X.

SULL'EQUILIBRIO DELLE SUPERFICIE FLESSIBILI ED INESTENDIBILI

Nota I.

« Transunti Lincei » (*), ser. 3ª, vol. VIII, 1883–84, pp. 214–218.

1. Il problema dell'equilibrio di una superficie flessibile e inestendibile venne recentemente ripreso in esame dal ch. prof. BELTRAMI, il quale, partendo dal principio delle velocità virtuali e dalla condizione della inestendibilità espressa mediante la invariabilità dell'elemento lineare, pervenne in modo molto semplice ed elegante a stabilire le equazioni dell'equilibrio, e queste sono in pieno accordo con i risultati ai quali era giunto il sig. LECORNU per mezzo di considerazioni geometriche. Le formule in tal modo ottenute si prestano con grande facilità alla ricerca della distribuzione delle tensioni sugli elementi di una superficie flessibile e inestendibile in equilibrio. A questo importante studio vennero infatti impiegate dal ch. prof. BELTRAMI nella sua bella Memoria *Sull'equilibrio delle sup. fless. e inest.*

Un problema che presenta pure interesse è quello di determinare i criteri, onde riconoscere quando date forze applicate ai punti di una superficie si fanno equilibrio. Avendo in mira lo studio di questo problema ed essendomisi presentato il dubbio circa la possibile esistenza di casi di equilibrio non contemplati nelle formule fino ad ora note, ho cercato stabilire, per una via alquanto diversa da quelle tenute da altri fin qui, le condizioni per l'equilibrio delle superficie flessibili e inestendibili. È noto il vantaggio che si ha in ogni questione di Meccanica prendendo in considerazione gli elementi caratteristici dello spostamento infinitamente piccolo del sistema di cui si studia il moto o l'equilibrio, ossiano gli elementi necessari e sufficienti a determinare un tale spostamento. Ho perciò cominciato da tale ricerca che rientra nella cinematica di una superficie flessibile e inestendibile.

2. JELLET chiamando δx, δy, δz le componenti dello spostamento infinitamente piccolo di un punto di una superficie flessibile e inestendibile $z=z(xy)$, e ponendo $u=\delta x+p\delta z$, $v=\delta y+q\delta z$, $w=\delta z$, pervenne alle formule

$$\frac{\partial u}{\partial x}=rw \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=2sw \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=tw,$$

(*) Presentata dal Socio E. BETTI.

donde:

$$r\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-2s\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+t\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \tag{1}$$

$$\left(p=\frac{\partial z}{\partial x}\ ,\ q=\frac{\partial z}{\partial y}\ ,\ r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\ ,\ s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\ ,\ t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right).$$

Sono partito da questa equazione differenziale per lo studio propostomi. Questa equazione presenta molte proprietà e ad essa ho potuto applicare la ben nota analisi di GREEN impiegata per la integrazione della equazione $\Delta^2=0$.

Per lo studio della equazione (1) riesce vantaggioso introdurre una funzione che chiamo *funzione coniugata* alla w, della quale può con facilità determinarsi il significato rispetto alla deformazione della superficie. Definisco questa funzione coniugata $\tilde{\omega}$ ponendo:

$$\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x}=r\frac{\partial w}{\partial y}-s\frac{\partial w}{\partial x}\quad ,\quad -\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial y}=t\frac{\partial w}{\partial x}-s\frac{\partial w}{\partial y}.$$

