un punto A ad un punto B, e in due punti C e D si ha una differenza di potenziale, otterremo la stessa differenza fra i potenziali dei punti A e B quando si faccia entrare da C e escire da D la stessa corrente d'intensità I [(2)].

Come conseguenza si ha:

3° Se i punti C e D appartengono a una linea o a una superficie di livello quando la corrente va da A a B, A e B apparterranno pure ad una linea o ad una superficie di livello quando la corrente si fa entrare da C e escire da D.

La prova sperimentale di questa proprietà nel caso di conduttori a due dimensioni riesce di grandissima facilità non richiedendosi nel conduttore nè una forma determinata nè la omogeneità.

Pisa, 12 maggio 1882.

(2) Vedi *A Treatise on Electricity and Magnetism by* JAMES CLERK MAXWELL, vol. I, p. 335.