XIII.

INTEGRAZIONE DI ALCUNE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE

« Rend. Lincei » (*), ser. 4ª, vol. I, 1885, pp. 303–306.

Abbiasi una equazione differenziale della forma

$$\alpha) \qquad rt - s^2 = f(p, q),$$

in cui

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \quad , \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} \quad , \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad , \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad , \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} .$$

Cerchiamo se fra le superficie infinitamente prossime alla superficie $z = z(xy)$ ed applicabili sopra essa, ve ne sono di quelle per cui la funzione coniugata $\tilde{\omega}$ dello spostamento $w = \delta z$ parallelamente all'asse z, può rappresentarsi mediante una funzione $\tilde{\omega}(x, y, p, q)$ [1]. La $\tilde{\omega}$ dovrà soddisfare l'equazione:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial p}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial q}\right) = 0$$

in cui nell'eseguire le derivate $\partial\tilde{\omega}/\partial p$ e $\partial\tilde{\omega}/\partial q$, $\tilde{\omega}$ va considerata come funzione di p e di q: e nell'eseguire poi le derivate rispetto a x e a y le $\partial\tilde{\omega}/\partial p$ e $\partial\tilde{\omega}/\partial q$ vanno considerate come funzioni di x e y.

Se $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(x, y, p, q)$, avremo, eseguendo convenientemente le derivazioni:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial p}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial q}\right) = 2\left(\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial p \partial x} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial q \partial y}\right) - \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)}{f} - \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)}{f}$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial p^2} + \frac{1}{f}\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial y^2}\right) r + \left(\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial q^2} + \frac{1}{f}\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial x^2}\right) t + \left(\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial p \partial q} - \frac{1}{f}\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial x \partial y}\right) 2s ,$$

onde porremo:

$$(1) \qquad 2\left(\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial p \partial x} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial q \partial y}\right) - \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)}{f} - \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)}{f} = 0 ,$$

(*) Presentata dal Socio U. DINI.

(1) Vedi una mia Nota: *Sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili* [in questo volume: X, pp. 180–187].

www.rcin.org.pl

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial p^2} + \dfrac{1}{f}\dfrac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial y^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial q^2} + \dfrac{1}{f}\dfrac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial x^2} = 0 \end{cases}$$

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial p\, \partial q} - \frac{1}{f}\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial x\, \partial y} = 0\,.$$

È facile trasformare queste condizioni a cui deve soddisfare $\tilde{\omega}$ nelle seguenti altre.

Pongasi:

$$\frac{\partial f}{\partial q}\, x - \frac{\partial f}{\partial p}\, y = \Omega\,,$$

$$(4)\qquad \tilde{\omega} = \varphi(\Omega\,, p\,, q) + \frac{af}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial p}\right)}\, x + \frac{bf}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial q}\right)}\, y\,,$$

in cui a e b sono due costanti; φ dovrà soddisfare alle condizioni (2), (3) e alla seguente:

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial x\, \partial p} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial y\, \partial q} = \frac{a+b}{2}.$$

Supponiamo che sia possibile determinare la $\tilde{\omega}$ in modo che siano soddisfatte le condizioni volute; osserviamo che essa rappresenta la funzione coniugata dello spostamento della superficie z parallelamente all'asse z per una deformazione infinitesima che la conserva applicabile sopra sé stessa, e rappresenta un tale spostamento per le superficie che soddisfano la equazione (α) o una più generale di quella.

Ciò premesso fra gli spostamenti possibili di tutte le superficie, vi sono quelli ai quali corrisponde per la w il valore $\mathrm{A}y - \mathrm{B}x + \mathrm{C}_1$ ove A, B, C_1 sono costanti (cioè uno spostamento senza deformazione) e per cui si ha $\tilde{\omega} = \mathrm{A}p + \mathrm{B}q + \mathrm{C}$. Quindi, ponendo

$$\tilde{\omega} = \mathrm{A}p + \mathrm{B}q + \mathrm{C}$$

ed integrando questa equazione a derivate parziali del primo ordine, troveremo degli integrali particolari della equazione (α) o di una più generale di essa.