In tal modo ottengo che $\tilde{\omega}$ e $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)$ non possono differire che per una costante. Il significato della funzione coniugata $\tilde{\omega}$ si ottiene colle seguenti considerazioni. Deformando la superficie, un elemento $d\sigma$ qualunque di essa si sposterà. Trascuriamo le deformazioni che subisce $d\sigma$ e vediamo come si sposta questo elemento supposto rigido. Partendo dalle formule che dànno le componenti dello spostamento di un punto d'un sistema rigido,

$$\begin{cases}\delta x=\delta a+\rho\,(y-b)-\chi\,(z-c),\\ \delta y=\delta b+\pi\,(z-c)-\rho\,(x-a),\\ \delta z=\delta c+\chi\,(x-a)-\pi\,(y-b),\end{cases}$$

in cui è noto il significato delle diverse quantità che vi compariscono, e considerando gli spostamenti dei punti dell'elemento di superficie $d\sigma$ supposto rigido, si trova:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\,(\delta x+p\delta z)}{\partial y}-\frac{\partial\,(\delta y+q\delta z)}{\partial x}\right]=\rho-p\pi-q\chi;$$

onde ricordando i valori di u e v, nel nostro caso si ha

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\rho-p\pi-q\chi,$$

quindi $\tilde{\omega}$ non differisce da $\rho-p\pi-q\chi$ che per una costante. Si ha dunque che *se decomponiamo la rotazione dell'elemento $d\sigma$ in due direzioni, una secondo l'asse z, l'altra nel piano tangente a σ, la funzione $\tilde{\omega}$ differisce dalla prima soltanto per una costante arbitraria.*

Considerando $\tilde{\omega}$ come funzione di p e q si ottiene:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial q}\quad ,\quad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial p},$$

le quali sono equivalenti alla equazione (1). È da notare l'analogia che passa fra queste equazioni e quelle che si presentano nella teoria delle funzioni di variabili complesse. Eseguendo la trasformazione di LEGENDRE $z_1 = z - px - qy$, e ponendo:

$$r_1 = \frac{\partial^2 z_1}{\partial p^2} \quad , \quad s_1 = \frac{\partial^2 z_1}{\partial p \, \partial q} \quad , \quad t_1 = \frac{\partial^2 z_1}{\partial q^2},$$

si trova:

$$(1') \qquad t_1 \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial p^2} - 2 s_1 \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial p \, \partial q} + r_1 \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial q^2} = 0.$$

Se w e w_1 sono due integrali della (1), $\tilde{\omega}$ e $\tilde{\omega}_1$ le funzioni coniugate, esprimendo $\tilde{\omega}$ e $\tilde{\omega}_1$ per w e w_1, si trova che $\tilde{\omega} dw_1 - \tilde{\omega}_1 dw$ è un differenziale esatto dZ e ponendo

$$R = \frac{\partial^2 Z}{\partial w^2} \quad , \quad S = \frac{\partial^2 Z}{\partial w \, \partial w_1} \quad , \quad T = \frac{\partial^2 Z}{\partial w_1^2},$$

risulta:

$$RT - S^2 = rt - s^2.$$

Se W e Π sono due funzioni coniugate, abbiamo

$$\frac{\partial W}{\partial x} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q} \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial \Pi}{\partial p},$$

onde considerandole rispettivamente come funzioni di w e w_1 e di $\tilde{\omega}$ e $\tilde{\omega}_1$, si trova

$$\frac{\partial W}{\partial w} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{\omega}_1} \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial w_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{\omega}}$$

e per conseguenza

$$(2) \qquad R \frac{\partial^2 W}{\partial w_1^2} - 2 S \frac{\partial^2 W}{\partial w \, \partial w_1} + T \frac{\partial^2 W}{\partial w_1^2} = 0,$$

quindi gli integrali delle equazioni (1) e (2) si deducono gli uni dagli altri.

Se W e Π sono funzioni coniugate, come pure, w e $\tilde{\omega}$, e se esprimiamo W e Π in funzione di w e $\tilde{\omega}$, risulta

$$\frac{\partial W}{\partial w} = \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{\omega}} \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial \tilde{\omega}} = - \frac{1}{rt - s^2} \frac{\partial \Pi}{\partial w},$$

onde:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial w^2} + \frac{\partial \left[(rt - s^2) \dfrac{\partial W}{\partial \tilde{\omega}} \right]}{\partial \tilde{\omega}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \tilde{\omega}^2} + \frac{\partial \left[\dfrac{1}{rt - s^2} \dfrac{\partial \Pi}{\partial w} \right]}{\partial w} = 0.$$

Questa forma sotto la quale possono porsi la (1) e la (1') è analoga a quella delle equazioni differenziali che compariscono nella teoria del calore, ed è la più appropriata e vantaggiosa per la integrazione. Così esse si integrano ogni qual volta è $rt - s^2 = \text{cost.}$, $rt - s^2 = ap + bq + c$ in cui a, b, c sono costanti, ecc. È poi da prendere in particolare considerazione il caso in cui è $rt - s^2 = \varphi(w) \psi(\tilde{\omega})$.