Supponiamo che si abbia $a + b = 0$. Avremo

$$\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial p\, \partial x} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial q\, \partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q} = 0\,,$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial p^2} + \frac{1}{f}\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial q^2} + \frac{1}{f}\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial x^2} = 0\,,$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial p\, \partial q} - \frac{1}{f}\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial x\, \partial y} = 0\,.$$

www.rcin.org.pl

Quindi sono verificate le condizioni affinché esista una funzione $w(x, y, p, q)$ tale che

$$(\beta) \qquad \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial p} = \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial q} = -\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$(\gamma) \qquad \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} = f \frac{\partial w}{\partial q}, \qquad \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} = -f \frac{\partial w}{\partial p};$$

da cui si deduce, considerando $\tilde{\omega}$ come funzione di p e q e w di x e y,

$$\left(\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial p}\right) = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right), \qquad \left(\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial q}\right) = -\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

cioè w e $\tilde{\omega}$ sono funzioni coniugate. In questo caso gli integrali richiesti saranno integrali comuni delle due equazioni differenziali

$$\tilde{\omega} = \mathrm{A}p + \mathrm{B}q + \mathrm{C} \quad , \quad w = \mathrm{A}y - \mathrm{B}x + \mathrm{C}_1,$$

i quali soddisfano, a cagione delle (β) e (γ), alla equazione alternata di POISSON:

$$[\tilde{\omega}, w] = 0.$$

Dunque la determinazione dell'integrale richiesto è ridotta a semplici quadrature. Come esempio, applicheremo questo risultato per dimostrare che l'equazione differenziale

$$rt - s^2 = f(gp^2 + hq^2 + kpq + mp + nq),$$

in cui g, h, k, m, n sono costanti, ammette sempre una classe di integrali particolari con 4 costanti arbitrarie i quali si possono determinare, qualunque sia f, mediante sole quadrature. Osserviamo che in questo caso si può prendere

$$\Omega = (2hq + kp + n)x - (2gp + kq + m)y$$

e dalla (4) in questo caso si deduce

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \Omega^2} = 0,$$

onde

$$\tilde{\omega} = \lambda(p, q)\{(2hq + kp + n)x - (2gp + kq + m)y\}$$

$$+ \frac{af}{f'(2gp + kq + m)}x + \frac{bf}{f'(2hq + kp + n)}y$$

e quindi:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial x \partial y} = 0.$$

www.rcin.org.pl

A cagione delle relazioni (2) e (3) abbiamo dunque:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial q^2} = \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial p \, \partial q} = 0,$$

ossia $\tilde{\omega}$ è di primo grado in p e q, cioè:

$$\tilde{\omega} = (\mathrm{A}p + \mathrm{B}q + \mathrm{C})x + (\mathrm{A}_1 p + \mathrm{B}_1 q + \mathrm{C}_1)y + \mathrm{A}_2 p + \mathrm{B}_2 q + \mathrm{C}_2.$$

Applicando la (4) si deduce:

$$a + b = 0,$$

$$\tilde{\omega} = \mathrm{M}\{(kp + 2hq + n)x - (kq + 2gp + m)y\}$$

trascurando la parte indipendente da x e y ed indicando con M una costante. Essendo $a + b = 0$, potremo determinare w.

Posto:

$$\mathrm{F}(\alpha) = \int \frac{d\alpha}{f(\alpha)},$$

avremo:

$$w = \mathrm{M}\{-kx^2 - gy^2 + kxy + \mathrm{F}(gp^2 + hq^2 + kpq + mp + nq)\}.$$

Esiste dunque una classe di integrali particolari della equazione data, la quale è un integrale comune delle due equazioni differenziali simultanee:

$$(kp + 2hq + n)x - (kq + 2gp + m)y = \mathrm{A}p + \mathrm{B}q + \mathrm{C},$$

$$\mathrm{F}(gp^2 + hq^2 + kpq + mp + nq) - hx^2 - gy^2 + kxy = \mathrm{A}y - \mathrm{B}x + \mathrm{C}_1,$$

i quali formano un sistema Jacobiano.

Risolvendo queste equazioni rispetto a p e a q, si avrà:

$$p = \theta(xy) \quad , \quad q = \theta_1(xy)$$

e quindi:

$$z = \int (\theta \, dx + \theta_1 \, dy).$$

www.rcin.org.pl