La equazione (1) si integra anche con facilità nel caso in cui la superficie z è di secondo grado. Sono giunto a questo risultato partendo dall'integrale della equazione differenziale delle superficie d'area minima mediante una trasformazione di LEGENDRE (1). La stessa equazione si integra nel caso in cui la superficie z è sviluppabile.

Veniamo, ora allo studio della equazione differenziale (1) o della più generale

$$r \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 s \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(xy),$$

col metodo di GREEN. Chiamo σ la proiezione della superficie sul piano xy (suppongo che questa proiezione copra una sola volta il piano xy), c quella del contorno, n la normale a c; pongo

$$\left\{ \begin{aligned} & r \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 s \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \underset{z}{\Delta}^2 w ; \\ & r \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w_1}{\partial y} - s \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + t \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial x} = \underset{z}{\Delta} (w , w_1) . \end{aligned} \right.$$

Nella ipotesi che le funzioni w_1 e w_2 siano finite, continue e monodrome si hanno le formule:

$$\iint_\sigma w_1 \underset{z}{\Delta}^2 w_2 \, dx \, dy = - \int_c w_1 \left[\left(r \frac{\partial w_2}{\partial y} - s \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial n} + \left(t \frac{\partial w_2}{\partial x} - s \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) \frac{\partial x}{\partial n} \right] dc$$

$$- \iint_\sigma \underset{z}{\Delta} (w_1 , w_2) \, dx \, dy = - \int_c w_1 \left(\frac{\partial w_2}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial c} - \frac{\partial w_2}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial c} \right) dc - \iint_\sigma \underset{z}{\Delta} (w_1 , w_2) \, dx \, dy ;$$

$$\iint_\sigma (w_1 \underset{z}{\Delta}^2 w_2 - w_2 \underset{z}{\Delta}^2 w_1) \, dx \, dy = - \int_c \left\{ w_1 \left[\left(r \frac{\partial w_2}{\partial y} - s \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial n} + \left(t \frac{\partial w_2}{\partial x} - s \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) \frac{\partial x}{\partial n} \right] \right.$$

$$\left. - w_2 \left[\left(r \frac{\partial w_1}{\partial y} - s \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial n} + \left(t \frac{\partial w_1}{\partial x} - s \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \frac{\partial x}{\partial n} \right] \right\} dc ;$$

$$\iint_\sigma w_1 \underset{z}{\Delta}^2 w_1 \, dx \, dy = - \int_c w_1 \left[\left(r \frac{\partial w_1}{\partial y} - s \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial n} + \left(t \frac{\partial w_1}{\partial x} - s \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \frac{dx}{dn} \right] dc$$

$$- \iint_\sigma \underset{z}{\Delta} (w_1 , w_1) \, dx \, dy = - \int_c w_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial c} - \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial c} \right) dc - \iint_\sigma \underset{z}{\Delta} (w_1 , w_1) \, dx \, dy .$$

Se $\underset{z}{\Delta}^2 w_2 = \underset{z}{\Delta}^2 w_1 = 0$ e $\tilde{\omega}_1$ e $\tilde{\omega}_2$ sono le funzioni coniugate di $\tilde{\omega}_1$ e $\tilde{\omega}_2$, si ottiene:

$$\left\{ \begin{aligned} & \iint_\sigma \underset{z}{\Delta} (w_1 , w_2) \, dx \, dy = - \int_c w_1 \frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial c} dc = - \int_c w_2 \frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial c} dc \\ & \iint_\sigma \underset{z}{\Delta} (w_1 , w_1) \, dx \, dy = - \int_c w_1 \frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial c} dc . \end{aligned} \right.$$

Da queste formule si deducono immediatamente i teoremi: *Se due funzioni* w_1 e w_2, *finite continue e monodrome insieme alle loro derivate, che soddi-*

(1) Sono dolente che non mi sia nota una Memoria del sig. MOUTARD relativa alla teoria delle equazioni differenziali a derivate parziali, i cui risultati sono stati recentemente applicati dal sig. DARBOUX alla ricerca degli spostamenti di una superficie flessibile e inestendibile.

sfano alla equazione differenziale $\Delta_z^2 w = f(xy)$, (essendo la superficie z a curvatura positiva o sviluppabile) *hanno i medesimi valori lungo una linea chiusa della superficie, sono eguali in tutti i punti della superficie interni alla linea.*

Se le funzioni coniugate alle w_1 e w_2 *hanno gli stessi valori lungo una linea chiusa della superficie* z, w_1 *e* w_2 *non possono differire che per una quantità costante.*

Se fra tutte le funzioni monodrome finite continue insieme alle derivate e che lungo i punti del contorno di una superficie a curvatura positiva $z(xy)$ *hanno dati valori, ve ne è una per cui*

$$\int_\sigma [\Delta_z(w_1, w_1) + 2 w_1 f(xy)]\, dx\, dy \tag{3}$$

è un minimo, questa soddisfa l'equazione differenziale $\Delta_z^2 w_1 = f(xy)$ *e reciprocamente, se* w_1 *soddisfa l'equazione* $\Delta_z^2 w_1 = f(xy)$ *essa è tale che*

$$\int_\sigma [\Delta_z(w_1, w_1) + 2 w_1 f(xy)]\, dx\, dy$$

(se questa quantità è finita) *risulta un minimo rispetto alle funzioni che hanno al contorno gli stessi valori di* w_1. Questo teorema è analogo al noto principio di RIEMANN–DIRICHLET.

Da questi teoremi si deduce che una funzione w_1 che soddisfa l'equazione

$$\Delta_z^2 w_1 = f(xy)$$

è definita quando ne sono noti i valori al contorno, se la superficie è a curvatura positiva, e questi valori potranno scegliersi ad arbitrio purché siano tali che non debba escludersi la possibilità della esistenza di un minimo dell'integrale (3).

La funzione w che soddisfa l'equazione $\Delta_z^2 w = 0$, sarà pure definita all'infuori di una costante additiva quando saranno noti al contorno i valori della funzione coniugata $\tilde{\omega}$, e anche tali valori con una limitazione analoga alla precedente potranno scegliersi ad arbitrio. La determinazione della funzione w, quando sono dati i valori di w o di $\tilde{\omega}$ al contorno, ci viene fornita immediatamente per mezzo delle formule scritte precedentemente. A tal fine, basterà determinare un integrale particolare della equazione differenziale $\Delta_z^2 w = 0$ il quale divenga infinito in un punto della superficie dello stesso ordine del logaritmo delle distanze a questo punto, ed una funzione analoga alla nota funzione di GREEN che comparisce nella teoria delle funzioni potenziali. – Quando al contorno siano dati i valori di w e di $\frac{dw}{dy}\frac{\partial p}{\partial c} - \frac{dw}{dx}\frac{\partial q}{\partial c}$ per riconoscere se è possibile costruire una funzione che corrisponda ai dati valori basta la sola conoscenza dell'integrale particolare che diviene infinito logaritmicamente. – Non insisto su questo punto, vista l'analogia che presenta questo problema con quello della teoria della funzione potenziale in cui si tratta di conoscere se è possibile costruire una funzione potenziale che prenda dati valori al contorno di un certo campo e la cui derivata rispetto alla normale al contorno assuma pure dati valori.